



**Ciências  
ULisboa**

Faculdade  
de Ciências  
da Universidade  
de Lisboa

---

RELATÓRIO DO TRABALHO EXPERIMENTAL

## A CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA

FÍSICA EXPERIMENTAL I – 2019

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Grupo: Susana Marta, n.12345  
António Maria, n.23456  
Joaquina R. Migueis, n.34567

Turma: PL-23– grupo 1

Aula de: 26 de Fevereiro

Docente: Rui J. Agostinho

24 de Maio, 2019

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Objetivos do Trabalho e Aspetos Teóricos</b>	<b>3</b>
1.1	A desaceleração da rotação da barra por fricção aerodinâmica	3
1.1.1	Equações do movimento e a determinação experimental do Momento de Inércia Total	4
1.2	Aspetos da oscilação harmónica amortecida com um termo de atrito constante	5
<b>2</b>	<b>Procedimentos Experimentais</b>	<b>5</b>
2.1	Medições e Dados Obtidos	6
2.1.1	Medição de oscilações harmónicas com o disco de Pohl	6
2.1.2	A Medição da Expansão do Universo	6
2.1.3	Dados do período e velocidade máxima do pêndulo	7
2.1.4	Dados da Conservação da Energia Mecânica	7
<b>3</b>	<b>Análise de Resultados</b>	<b>8</b>
3.1	Resultados do Oscilador Harmónico Amortecido	9
3.2	Resultados da aceleração $g$ e conservação de energia no pêndulo	10
3.3	Resultados da Conservação da Energia Mecânica	10
<b>4</b>	<b>Código dos Programas desenvolvidos e Utilizados</b>	<b>12</b>
4.1	O cálculo do ano Besseliano	13
<b>5</b>	<b>Discussão dos Resultados e Conclusões</b>	<b>13</b>

## Lista de Programas

P4-1	Rotina em Python do Euro-Milhões	12
P4.1-1	O Greenwich Mean Sideral Time às 0h UT, em Mathematica	13

### Resumo

Estudou-se o valor da aceleração gravítica  $g$  no laboratório C1.4.31 da FCUL. Para tal utilizou-se a queda livre de uma pessoa. Após fazerem-se alguns lançamentos, 950 vezes no total, para além de deduzir que  $g_{C1} = 9,801 \pm 0,004 \text{ m/s}^2$ , demonstra-se que cair não faz bem à saúde. Dos dados obtidos também se deduz, com um intervalo de confiança de 99,5%, que a gravidade dos hematomas é proporcional à altura da queda, ou seja, à energia cinética de embate:  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ . Por isso, devido à conservação da energia total, conclui-se que é melhor cair na Lua onde  $g_L \approx g_{\oplus}/6$ .

**Nota Explicativa:** Este texto é exemplo da estrutura de um Relatório de Física Experimental. Esta estrutura deve ser usada mesmo se decidir escrever o seu relatório com outra aplicação. Pode alterar os nomes das Secções aqui sugeridas, mas a estrutura deve ser mantida:

1. Resumo
2. Objetivos do Trabalho
3. Procedimentos Experimentais
  - 3.1. Medições e Dados Obtidos
4. Análise de Resultados
5. Discussão e Conclusões
6. Referências

Deve também incluir as Subsecções e Subsubsecções que achar necessárias para aumentar a legibilidade e compreensão do seu relatório.

# 1 Objetivos do Trabalho e Aspetos Teóricos

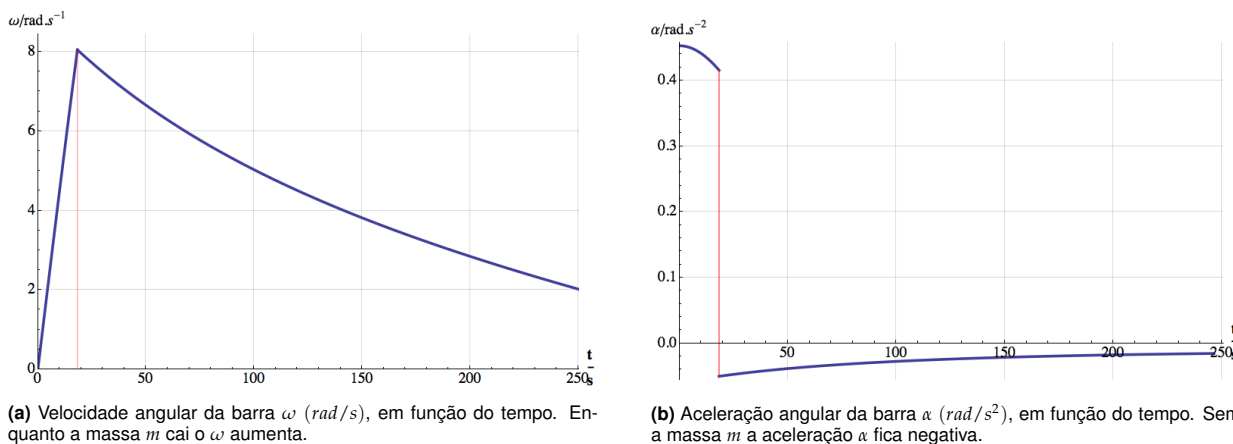
**Nota Explicativa:** Apresente uma descrição sucinta dos objetivos científicos do trabalho: que leis físicas se pretendem estudar e que métodos se pretendem usar e/ou estudar se for esse o caso. Devem realçar-se alguns dos aspetos teóricos que sejam mais relevantes para o relatório. Note-se que em geral estão todos descritos no protocolo e, por isso, reduza às leis e equações que serão usadas na análise de resultados, mas deve ajuizar da sua extensão.

Estudar a importância do momento de inércia na velocidade de rotação de um corpo, em torno de um eixo próprio: a sua dependência na distribuição de massa em torno do centro de rotação, assim como a dependência na posição de Júpiter no céu à 5ª feira.

O objetivo principal é provar que o disco de Pohl tem uma velocidade de rotação *dependente da cor* em que está pintado. Para isso é necessário estudar o seu comportamento com a capacidade de visão  $V(p)$  dos intervenientes:  $V(p) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \hbar \sin(k_B \bar{T}_p(r, \phi)) e^{-\alpha \cdot r} d\phi dr$ , onde  $\bar{T}_p$  é a temperatura média dum pessoa em queda livre à distância  $r$  de Plutão, e as constantes  $\hbar$  e  $k_B$  são as habituais.

## 1.1 A desaceleração da rotação da barra por fricção aerodinâmica

Por ser um problema complexo, é necessário considerar as forças do atrito de fricção mecânica  $F_f$  e do atrito (arrasto) aerodinâmico  $F_{ar}$  que é proporcional à velocidade linear  $v(r)$  do ponto na barra à distância  $r$  do centro, assim como a forma geométrica da barra. Calcula-se pelas equações do movimento que a velocidade e a aceleração angulares do sistema variam da seguinte forma:



**Figura 1.** Na parte positiva a aceleração da massa em queda é superior à do atrito, e depois sobra apenas a aceleração dos atritos de fricção e aerodinâmico (negativos). São valores calculados para as massas cilíndricas no extremo da barra.

