ELECTROMAGNETISMO II

1985/1986

Capítulo VI

Reflexão e refracção de ondas electromagnéticas planas, monocromáticas, em planos de separação de meios transparentes homogéneos e isótropos.

Págs 0 a 20 +

ÓPTICA ELECTROMAGNÉTICA

REFLEXÃO E REFRACÇÃO DAS ONDAS PLANAS

REFLEXÃO E REFRACÇÃO DAS ONDAS PLANAS

1. INTRODUÇÃO

Com o objectivo de fundamentar a interpretação dos fenómenos de reflexão e de refracção das ondas electromagnéticas nos seus aspectos mais importantes, vamos estudar o comportamento das ondas planas monocromáticas ao incidirem na superfície de separação plana (indefinida) de dois meios homogéneos e isótropos, transparentes.

A experiência mostra que, no caso mais geral, uma onda incidente sobre a superfície (plana) de separação dos dois meios, (1) e (2), se cinde em duas ondas propagando-se em direcções diferentes da de incidência uma no meio (1) — onda reflectida — outra no meio (2) — onda transmitida ou refractada —. Admitiremos que se trata ainda de duas ondas planas (como a incidente), o que é sugerido pela simetria do problema e confirmado pelos dados experimentais. Se representarmos por $\vec{s}_I$ o versor da direcção de propagação da onda incidente (v. figura 1), fazendo com a normal à superfície de separação de (1) para (2) — eixo dos zz — um ângulo $\varphi \leq \pi/2$, poderemos representar por $\vec{s}_R$ o versor da direcção de propagação da onda reflectida, fazendo com o eixo dos zz um ângulo $\varphi' \geq \pi/2$,

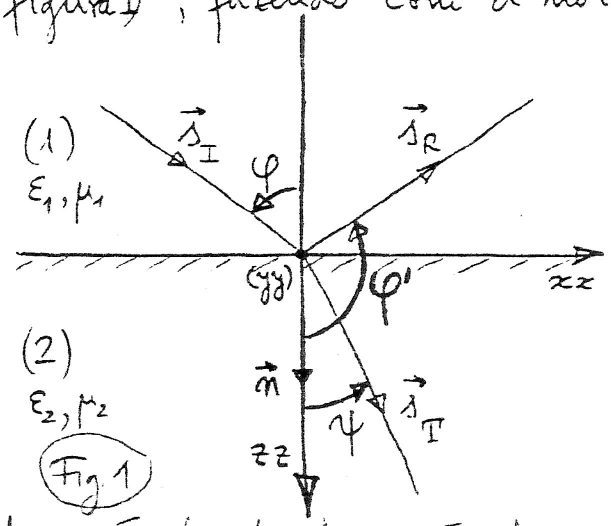


Fig. 1

e por $\vec{s}_T$ o versor da direcção de propagação da onda transmitida, fazendo com o eixo dos zz um ângulo $\psi \leq \pi/2$. (*) (→ p. seg)

Para deduzir as características das ondas reflectida e transmitida a partir das características da onda incidente, nós recorremos às condições fronteiras que o campo electromagnético deve respeitar numa superfície de descontinuidade. Para podermos aplicá-las a este problema, vamos recordá-las no próximo parágrafo.

2. CONDIÇÕES FRONTEIRAS DO CAMPO ELECTROMAGNÉTICO NUMA SUPERFÍCIE DE DESCONTINUIDADE

As equações de Maxwell foram estabelecidas como se sabe para regiões do espaço dentro das quais as propriedades do meio só podem variar continuamente. Supostas também contínuas as distribuições de densidades volúmicas de cargas e correntes numa dada região, fica garantida a continuidade dos vectores que descrevem o campo dentro dessa região.

São porém frequentes as situações em que as propriedades do meio variam bruscamente, por exemplo, sobre superfícies de descontinuidade; esse é o caso da superfície de separação de dois meios homogéneos diferentes, de que nos ocupamos. É então de esperar que sobre essas superfícies de descontinuidade os vectores do campo se apresentem descontínuos.

Pode ocorrer que as densidades volúmicas das cargas, ρ, e das correntes, $\vec{J}$, eventualmente distribuídas na região, cedam o seu lugar às grandezas representativas de uma condensação de carga ou de corrente sobre a superfície de descontinuidade, isto é, às densidades super-

(*) Note-se que se põe de parte por ora o caso de reflexão total, objecto de um tratamento especial.

ficiais respectivas, σ e $\vec{j}$. A descontinuidade dos vectores do campo pode dever-se não só à transição brusca das propriedades do meio, mas também à existência destas densidades σ ou $\vec{j}$ sobre a superfície de descontinuidade material, que separa, como uma fronteira, os dois meios.

De qualquer forma, as equações de Maxwell permitem encontrar, mediante convenientes integrações sobre domínios fronteiriços muito pequenos, as propriedades locais de descontinuidade (ou de continuidade) dos vectores do campo sobre a fronteira. Essas propriedades designam-se habitualmente por <u>condições fronteiras sobre a superfície de descontinuidade</u>.

Cada uma das quatro equações de Maxwell dá origem a uma condição fronteira que se diz a degenerescência da respectiva equação, quando se passa dos pontos interiores de um meio contínuo para a superfície de descontinuidade. Nesta ordem de ideias apresentamos a seguir as degenerescências das equações de Maxwell:

- $\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \Longrightarrow \quad \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma$
- $\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$
- $\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c}\left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \quad \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \quad \vec{n} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{1}{c}\vec{j}$$

- $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \vec{n} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$

Nestas equações $\vec{n}$ representa o vector unitário da normal à superfície de separação dos dois meios.

num ponto genérico R e orientado de (1) para (2); os vectores com índice 1 (ou 2) designam os valores dos respectivos campos em pontos do meio 1 (ou 2) extremamente vizinhos de $\underline{R}$. A operação $\vec{n}\cdot$ fornece componentes normais, enquanto a operação $\vec{n}\wedge$ fornece componentes tangenciais à superfície de separação. A demonstração destas degenerescências pode encontrar-se, por exemplo, na obra de Stratton, referida na bibliografia.

Se, em particular, considerarmos $\sigma=0$ e $\vec{j}=0$, como temos vindo a fazer no estudo das ondas electromagnéticas (em regiões exteriores às fontes do campo), e se fixarmos a nossa atenção sobre os campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ com que temos descrito as ondas electromagnéticas, nós utilizaremos então os resultados acima para concluir que <u>os campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ das ondas têm componentes normais descontínuas sobre a superfície de separação</u> (por força das duas primeiras equações) mas <u>têm componentes tangenciais contínuas sobre a superfície de separação</u> (por força das duas últimas equações).

No problema da reflexão e refracção nós vamos justamente fazer uso das <u>condições fronteiras que traduzem a continuidade das componentes tangenciais dos campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ sobre a superfície de separação dos dois meios</u>.

3. LEIS DA REFLEXÃO E DA REFRACÇÃO

Se distinguirmos pelos índices I, R e T os campos das ondas incidente, reflectida e transmitida, respectivamente e pelos índices 1 e 2 os campos electromagnéticos totais no meio (1) e no meio (2), respectivamente, então teremos:

$$(1)\qquad \begin{cases} \vec{E}_1 = \vec{E}_I + \vec{E}_R \\ \vec{H}_1 = \vec{H}_I + \vec{H}_R \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{E}_2 = \vec{E}_T \\ \vec{H}_2 = \vec{H}_T \end{cases}$$

e a continuidade das componentes tangenciais assinalada no parágrafo anterior impõe as seguintes condições:

$$(2)\qquad \begin{cases} \left[\vec{n} \wedge \left(\vec{E}_I + \vec{E}_R - \vec{E}_T\right)\right]_{z=0} = 0 \\ \left[\vec{n} \wedge \left(\vec{H}_I + \vec{H}_R - \vec{H}_T\right)\right]_{z=0} = 0 \end{cases}$$

Usemos, para os campos das ondas monocromáticas, a representação complexa habitual, sob a forma

$$(3)\qquad \vec{E} = \vec{E}^0 e^{i\omega\left(\frac{\vec{r}.\vec{s}}{v} - t\right)} = \vec{E}^0 \tau$$

sendo $\underline{\omega}$ a frequência angular, $\underline{v}$ a velocidade de propagação no respectivo meio e $\vec{E}^0$ a amplitude (em geral complexa). Designemos por τ o factor de fase que engloba (exclusivamente) a dependência espacio-temporal de $\vec{E}$.

Como as condições (2) se devem verificar para qualquer ponto da superfície de separação (plano $z=0$) e em qualquer instante, a sua primeira consequência importante é que se verifique idênticamente a igualdade dos factores espacio-temporais para $z=0$:

$$(4)\qquad (\tau_I)_{z=0} = (\tau_R)_{z=0} = (\tau_T)_{z=0}\ ;$$

e daí resulta(*):

$$(5)\qquad \left(\frac{\vec{r}.\vec{s}_I}{v_1}\right)_{z=0} = \left(\frac{\vec{r}.\vec{s}_R}{v_1}\right)_{z=0} = \left(\frac{\vec{r}.\vec{s}_T}{v_2}\right)_{z=0}$$

(*)(... depois de se concluir que não há modificação na frequência $\underline{\omega}$ quando se passa da onda incidente para as ondas reflectida e transmitida.)

para quaisquer x e y. Como se tem

$$\left[\vec{r}\cdot\vec{s}\right]_{z=0} = (\vec{e}_z\wedge\vec{r})\wedge\vec{e}_z\cdot\vec{s} = (\vec{e}_z\wedge\vec{r})\cdot(\vec{e}_z\wedge\vec{s})$$

sendo $\vec{e}_z\wedge\vec{r}$ um vector arbitrário do plano $z=0$, as condições (5) impõem:

$$(6)\qquad \frac{\vec{e}_z\wedge\vec{s}_I}{v_1} = \frac{\vec{e}_z\wedge\vec{s}_R}{v_1} = \frac{\vec{e}_z\wedge\vec{s}_T}{v_2}\ .$$

Daqui extrai-se fàcilmente:

1) que os vectores $\vec{s}_R$ e $\vec{s}_T$ caem no plano definido por $\vec{s}_I$ e $\vec{e}_z$, ou seja, que o <u>raio reflectido</u> (o <u>raio refracto</u>), o <u>raio incidente</u> e a <u>normal</u> à superfície de separação estão no mesmo plano — <u>plano de incidência</u>;

2) e que

$$\sin\varphi = \sin\varphi' = \frac{v_1}{v_2}\sin\psi$$

ou seja, por um lado, tendo em atenção os domínios de variação de φ e φ'

$$(7)\qquad \varphi' = \pi - \varphi$$

e por outro lado

$$(8)\qquad \sin\varphi = n_{12}\sin\psi$$

pondo por definição

$$(9)\qquad n_{12} = \frac{v_1}{v_2}\ ,$$

<u>índice de refracção</u> do meio 2 relativamente ao meio 1.

Estas conclusões constituem evidentemente as conhecidas leis da reflexão e da refracção (leis de Snell), deduzidas aqui para ondas planas monocromáticas incidindo sobre uma superfície plana (indefinida) que separa dois meios homogéneos e isótropos, transparentes.

4. FÓRMULAS DE FRESNEL

Examinemos agora quais as relações que resultam para as amplitudes das três ondas como uma segunda consequência das condições (2). Tendo em conta (4), (2) dá origem a

$$(10)\quad \begin{cases} \vec{n} \wedge (\vec{E}^o_I + \vec{E}^o_R - \vec{E}^o_T) = 0 \\ \vec{n} \wedge (\vec{H}^o_I + \vec{H}^o_R - \vec{H}^o_T) = 0 \end{cases}$$

Revela-se vantajoso decompôr os vectores-campo $\vec{E}$ e $\vec{H}$ segundo as direcções paralela (P) e normal (N) ao plano de incidência, de versores respectivamente $\vec{\sigma}_P$ e $\vec{\sigma}_N$ com sentidos convencionados conforme à figura 2. Como é natural esperar, as componentes paralela e normal do campo electromagnético revelam comportamentos distintos no fenómeno de reflexão-refracção.

Consideremos a decomposição de um campo $\vec{E}$:

$$(11)\quad \vec{E} = E_P \vec{\sigma}_P + E_N \vec{\sigma}_N$$

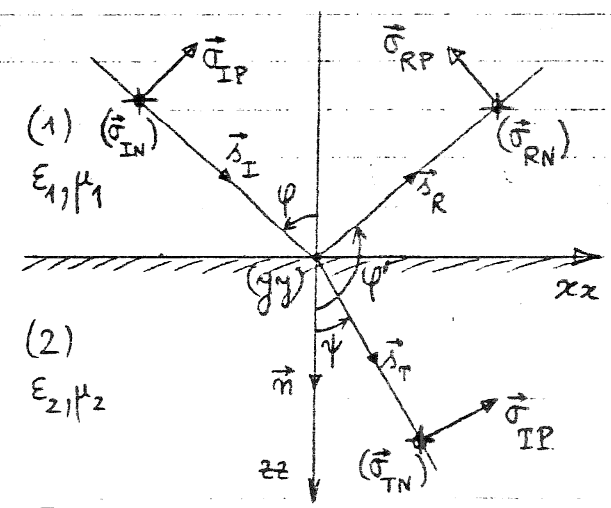


Figura 2. Os versores $\vec{\sigma}_N$ dirigem-se segundo o eixo dos yy, ou seja, apontam para o leitor.

Atendendo à relação entre os vectores $\vec{E}$ e $\vec{H}$ de uma onda plana, $\vec{H} = \sqrt{\varepsilon/\mu}\, \vec{s} \wedge \vec{E}$, virá

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left(E_P\, \vec{s} \wedge \vec{\sigma}_P + E_N\, \vec{s} \wedge \vec{\sigma}_N \right)$$

Ora, como resulta da definição de $\vec{\sigma}_P$ e $\vec{\sigma}_N$ e a figura ajuda a ver:

$$\vec{s} \wedge \vec{\sigma}_P = \vec{\sigma}_N \; ; \; \vec{s} \wedge \vec{\sigma}_N = -\vec{\sigma}_P$$

Então, pode escrever-se, a par de (11):

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left(- E_N \vec{\sigma}_P + E_P \vec{\sigma}_N \right) \tag{12}$$

Tendo as duas componentes, paralela e normal, o mesmo factor de fase espacio-temporal τ (Cf. eq. (3)), obtêm-se relações formalmente idênticas a (11) e (12) entre as amplitudes complexas $\vec{E}^o$, $\vec{H}^o$ e as amplitudes complexas E^o_N, E^o_P das componentes de $\vec{E}^o$.

Introduzindo tais relações em (10) e tendo em conta que (v. figura 2)

$$\vec{n} \wedge \vec{\sigma}_{IN} = \vec{n} \wedge \vec{\sigma}_{RN} = \vec{n} \wedge \vec{\sigma}_{TN} = - \vec{e}_x$$

e que (v. figura 2)

$$\vec{n} \wedge \vec{\sigma}_{IP} = \cos\varphi \, \vec{e}_y \qquad \vec{n} \wedge \vec{\sigma}_{RP} = \cos\varphi' \, \vec{e}_y$$

$$\vec{n} \wedge \vec{\sigma}_{TP} = \cos\psi \, \vec{e}_y$$

resultam as seguintes relações

$$\left\{ \begin{aligned} & E^o_{IN} + E^o_{RN} - E^o_{TN} = 0 \\ & E^o_{IP} \cos\varphi + E^o_{RP} \cos\varphi' - E^o_{TP} \cos\psi = 0 \\ & \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} \left(E^o_{IP} + E^o_{RP} \right) - \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} \, E^o_{TP} = 0 \\ & \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} \left(E^o_{IN} \cos\varphi + E^o_{RN} \cos\varphi' \right) - \\ & \qquad - \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} \, E^o_{TN} \cos\psi = 0 \end{aligned} \right. \tag{13}$$

(Intercalar aqui a <u>Nota</u> da página seguinte)

Nos meios transparentes (dieléctricos, de condutividade nula) a permeabilidade magnética difere pouco de μ_0, de sorte que nestas relações (13) pode fazer-se $\mu_1 \simeq \mu_2$ e em consequência

$$(14) \quad \sqrt{\varepsilon_2}/\sqrt{\varepsilon_1} \simeq v_1/v_2 = n_{12} \ .$$

Se combinarmos então o sistema (13) com as leis (7) e (8), podemos obter as amplitudes E^0_{RN}, E^0_{RP}, E^0_{TN} e E^0_{TP} em função das amplitudes E^0_{IN} e E^0_{IP}, do <u>ângulo de incidência</u> φ e do índice de refracção n_{12}, e estes são na verdade os dados do problema. Obtêm-se todavia relações mais simples se se faz intervir o <u>ângulo de refracção</u> ψ em vez do índice n_{12}:

$$(15)\left\{\begin{array}{l} (15a)\left\{\begin{array}{l} E^0_{RN} = -E^0_{IN}\,\dfrac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin(\varphi+\psi)} \\[2ex] E^0_{RP} = E^0_{IP}\,\dfrac{\mathrm{tg}(\varphi-\psi)}{\mathrm{tg}(\varphi+\psi)} \end{array}\right. \\[6ex] (15b)\left\{\begin{array}{l} E^0_{TN} = E^0_{IN}\,\dfrac{2\sin\psi\cos\varphi}{\sin(\varphi+\psi)} \\[2ex] E^0_{TP} = E^0_{IP}\,\dfrac{2\sin\psi\cos\varphi}{\sin(\varphi+\psi)\cos(\varphi-\psi)} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Estas são as famosas <u>fórmulas de Fresnel</u>, que foram pela primeira vez estabelecidas por FRESNEL em 1823 (antes portanto do aparecimento da teoria electromagnética de Maxwell). FRESNEL deduziu-as (sob uma forma pouco menos geral) com base na sua teoria do "éter eláctico" para a propagação da luz.

<u>Nota</u> (referida na página anterior):

Reparemos que estas equações se separam nitidamente em dois grupos, um relativo às componentes paralelas, outro relativo às componentes normais ao plano de incidência. <u>Estas duas categorias de ondas comportam-se portanto independentemente (e diferentemente) uma da outra na reflexão-refracção</u>; como já anunciáramos.

5. DISCUSSÃO DAS FÓRMULAS DE FRESNEL

5A. FÓRMULAS DE FRESNEL PARA A INCIDÊNCIA NORMAL

Comecemos a discussão das fórmulas de Fresnel por averiguar como elas se transformam para a incidência normal à superfície de separação dos dois meios (tem-se então $\vec{s}_I \equiv \vec{n}$, ou seja, $\varphi = 0$).

Atendendo a (8) é então também $\psi = 0$ e nestas condições as fórmulas (15) conduzem aparentemente a indeterminações do tipo $0/0$. É fácil porém levantar estas indeterminações se se tratam φ e ψ como infinitésimos equivalentes aos seus senos e tangentes, quando $\varphi \to 0$; ao mesmo tempo introduz-se (8) na forma $\varphi = n_{12}\psi$, válida nas mesmas circunstâncias. Tais operações reduzem as fórmulas (15) ao seguinte sistema, válido para incidência normal:

$$(16)\quad \left\{ \begin{cases} E^0_{RN} = -E^0_{IN}\dfrac{n-1}{n+1} \\ E^0_{RP} = E^0_{IP}\dfrac{n-1}{n+1} \end{cases} \quad \begin{cases} E^0_{TN} = E^0_{IN}\dfrac{2}{n+1} \\ E^0_{TP} = E^0_{IP}\dfrac{2}{n+1} \end{cases} \right.$$

(em que designámos n_{12} por $\underline{n}$ para abreviar a escrita).

Estas fórmulas (16) revelam que, excepcionalmente para a incidência normal, as componentes $\underline{N}$ e $\underline{P}$ têm comportamento idêntico na reflexão-refracção, como era de esperar pelo facto de, nesta situação excepcional, deixar de haver um plano de incidência definido (por ser $\vec{s}_I \equiv \vec{n}$). (Note-se que o sinal (−) da primeira equação em (16) se deve apenas à convenção de sentidos arbitrados para os versores $\vec{\sigma}$ segundo a Figura 2; e a sua presença é portanto irrelevante para este aspecto da discussão).

5B. LEI DE BREWSTER

Averiguemos agora da possibilidade de anulamento das amplitudes E^0_{RN}, E^0_{PN}, E^0_{TN} e E^0_{TP} fornecidas pelas fórmulas de Fresnel.

Como, por um lado, os numeradores das fracções em (15) não se anulam salvo no caso já discutido da incidência normal, e como, por outro lado, os senos e cosenos são limitados, fica garantido que nunca se anulam as amplitudes das componentes da onda transmitida nem da componente normal da onda reflectida; entretanto, a amplitude da componente paralela da onda reflectida, E^0_{RP}, anula-se para um ângulo de incidência φ_0, tal que

$$(17) \qquad \varphi_0 + \psi_0 = \frac{\pi}{2} \quad \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \infty \Rightarrow E^0_{RP} = 0\right).$$

Este anulamento corresponde a um fenómeno observado experimentalmente pela primeira vez por BREWSTER (1815) e φ_0 chama-se o <u>ângulo de Brewster</u>. Em consequência de (17), tem-se

$$\cos\varphi_0 = \sin\psi_0$$

e visto que deve verificar-se (8), ou seja,

$$\sin\varphi_0 = n \sin\psi_0$$

resulta para φ_0 a condição

$$(18) \qquad \operatorname{tg}\varphi_0 = n \quad \text{ou} \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg} n .$$

O anulamento de E^0_{RP} confere à onda reflectida segundo o ângulo de Brewster o carácter de uma onda polarizada linearmente segundo a direcção normal ao plano de incidência. Este resultado constitui a <u>lei de Brewster</u>.

Esta lei aplica-se qualquer que seja o tipo de polarização da luz incidente visto que é independente da relação que possa existir entre as duas componentes da onda, a normal e a paralela. É portanto válida também para o caso da luz natural.

Obtém-se portanto luz reflectida polarizada linearmente desde que, simplesmente, se leve a reflexão a dar-se segundo uma incidência igual ao ângulo de Brewster (por isso também chamado <u>ângulo polarizante</u>). Produz-se assim a <u>polarização da luz por reflexão</u>. Note-se que se trata de uma polarização total (se a incidência é rigorosamente de Brewster).

(O ângulo polarizante anda à volta de 56° para os índices de refracção da ordem de 1,5 que alguns vidros apresentam relativamente ao ar, para os comprimentos de onda da região óptica (ultravioleta, visível, infravermelho); mas sobe bastante quando se passa aos comprimentos de onda do domínio radio-eléctrico a que correspondem índices de refracção muito maiores. Por exemplo para a água:

região luminosa	$n = 1,3$	$\varphi_0 = 53°$
ondas radio-eléctricas	$n = 9$	$\varphi_0 = 84°$).

Claro que, se a luz incidente segundo o ângulo de Brewster é já de si própria polarizada linearmente de tal modo que a direcção de polarização seja paralela ao plano de incidência então, na reflexão não há componente paralela pela lei de Brewster e não há componente normal porque não existe componente normal na incidência (cf (15a)). Produz-se assim a <u>extinção da luz por reflexão</u>. Trata-se de uma extinção total (se se cumprem rigorosamente as condições enunciadas).

O polariscópio de reflexão de Nörrenberg é o exemplo clássico de dispositivo que permite realizar estas experiências de polarização e de extinção da luz por reflexão.

5C . MUDANÇA DE FASE NA REFLEXÃO

Excluindo das nossas considerações o caso da reflexão total(*), os factores trigonométricos das fórmulas (15) são números reais e consequentemente a fase de cada uma das componentes, normal e paralela, das ondas reflectida e transmitida, ou é igual à fase da componente correspondente da onda incidente ou difere dela por π. Esses factores trigonométricos são no entanto nas fórmulas (15b) sempre positivos, o que garante que E^o_{TN} e E^o_{TP} têm respectivamente o mesmo sinal que E^o_{IN} e E^o_{IP}: <u>não há portanto mudança de fase da onda incidente para a onda transmitida, nem na componente normal nem na componente paralela</u>. Entretanto, as mudanças de fase da onda incidente para a onda reflectida dependem do ângulo de incidência φ e do índice de refracção.

Consideremos o caso $n_{12} > 1$ (ou $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$; o segundo meio diz-se então ópticamente mais denso do que o primeiro) e analisemos as fórmulas (15a). Os sinais de E^o_{RN} e E^o_{IN} são diferentes e há portanto uma mudança de fase de π para a componente normal, sob qualquer ângulo de incidência. Os sinais de E^o_{RP} e E^o_{IP} são iguais para $0 \leq \varphi < \varphi_0$ (sendo φ_0 o ângulo de Brewster) e são diferentes para $\varphi > \varphi_0$: a componente ~~normal~~ paralela só apresenta mudança de fase para além da incidência de Brewster.

Quando $n_{12} < 1$, uma análise semelhante permite tirar conclusões em sentido oposto, para a mudança de fase na reflexão.

(*) Consideremos a lei da refracção (8). Se $n_{12} > 1$, a todo o ângulo de incidência φ vai corresponder por (8) um valor real de ψ: quando φ varia de 0 a $\pi/2$, ψ varia de 0 a $\arcsin(1/n_{12})$. Porém, se $n_{12} < 1$, então só há valores reais de ψ enquanto $\sin\varphi \leq n_{12}$: quando φ varia de 0 a $\arcsin n_{12}$, ψ varia de 0 a $\pi/2$; para $\sin\varphi > n_{12}$, não há refracção, dá-se o fenómeno da <u>reflexão total</u>.

6. FACTORES DE REFLEXÃO E DE TRANSMISSÃO

Passamos agora a examinar como se reparte a energia (a intensidade luminosa) da onda incidente pelas duas ondas secundárias, reflectida e transmitida.

Como se sabe, o transporte da energia de uma onda é descrito pelo vector de Poynting, $\vec{\Sigma}$, que se pode escrever (com $\mu \simeq 1$)

$$\vec{\Sigma} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\, \varepsilon \vec{E}^2 \vec{s} \cong c\sqrt{\varepsilon}\, \vec{E}^2 \vec{s}$$

sendo $\vec{E}$ o campo eléctrico da onda passado já à representação real. $|\vec{\Sigma}|$ representa a intensidade luminosa da onda.

Para obter a energia que incide por unidade de tempo sobre a unidade de área da superfície de separação dos dois meios (1) e (2) podemos portanto recorrer à projecção $\vec{\Sigma}_I \cdot \vec{n}$ (cf. Figura 1); e procedemos semelhantemente quando queremos obter a energia que emerge por unidade de tempo da unidade de área da superfície de separação, quer no respeitante à onda reflectida quer no respeitante à onda transmitida. Resultam assim as três densidades de fluxo de energia:

$$(19)\quad \begin{cases} J_I = \vec{\Sigma}_I \cdot \vec{n} = c\sqrt{\varepsilon_1}\, \vec{E}_I^2 \cos\varphi \\ J_R = \vec{\Sigma}_R \cdot \vec{n} = c\sqrt{\varepsilon_1}\, \vec{E}_R^2 \cos\varphi' \\ J_T = \vec{\Sigma}_T \cdot \vec{n} = c\sqrt{\varepsilon_2}\, \vec{E}_T^2 \cos\psi \end{cases}$$

(O sinal negativo que $\cos\varphi'$ confere a J_R traduz simplesmente que se trata de um fluxo de energia que retorna ao meio (1). Como teremos sempre esse facto em mente, podemos omitir, no que se segue, esse sinal.)

As razões

$$(20a) \qquad r = \frac{J_R}{J_I} = \frac{\vec{E}_R^{\,2}}{\vec{E}_I^{\,2}}$$

$$(20b) \qquad t = \frac{J_T}{J_I} = n_{12}\, \frac{\vec{E}_T^{\,2}}{\vec{E}_I^{\,2}}\, \frac{\cos\psi}{\cos\varphi}$$

(com expressões que já têm em conta a lei (7) e a definição (9)) constituem, respectivamente, o factor de reflexão e o factor de transmissão, ou reflectividade e transmissibilidade e, no seu conjunto, medem a repartição da energia incidente pelas duas ondas secundárias.

Note-se que no cálculo destas grandezas nós estamos interessados sobretudo nos seus valores médios dado que os períodos de oscilação dos campos são muito mais pequenos que os tempos de medição habituais. Assim, os campos podem ser substituídos pelas suas amplitudes (reais) sem alterar a forma das expressões (20). Suporemos isso daqui em diante.

Mostra-se que as relações (20) conduzem a $r + t = 1$, igualdade que traduz o princípio de conservação da energia.

Os factores r e t dependem do estado de polarização da onda incidente. Podem calcular-se em particular para as duas componentes, normal e paralela, da onda incidente, em função dos ângulos φ e ψ, com base nas fórmulas de Fresnel. A partir destes valores particulares r_N, t_N e r_P, t_P, é fácil obter depois as expressões gerais dos factores globais r e t.

Para calcular r_N, t_N e r_P, t_P (depois de reproduzido o processo $(19) \to (20)$) basta tomar para amplitudes reais dos campos os módulos das amplitudes complexas contidas nas fórmulas de

Fresnel. Isso conduz, de um modo geral, a

$$(21)\quad \begin{cases} r_N = \dfrac{\sin^2(\varphi-\psi)}{\sin^2(\varphi+\psi)} \\[2ex] t_N = \dfrac{\sin 2\varphi \cdot \sin 2\psi}{\sin^2(\varphi+\psi)} \end{cases}$$

$$(22)\quad \begin{cases} r_P = \dfrac{tg^2(\varphi-\psi)}{tg^2(\varphi+\psi)} \\[2ex] t_P = \dfrac{\sin 2\varphi \cdot \sin 2\psi}{\sin^2(\varphi+\psi)\ \cos^2(\varphi-\psi)} \end{cases}$$

Verifica-se aqui fàcilmente que $r_N + t_N = 1$ e $r_P + t_P = 1$.