A aceleração angular  $\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}$  a que o sistema fica sujeito não é uniforme e varia conforme apresentado na figura 1b. A curvatura variável no comportamento dos dois parâmetros  $\omega(t)$  (velocidade angular) e  $\alpha(t)$ , provém da força de fricção aerodinâmica  $F_{ar}$  que aumenta com a velocidade linear (e a secção reta) de embate no ar,  $F_{ar} \propto v^2$ , que aumenta ao longo da barra pois  $v = \omega r$ , com  $\omega = const$ .

O extremo da barra sofre maior desaceleração que a zona central. O binário desta força, aplicada na posição  $r$  ao longo da barra, é  $d\vec{M}_{arb}(r) = \vec{r} \times C_{ar} \rho_{ar} dA_b v^2 \vec{u}_v$ , em que  $dA_b = D_b dr$  é a área de embate no ar dessa secção,  $D_b$  o diâmetro da espessura da barra e  $\rho_{ar}$  a densidade mássica do ar.  $C_{ar} \approx 0,5$  é o coeficiente de atrito aerodinâmico que depende da forma do objeto, um cilindro finito neste caso. A perda de momento angular na rotação da barra de semi-comprimento  $l_b$  é proporcional ao integral:  $\int_0^{l_b} d\vec{M}(r) = I_{tot} \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_{tot} \cdot \vec{\alpha}_b$ , em que  $\vec{\alpha}_b$  é a aceleração angular do sistema devida à travagem aerodinâmica na barra. O integral resulta em  $M_{arb} = \frac{1}{2} C_{ar} \rho_{ar} D_b l_b \omega^2$ , para a barra completa.

Considerando que existe uma massa cilíndrica grande  $M$  de diâmetro  $D_M$ , comprimento  $l_M$  (que tapa a barra),

com a 1ª face à distância  $x_M$  do centro, o integral anterior na barra completa, dá

$$M_{arb} = \frac{1}{2} C_{ar} \rho_{ar} D_b \left( l_b^4 - (x_M + l_M)^4 + x_M^4 \right) \omega^2 = K_{arb} \times \omega^2. \quad (1a)$$

$$M_{arM} = \frac{1}{2} C_{ar} \rho_{ar} D_M \left( (x_M + l_M)^4 - x_M^4 \right) \omega^2 = K_{arM} \times \omega^2 \quad (1b)$$

sendo a equação (1b) o binário da força aerodinâmica aplicada nas duas massas  $M$ .

Nos casos estudados e com as massas  $M$  perto do centro,  $x_M = 10,2$  cm, obtém-se  $K_{arM} = 18,3$  g.cm<sup>2</sup> e  $K_{arb} = 144,5$  g.cm<sup>2</sup>: a barra é dominante. A situação inverte-se para  $x_M = 28,2$  cm:  $K_{arM} = 379,5$  g.cm<sup>2</sup> e  $K_{arb} = 93,8$  g.cm<sup>2</sup>  $\Rightarrow$  o binário da força aerodinâmica aplicada nas duas massas  $M$  é dominante.

### 1.1.1 Equações do movimento e a determinação experimental do Momento de Inércia Total

A integração da equação diferencial do movimento tem duas soluções diferentes: enquanto cai o prato com a massa  $m \Rightarrow$  aceleração inicial, a velocidade  $\omega_1(t)$  aumenta; após o instante  $t_q$  em que a massa  $m$  se desprende, o atrito faz a velocidade  $\omega_2(t)$  diminuir até zero. Nas equações  $I_{tot}$  é o momento de inércia total do sistema,  $K_{ar} = K_{arb} + K_{arM}$ . No instante  $t_q$  a velocidade angular é  $\omega_1(t_q) = \omega_2(t_q) = \omega_q$ . O atrito aerodinâmico (eqs. 1) impõe uma velocidade limite  $\omega_{1max}$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

$$\text{Sendo } \omega_{1max} = \sqrt{\frac{r(mg - F_{at})}{K_{ar}}} \quad (2a)$$

$$\text{então } \omega_1(t) = \omega_{1max} \tanh \left( \frac{K_{ar}}{I_{tot} + mr^2} \omega_{1max} t \right) \quad (2b)$$

$$\text{Considerando } W_2 = \sqrt{\frac{r F_{at}}{K_{ar}}} \quad (2c)$$

$$\text{então } \omega_2(t) = -W_2 \tan \left( \frac{K_{ar}}{I_{tot}} W_2 (t - t_q) - \tan^{-1} \left( \frac{\omega_q}{W_2} \right) \right) \quad (2d)$$

$$\text{Sendo } \alpha_{1max} = \sqrt{\frac{r(mg - F_{at})}{I_{tot} + mr^2}} \quad (3a)$$

$$\text{então } \alpha_1(t) = \alpha_{1max} \operatorname{sech}^2 \left( \omega_{1max} \frac{K_{ar}}{I_{tot} + mr^2} t \right) \quad (3b)$$

$$\text{Como } \alpha_{at} = \frac{r F_{at}}{I_{tot}}, \quad (3c)$$

$$\alpha_2(t) = -\alpha_{at} \sec^2 \left( \frac{K_{ar}}{I_{tot}} W_2 (t - t_q) - \tan^{-1} \left( \frac{\omega_q}{W_2} \right) \right) \quad (3d)$$

A aceleração  $\alpha_1(t)$  começa com o valor máximo  $\alpha_{1max}$  e depois diminui. Após  $t = t_q$  ( $m$  desprende-se) passa a  $\alpha_2(t) < 0$ . A aceleração  $\alpha_{at}$  é devida à força de atrito  $F_{at}$  no eixo de raio  $r$  e  $\alpha_{at} = \alpha_2(t \rightarrow \infty)$ .

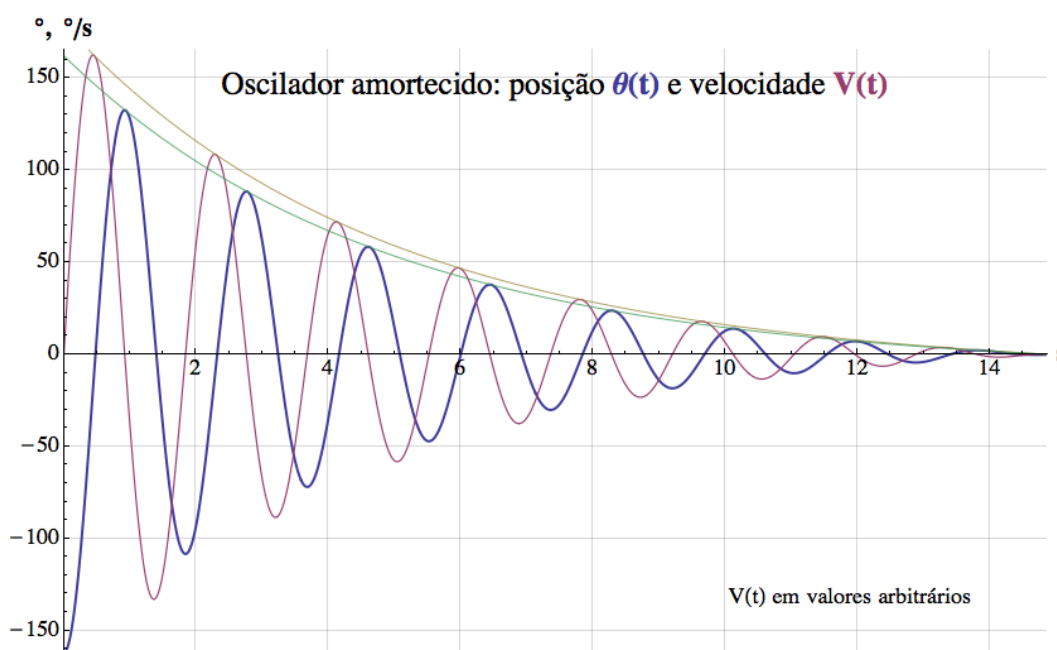
O melhor procedimento para determinar o momento de inércia total  $I_{tot}$  por via da medição da rotação, é o seguinte: nas curvas  $\omega_1(t)$  e  $\omega_2(t)$  escolha-se um valor qualquer de referência  $\omega_{ref}$ . Nos instantes  $t_1$  e  $t_2$  que correspondem a  $\omega_1(t_1) = \omega_2(t_2) = \omega_{ref}$ , calcule-se (numericamente a partir dos dados) o valor das acelerações angulares  $\alpha_1(t_1)$  e  $\alpha_2(t_2)$ . Demonstra-se pelas equações (2) e (3) que o momento de inércia total do sistema é sempre (exatamente) dado por:

$$I_{tot} = m r \frac{g - r \alpha_1(t_1)}{\alpha_1(t_1) - \alpha_2(t_2)} \tag{4}$$

### 1.2 Aspectos da oscilação harmónica amortecida com um termo de atrito constante

Integrando a equação (6) (pág. 9) obtém-se a posição angular  $\theta(t)$  do disco no instante  $t$ : ( $W = \frac{2\pi}{T}$ )

$$\theta(t) \approx \left( \frac{v_0 e^{\lambda t}}{\sqrt{W^2 + \lambda^2}} + \frac{a_f}{W^2} \sqrt{1 + (tW)^2} \right) \sin(tW - \frac{\pi}{2}) \tag{5}$$



**Figura 2.** Posição angular  $\theta(t)$  e velocidade linear  $V(t)$  de rotação do disco de Pohl, para as condições de  $i=0,40A$  e amplitude inicial 19. Nota: a velocidade está com valores reduzidos para ficar na mesma escala.

Para determinar a constante de amortecimento  $\lambda$  deve medir-se o tempo  $t_f$  que o oscilador demora a parar: introduzindo na equação (5)  $\theta(t_f) = 0$  e considerando que  $W \gg \lambda$ , deduz-se uma relação que permite estimar  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{1}{t_f} \ln \left( -\frac{a_f}{v_0} \frac{\sqrt{W^2 + \lambda^2}}{W^2} \sqrt{1 + (t_f W)^2} \right) \Rightarrow \lambda \approx \frac{1}{t_f} \ln \left( \frac{-a_f}{v_0 W} \sqrt{1 + (t_f W)^2} \right)$$

A sua utilização depende do conhecimento à priori do valor da desaceleração por fricção  $a_f$ , característica de cada disco de Pohl, pois tanto  $W$  como  $v_0$  são mensuráveis em cada experiência.

## 2 Procedimentos Experimentais

**Nota Explicativa:** Como o detalhe dos procedimentos está no protocolo, deve apenas incluir uma *breve* descrição dos mesmos. Porém, deverá elaborar mais as situações em que os procedimentos efetuados não seguiram o protocolo, ou se há razões para explicitar melhor o que realizou.

Para estudar o momento de inércia num movimento circular, foi usada uma barra em rotação, com duas massas maiores  $M$  à mesma distância do centro de rotação. O sistema foi colocado em movimento com outra massa  $m$  que o puxava enquanto caía. Assim, procedeu-se da seguinte maneira:

- ✓ mediu-se o atrito de fricção do sistema  $F_f$ ,
- ✓ mediu-se o atrito aerodinâmico  $F_{aero}$  que é proporcional ao quadrado da velocidade linear  $v(r)$  de um ponto da barra à distância  $r$  do centro,
- ✓ mediu-se a forma da barra.

## 2.1 Medições e Dados Obtidos

**Nota Explicativa:** O ideal será incluir todos os dados experimentais obtidos mas isso é muitas vezes impraticável, e noutras vezes nem é desejável. Além disso demora-se algum tempo a copiar as tabelas de todos os dados obtidos para o texto, devido à sua quantidade. Dependendo da situação, devem ou podem ser apenas incluídos:

- Um resumo com os mais significativos.
- Agrafar fotocópias do caderno, como anexo.
- Agrafar a lista impressa dos mesmos, como anexo.
- Colocá-los online para se poderem consultar, incluindo o endereço [\[1\]](#) nas referências.

### 2.1.1 Medição de oscilações harmónicas com o disco de Pohl

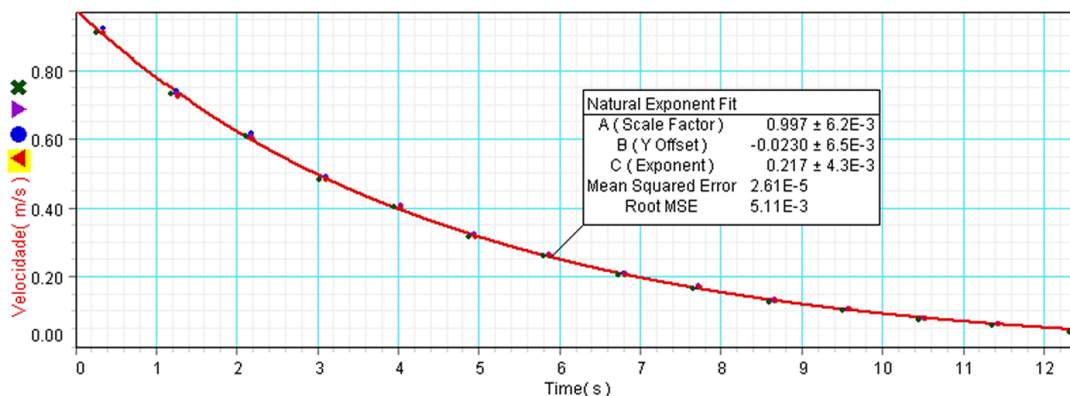


Figura 3. Velocidade linear máxima de rotação do disco de Pohl (m/s), em função do tempo.