*

Com incidência normal ($\varphi = 0$) devem utilizar-se as fórmulas (16), em vez das fórmulas (15), nos cálculos que acabam de ser feitos. Resulta, então:

$$(23)\quad \begin{cases} r_N = r_P = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^2 = r_0 \\[2ex] t_N = t_P = \dfrac{4n}{(n+1)^2} = t_0 \end{cases}$$

Este resultado significa que, como já fora observado no parágrafo 5A, para incidência normal desaparece a distinção entre componentes N e P da onda incidente, pelo facto de nesta situação excepcional deixar de existir um plano de incidência definido (por ser $\vec{s}_I \equiv \vec{n}$).

*

Quer através dos resultados (21) e (22), quer através do resultado (23) (mas para este muito mais fàcilmente) vê-se que

$$(24) \qquad \lim_{n \to 1} r_0 = 0 \qquad \lim_{n\to 1} t_0 = 1 \quad :$$

quanto mais pequena é a diferença nas "densidades" ópticas dos dois meios, menor é a quantidade de energia transportada pela onda reflectida; quando n se aproxima de 1, pràticamente toda a luz é refractada.

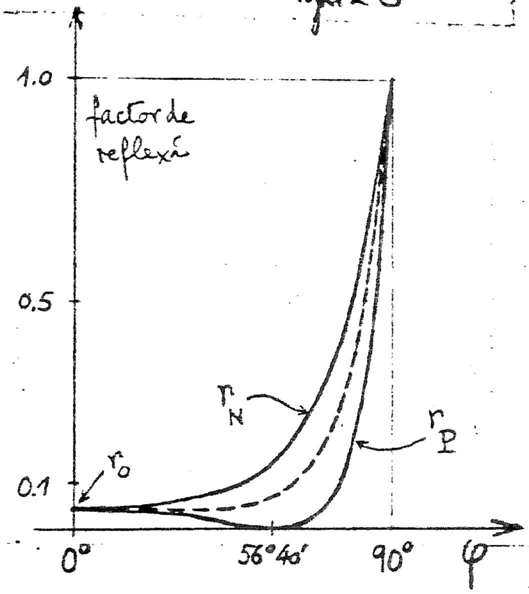
Exemplo: seja, para a incidência normal, o caso de um vidro como meio (2) com índice de refracção $n \simeq 1{,}5$ relativamente ao ar como meio (1); temos

$$r_0 = \left(\frac{0{,}5}{2{,}5}\right)^2 = 0{,}04 \qquad t_0 = 0{,}96$$

*

Para termos uma ideia da variação dos factores de reflexão e de refracção com o ângulo de incidência, variação que é regida pelas equações (21) e (22), observemos a Figura 3 que dá $r_N(\varphi)$ e $r_P(\varphi)$ para o caso de um vidro de índice de refracção $n = 1{,}52$ relativamente ao ar. Para a incidência de Brewster (neste caso 56° 40') obtem-se como já se sabe $r_P = 0$.

Figura 3



*

Por outro lado, a partir das fórmulas (21) e (22) podemos justificar a polarização da luz por refracção obtida com uma pilha de lamelas transparentes. Se um feixe de luz despolarizada incide sobre a pilha é parcialmente polarizado em cada refracção e pode atingir-se um grau de polarização razoàvelmente elevado, mesmo com um pequeno número de lamelas. Com efeito, na transmissão através de uma lamela, isto é, depois de o feixe de luz

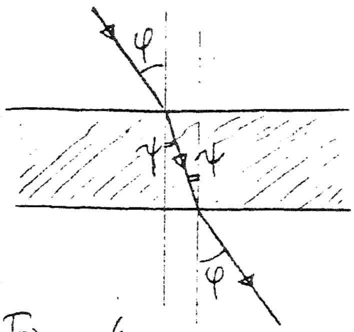


Figura 4

sofrer duas refracções (Fig. 4), as intensidades das componentes N e P da onda transmitida, iguais por hipótese na onda incidente, estão agora na razão

$$(25) \qquad \left(\frac{t_N}{t_P}\right)^2 = \cos^4(\varphi-\psi) = \chi < 1$$

Para obter este resultado, utilizamos as 2as equações dos sistemas (21) e (22) e temos em atenção que elas são insensíveis à troca de φ com ψ; assim as razões t_N/t_P são iguais para a 1ª e para a 2ª refracções, pois na 2ª tudo se passa como se simplesmente φ e ψ trocassem os seus papéis, relativamente aos da 1ª. A eq. (25) mostra que, ao emergir da lamela a componente paralela (P) é mais forte que a componente normal (N), com uma razão de intensidades $1/\chi$. Na pilha de lamelas, a intensidade da componente normal reduz-se, em relação à intensidade da componente paralela, na razão de χ^m sendo m o número de lamelas. Se se trabalha, por exemplo, sob incidência de Brewster, $\varphi+\psi=\pi/2$, $tg\,\varphi = n$ e χ vem dado por

$$\chi = \cos^4(\varphi-\psi) = \sin^4 2\varphi = \left(\frac{2n}{1+n^2}\right)^4$$

Com $n=1{,}5$, $\chi = 0{,}73$; isto significa que se obtém uma razão de intensidades 0,2 com 5 lamelas, 0,07 com 8 lamelas. Vê-se claramente que esta polarização por refracção é sempre parcial, embora se possa conseguir na prática luz quase completamente polarizada (polarizada linearmente).

*

Suponhamos agora que a onda incidente é polarizada linearmente numa direcção que faz um ângulo α_I com o plano de incidência de tal modo que:

$$(26)\qquad \begin{cases} E^{\circ}_{IP} = |\vec{E}^{\circ}_{I}| \cos\alpha_I \\ E^{\circ}_{IN} = |\vec{E}^{\circ}_{I}| \sin\alpha_I \end{cases}$$

e em consequência

$$(27)\qquad \operatorname{tg}\alpha_I = E^{\circ}_{IN} / E^{\circ}_{IP} \quad .$$

Então por (19):

$$(28)\qquad \begin{cases} J_{IP} = J_I \cos^2\alpha_I \\ J_{IN} = J_I \sin^2\alpha_I \end{cases} .$$

Visto que as fases variam sòmente de 0 ou π (Cf. parágrafo 5C), as ondas reflectida e transmitida serão também polarizadas linearmente e em consequência poderemos escrever para as duas ondas secundárias relações semelhantes a (26) e (27) e a (28). Em particular, sendo α_R e α_T os ângulos que fazem respectivamente $\vec{E}_R$ e $\vec{E}_T$ com o plano de incidência, resulta das fórmulas de Fresnel:

$$(29)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha_R = -\dfrac{\cos(\varphi-\psi)}{\cos(\varphi+\psi)} \operatorname{tg}\alpha_I \\ \operatorname{tg}\alpha_T = \cos(\varphi-\psi)\ \operatorname{tg}\alpha_I \end{cases} .$$

É interessante estudar as variações de α_R e α_T em função do ângulo de incidência, para um dado α_I.

O nosso objectivo vai restringir-se todavia apenas a encontrar os factores de reflexão e de transmissão nestas circunstâncias. Partindo de (20) e de suas similares para r_N, t_N e r_P, t_P, vem, quando se utiliza (28) e suas similares para J_R e J_T:

$$r = \frac{J_R}{J_I} = \frac{J_{RP}+J_{RN}}{J_I} = \frac{J_{RP}}{J_{IP}} \cos^2\alpha_I + \frac{J_{RN}}{J_{IN}} \sin^2\alpha_I$$

ou seja:

(30) $$r_{\alpha_I} = r_P \cos^2\alpha_I + r_N \sin^2\alpha_I \quad ;$$

e analogamente para o factor de transmissão:

(31) $$t_{\alpha_I} = t_P \cos^2\alpha_I + t_N \sin^2\alpha_I \quad .$$

O cálculo de (30) para $\alpha_I = \pi/4$, por exemplo dá

(32) $$r_{(\pi/4)} = \frac{1}{2}(r_P + r_N)$$

e a variação deste factor de reflexão particular com φ, para $n = 1,52$ constitue a curva a tracejado na Figura 3. Ora acontece que este mesmo resultado $1/2\,(r_P + r_N)$ se obtém para o factor de reflexão da luz natural.

Como sabemos, a luz natural pode considerar-se polarizada durante intervalos de tempo muito grandes comparados com o período das oscilações dos campos electromagnéticos que a descrevem, mas ainda assim muito pequenos em face dos tempos de medição ou de observação. Ao longo de um intervalo de tempo de medição a luz natural apresenta uma distribuição aleatória, completamente irregular (caótica), dos mais diversos estados de polarização. Daqui resulta que, para encontrar o factor de reflexão para a luz natural se deva tomar em (30) o valor médio sobre todas as orientações α_I. Como o valor médio de $\sin^2\alpha_I$ ou de $\cos^2\alpha_I$, sobre todas as orientações distribuídas aleatoriamente, é $\frac{1}{2}$, daí resulta que: $r_{\text{luz natural}} = 1/2\,(r_P + r_N)$.

ÓPTICA ELECTROMAGNÉTICA

REFLEXÃO TOTAL

REFLEXÃO TOTAL

1. Introdução

Recordemos que das leis da refracção se tem

(1) $$\sin \psi = \frac{\sin \varphi}{n_{12}}$$

como relação entre o ângulo de incidência φ e o ângulo de refracção ψ, sendo n_{12} o índice de refracção do meio (2) relativamente ao meio (1). Se $n_{12} > 1$, a cada φ real corresponde sempre um ângulo ψ real; há um ψ_l, ângulo limite, que corresponde a $\varphi = 90°$ (incidência rasante) mas nunca deixa de verificar-se a refracção, ao mesmo tempo que se verifica a reflexão.

Porém, se $n_{12} < 1$ (isto é na passagem de um meio mais refringente para um meio menos refringente), só há ψ real enquanto φ satisfizer

(2) $$\sin \varphi \leq n_{12}$$

Para uma incidência φ_l que faz $\sin \varphi_l = n_{12}$ tem-se $\psi = 90°$ (refracção rasante) e a partir desse valor de φ já não há refracção, toda a onda incidente se reflecte. É o fenómeno da reflexão total, bem conhecido experimentalmente, e de cuja interpretação dentro da teoria electromagnética nos vamos ocupar. Ao ângulo φ_l dá-se o nome de ângulo limite de reflexão total.

2. Existência de campo electromagnético no segundo meio. Onda evanescente; suas características

O primeiro facto importante a fazer notar é que apesar de não haver refracção isso não significa que não haja nenhum campo electromagnético no 2º meio. Pode com efeito verificar-se experimentalmente a existência de uma onda de características singulares, no 2º meio. Vamos estudar teoricamente esse campo electromagnético.

Consideremos o factor de fase da onda transmitida, usando o sistema de referência habitual ($\vec{e}_z \equiv \vec{n}$, $\vec{e}_y$ normal ao plano de incidência):

$$(3) \qquad \zeta_T = \exp\left[i\omega\left(\frac{x\sin\psi + z\cos\psi}{a_2} - t\right)\right]$$

Da eq. (1) resulta $\cos\psi = \pm\sqrt{1 - \frac{\sin^2\varphi}{n_{12}^2}}$

e como estamos na hipótese de ser $\sin\varphi > n_{12}$ porque nos interessa considerar incidências a partir do ângulo limite φ_l, vem $\cos\psi$ sempre imaginário

$$(4) \qquad \cos\psi = \pm i\sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{n_{12}^2} - 1}$$

A substituição da eq.(4) na eq.(3) conduz a

$$(5) \qquad \zeta_T = \exp\left[i\omega\left(x\frac{\sin\varphi}{a_2 n_{12}} - t\right)\right]\exp\left[\mp\frac{\omega}{a_2}\sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{n_{12}^2} - 1}\; z\right]$$

$n_{12} = \frac{a_1}{a_2}$

Desta transformação do factor de fase devem tirar-se duas conclusões:

a) afastada a dependência em z do factor imaginário, que é o que contém o arranjo espacio-temporal determinante de uma propagação por ondas, nós concluimos que se está em presença de uma onda que se propaga segundo o eixo dos xx (em direcção rasante); não há propagação ao longo do eixo dos zz.

velocidade de propagação
$v = a_2 n_{12}/\sin\varphi$
$\varphi = \varphi_l \Rightarrow v = a_2$
$\varphi = 90° \Rightarrow v = a_1$
$a_2 > a_1$

b) indo o factor real reunir-se à amplitude, vai determinar uma amplitude efectiva dependente de z, e não constante, como o é a amplitude da onda incidente.

Tais características singulares da onda no 2º meio podem ser melhor especificadas pelo prosseguimento da análise. Antes de mais, porém, deve observar-se que é de rejeitar como solução extranha a que corresponde ao sinal (+) do factor real de ζ_T na eq. (5), pois essa solução conduziria a um aumento exponencial da amplitude efectiva segundo o eixo dos zz, até um valor infinito — o que fisicamente é um absurdo. Só é pois de aceitar a solução correspondente ao sinal (−) do factor real de τ_T, que acarreta para a amplitude efectiva um decrescimento exponencial para zero ao longo do eixo dos zz. Trata-se pois de uma onda evanescente, que amortece ràpidamente à medida que o observador penetra no 2º meio.