Lançando o disco de Pohl com amortecimento (corrente no eletroímã  $i = 0,40$  A), observa-se a velocidade máxima a diminuir em cada oscilação, ou seja, desaceleração forçada descrita por uma função exponencial, como se constata na figura 3.

### 2.1.2 A Medição da Expansão do Universo

Os nossos dados são os melhores do mundo. Apesar de haverem *ligeiros* problemas nas medições, os resultados obtidos são tão bons que serão apresentados numa conferência internacional sobre Cosmologia Experimental. Encontram-se na tabela 1 os resultados das medições efetuadas:

$t$ (s)	$\omega$ (rad/s)	$\Omega$	$\hbar$ (J.s)	$ \vec{v}' _{max}$ (m/s)	$a$ (m/s <sup>2</sup> )
0,1	$17,8 \times 10^1$	0,30	0,100	17,8	0,030
0,4	$34,1 \times 10^2$	0,31	0,410	34,1	0,031
0,5	$56,2 \times 10^2$	0,29	0,578	56,2	0,029

**Tabela 1.** Medições da rotação  $\omega$  do universo e da sua densidade energética relativa  $\Omega$ , obtidas com o telescópio de 20 metros de diâmetro no laboratório C1.4.31 da FCUL.

### 2.1.3 Dados do período e velocidade máxima do pêndulo

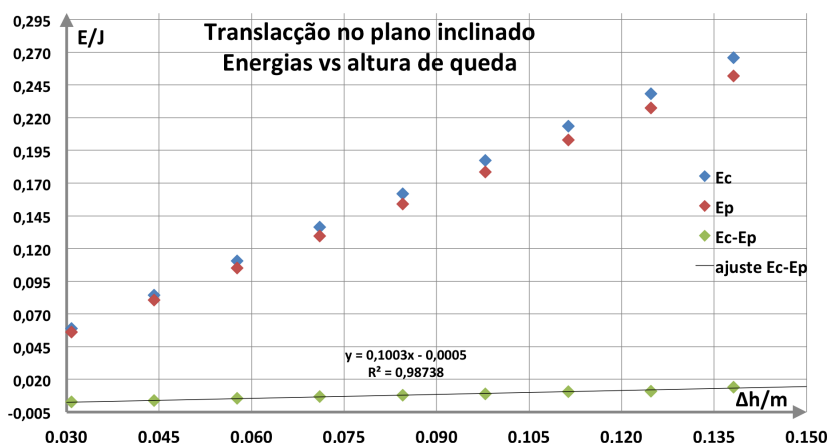
Os colegas Eduardo, André e João mediram o período do pequeno pêndulo em cima da bancada, a quem se agradece muito partilharem os dados.

$T_1$ (s)	$V_1$ (m/s)		$T_2$ (s)	$V_2$ (m/s)	
1,3447	0,1523	0,1339	1,1486	0,2747	0,1605
1,3444	0,1531	0,1351	1,1487	0,2740	0,1553
1,3445	0,1515	0,1327	1,1484	0,2653	0,1543
1,3447	0,1515	0,1333	1,1482	0,2646	0,1493
1,3446	0,1493	0,1316	1,1483	0,2577	0,1484
1,3445	0,1493	0,1327	1,1480	0,2577	0,1443
1,3445	0,1478	0,1304	1,1480	0,2494	0,1425
1,3445	0,1485	0,1316	1,1479	0,2488	0,1385
1,3444	0,1463	0,1288	1,1478	0,2410	0,1368
1,3445	0,1471	0,1304	1,1477	0,2398	0,1330
1,3444	0,1456	0,1282	1,1474	0,2331	0,1316
1,3444	0,1463	0,1293	1,1472	0,2320	0,1277
1,3445	0,1442	0,1271	1,1470	0,2252	0,1272
1,3445	0,1449	0,1282	1,1465	0,2232	0,1225
1,3445	0,1429	0,1261	1,1460	0,2179	0,1221
1,3444	0,1442	0,1271	1,1453	0,2155	0,1176
1,3444	0,1415	0,1250	1,1454	0,2101	0,1174
1,3444	0,1422	0,1261	1,1455	0,2083	0,1115
1,3444	0,1408	0,1240	1,1447	0,2024	0,1112
1,3443	0,1415	0,1255	1,1449	0,2008	0,1059
1,3443	0,1395	0,1230	1,1446	0,1949	0,1064
1,3444	0,1408	0,1240	1,1443	0,1938	0,1019
1,3443	0,1389	0,1220	1,1444	0,1876	0,1017

**Tabela 2.** Dados obtidos no primeiro ensaio de medição do período com o DataStudio. **Nota:** Os valores de velocidade e período não foram obtidos durante o mesmo ensaio. Os da velocidade  $V_1$  são do ensaio realizado com o comprimento do fio  $l = 50$  cm e os da  $V_2$  são para  $l = 24,2$ cm

### 2.1.4 Dados da Conservação da Energia Mecânica

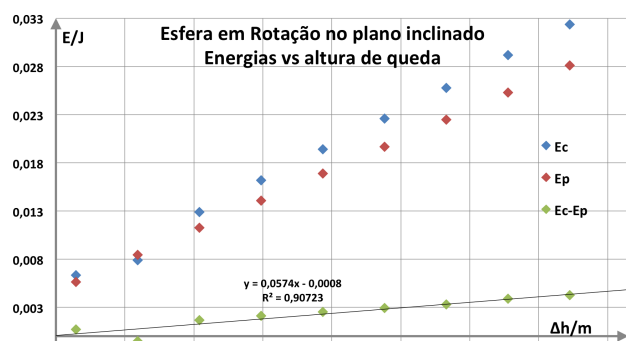
No laboratório utilizou-se uma calha de ar inclinada de um ângulo  $\alpha$ , na qual foram lançados um carrinho em deslize (sem rotação), uma esfera e um cilindro, ambos em rotação. Foi sempre medida a posição inicial (de repouso) na calha em relação à posição final, a do fotoporta que media a velocidade e que permaneceu fixo na parte inferior da calha em todos os lançamentos. A distância da posição inicial foi medida com a fita métrica que existe ao longo da calha. Os resultados das experiências foram gentilmente cedidos pelas colegas Elsa, Inês e Vânia, a quem se agradece muito.