Como em todos os casos de decrescimento exponencial para zero, a rapidez com que a amplitude amortece pode medir-se através de uma espessura de penetração definida como o valor de z para o qual a amplitude se reduz a $1/e$ do seu valor na superfície de separação dos dois meios (ou seja, para $z=0$). Esta quantidade é portanto o inverso do coeficiente de z no factor real de τ_T (ver eq.(5)). Tem-se assim que a espessura de penetração é directamente proporcional ao comprimento de onda da radiação no meio (2) (ou no meio (1)). Pode fazer-se uma ideia do valor desta espessura de penetração, calculando o factor real de τ_T para diferentes ângulos de incidência e diferentes valores de z; o quadro seguinte regista um exemplo desses cálculos, no caso de um vidro de índice de refracção 1,596 relativamente ao ar (sendo o vidro tomado como meio (1) e o ar como meio (2), vem $n_{12} = (1,596)^{-1}$):

(6)

	$\varphi=40°$	$\varphi=60°$	$\varphi=85°$
$z/\lambda_2 = 1$	0,2352	0,0025	0,0004
$z/\lambda_2 = 4$	0,0031	4×10^{-11}	3×10^{-14}

Para analisar a onda evanescente do ponto de vista energético, podemos seguir a via indirecta de calcular a energia da onda reflectida confrontando-a com a da onda incidente. Recorre-se para isso às fórmulas de Fresnel, substituindo nelas $\sin\psi$ e $\cos\psi$ pelas expressões (1) e (4); resulta:

$$(7)\quad \begin{cases} E^0_{RN} = \dfrac{\cos\varphi - i\sqrt{\sin^2\varphi - n_{12}^2}}{\cos\varphi + i\sqrt{\sin^2\varphi - n_{12}^2}}\, E^0_{IN} \\[2ex] E^0_{RP} = \dfrac{n_{12}^2\cos\varphi - i\sqrt{\sin^2\varphi - n_{12}^2}}{n_{12}^2\cos\varphi + i\sqrt{\sin^2\varphi - n_{12}^2}}\, E^0_{IP} \end{cases}$$

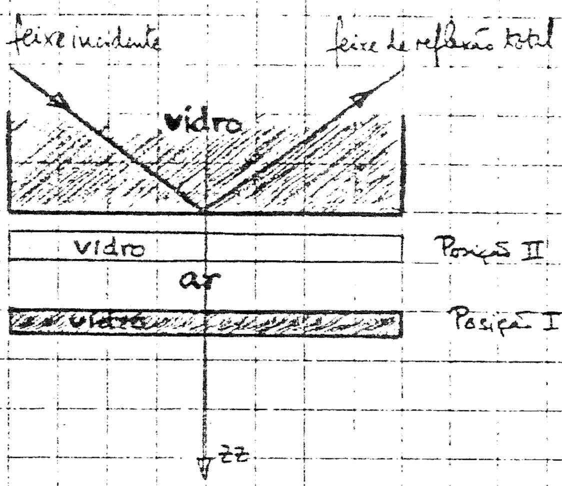
e dado que em numeradores e denominadores figuram complexos conjugados (portanto de igual módulo), temos

$$(8)\quad \begin{cases} |E^0_{RN}| = |E^0_{IN}| \\ |E^0_{RP}| = |E^0_{IP}| \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} {E^0_{RN}}^2 = {E^0_{IN}}^2 \\ {E^0_{RP}}^2 = {E^0_{IP}}^2 \end{cases}$$

donde resulta serem iguais em média as densidades de energia, na onda reflectida e na onda incidente; e por isto são também iguais os fluxos médios dos vectores de Poynting respectivos em qualquer área da superfície de separação dos dois meios. Isto significa que toda a energia da onda incidente passa para a onda reflectida: apesar da existência da onda evanescente, não passa efectivamente nenhuma energia para o segundo meio, em média. À mesma conclusão se chegaria pelo cálculo directo do valor médio do vector de Poynting do campo electromagnético no segundo meio, para $z=0$.

3. Processos de verificação experimental da onda evanescente. Aparelho de Gramont.

Vamos descrever processos de verificação experimental da onda evanescente. Comprovaremos principalmente que o segundo meio está interessado no fenómeno embora numa pequena espessura. Veremos também que se limitarmos suficientemente e convenientemente a espessura do segundo meio, poderá mesmo não se dar a reflexão total.

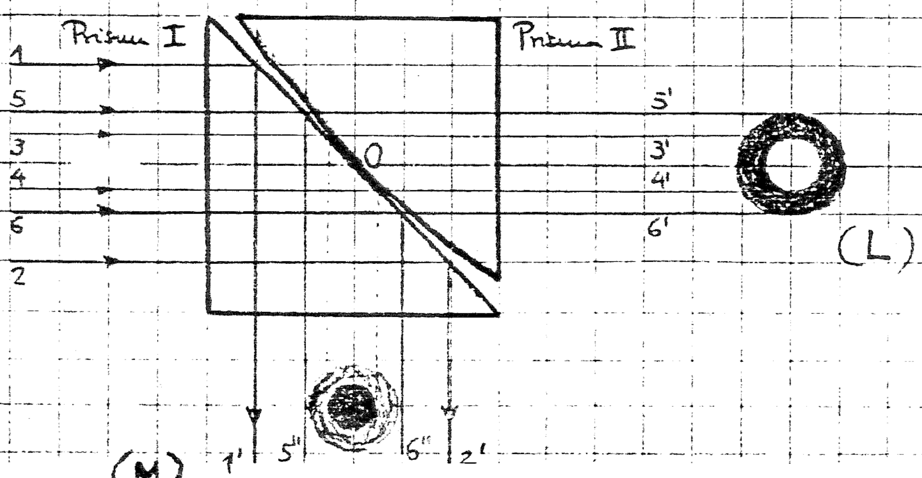


em primeiro lugar

Consideremos o dispositivo figurado. À superfície de separação vidro-ar fazemos chegar um feixe de luz sob incidência tal que se produza reflexão total. No ar (que é o segundo meio) não se observa qualquer transmissão.

Porém, se aproximarmos uma lâmina de vidro da superfície de separação, e se formos a pouco e pouco diminuindo a distância que a separa da superfície de separação, verificamos a certa altura que passa a haver transmissão para a lâmina; deixou de verificar-se reflexão total. Quantitativamente, deixa de haver reflexão total quando a distância z entre a lâmina e a superfície de separação é da mesma ordem que o comprimento de onda λ_2 (no meio 2). Isto prova que o segundo meio é interessado no fenómeno e que a espessura de penetração depende de λ_2.

Mais interessante é o aparelho imaginado por Gramont. É constituído por dois prismas de reflexão total, um dos quais tem a face hipotenusa talhada em forma ligeiramente encurvada, constituindo uma calote convexa de grande raio de curvatura. Entre as duas faces hipotenusas pode assim estabelecer-se um contacto numa área em torno de O, de forma aproximadamente circular.



— luz branca, por ex. —
Enviando um feixe de raios paralelos de luz composta de modo a incidir normalmente a uma das faces catetos do prisma I, pode observar-se que os diferentes raios do feixe não seguem todos o mesmo percurso. Assim, os que incidem na face hipotenusa de I bastante afastados da área de contacto, como os raios 1 e 2, sofrem reflexão total. Aqueles que vão incidir sobre a zona de contacto, como os compreendidos entre 3 e 4, penetram completamente no prisma II (pois tudo se passa como se atravessassem sempre o mesmo meio) e vão sair pela face cateto do prisma II que lhes é normal. Daqui resulta que um observador colocado em (L) vê um círculo iluminado sobre fundo escuro, enquanto que um observador colocado em (M) vê todo o campo iluminado excepto um círculo de escuridão central. Mas falta o mais importante. Os raios que atingem a hipotenusa do prisma I na vizinhança da área de contacto, e que deveriam totalmente reflectir-se, têm na verdade ondas evanescentes que avançando pela pequena espessura de ar aí existente originam transmissão, como já vimos no exemplo atrás descrito. Sucede porém que, sendo a luz incidente uma luz composta de radiações de toda uma gama de comprimentos de onda e dependendo a espessura de penetração das ondas evanescentes do comprimento de onda, as diferentes radiações vão ter comportamentos diferentes face à espessura de ar que enfrentam na vizinhança da área de contacto! Se repararmos que $\lambda_{violeta} < \lambda_{vermelho}$ fàcilmente compreenderemos que as radiações da zona do vermelho penetram mais e, como resultado disso, para os raios mais afastados da área de contacto só as radiações vermelhas conseguem transmitir-se ao prisma II, enquanto as violetas sofrem já reflexão total. Há assim uma zona, em coroa circular, em torno do círculo de contacto entre as duas faces hipotenusa dos prismas, na qual se produz uma decomposição da luz

segundo os comprimentos de onda, havendo para cada espessura de ar uma partição entre radiações que são transmitidas e radiações que são totalmente reflectidas. Em consequência disto, um observador em (L) vê uma auréola vermelha em torno do círculo branco que observa; e um observador em (M) vê uma auréola violeta em torno do círculo escuro que observa.

(segue na pág seguinte)

4. Diferenças de fase na reflexão total

Vimos atrás que, excluída expressamente a situação de reflexão total, as componentes normal e paralela da onda reflectida só podiam fazer uma diferença de fase de π ou estar em fase com as homólogas componentes da onda incidente. Essas duas únicas possibilidades dependem da conjugação de certas condições sobre o índice de refracção (que seja $n_{12} > 1$ ou $n_{12} < 1$) e sobre o ângulo de incidência (que fique aquém ou além do ângulo de Brewster). Mas, para certa conjugação de condições, o valor da diferença de fase (entre E_{RN} e E_{IN} ou entre E_{RP} e E_{IP}) é $\underline{0}$ ou $\underline{\pi}$ e não varia portanto com o valor de n_{12} ou com o valor de φ, dentro das respectivas condições.

Vamos ver agora que no fenómeno de reflexão total se passa algo de completamente distinto: as diferenças de fase dependem do valor de n_{12} (que agora é sempre < 1) e variam continuamente com o ângulo de incidência φ.

As diferenças de fase procuradas δ_N (entre E_{RN} e E_{IN}) e δ_P (entre E_{RP} e E_{IP}) extraem-se fàcilmente das relações (7) pois podemos escrever

$$e^{-i\delta_N} = \frac{E_{RN}}{E_{IN}} = \frac{E^o_{RN}}{E^o_{IN}}$$

e semelhante para δ_P. Donde resulta:

$$(9) \quad \begin{cases} e^{-i\delta_N} = \dfrac{\cos\varphi - i\sqrt{\sin^2\varphi - n_{12}^2}}{\cos\varphi + i\sqrt{\sin^2\varphi - n_{12}^2}} \\[2ex] e^{-i\delta_P} = \dfrac{n_{12}^2\cos\varphi - i\sqrt{\sin^2\varphi - n_{12}^2}}{n_{12}^2\cos\varphi + i\sqrt{\sin^2\varphi - n_{12}^2}} \end{cases}$$

E daqui se extrai fàcilmente

$$(10)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{\delta_N}{2} = \dfrac{\sqrt{\sin^2\varphi - n_{12}^2}}{\cos\varphi} \\[2ex] \operatorname{tg}\dfrac{\delta_P}{2} = \dfrac{\sqrt{\sin^2\varphi - n_{12}^2}}{n_{12}^2\cos\varphi} \end{cases}$$

e em consequência

$$(11)\qquad \operatorname{tg}\frac{\delta_P}{2} = \operatorname{tg}\frac{\delta_N}{2}\cdot\frac{1}{n_{12}^2}$$

As eq. (10) mostram como δ_N e δ_P variam com n_{12} e φ; a eq. (11) mostra que se tem sempre $\delta_N < \delta_P$.

Deste último facto, a saber, que as ondas reflectidas N e P apresentam diferenças de fase diferentes relativamente às respectivas ondas incidentes, resulta que, por reflexão total, se produz uma modificação no estado de polarização, da onda incidente para a onda reflectida, não devida às mudanças de amplitudes mas às diferenças de fase ocorridas. (Vimos já, com efeito, que não há, na reflexão total, mudanças de amplitudes da onda incidente para a onda reflectida — Cf. eq. (8)).

Calculemos a diferença de fase relativa, δ:

$$(12)\qquad \delta = \delta_P - \delta_N$$

mediante as eq. (10); vem:

$$(13)\qquad \operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - n_{12}^2}}{\sin^2\varphi}$$

Notemos que $\operatorname{tg}\delta/2$ se anula para dois valores de φ, a saber, $\varphi = \pi/2$ e $\varphi = \varphi_l$ ($\arcsin n_{12}$), isto é, justamente para os extremos do intervalo de variação de φ em que se verifica a reflexão total. Entre os dois zeros, por se tratar de uma função positiva e que não se torna infinita, deve a função $\operatorname{tg}\delta/2$ ter um máximo, pelo menos. Passando a derivada $\frac{\partial}{\partial \varphi}(tg\, \delta/_2)$, verifica-se que se anula, apenas uma vez, para

$$(14) \qquad \sin^2 \varphi = \frac{2 n_{12}^2}{1 + n_{12}^2} :$$

há portanto um máximo de $tg\, \delta/_2$, que o mesmo é dizer de δ (a função tg é monótona). O valor máximo, δ_m, da diferença entre as diferenças de fase δ_N e δ_P vem dado por:

$$(15) \qquad tg \frac{\delta_m}{2} = \frac{1 - n_{12}^2}{2 n_{12}}$$

e para um dado n_{12} é atingido quando o ângulo de incidência satisfaz (14). Vê-se que δ_m é tanto maior quanto menor fôr n_{12}, ou seja, quanto maior fôr n_{21}.

5. Transformação de luz polarizada linearmente em luz polarizada circularmente

Vamos agora mostrar como se pode tirar partido da modificação do estado de polarização que se produz em reflexão total, para transformar luz polarizada linearmente em luz polarizada circularmente.

Devemos para isso procurar atingir que se cumpram duas condições igualmente importantes:
1ª) que sejam iguais entre si as amplitudes das componentes N e P na onda reflectida;
2ª) que a diferença de fase relativa $\delta = \delta_P - \delta_N$ iguale $\pi/2$.
São estas como se sabe as condições para que uma onda plana monocromática se encontre polarizada circularmente.

Para satisfazer a primeira condição basta conseguir que na onda incidente sejam iguais entre si as amplitudes das ondas N e P, pois pelas eq. (8) sê-lo-ão também as amplitudes da ondas reflectidas N e P. Então, visto que a onda incidente é, por hipótese, polarizada linearmente, se escolhermos para inclinação da direcção de polarização sobre o plano de incidência o ângulo $\pi/4$, temos $|E_{IN}| = |E_{IP}|$ e com isso também $|E_{RN}| = |E_{RP}|$.

Mais complicado é satisfazer a segunda condição. Com efeito, querendo já utilizar a diferença de fase relativa no seu valor máximo δ_m, para tirar o maior proveito, deveríamos procurar um meio tal que $\delta_m = \frac{\pi}{2}$ ou seja $\operatorname{tg} \frac{\delta_m}{2} = 1$ ou seja ainda, por (15):

$$\frac{1 - n_{12}^2}{2 n_{12}} = 1 .$$

Daqui resulta

$$n_{12}^2 + 2n_{12} - 1 = 0 \qquad (\text{com } n_{12} < 1)$$

o que dá $n_{12} = 0{,}414$, ou seja, $n_{21} = 2{,}414$.

Em conclusão, o índice de refracção do meio a utilizar deveria ser 2,414, o que não é de modo nenhum prático: sòmente o diamante negro tem um índice tão elevado, mas esse é o meio menos conveniente, por ser absorvente. Para obviar a dificuldade, Fresnel recorreu a uma bireflexão, por um processo expedito, que o levou a conceber o chamado paralelipípedo de Fresnel, que a seguir se descreve.

Fresnel dividiu a diferença de fase de $\pi/2$ a ser obtida, por duas reflexões, obtendo $\pi/4$ em cada uma delas. Utilizando-se um vidro de índice $n_{21} = 1{,}51$ ($n_{12} = 1/1{,}51$) vêm por (14) e por (15) os seguintes valores:

$$\varphi_m = 51^\circ 20' \quad \text{e} \quad \delta_m = 45^\circ 56' .$$

Pode assim atingir-se $\delta^* = \pi/4 = 45^\circ$ para dois valores de φ: $\varphi_1^* = 48^\circ 37'$ $\varphi_2^* = 54^\circ 37'$ permitindo qualquer deles uma boa margem de trabalho. (Ver Figura A)

As duas reflexões no paralelipípedo de Fresnel realizam-se como indica a Figura B.

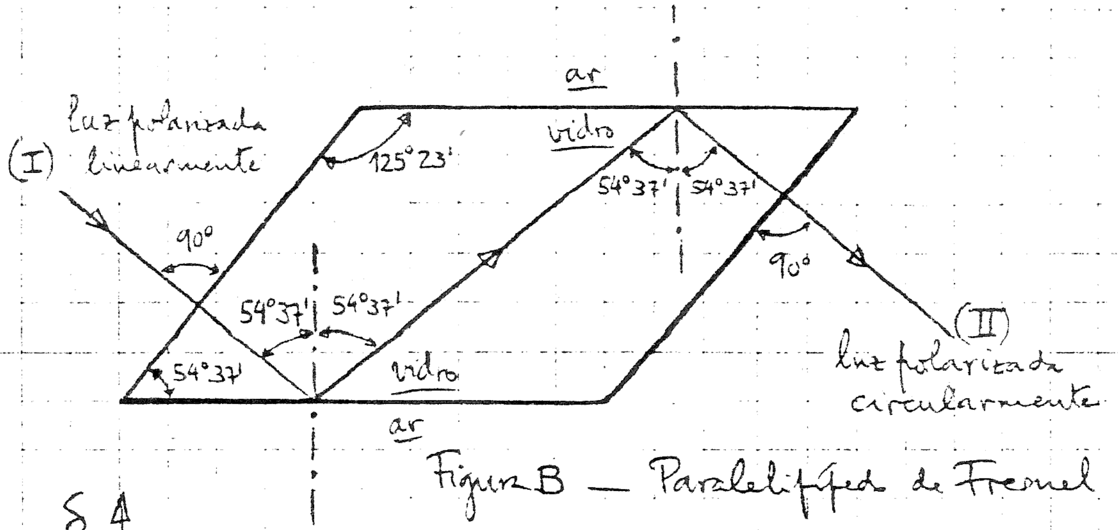


Figura B — Paralelipípedo de Fresnel

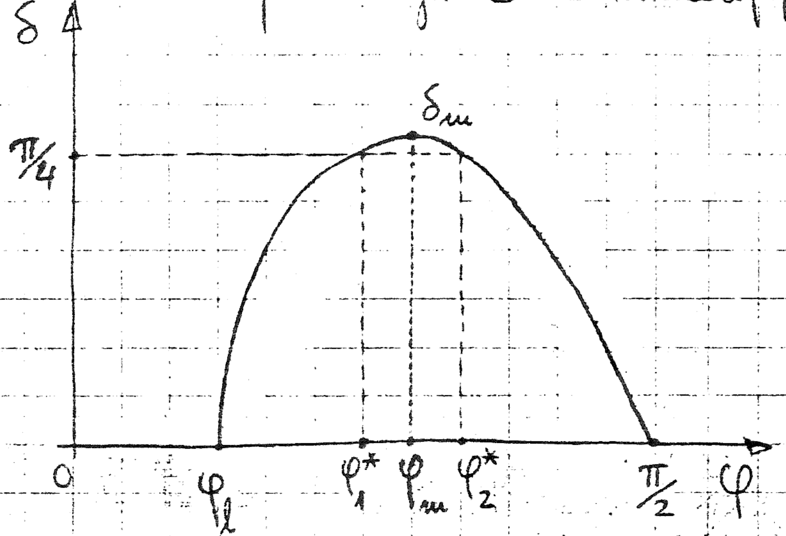


Figura A —
— Curva de variação de δ com φ
— Máximo de δ, δ_m, atingido para $\varphi = \varphi_m$
— Valor de n_{12}: $1/1{,}51$ (vidro-ar)

Deve notar-se por fim que o paralelipípedo de Fresnel é um aparelho reversível: fazendo entrar por (II) luz polarizada circularmente, obtém-se em (I) luz polarizada linearmente cuja direcção de polarização faz um ângulo $\pi/4$ (45°) com o plano de incidência.

ELECTROMAGNETISMO II

1985/1986

Capítulo VII

Fundamentos electromagnéticos da Óptica Geométrica

Pág's 0 a 21 + 22 a 26 (Apêndice)

FUNDAMENTOS ELECTROMAGNÉTICOS DA ÓPTICA GEOMÉTRICA

FUNDAMENTOS ELECTROMAGNÉTICOS DA ÓPTICA GEOMÉTRICA

1. Introdução

As ondas luminosas na região do visível caracterizam-se por oscilações de frequências muito elevadas (da ordem de grandeza de 10^{14} seg^{-1}) ou, o que é o mesmo, pela pequena dimensão dos c.d.o. (da ordem de grandeza de 10^{-5} cm). Não é assim de estranhar que se obtenha uma boa primeira aproximação às leis de propagação da luz nesse domínio, quando se considera completamente desprezável o tamanho finito dos comprimentos de onda. Um tal procedimento revela-se inteiramente adequado a um grande número de problemas de Óptica; de facto, os fenómenos que não podem explicar-se mediante este tratamento aproximado (i.e., os fenómenos de difracção) tornam-se observáveis apenas em experiências cuidadosamente conduzidas.

O ramo da Óptica baseado sobre esta aproximação (correspondente ao caso limite $\lambda \to 0$) é conhecido por Óptica Geométrica, visto que nesta teoria as leis da óptica se podem formular na linguagem da geometria. É-se conduzido a pensar que a energia luminosa é transportada ao longo de certas curvas, ditas raios luminosos e muitos aspectos importantes da propagação do campo electromagnético, neste domínio, se traduzem por certas propriedades geométricas simples destes raios.

É bem sabido que se pode obter uma imagem física de um feixe de raios luminosos, levando a luz de uma fonte pontual a passar através de uma pequena abertura praticada num alvo opaco. A região que a luz atinge no espaço atrás do alvo parecerá, à primeira vista, bem delimitada por uma superfície de demarcação muito nítida. Um exame mais cuidadoso revela contudo que a intensidade da luz, próximo dessa superfície de demarcação, varia não bruscamente mas continuamente do escuro para a franca luminosidade — e que esta variação não é monótona mas sim de um carácter oscilatório que se manifesta pelo aparecimento de bandas claras alternando com bandas escuras, chamadas franjas de difracção. Ora a região na qual se observa esta rápida mas contínua variação tem dimensões da ordem de grandeza do c.d.o. Portanto, na medida em que esta grandeza seja desprezável em comparação com as dimensões da abertura praticada no alvo, nós podemos falar de um feixe finamente delimitado. Quando se reduz o tamanho da abertura abaixo das dimensões do c.d.o., surgem fenómenos que exigem um estudo mais aprofundado. Todavia se se consideram sòmente os casos limites de c.d.o.'s desprezáveis, nenhuma restrição se impõe então ao tamanho da abertura — podemos assim dizer que uma abertura de dimensões desprezàvelmente pequenas define um feixe infinitamente fino, o raio luminoso.

É justamente ao encontro desta noção empírica de raio luminoso que vem a aproximação dos comprimentos de onda muito pequenos, cometida no âmbito da Teoria electromagnética de Maxwell. Esta aproximação conduz com efeito a um conceito geométrico preciso, essencialmente ligado às equações fundamentais do campo electromagnético, e capaz de fornecer, pelas suas propriedades, as leis de propagação — e, de modo geral, de comportamento — da luz, neste domínio.

O estudo dos Fundamentos electromagnéticos da Óptica geométrica começa portanto pelo estabelecimento — a partir das equações de Maxwell — do conceito de raio luminoso geométrico como entidade electromagnética, e passa depois à demonstração das suas mais importantes propriedades das quais podemos destacar desde já as seguintes.

Mostra-se que o campo electromagnético nesta aproximação tem em cada ponto, localmente, as mesmas características gerais que o campo de uma onda plana cuja direcção de propagação fosse tangente ao raio luminoso no ponto considerado. Torna-se além disso possível associar um estado de polarização com cada raio, e estudar a sua variação ao longo do raio. Por outro lado, verifica-se que a variação da secção recta ao longo de um feixe fino de raios luminosos é uma medida da variação da intensidade da luz ao longo do feixe. Conclue-se ainda que dentro da aproximação da óptica geométrica, as leis da refracção e reflexão, estabelecidas para ondas planas incidentes sobre uma superfície de separação plana, permanecem válidas sob condições mais gerais. Portanto, se um raio luminoso incide sobre uma superfície de descontinuidade (por exemplo, a superfície de uma lente), ele reparte-se num raio reflectido e num raio transmitido, e os coeficientes de reflexão e de transmissão bem como as variações no estado de polarização podem calcular-se a partir das correspondentes fórmulas para as ondas planas.

Assim, um grande número de fenómenos ópticos poderá interpretar-se a partir de considerações geométricas, determinando os percursos dos raios luminosos e calculando a intensidade e a polarização que lhes estão associadas. No que segue, nós daremos apenas as bases para o desenvolvimento deste vasto programa que se contém na Óptica Geométrica, começando por formular as implicações resultantes de se introduzir nas equações de Maxwell a condição fundamental da aproximação que se pretende, $\lambda \to 0$.

2. Condições impostas pelas equações de Maxwell a uma onda monocromática num meio heterogéneo.

Consideremos um meio não-condutor, isótropo e sem histerese e suponhamos que nele se estabelece um campo electromagnético harmónico no tempo, de frequência ω, podendo escrever-se em representação complexa

$$(1) \qquad \begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r})\, e^{-i\omega t} \\ \vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0(\vec{r})\, e^{-i\omega t} \end{cases}$$

sendo $\vec{E}_0$ e $\vec{H}_0$ vectores complexos, funções de ponto.

As equações de Maxwell que regem em geral os campos neste meio são

$$(2) \qquad \begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} & \operatorname{div}(\varepsilon\vec{E}) = 0 \\ \operatorname{rot}\vec{H} = \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \operatorname{div}(\mu\vec{H}) = 0 \end{cases}$$

variando ε e μ de ponto para ponto na situação mais geral, que vamos encarar, de o meio não ser homogéneo. A introdução de (1) em (2) fornece as equações, independentes do tempo, a que obedecem $\vec{E}_0$ e $\vec{H}_0$:

$$(3) \qquad \begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E}_0 - i k_0 \mu \vec{H}_0 = 0 & \operatorname{div}(\varepsilon\vec{E}_0) = 0 \\ \operatorname{rot}\vec{H}_0 + i k_0 \varepsilon \vec{E}_0 = 0\,. & \operatorname{div}(\mu\vec{H}_0) = 0 \end{cases}$$

Nota: Usamos aqui o sistema de Gauss: $\varepsilon_0 = 1, \mu_0 = 1$ $(a_0 = c)$

em que $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda_0$, sendo λ_0 o c.d.o. no vácuo. (Note-se que as equações à direita em (3) são uma consequência directa das outras; nós mantemo-las mesmo assim no tratamento a seguir, por comodidade).

Se o meio fôsse homogéneo, com índice de refracção $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, uma onda plana monocromática (de frequência ω) propagando-se segundo a orientação $\vec{\sigma}$ seria dada por (1) em combinação com

$$(4) \qquad \vec{E}_0 = \vec{e}\, e^{ik_0 n(\vec{r}\cdot\vec{\sigma})} \qquad \vec{H}_0 = \vec{h}\, e^{ik_0 n(\vec{r}\cdot\vec{\sigma})}$$

em que $\vec{e}$ e $\vec{h}$ são vectores complexos constantes. Estas expressões sugerem que, quando se trata de meios heterogéneos, nós possamos representar os campos mais gerais por

$$(5) \qquad \vec{E}_0 = \vec{e}(\vec{r})\, e^{ik_0 \mathcal{S}(\vec{r})} \qquad \vec{H}_0 = \vec{h}(\vec{r})\, e^{ik_0 \mathcal{S}(\vec{r})}$$

em que $\mathcal{S}(\vec{r})$ é uma função escalar, real de ponto e $\vec{e}(\vec{r})$ e $\vec{h}(\vec{r})$ são vectores funções de ponto, em geral complexos. Introduzindo (5) em (1), vem

$$(6) \qquad \begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{e}(\vec{r})\, e^{ik_0(\mathcal{S}(\vec{r}) - ct)} \\ \vec{H}(\vec{r},t) = \vec{h}(\vec{r})\, e^{ik_0(\mathcal{S}(\vec{r}) - ct)} \end{cases}$$

e vê-se que esta representação do campo electromagnético harmónico no tempo consiste em admitir que os campos têm nas suas oscilações "amplitudes" $\vec{e}$ e $\vec{h}$ variando de ponto para ponto e uma mesma fase $k_0(\mathcal{S}(\vec{r}) - ct)$. As superfícies

$$(7) \qquad \mathcal{S}(\vec{r}) = \text{constante}$$

são <u>superfícies de igual fase</u> ou <u>frentes-de-onda</u> (elas substituem os planos $\vec{r}\cdot\vec{\sigma} = \text{const}$ em (4)).

As equações de Maxwell impõem então um conjunto de condições, entre os vectores $\vec{e}(\vec{r})$ e $\vec{h}(\vec{r})$ e a função escalar $\mathcal{S}(\vec{r})$, que resultam de introduzir (5) em (3), usando em seguida identidades diferenciais conhecidas:

$$\operatorname{rot} \vec{E}_0 = (\operatorname{rot}\vec{e} + ik_0 \operatorname{grad}\mathcal{S} \wedge \vec{e})\, e^{ik_0\mathcal{S}}$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon\vec{E}_0) = (\varepsilon \operatorname{div}\vec{e} + \vec{e}\cdot\operatorname{grad}\varepsilon + ik_0\varepsilon\,\vec{e}\cdot\operatorname{grad}\mathcal{S}) \times e^{ik_0\mathcal{S}}$$

e semelhantemente para $\text{rot}\,\vec{H}_0$ e $\text{div}(\mu\vec{H}_0)$. Essas condições são:

$$(8)\quad \begin{cases} \text{grad}\,\mathcal{S}\wedge\vec{e} - \mu\vec{h} = \dfrac{i}{k_0}\,\text{rot}\,\vec{e} \\ \text{grad}\,\mathcal{S}\wedge\vec{h} + \varepsilon\vec{e} = \dfrac{i}{k_0}\,\text{rot}\,\vec{h} \\ \vec{e}\cdot\text{grad}\,\mathcal{S} = \dfrac{i}{k_0}\left(\vec{e}\cdot\text{grad}\log\varepsilon + \text{div}\,\vec{e}\right) \\ \vec{h}\cdot\text{grad}\,\mathcal{S} = \dfrac{i}{k_0}\left(\vec{h}\cdot\text{grad}\log\mu + \text{div}\,\vec{h}\right) \end{cases}$$

(em que as duas últimas continuam a ser, como em (3), uma consequência directa das primeiras).