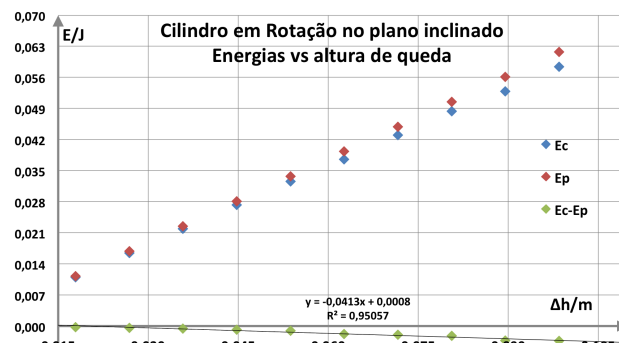
**Figura 4.** Lançamentos do Carrinho no plano inclinado: energias cinética final ( $E_c$ ), potencial inicial ( $E_p$ ) e a sua diferença ( $E_c - E_p$ ) em Joules, em função da altura relativa de queda  $\Delta h$ (m). Parâmetros originais.

Para o lançamento do carrinho os resultados encontram-se no gráfico da figura 4: torna-se estranho que exista mais energia cinética (à chegada) do que a potencial inicial.

No lançamento da esfera em translação e rotação os resultados constam na figura 5a. Note-se que a medição referente aos 2,8 cm de altura deve ter sido mal feita, devido ao desvio inverso ao comportamento dos outros dados. Novamente há um aumento de energia total do sistema: a criação de energia a partir do nada dá um Prémio Nobel!



(a) Esfera que rola. Uauuu, há aumento de energia mecânica total!



(b) Cilindro que rola no plano inclinado

**Figura 5.** Objetos com rotação no plano inclinado: energias cinética final ( $E_c$ ), potencial inicial ( $E_p$ ) e a sua diferença ( $E_c - E_p$ ) em Joules, em função da altura relativa de queda  $\Delta h$ (m). Parâmetros originais.

O lançamento do cilindro a diversas alturas iniciais teve os resultados apresentados na figura 5b. Nesta situação aparece uma perda de energia total: a energia cinética  $E_c$  final é inferior à energia potencial  $E_p$  inicial, o que está de acordo com o expectável: perda de energia total por atrito de rolamento e um pouco de atrito aerodinâmico (pouco, devido à baixa velocidade).

### 3 Análise de Resultados

**Nota Explicativa:** Os resultados são produzidos recorrendo a tabelas e análise estatística dos valores medidos, aos parâmetros de ajuste aos dados e visualizados em gráficos, e finalmente usados nas equações físicas adequadas. Deve-se depois discutir em detalhe os resultados que se deduzem dos valores obtidos:

- Ao deduzir o mesmo parâmetro por duas vias, compará-los e discutir qual deles é melhor.



- Comparar os valores obtidos com os valores esperados, se for caso disso.
- Discutir a razão que fundamenta desvios sistemáticos nos resultados obtidos, se existirem.

### 3.1 Resultados do Oscilador Harmónico Amortecido

Aos dados obtidos ajustou-se uma equação que descreve a desaceleração forçada do disco de Pohl (com corrente elétrica  $i = 0,40$  A, no eletroíman). A função da velocidade  $v(t)$  é do tipo:

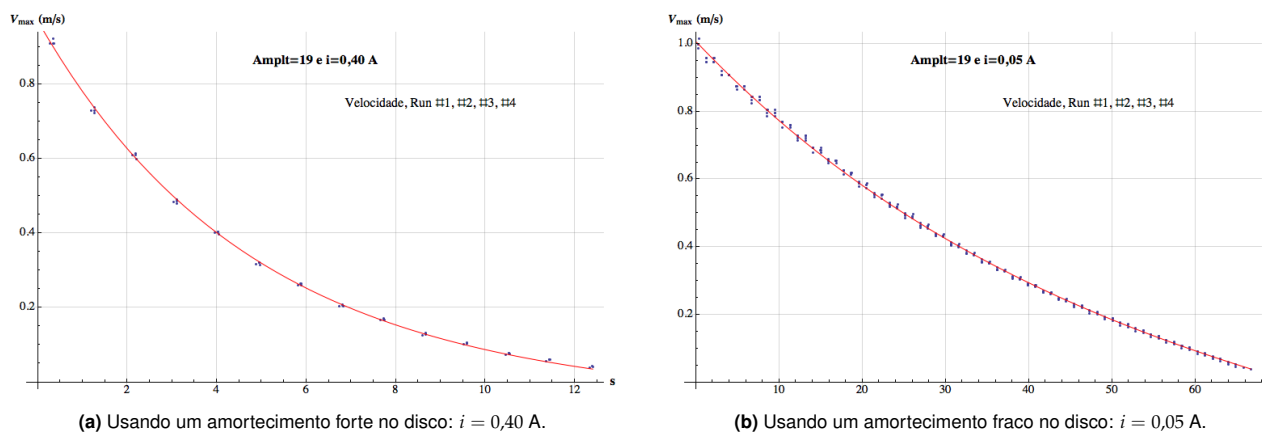
$$v(t) = (v_0 \cdot e^{\lambda t} + a_f \cdot t) \sin(W \cdot t) \tag{6}$$

Repare-se que a 1ª velocidade máxima que se mede,  $v_{m1}$ , ocorre na 1ª oscilação correspondente a  $t=T/4$  (veja-se a figura 2, na pág. 5). A função exponencial observada na figura 6a tem parâmetros muito próximos dos obtidos como programa *DataStudio* (parâmetros A, B, C, cujos valores estão apresentados na figura 3, na pág. 6). A vantagem é que neste ajuste o valor do parâmetro  $a_f$  foi mantido constante, pois é  $\approx$  o mesmo para todos os lançamentos. Isto permite que os dados experimentais sejam usados na determinação de valores mais robustos para  $v_0$  e  $\lambda$ : note-se que a incerteza  $\Delta_p$  nos parâmetros ajustados varia com  $\Delta_p \sim \frac{\sigma}{\sqrt{N-N_p}}$ , onde  $\sigma$  é o desvio padrão dos resíduos no ajuste,  $N$  é a quantidade de dados usados e  $N_p$  a quantidade de parâmetros a determinar. Neste caso, o ajuste feito com *Mathematica* dá:

A=  $v_0 = +0,9687$  m/s, que é o parâmetro da velocidade. Note-se que é superior ao primeiro valor medido (no instante  $t = T/4$ ), porque o sistema perde energia continuamente.

B=  $a_f = -0,0027$  m/s<sup>2</sup>, que representa a aceleração da fricção mecânica na rotação. Foi previamente determinado com os dados de todos os lançamentos feitos.

C=  $\lambda = -0,2140$  s<sup>-1</sup> =  $\frac{1}{T_f}$ , onde  $T_f = 4,673$  s, é a constante de tempo da fricção electromagnética.