Passagem à situação limite $\lambda_0 \to 0$

Se estamos interessados em soluções para os pequenos valores de λ_0 (grandes de k_0), então, na medida em que os factores multiplicativos de $\frac{i}{k_0}$ em (8) não sejam muito grandes, os 2.º membros de (8) poderão desprezar-se em face dos 1.º e daí resulta a aproximação

$$(9a)\quad \begin{cases} \text{grad}\,\mathcal{S}\wedge\vec{e} - \mu\vec{h} = 0 \\ \text{grad}\,\mathcal{S}\wedge\vec{h} + \varepsilon\vec{e} = 0 \end{cases}$$

$$(9b)\quad \begin{cases} \vec{e}\cdot\text{grad}\,\mathcal{S} = 0 \\ \vec{h}\cdot\text{grad}\,\mathcal{S} = 0 \end{cases}$$

Estas equações aproximadas caracterizam a aproximação dos pequenos c.d.o. que conduz à Óptica Geométrica. (As equações (9b) decorrem directamente de (9a)).

3. Equação do "eikonal".

As equações (9a) podem encarar-se como um sistema de seis equações escalares simultâneas e lineares nas componentes cartesianas e_x, e_y, e_z e h_x, h_y, h_z. Por serem equações homogéneas, o sistema terá solução não-nula sòmente no caso em que o seu determinante se anule. Esta condição de consistência pode obter-se porém mais simplesmente, se se eliminar $\vec{e}$ e $\vec{h}$ entre as equações (9a), com a ajuda de (9b). Vem sucessivamente:

$$\operatorname{grad} \mathcal{S} \wedge \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{grad} \mathcal{S} \wedge \vec{e}\right) + \varepsilon \vec{e} = 0$$

donde

$$\vec{e} \left[(\operatorname{grad} \mathcal{S})^2 - \varepsilon\mu\right] = 0$$

donde

$$(\operatorname{grad} \mathcal{S})^2 = \varepsilon\mu$$

ou se continuarmos a designar $\sqrt{\varepsilon\mu}$ por n, índice de refracção, agora uma função do ponto $n(x,y,z)$:

$$(10) \qquad (\operatorname{grad} \mathcal{S})^2 = n^2$$

Esta é a <u>equação do eikonal</u>, equação básica da Óptica Geométrica. Ela rege localmente as superfícies de onda $\mathcal{S}(\vec{r}) = \text{const.}$ Trata-se de uma equação diferencial que pode escrever-se explìcitamente

$$(10') \qquad \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z}\right)^2 = n^2(x,y,z)$$

Pode dar-se a (10) também a forma

$$(11) \qquad \operatorname{grad} \mathcal{S} = n\vec{s}$$

se se introduzir o vector unitário $\vec{s}$, versor do $\operatorname{grad} \mathcal{S}$.
Sob qualquer destas formas (10) ou (11), a

equação do eikonal traduz que $\text{grad}_P \mathcal{S}$ tem por módulo o índice de refracção local, ou seja, $n(P)$. Note-se que o vector unitário $\vec{s}$ varia em geral também de ponto para ponto definindo uma função $\vec{s}(\vec{r})$.

4. Raio luminoso geométrico

Podem desde já definir-se os raios luminosos geométricos como as trajectórias ortogonais das superfícies de onda $\mathcal{S}(\vec{r}) = \text{const}$, ou seja, as linhas de força do campo vectorial $\text{grad}\, \mathcal{S}$. Trata-se de linhas geralmente curvas.

Por outras palavras, o raio luminoso geométrico passando por P tem em P a orientação $\vec{s}(P)$.

Que este conceito corresponde à orientação de propagação $\vec{\sigma}$ no caso de uma onda plana num meio homogéneo, torna-se claro se recordarmos que $\mathcal{S}(\vec{r})$ é então $n(\vec{r}\cdot\vec{\sigma})$ — compare (4) com (5) — sendo n e $\vec{\sigma}$ grandezas constantes de ponto para ponto, o que faz $\text{grad}\, \mathcal{S} = n\vec{\sigma}$, e se confrontarmos esta equação com (11).

Mas o significado físico deste conceito de raio luminoso — definido com toda a precisão do ponto de vista geométrico — só se revela em todo o seu conteúdo à medida que formos conhecendo as propriedades que lhe são inerentes.

Para já podemos salientar que as equações (9a), tendo em conta (6), permitem concluir que os vectores campo eléctrico e campo magnético são em cada ponto perpendiculares entre si e perpendiculares ao raio luminoso nesse ponto, definindo os três vectores $\vec{s}(P)$, $\vec{E}$ e $\vec{H}$, por esta ordem, um triedro triortogonal directo. Assim, na aproximação da Óptica Geométrica, o campo electromagnético apresenta localmente um carácter transversal em relação ao raio luminoso do mesmo modo que o campo electromagnético de uma onda plana é transversal em relação à direcção de propagação. (Cf. Introdução)

5. Os raios luminosos e o vector de Poynting na Óptica Geométrica

Para o campo electromagnético que estamos a estudar, representado pelas expressões (6), pode mostrar-se que as médias no tempo das densidades de energia eléctrica e magnética, w_e e w_m, são dadas respectivamente por

$$(12) \qquad \overline{w_e} = \frac{\varepsilon}{4}\,\vec{e}\cdot\vec{e}^{\,*} \qquad \overline{w_m} = \frac{\mu}{4}\,\vec{h}\cdot\vec{h}^{\,*}.$$

Por outro lado, pode mostrar-se que o vector de Poynting $\vec{\Sigma}$ (cujo significado físico geral deve ser recordado) tem, para o mesmo campo electromagnético, um valor médio no tempo dado por

$$(13) \qquad \overline{\vec{\Sigma}} = \frac{c}{2}\,\mathcal{R}e\left[\vec{e}\wedge\vec{h}^{\,*}\right]$$

em que $\mathcal{R}e[\ldots]$ simboliza "parte real de ...".

Estes resultados são estabelecidos em Apêndice (v. BORN & WOLF, Principles of Optics, parág. 1.4.3, pág 33 e utilizar em seguida as expressões (5)).

Ora, com base nas equações (9a) vê-se que as expressões (12) têm o valor comum

$$(14) \qquad \overline{w_e} = \overline{w_m} = \frac{1}{4}\left(\vec{e}\cdot\vec{h}^{\,*}\wedge \operatorname{grad} \mathcal{S}\right).$$

Portanto, dentro da aproximação da Óptica geométrica as médias no tempo das densidades de energia eléctrica e magnética são iguais entre si.

Além disso, utilizando (9a) e (9b), a expressão (13) transforma-se em

$$(15) \qquad \overline{\vec{\Sigma}} = \frac{c}{2\mu}\, \vec{e}\cdot\vec{e}^{*} \operatorname{grad} \mathcal{S}$$

e se designarmos por $\overline{w}$ o valor médio da densidade de energia electromagnética total ($\overline{w} = \overline{w_e} + \overline{w_m}$), igual a $2\overline{w_e}$ por (14), resulta, tendo em conta (12)

$$(16) \qquad \overline{\vec{\Sigma}} = \frac{c}{n^2}\, \overline{w} \operatorname{grad} \mathcal{S} \quad .$$

Ou ainda, se utilizarmos (11) e introduzirmos $\frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = a$:

$$(16') \qquad \overline{\vec{\Sigma}} = a\, \overline{w}\, \vec{s} \quad .$$

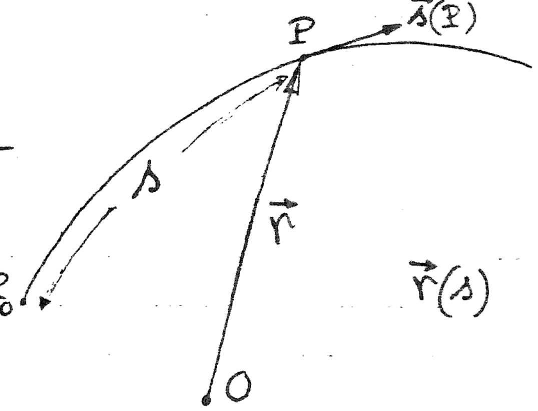
Portanto, <u>o valor médio</u> (no tempo) <u>do vector de Poynting</u> (num dado ponto P) <u>tem a direcção da normal à superfície de onda que passa por P (dirige-se segundo $\vec{s}(P)$) e a sua grandeza iguala o produto do valor médio da densidade de energia electromagnética total, $\overline{w}$, pela velocidade $a = c/n$ (valor local).</u>

Dada a analogia deste resultado com a expressão do vector de Poynting de uma onda plana, nós somos conduzidos a atribuir-lhe o seguinte significado físico: este resultado sugere que <u>dentro do rigor da Óptica Geométrica, o valor médio da densidade de energia propaga-se localmente com a velocidade $a = \frac{c}{n}$, na direcção e sentido do raio luminoso</u>.

(Pode assim dizer-se que os raios luminosos são curvas orientadas cuja orientação coincide em cada ponto com a do vector de Poynting médio.)

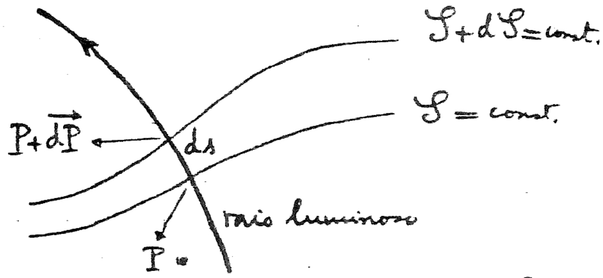
6. Percurso óptico

Consideremos um raio luminoso com a orientação $\vec{s}(P)$ no ponto P e designemos pelo escalar s o comprimento do arco definido sobre o raio luminoso desde uma referência fixa P_0 até ao ponto P. Tomemos uma origem de coordenadas O e representemos por $\vec{r}(s)$ o vector posição de P relativamente a O ($\vec{r} \equiv \overrightarrow{OP}$), considerado como função do comprimento do arco s. Nestas condições, como se sabe, porque $\vec{s}$ é o vector unitário da tangente:



(17) $$\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad \text{ou} \quad d\vec{r} = ds\,\vec{s} .$$

Estas considerações vão permitir-nos tirar um outro significado importante da equação do eikonal. Sejam, para este efeito, duas superfícies de onda vizinhas $\mathcal{S} =$ constante e $\mathcal{S} + d\mathcal{S} =$ constante e consideremos um raio luminoso que as intersecta normalmente, em P e em $P + \overrightarrow{dP}$, respectivamente (temos $ds = |\overrightarrow{dP}|$).



Ora $d\mathcal{S}$ pode calcular-se por meio de grad $\mathcal{S}$:

$$d\mathcal{S} = \text{grad}\,\mathcal{S} \cdot \overrightarrow{dP}$$

e lançando mão das equações (11) e (17), com $\overrightarrow{dP} \equiv d\vec{r}$, vem:

$$d\mathcal{S} = n\vec{s} \cdot ds\,\vec{s} = n\,ds$$

pois $\vec{s}$ é um vector unitário. Ou seja:

$$(18) \qquad \frac{d\mathcal{S}}{ds} = n \quad .$$

Portanto a distância entre as duas superfícies de onda sobre a normal (ds) é inversamente proporcional ao índice de refracção local $\underline{n}$, isto é, directamente proporcional à velocidade local $\underline{a}$.

Pode definir-se, de um modo geral, como <u>percurso óptico</u> ao longo de uma curva C o integral

$$\int_C n\, dl$$

sendo dl o elemento de arco ao longo de C.

O <u>percurso óptico</u> do raio luminoso ligando dois pontos P_1 e P_2 designa-se por $[P_1P_2]$ e vale, por (18):

$$(19) \quad [P_1P_2] = \int_{P_1}^{P_2} n\, ds = \int_{P_1}^{P_2} d\mathcal{S} = \mathcal{S}(P_2) - \mathcal{S}(P_1) \quad .$$

Visto que, como vimos, <u>localmente</u>, a densidade média da energia se propaga com a velocidade $\underline{a}$, na direcção e sentido do raio luminoso, então

$$n\, ds = \frac{c}{a}\, ds = c\, dt$$

sendo $\underline{dt}$ o tempo necessário para que a energia atravesse a distância $\underline{ds}$ ao longo do raio; portanto

$$(20) \qquad [P_1P_2] = c \int_{P_1}^{P_2} dt \quad .$$

Obtivémos assim este importante resultado: <u>o percurso óptico $[P_1P_2]$ é igual ao produto da velocidade da luz no vácuo (c) pelo tempo necessário para que a luz passe de P_1 até P_2!</u>

7. A lei da intensidade luminosa na Óptica Geométrica

A intensidade luminosa pode definir-se como o módulo do valor médio no tempo do vector de Poynting

$$I = \left| \overline{\vec{\Sigma}} \right| = a\,\overline{w} \qquad (21)$$

e a lei da conservação da energia sob forma diferencial escreve-se, como se pode mostrar (Cf. BORN & WOLF, Principles of Optics, parag 1.4.3, pag 33):

$$\operatorname{div}(I\vec{s}) = 0 \qquad (22)$$

Para ver as implicações desta relação tomemos um tubo estreito constituído pelos raios procedentes de um elemento dS_1 de uma superfície de onda $\mathcal{S}(\vec{r}) = a_1$ (const.) e seja dS_2 o elemento correspondente no qual estes raios intersectam uma outra superfície de onda $\mathcal{S}(\vec{r}) = a_2$ (const.). Integrando (22) no volume deste tubo e aplicando a este integral o teorema do fluxo-divergência, obtem-se

$$\int_S I\vec{s}\cdot\vec{\nu}\, dS = 0$$

sendo S a superfície que envolve o volume do tubo. Ora este fluxo é nulo sobre a superfície lateral do tubo ($\vec{\nu} \perp \vec{s}$); sobre a base dS_1 vale $-I_1\,dS_1$, sobre a base dS_2 vale $I_2\,dS_2$; donde resulta:

$$I_1\, dS_1 = I_2\, dS_2 \qquad (23)$$

I_1 e I_2 designando a intensidade sobre dS_1 e dS_2 respectivamente. Portanto, <u>$I\,dS$ permanece constante ao longo de um tubo de raios luminosos</u>. Este resultado exprime a lei da intensidade luminosa na Óptica Geométrica. (Cf. Introdução).

Podemos, além disso, deduzir uma expressão que explicita a variação da intensidade ao longo de cada raio em termos da função frente-de-onda $\mathcal{S}(\vec{r})$. Com efeito, se se introduz em (22) a expressão de $\vec{s}$ fornecida por (11), tem-se

$$\operatorname{div}\left(\frac{I}{n}\operatorname{grad}\mathcal{S}\right) = 0$$

ou seja:

$$\vec{\nabla}^2\mathcal{S} + \vec{\nabla}\mathcal{S}\cdot\vec{\nabla}\left(\log\frac{I}{n}\right) = 0 .$$

Ora, visto que $\vec{\nabla}\mathcal{S}\cdot\vec{\nabla} \equiv n\dfrac{d}{ds}$

(como adiante fàcilmente se mostra — ver § 8, pag 14), resulta da última equação

$$\frac{d}{ds}\left(\log\frac{I}{n}\right) = -\frac{1}{n}\vec{\nabla}^2\mathcal{S}$$

Integrando ao longo do raio luminoso (variável de integração: s, comprimento do arco respectivo) entre dois quaisquer pontos P_1 e P_2, vem:

$$(23') \qquad \frac{I_2}{I_1} = \frac{n_2}{n_1}\, e^{-\int_{s_1}^{s_2}\frac{\vec{\nabla}^2\mathcal{S}}{n}\,ds}$$

sendo s_1 e s_2 os comp. de arco correspondentes a P_1 e P_2.

A eq. (23') dá a razão entre as intensidades luminosas em dois quaisquer pontos de um qualquer raio luminoso, entendendo-se que o integral se toma ao longo deste raio luminoso, entre esses dois pontos. É esta a expressão explícita — que procurávamos — da variação da intensidade ao longo de cada raio luminoso em termos de $\mathcal{S}(\vec{r})$.

A verificação da expressão (23') para ondas planas ($\vec{\nabla}^2\mathcal{S} = 0$) em meios homogéneos ($n = \text{const}$) é óbvia, dando $I = \text{const}$. Ainda para meios homogéneos, mas com frentes de onda esféricas centradas no ponto O ($\mathcal{S}(\vec{r}) = n|\vec{r}|$), resulta fàcilmente $I(P) = \text{const}/R^2$, sendo R a distância de P a O (lei do inverso do quadrado) — em plena conformidade com (23). (Temos com efeito, neste caso, $\dfrac{\vec{\nabla}^2\mathcal{S}}{n} = \dfrac{2}{r}$, $\displaystyle\int_{s_1}^{s_2}\frac{\vec{\nabla}^2\mathcal{S}}{n}\,ds = \left[\log(r^2)\right]_{P_1}^{P_2}$, donde $I_2/I_1 = R_1^2/R_2^2$.).

8. A equação diferencial dos raios luminosos

Recorrendo às definições do parágrafo intitulado "Percurso óptico" e utilizando as equações (11) e (17) pode escrever-se a equação do eikonal sob uma nova forma, a saber

$$n \frac{d\vec{r}}{ds} = \operatorname{grad} \mathcal{S} \quad (24)$$

Esta equação especifica os raios por meio da função $\mathcal{S}(\vec{r})$, mas pode fàcilmente derivar-se a partir dela uma equação diferencial que especifica os raios directamente em termos do índice de refracção local $n(\vec{r})$.

Diferenciando (24) em ordem a s, vem

$$\frac{d}{ds}\left(n \frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \frac{d}{ds}(\operatorname{grad} \mathcal{S})$$

e para o cálculo do 2º membro façamos

$$\frac{d}{ds} = \sum_{k=1}^{3} \frac{dx_k(s)}{ds} \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{\nabla}$$

o que, por (24), se transforma em

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{n} \overrightarrow{\nabla \mathcal{S}} \cdot \vec{\nabla}$$

e então

$(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(A^2)$

$$\frac{d}{ds}(\operatorname{grad} \mathcal{S}) = \left(\frac{1}{n} \vec{\nabla} \mathcal{S} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{\nabla} \mathcal{S} =$$

$$= \frac{1}{n} \frac{1}{2} \vec{\nabla}\left[(\nabla \mathcal{S})^2\right] = \frac{1}{2n} \vec{\nabla}(n^2);$$

ou seja: $\frac{d}{ds}(\operatorname{grad} \mathcal{S}) = \operatorname{grad} n$.

(Nesta operação, casualmente, os operadores $\frac{d}{ds}$ e grad comutam).

Daqui resulta :

$$\frac{d}{ds}\left(n\,\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \text{grad}\ n \tag{25}$$

que é a forma vectorial das equações diferenciais dos raios luminosos. Vamos utilizá-la para tirar algumas conclusões interessantes.

8A. Propagação rectilínea nos meios homogéneos

Se em particular, o meio é homogéneo, $\underline{n}$ é constante e (25) reduz-se a

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = 0 \tag{26}$$

que se integra dando $\vec{r} = \vec{a}\,s + \vec{b}$ sendo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vectores constantes. Esta é a equação de uma recta na direcção do vector $\vec{a}$ e passando pelo ponto $\vec{r}_0 = \vec{b}$. Em consequência, <u>num meio homogéneo os raios luminosos têm a forma de linhas rectas</u>. Por outro lado $a = c/n$ é constante. A propagação é rectilínea e uniforme.

8B. Caso dos meios heterogéneos com simetria esférica

Como exemplo de interesse, consideremos um meio com simetria esférica, quer dizer, em que o índice de refracção dependa sòmente da distância $\underline{r}$ a um ponto fixo O :

$$n = n(r) \tag{27}$$

Este caso é aproximadamente realizado pela atmosfera terrestre, quando se tenha de ter em conta a curvatura da Terra.

Para tratar o problema lançamos mão de um artifício simples, o de calcular a variação do vector $\vec{r} \wedge n\vec{s}$ ao longo do raio luminoso. Teremos:

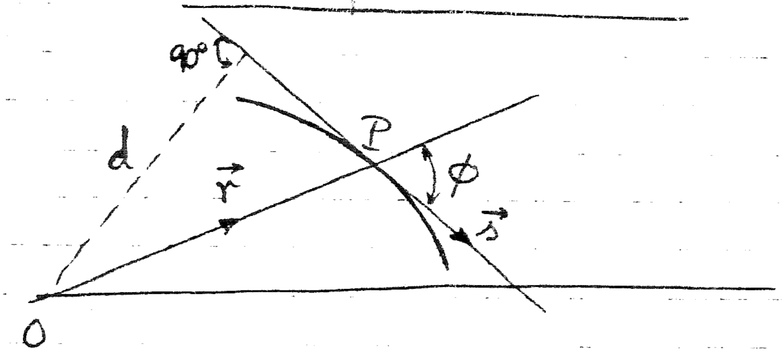
$$(28) \qquad \frac{d}{ds}(\vec{r} \wedge n\vec{s}) = \frac{d\vec{r}}{ds} \wedge n\vec{s} + \vec{r} \wedge \frac{d}{ds}(n\vec{s}) \quad .$$

Ora o 1º termo é idênticamente nulo por (17); quanto ao segundo pode escrever-se $\vec{r} \wedge \operatorname{grad} n$ por força de (17) e (25); mas por (27) grad n sai proporcional a grad r, ou seja, a $\vec{r}$ e então também o 2º termo de (28) é nulo. Com isso

$$(29) \qquad \vec{r} \wedge n\vec{s} = \overrightarrow{\text{const}} \quad \text{(vector constante)}$$

Esta relação (29) implica: a) que todos os raios são curvas planas situadas num plano que passa pela origem; e b) que ao longo de cada raio se tem

$$(30) \qquad n r \sin\phi = \text{constante}$$



em que ϕ é o ângulo entre o vector posição $\vec{r}$ e a tangente $\vec{s}$ no ponto P. Visto que $d = r\sin\phi$ (30) pode reescrever-se como

$$(31) \qquad n d = \text{constante}$$

Esta relação chama-se por vezes fórmula de Bouguer e é análoga a uma fórmula bem conhecida na Dinâmica, a qual exprime a conservação do momento angular de uma partícula movendo-se num campo de forças centrais.

8C. Caso geral : curvatura dos raios luminosos

Encaremos agora o caso geral de um meio heterogéneo e examinemos que relação pode prever-se entre a curvatura dos raios luminosos e a variação do índice de refracção de ponto para ponto.

Consideremos o vector curvatura $\vec{K}$ de um raio luminoso, definido, como para qualquer curva, por

(32) $$\vec{K} = \frac{d\vec{s}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{\nu} \quad :$$

trata-se de um vector orientado segundo a normal principal cujo versor é $\vec{\nu}$ e com módulo $\frac{1}{\rho}$ sendo ρ o raio de curvatura.

Ora, a partir de (25) vem:

(33) $$n\frac{d\vec{s}}{ds} + \frac{dn}{ds}\vec{s} = \operatorname{grad} n$$

e combinando (32) com (33), resulta:

(34) $$\operatorname{grad} n = \frac{n\vec{\nu}}{\rho} + \frac{dn}{ds}\vec{s} \,.$$

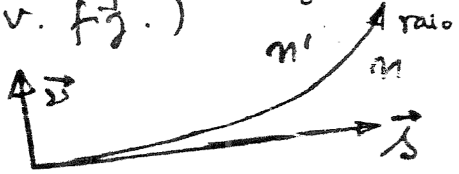
Esta relação mostra que o gradiante do índice de refracção assenta no plano osculador do raio luminoso.

Por outro lado é fácil extrair de (34) que

(35) $$\frac{1}{\rho} = \vec{\nu} \cdot \operatorname{grad} \log n \quad \left(= \frac{\partial}{\partial \nu}(\log n)\right)$$

e, como ρ tem que ser sempre positivo, isto implica que, quando caminhamos no sentido da normal principal, o índice de refracção deve crescer, ou seja, o raio luminoso encurva para a região de maior índice de refracção (v. fig.)

$n' > n$



9. Leis da refracção e reflexão na Óptica Geométrica

Temos considerado até aqui um meio heterogéneo, mas contínuo, do ponto de vista electromagnético, isto é, um meio cujas propriedades electromagnéticas, caracterizadas por ε e μ variam de ponto para ponto, mas continuamente. Para podermos agora tratar da refracção-reflexão numa superfície de separação de dois meios, somos levados naturalmente a encarar o problema que põe uma superfície de descontinuidade (regular, de forma qualquer) separando duas regiões (1) e (2) heterogéneas mas contínuas.

Em qualquer uma destas regiões é válida a equação do eikonal (11) e, como uma consequência, para pontos interiores dessas regiões teremos sempre

$$\text{(36)} \qquad \operatorname{rot}(n\vec{s}) = 0$$

Todavia nem a equação do eikonal (11) nem esta sua consequência fazem sentido sobre a superfície de descontinuidade. A equação (36) presta-se no entanto ao estudo das condições de passagem de um raio luminoso na superfície de descontinuidade, mediante a sua degenerescência (*)

$$\text{(37)} \qquad \vec{n} \wedge (n_2 \vec{s}_2 - n_1 \vec{s}_1) = 0 .$$

Esta equação verifica-se em cada ponto P da superfície de descontinuidade, sendo: n_1 e n_2 os índices de refracção e $\vec{s}_1$ e $\vec{s}_2$ os raios luminosos, nas duas regiões (1) e (2) junto do ponto P; e $\vec{n}$ o versor da normal em P à superfície de descontinuidade, de (1) para (2). A eq. (37) afirma a continuidade da componente tangencial do vector $n\vec{s}$, ao atravessarmos a superfície de descontinuidade.

A eq. (37) pode reescrever-se

(38) $$n_1 (\vec{n} \wedge \vec{s}_1) = n_2 (\vec{n} \wedge \vec{s}_2)$$

e implica que: a) o raio refracto $\vec{s}_2$, o raio incidente $\vec{s}_1$ e a normal $\vec{n}$ estão no mesmo plano; b) o ângulo de incidência, θ_1, de $\vec{s}_1$ com $\vec{n}$ e o ângulo de refracção, θ_2, de $\vec{s}_2$ com $\vec{n}$ satisfazem à

(39) $$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

Estes resultados constituem as leis da refracção (leis de Snell). (Cf. Figura a)

Mas a descontinuidade das propriedades electromagnéticas sobre a superfície de separação dá origem não só a uma onda no segundo meio (onda refractada) mas também a uma onda no primeiro meio (onda reflectida), conforme a experiência ensina. O raio luminoso da onda reflectida, $\vec{s}_1'$, obtém-se pondo em (37) $n_1 = n_2$ (e $\vec{s}_2 \equiv \vec{s}_1'$) o que transforma (38) em

(40) $$\vec{n} \wedge \vec{s}_1 = \vec{n} \wedge \vec{s}_1'$$

e daqui saem as leis da reflexão (Cf. Figura b): a) $\vec{s}_1$, $\vec{s}_1'$ e $\vec{n}$ estão no mesmo plano; b) sendo $\theta_1 \equiv (\widehat{\vec{s}_1, \vec{n}})$ e $\theta_1' \equiv (\widehat{\vec{s}_1', \vec{n}})$, então $\theta_1' = \pi - \theta_1$.

Note-se que a eq. (37) também pode entender-se como a afirmação de que o vector $\vec{N}_{12} = n_2\vec{s}_2 - n_1\vec{s}_1$ é normal à superfície de separação (ou paralelo a $\vec{n}$); isso constitui um interessante auxiliar na construção geométrica do raio refracto. No caso da reflexão, $\vec{N}_{12}$ é substituído pelo vector $\vec{N}_{11'} = \vec{s}_1' - \vec{s}_1$, com a mesma propriedade. (Ver Figuras a e b).

Também deve sublinhar-se, por um lado, que as construções geométricas das Figuras a e b valem apenas localmente, variando de ponto para ponto da superfície de separação; e, por outro lado, que os vectores $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ e $\vec{s}_1'$ representam as orientações dos respectivos raios luminosos apenas no ponto P sobre a superfície, modificando-se logo que o observador se afasta da superfície, dada a heterogeneidade dos meios (que sempre continuamos a supor). Tudo isto está em perfeita harmonia com o carácter estritamente local da eq. (37) e das leis de reflexão-refracção que daí decorrem. Só com meios homogéneos os raios traçados representariam a propagação (rectilínea) ao longo dos meios, a partir daquele ponto de incidência. Só com feixes de raios paralelos incidentes sobre uma superfície de separação plana, é que as construções feitas seriam válidas para todo o ponto de incidência.

Figura a

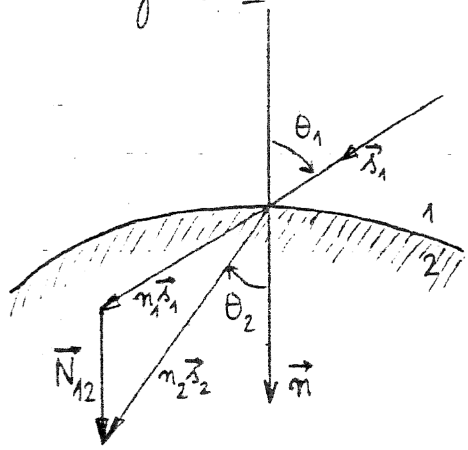
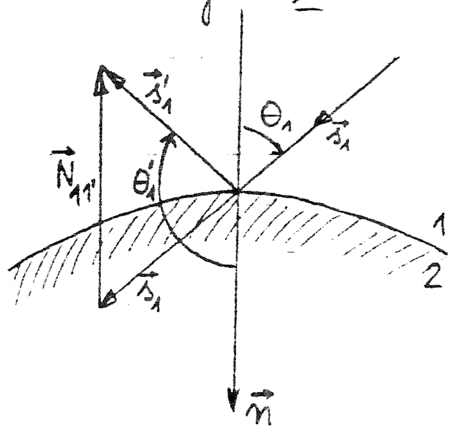


Figura b



Observação importante:

No capítulo das ondas planas, foram já derivados resultados semelhantes aos expostos neste parágrafo. Mas enquanto esse primeiro tratamento da reflexão-refracção dizia respeito a uma onda plana de um comprimento de onda qualquer mas caindo sobre uma superfície de separação de dois meios que fosse plana (superfície refractante plana), o tratamento que acabámos agora de fazer, na aproximação da Óptica Geométrica, aplica-se a ondas com superfícies de onda ($S(\vec{r}) = \text{const}$) de forma muito mais geral e a superfícies refractantes também de forma muito mais geral desde que o comprimento de onda seja suficientemente pequeno (para que se possa cometer a aproximação $\lambda_0 \to 0$). Na prática, esta restrição traduz-se em que os raios de curvatura da frente-de-onda incidente e da superfície refractante devem ser muito grandes quando comparados com o comprimento de onda da luz incidente.