**Figura 6.** Velocidade linear máxima (m/s) de rotação do disco de Pohl, e ajuste da equação 6

Este modelo funciona bem mesmo para atenuações fracas, situação em que o modelo de ajuste no *DataStudio* (ou *Excel*) não funciona. Veja-se o caso duma corrente elétrica  $i = 0,05$  A, na figura 6b. Daqui deduzem-se os seguintes parâmetros:

$v_0 = +1,0071$  m/s, é o parâmetro da velocidade.

$a_f = -0,0027$  m/s<sup>2</sup>, aceleração da fricção mecânica na rotação, previamente determinada.

$\lambda = -0,0231$  s<sup>-1</sup>  $\Rightarrow T_f = 43,3$  s = constante de tempo da fricção electromagnética.

É evidente que uma atenuação  $\approx 10\times$  menor permite um coeficiente  $\lambda$  menor (neste fator), e um tempo de amortecimento  $X$  vezes maior, quando comparado com a primeira situação. O valor de  $X$  é determinado igualando a velocidade máxima nos dois casos. Escolhendo 0,03 m/s,

$$v1_0 \cdot e^{\lambda_1 t_1} + a_f \cdot t_1 = v2_0 \cdot e^{\lambda_2 t_2} + a_f \cdot t_2 = 0,03 \tag{7}$$

deduz-se que  $X = t_1/t_2 = 12,68/67,44 = 5,32$ , como se pode estimar pelos gráficos.

### 3.2 Resultados da aceleração $g$ e conservação de energia no pêndulo

O histograma das 1038 medições do período do pêndulo grande no lab. C1.4.31 está apresentado na figura 7. O valor médio deste período leva a deduzir que:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} = 9,8031 \pm 0,0003 \text{ m/s}^2 \quad (8)$$

onde  $l = 3,3543 \pm 0,0003 \text{ m}$  (que foi medido com muito sacrifício!) e  $T = 3,6753 \pm 0,0003 \text{ s}$ . Dos 1038 dados iniciais, 10 valores foram rejeitados por estarem desviados da média mais de  $3,33\sigma$  e, estatisticamente, nenhum caso destes deveria ter ocorrido [2]. A incerteza relativa de  $g$  demonstra a óptima qualidade do resultado: (da equação (8))

$$\Delta g_{rel} = 0,017\%$$

A conservação da energia no pêndulo também não se verifica. Na tabela 2 (pág. 7) nota-se que apesar do período se manter praticamente constante, em acordo com o resultado para pequenas oscilações, a velocidade máxima diminui em cada passagem. Isto corresponde a perda de energia total no movimento, essencialmente por fricção aerodinâmica: nota-se bem nestes dados que a perda de velocidade é mais rápida em  $V_2$ , pois inicia o movimento com um valor superior ao de  $V_1$ . Mesmo no pêndulo grande com  $l = 3,5 \text{ m}$  e de baixo atrito, essa perda é bem visível, como se constata na figura 8.

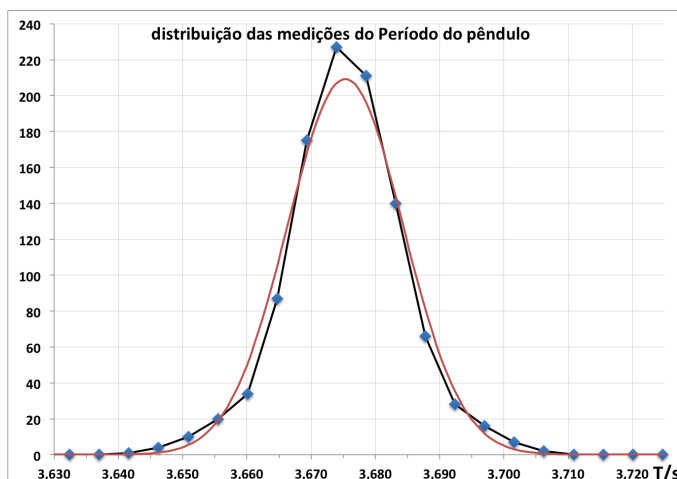


Figura 7. Histograma com a distribuição dos períodos medidos. Note-se a distribuição gaussiana que se aproxima bastante bem ao histograma dos dados.

### 3.3 Resultados da Conservação da Energia Mecânica

Um dos principais problemas na verificação da conservação da energia total está no cálculo das energias, tanto a cinética como a potencial. O valor da energia cinética provém do valor medido da velocidade, que é obtida pela razão entre o espaço percorrido pela palheta em frente ao fotoporta. No caso do carrinho não existe grande incerteza dada a forma simples da palheta. Os casos da esfera e da cilindro são mais problemáticos pois assume-se que a luz do fotoporta é cortada pelo diâmetro destes objetos (valor que é usado no *DataStudio* para calcular a velocidade), quando não há certeza de se ter colocado o fotoporta exatamente nessa altura.

O valor da energia potencial depende da diferença de alturas entre a posição inicial (de lançamento) e a do fotoporta (final). Estas alturas tanto foram medidas com fita métrica em relação ao tampo da bancada, como através por trigonometria usando o ângulo de inclinação da calha de ar e a distância linear (sobre a calha) entre as duas posições. A margem para incerteza é grande!

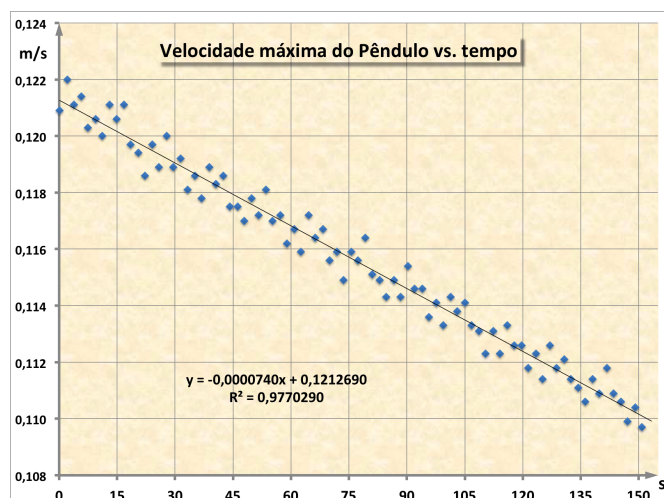


Figura 8. Perda de energia cinética: velocidade máxima do pêndulo grande, e ajuste de uma reta.

Para minimizar estes erros, começa-se pelo parâmetro que afecta todas as experiências e com o caso mais simples, o do carrinho, pois a incerteza provém, quase só, da inclinação  $\alpha$  da calha. Escolheu-se um valor de  $\alpha$  que minimizasse as diferenças entre os valores de energia, mas impondo a condição  $E_c \leq E_p$ , visto haver perdas por atrito. Assim, em vez do valor inicialmente medido  $\alpha_m = 5,135^\circ$ , usou-se  $\alpha = 5,418215^\circ$ , cujo resultado apresenta-se no gráfico da figura 9 (pág. seguinte). Esta pequena diferença traduz-se num desnível (a mais) entre os extremos da calha de 9,8 mm, que poderá ser devido à não horizontalidade das bancadas entre si e dos próprios tampos (?), que não se medem com o procedimento habitual, ou erros nas medições efetuadas. Note-se que mesmo assim, ainda há uma perda sistemática de energia de 0,0016 J, em cada lançamento do carrinho. Este facto poderá denunciar um enviesamento na medição das distâncias entre os pontos de lançamento e da fotoporta...

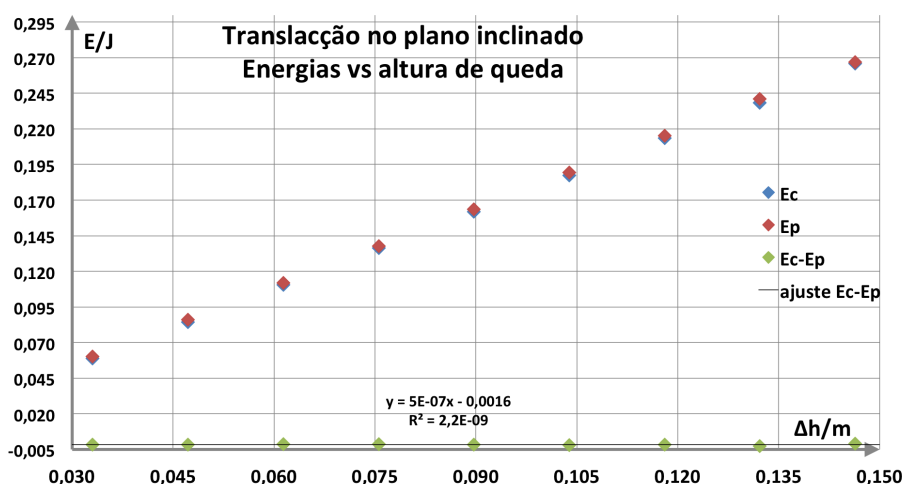


Figura 9. Lançamentos do Carrinho no plano inclinado: energias cinética final ( $E_c$ ), potencial inicial ( $E_p$ ) e a sua diferença ( $E_c - E_p$ ) em Joules, em função da altura relativa de queda  $\Delta h(m)$ . Parâmetros corrigidos.

Nos lançamentos da esfera e do cilindro foi introduzido o valor de  $\alpha$  acima mencionado. Contudo, para encontrar uma solução satisfatória foi necessário considerar que a luz do fotoporta passava numa corda (do objeto) de comprimento  $D'$  diferente do seu diâmetro  $D$ , em todas as experiências realizadas. Teoricamente, a velocidade medida na corda  $D'$  é a mesma que a velocidade do objeto  $v = D/\Delta t = D'/\Delta t'$ . Porém, o valor de velocidade apresentado pelo *DataStudio*,  $v' = D/\Delta t'$ , é diferente de  $v$ , pelo facto de se lhe ter introduzido o diâmetro  $D$  em vez de  $D'$ , que era desconhecido. A relação entre as duas será:

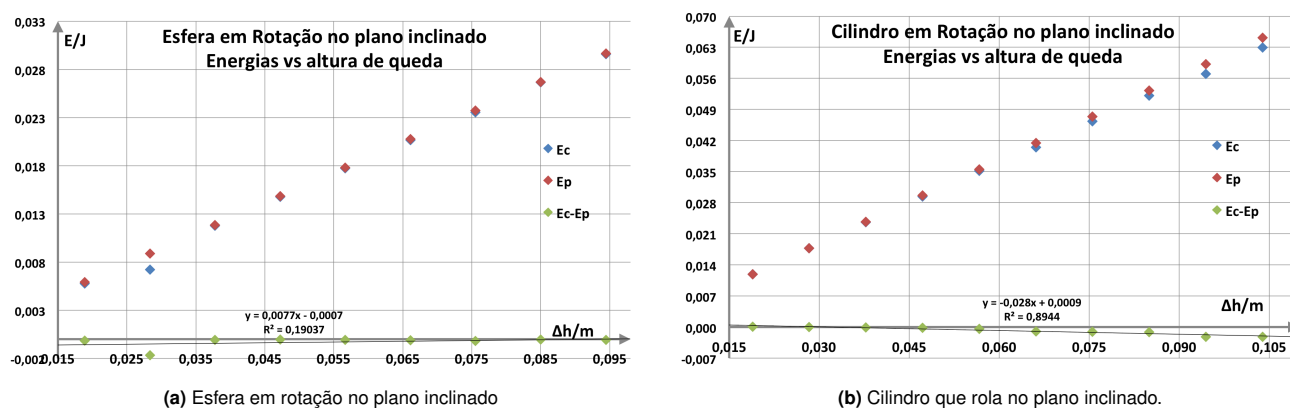
$$v' = \frac{D}{\Delta t'} = \frac{D}{D'} \frac{D'}{\Delta t'} = \frac{D}{D'} v \Leftrightarrow v = \frac{D'}{D} v'$$

Para os dados obtidos, encontrou-se o valor  $D'$  que minimiza as diferenças entre os valores de energia, mas impondo a condição  $E_c \leq E_p$ , visto haver perdas por atrito. Note-se que esta metodologia no tratamento de dados **não é boa** para quem fez as experiências largando o objeto sempre da mesma posição inicial e colocando o fotoporta ao longo da calha. Nessa situação, o valor de  $D'$  foi diferente para cada posição final escolhida, devido ao ajustamento constante na altura do fotoporta.

Para o lançamento da esfera em rotação, apresentam-se na figura 10a os resultados tratados com  $D'=19,12$  mm, valor da corda que passou no fotoporta ao invés do diâmetro  $D=20,0$  mm da esfera. É evidente que a medição referente aos 2,8 cm de altura mantém o desvio desproporcionado ao dos outros dados, mas corrigiu-se o aumento da energia total do sistema: parece haver uma perda sistemática de 0,0007 J. O declive positivo está a ser forçado pelo valor<sup>1</sup> a  $\Delta h = 2,8$  cm.

Com os dados do lançamento do cilindro a diversas alturas iniciais procedeu-se da mesma maneira, introduzindo-se  $D'=20,40$  mm, como valor da corda que passou no fotoporta (deve incluir o pequeno anel de guiagem) ao invés do diâmetro que o cilindro tem,  $D=19,64$  mm, usado na figura 5b (pág. 8). Os resultados apresentam-se na figura 10b: nesta situação há uma perda de energia total mais evidente: a diferença  $E_c - E_p$  aumenta visivelmente com

<sup>1</sup>Tudo indica que esta medição ficou mal feita e por isso o valor está muito desviado dos outros.



**Figura 10.** Energias cinética final ( $E_c$ ), potencial inicial ( $E_p$ ) e a sua diferença ( $E_c - E_p$ ) em Joules, em função da altura relativa de queda  $\Delta h$ (m) dos objetos, entre as posições inicial e final. Parâmetros corrigidos.

a altura do lançamento.

## 4 Código dos Programas desenvolvidos e Utilizados

Este é o programa usado para descobrir os números do Euro-Milhões desta semana, que demonstra bem o espírito genial de como financiar a investigação:

**P4-1** Rotina em Python que calcula os números do EuroMilhões desta semana

```

1 def incmatrix(genl1,genl2):
2     m = len(genl1)
3     n = len(genl2)
4     M = None #to become the incidence matrix
5     VT = np.zeros((n*m,1), int) #dummy variable
6     #compute the bitwise xor matrix
7     M1 = bitxormatrix(genl1)
8     M2 = np.triu(bitxormatrix(genl2),1)
9     for i in range(m-1):
10        for j in range(i+1, m):
11            [r,c] = np.where(M2 == M1[i,j])
12            for k in range(len(r)):
13                VT[(i)*n + r[k]] = 1;
14                VT[(i)*n + c[k]] = 1;
15                VT[(j)*n + r[k]] = 1;
16                VT[(j)*n + c[k]] = 1;
17            if M is None:
18                M = np.copy(VT)
19            else:
20                M = np.concatenate((M, VT), 1)
21            VT = np.zeros((n*m,1), int)
22    return M
    
```

Para o executar deve introduzir na matriz `genl1` do programa **P4-1** todas as sequências de números já saídas desde o início deste jogo. O resultado final é:

... ..

Não se apresentam os números só para evitar que outras pessoas tenham o enorme desapontamento do que é ser tão rico, porque a vida se torna um trágico aborrecimento de consequências muito nefastas.

## 4.1 O cálculo do ano Besseliano

Para descobrir que Nibiru lhe cairá na sopa amanhã às 15<sup>h</sup> 23<sup>m</sup> 42<sup>s</sup> (em horas do ano Besseliano) precisa destes dois códigos em *Mathematica*. A primeira função dá o Greenwich Mean Sidereal Time às 0<sup>h</sup> Universal Time, GMST@0UT. Repare que tem número de programa associado (P4.1-1), tem um título escrito na "Lista de Programas" *mas que não aparece na sua legenda*, a *caption*.

### P4.1-1

```

1
2 GMSTat0UT[dd_, mm_, yy_] := (* dd=dia, mm=mês, yy=ano *)
3 Block[{JD, JC, GMSTsec},
4   JD = JDay0UT[dd, mm, yy]; (* JD = Julian Day at 0h UT *)
5   JC = (JD - 2451545.0)/36525; (* Julian Cent. from Jan 1st, 12h, 2000 *)
6   GMSTsec = 24110.54841 + (8640184.812866 + (0.093104 - 6.2 10^-6} JC) JC);
7   Mod[GMSTsec/3600, 24] (* returns GMST in decimal hours <= 24h *)
8 ]
    
```

O ano Besseliano (valor fracionário do dia Juliano às 0UT) calcula-se com a função a seguir. Note que *não aparece* na "Lista de Programas" (confirme com a opção 'indicePrg') mas fica com um título (*title*). Com esta última opção o número do programa (se definir o *label=bessel*) fica sempre igual ao número da secção: *bessel=4.1*. Não use porque nem é visível a quem lê.

Função que dá o ano Besseliano

```

1 BesselYr[JDdec_] := (* JDdec = Julian Day em forma decimal, inclui UT *)
2   1900 + (JDdec - 2415020.31352)/365.24219878 (* ano Besseliano em forma decimal *)
    
```

## 5 Discussão dos Resultados e Conclusões

**Nota Explicativa:** Baseando-se nos resultados deduzidos dos valores experimentais, devem-se discutir as implicações científicas dos mesmos, ou seja, a confirmação da lei física em causa, o grau de incerteza nessa conclusão, o que se poderia fazer para melhorar os resultados tanto na metodologia experimental como no tratamento de dados realizado.

1. Como o valor correcto<sup>2</sup> da aceleração gravítica para o 4<sup>o</sup> piso do C1 é  $g = 9,8007 \text{ m/s}^2$ , o resultado obtido na equação 8 na página 10 tem um erro absoluto

$$\Delta g_{abs} = 9,8031 - 9,8007 = +0,0024 \pm 0,0003 \text{ m/s}^2 \quad (9)$$

que se deve à conjugação de Marte com Neptuno na semana em que a experiência decorreu. *Ficou indubitavelmente provado* que a pequena atração destes dois planetas aumentou um pouco o valor de *g* no edifício C1.

2. As medições com a calha de ar inclinada permitiram demonstrar a conservação da energia total (mecânica) no caso do carrinho, sendo necessário contudo, reajustar os parâmetros experimentais que não foram (ou não podiam ser) medidos com grande rigor.

Nos objetos com rotação, mostrou-se que há maior perda de energia no caso do cilindro, apesar da massa ser o dobro da da esfera. A nossa interpretação é que durante a descida, os movimentos de oscilação lateral faziam o anel de guiagem ir batendo no sulco, além da superfície de contacto com a régua ser maior. Por isso, as forças de atrito foram mais intensas e, proporcionais ao espaço percorrido (altura de largada), ou seja, o trabalho destas forças é realizado num percurso maior. No caso da esfera, o atrito limitou-se ao encosto da sua superfície nas quinas do sulco de guiagem na régua, que deve ser diminuto como os resultados demonstram (fig. 10a na página precedente).

<sup>2</sup>medições gravimétricas do Prof. Carlos Antunes, do DEGGE

3. A análise estatística dos resultados obtidos na tabela 1 (pág. 7) prova que o universo está em *contração acelerada* e que o **colapso total** ocorrerá no próximo mês de Junho, antes dos exames finais na FCUL. Este resultado coloca em questão a crença generalizada na expansão acelerada do universo. Contudo o pequeno grau de incerteza nestes resultados leva a *duvidar da própria existência do universo observável*, o que me impede de assistir às aulas nos próximos 3 anos ♣.
4. Reforça-se a ideia de que os resultados obtidos são tão excepcionais que serão apresentados na próxima conferência planetária sobre Astrofísica trans-observacional.

## Referências

- [1] Susana Marta, António Maria, Joaquina R. Migueis, *Dados da Experiência da Conservação da Energia Mecânica*, no site de acesso público <http://alunos.fc.ul.pt/f1234>. Ou envie-nos um e-mail para [joaquina.maria@gmail.com](mailto:joaquina.maria@gmail.com).
- [2] Conceição Abreu, Luís Matias, Luís Peralta, *Física Experimental, uma Introdução*, Ed. Presença, 1994.
- [3] *Pendulum Motion* no site HyperPhysics do Department of Physics and Astronomy, Georgia State University, USA. <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/pend.html>.