Feita esta distinção entre as aplicabilidades dos dois tratamentos da reflexão-refracção, não deve deixar de insistir-se mais uma vez no facto de que dentro da aproximação da Óptica Geométrica o campo electromagnético se comporta em média e localmente como uma onda plana. É deste facto que nasce essencialmente a simplicidade do modelo da Óptica Geométrica.

APÊNDICE

Representação complexa de grandezas monocromáticas e valores médios das suas composições quadráticas

Suponhamos que na descrição de um fenómeno físico se utilizam grandezas harmónicas — monocromáticas — no tempo, i.e., representadas por funções sinusoidais de frequência ν — de frequência angular (temporal) $\omega = 2\pi\nu$. É fácil verificar que qualquer uma dessas funções se pode traduzir, com toda a generalidade, por

$$(1) \qquad a(t) = a_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

em que a_0 e α são constantes (no tempo), podendo sempre pôr-se $a_0 > 0$.

Recordemos agora que qualquer complexo, seja $a+bi$, se pode escrever sob a forma (de Euler)

$$(2) \qquad a+bi = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

verificando-se para o módulo ρ e o argumento θ as relações

$$(3) \qquad \begin{cases} a = \rho\cos\theta \\ b = \rho\sin\theta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{a^2+b^2} \\ \theta = \operatorname{arctg} b/a \end{cases}.$$

Tem-se em consequência que

$$(4a) \qquad \rho\cos\theta = \mathcal{R}e\{\rho e^{i\theta}\} = \frac{1}{2}\left[\rho e^{i\theta} + c.c.\right]$$

$$(4b) \qquad \rho\sin\theta = \mathrm{Im}\{\rho e^{i\theta}\} = \frac{1}{2i}\left[\rho e^{i\theta} - c.c.\right]$$

($\mathcal{R}e\{\ldots\}$ quer dizer «Parte real de $\{\ldots\}$»; e $\mathrm{Im}\{\ldots\}$ significa «Coeficiente da parte imaginária de $\{\ldots\}$»; c.c. resume complexo conjugado).

Segue-se daqui que a função (1) se pode exprimir por

(5) $$a(t) = \mathcal{R}e\{A(t)\} = \frac{1}{2}\left[A(t) + A(t)^*\right]$$

com (5') $$A(t) = a_o\, e^{i(\omega t+\alpha)}$$.

Ou ainda por:

(6) $$A(t) = A_o\, e^{i\omega t}$$

com (6') $$A_o = a_o\, e^{i\alpha}$$.

Note-se que, por (2), $A(t)$, definido por (6)-(6'), constitui uma representação simultânea das duas funções $a(t) = a_o \cos(\omega t+\alpha)$ e $b(t) = a_o \sin(\omega t+\alpha)$. $A(t)$ diz-se a <u>representação complexa</u> de $a(t)$ e/ou $b(t)$. As funções <u>reais</u> $a(t)$ e $b(t)$ reconstituem-se a partir de $A(t)$ mediante (5) para $a(t)$ e uma relação similar para $b(t)$ (extraída de (4b)). Qualquer tratamento matemático da função real $a(t)$ pode substituir-se pelo tratamento matemático da função complexa $A(t)$ — que em geral se revela de maior simplicidade (designadamente em diferenciação, integração, resolução de equações diferenciais, utilização dos desenvolvimentos de Fourier, etc.).

Estamos aqui particularmente interessados nas composições quadráticas das grandezas monocromáticas e, nomeadamente, nos valores médios sobre intervalos de tempo muito grandes em comparação com o período fundamental dessas grandezas monocromáticas. Seja, genericamente, o produto muito simples

(7) $$p(t) = f(t)\, g(t)$$,

em que supomos $f(t)$ e $g(t)$ grandezas monocromáticas da mesma frequência $\underline{\omega}$ — período $T = 2\pi/\omega$ — e suponhamos que se pretende achar o valor médio de $p(t)$ sobre um intervalo de tempo T' muito maior que T. [Isto tem grande interesse no domínio da Óptica, por exemplo. Visto que as frequências ópticas são muito elevadas ($\underline{\omega}$ da ordem de 10^{15} seg^{-1}) não podem evidentemente observar-se valores instantâneos de qualquer das quantidades ràpidamente oscilantes associadas aos respectivos fenómenos e sòmente podemos avaliar e medir os seus valores médios sobre intervalos de tempo muito grandes comparados com $T = 2\pi/\omega$ — como o são os limiares dos tempos de medição dos aparelhos detectores.].

Admitamos então que as grandezas $f(t)$ e $g(t)$ se encontram substituídas no seu tratamento matemático pelas suas respectivas representações complexas $F(t)$ e $G(t)$, a saber:

$$F(t) = F_0 e^{i\omega t} \tag{8}$$

$$G(t) = G_0 e^{i\omega t} \tag{9}$$

sendo F_0 e G_0 em geral "amplitudes" complexas do tipo da que representámos em (6') para $a(t)$. Nestas condições o produto $p(t)$ virá dado por (partindo de (7) e usando (5)):

$$p(t) = \frac{1}{4}\left[F(t) + F^*(t)\right]\times\left[G(t) + G^*(t)\right] \quad ;$$

e depois de introduzir (8)-(9) :

$$p(t) = \frac{1}{4}\Big[F_0 G_0 e^{2i\omega t} + F_0^* G_0^* e^{-2i\omega t} + $$
$$+ F_0 G_0^* + F_0^* G_0 \Big]$$

O valor médio de $p(t)$ resolve-se pois fàcilmente desde que se saiba calcular os valores médios dos factores $e^{2i\omega t}$ e $e^{-2i\omega t}$, únicos dependentes do tempo. (Recorde-se a definição de valor médio de uma grandeza $h(t)$, ao longo do intervalo de tempo (t_1, t_2) :

$$\overline{h(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} h(t)\,dt \,.)$$

Tomando, para fixar idéias, o intervalo de tempo (de medição) $-T'/2 \leq t \leq +T'/2$, de amplitude T' (tal que $T' >> T$, como já fizemos observar), teremos de calcular os integrais

$$\frac{1}{T'}\int_{-T'/2}^{+T'/2} e^{\pm 2i\omega t}\,dt = \mp \frac{1}{2\pi}\frac{T}{T'}\sin\omega T'$$

Ora, visto que $T' >> T$, o quociente T/T' é muito menor que 1, ficando entretanto com valor limitado o factor $\sin\omega T'$. Por consequência, os termos de $\overline{p(t)}$ contendo os valores médios de $e^{\pm 2i\omega t}$ podem desprezar-se (tomar-se como nulos) em face dos termos constantes. Resulta:

(10) $$\overline{p(t)} = \frac{1}{4}\left(F_0 G_0^* + F_0^* G_0\right) .$$

ou ainda

(11) $$\overline{p(t)} = \frac{1}{2}\mathcal{R}e\left\{F_0 G_0^*\right\} .$$

Se, em particular, em (7), $f(t) = g(t)$

então, a aplicação de (11) dá:

$$(12) \qquad \overline{[f(t)]^2} = \frac{1}{2} F_0 F_0^* = \frac{1}{2}|F_0|^2 .$$

Estes resultados são, evidentemente, extensíveis a outros tipos de produtos, $p(t)$. Para grandezas vectoriais, é lícito designadamente estendê-los aos produtos interno e externo.

Aplicando, em particular, aos campos cuja representação complexa é dada no texto pelas eq.s (1), resulta para as densidades de energia w_e e w_m e para o vector de Poynting $\vec{\Sigma}$:

$$(13) \qquad \overline{w_e} = \frac{\varepsilon}{4} \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*$$

$$(14) \qquad \overline{w_m} = \frac{\mu}{4} \vec{H}_0 \cdot \vec{H}_0^*$$

$$(15) \qquad \overline{\vec{\Sigma}} = \frac{c}{2} \mathcal{R}e \{ \vec{E}_0 \wedge \vec{H}_0^* \}$$

Note-se que a introdução em (13), (14) e (15) das expressões (5) do texto, conduz fàcilmente às relações (12) e (13) do texto.

Como última observação, diga-se que, no caso de as "amplitudes" complexas F_0 e G_0 de (8) e (9) não serem rigorosamente constantes no tempo, mas funções lentamente variáveis no tempo — face à rapidez de variação no tempo dos "factores de fase" respectivos, $e^{i\omega t}$, com a sua elevada frequência — estes resultados são ainda muito aproximadamente aplicáveis, desde que F_0 e G_0 não variem apreciàvelmente dentro do tempo de medição T'.

CAP. VII - OPTICA GEOMETRICA

VII.1 — Introdução

A Optica geométrica baseia-se numa das características mais evidentes da luz — propagação rectilínea num meio homogéneo — não sendo feitas hipóteses sobre a sua natureza. Introduz-se o conceito de raios luminosos, sendo estes, num meio homogéneo, linhas rectas que correspondem à direcção de propagação da luz. A partir do conhecimento do comportamento dos raios luminosos na superfície de separação de meios ópticos, pode traçar-se o seu percurso através dos sistemas ópticos e obter-se imagens de objectos.

É, no entanto, importante, ter consciência das limitações da Optica geométrica, e da necessidade, para explicar muitos tipos de fenómenos (interferência, difracção, ...) da utilização da chamada Optica física em que a natureza ondulatória da luz já tem que ser considerada. Os comprimentos de onda das radiações visíveis situam-se, aproximadamente, entre os limites 4×10^{-5} cm (violeta) e 7.5×10^{-5} cm (vermelho). O pequeno valor deste comprimento de onda justifica, que, em muitas circunstâncias, se possa considerar a propagação da luz como rectilínea; mas se a luz incidir em obstáculos de pequenas dimensões, tão pequenas que o c.d.o. da luz incidente já não pode considerar-se insignificante em face delas, começam a ser observados certos tipos de fenómenos que já não são compatíveis com a hipótese de propagação rectilínea; assim, esta hipótese será válida na medida em que os objectos usados no sistema a estudar sejam de dimensões macroscópicas em face do c.d.o. da luz.

Para ilustrar o que está dito atrás, suponhamos que temos uma fonte luminosa S (fig. VII.1) de tão pequenas dimensões que podemos considerá-la pontual.

Se colocarmos, em frente de S, um écran opaco, H, com um orifício de grandes dimensões, e, mais adiante, um écran de observação M, só a região deste último compreendida entre as linhas rectas traçadas, a partir de S, tangentes ao orifício de H, será iluminada; esta observação justifica a hipótese de que a luz se propaga segundo linhas rectas, os chamados raios luminosos.

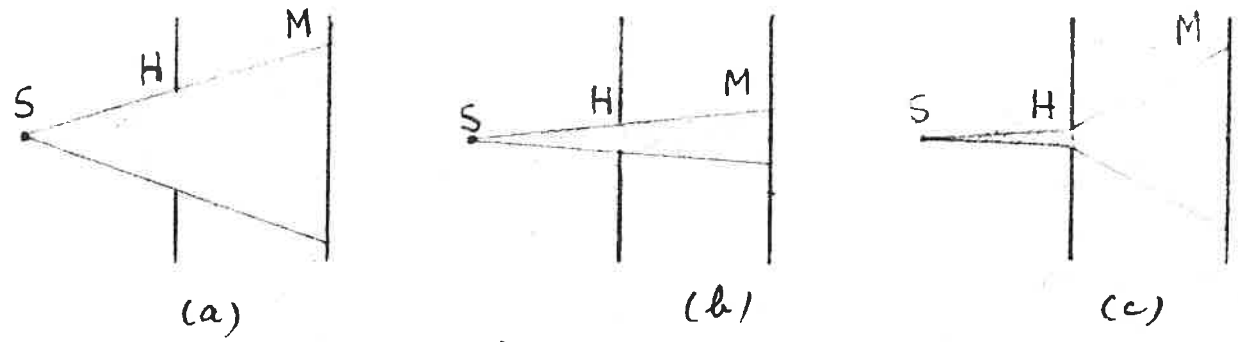


fig. VII.1

Se o orifício de H é tornado mais pequeno, como na fig. VII.1(b) a região iluminada de M diminui de maneira correspondente, de modo que pode pensar-se que continuando este processo seria possível, no limite, isolar um raio luminoso. A experiência mostra, porém, que a partir de uma certa dimensão do orifício de H (alguns décimos de mm) a região luminosa em M começa a alargar-se embora a iluminação seja de muito fraca intensidade. Não é pois possível isolar o raio luminoso e isso está associado ao novo tipo de fenómeno, que começa a intervir quando as dimensões do orifício começaram a ser excessivamente pequenas, que é o fenómeno chamado de difracção, o qual é uma consequência do carácter ondulatório da luz.

VII.2 – Reflexão e refracção em superfícies planas

Quando um feixe de luz incide na superfície de separação de dois meios ópticos os raios luminosos podem ser reflectidos para o meio que a luz vinha atravessando ou refractados para o segundo meio. Em geral, os dois processos ocorrem simultâneamente, sendo as proporções relativas de um e outro dependentes de diferentes factores tais como o poder reflector da superfície de separação e o ângulo de incidência.

Os processos de reflexão e refracção têm lugar segundo leis encontradas experimentalmente, e posteriormente justificadas por diferentes vias, que vamos apresentar de seguida.

Seja S a superfície de separação de dois meios na qual incide, no ponto A, o raio luminoso OA que se re-

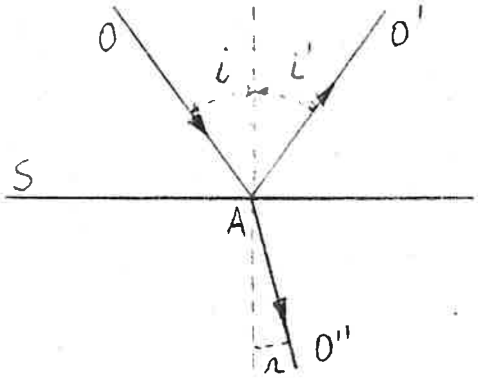


fig. VII.2

flecte segundo AO' e refracta AO''; sejam i, i' e r os ângulos com a normal à superfície de separação dos raios incidente, reflectido e refractado, respectivamente.

A. Leis da reflexão

1) O raio reflectido existe no plano de incidência que é o plano definido pela normal e pelo raio incidente.
2) Os ângulos de incidência e reflexão são iguais, ficando o raio reflectido para o outro lado da normal em relação ao raio incidente.

B. Leis da refracção

1) O raio refractado existe no plano de incidência.
2) O ângulo de refracção r, depende do ângulo de incidência i de tal modo que $\frac{\text{sen}\, i}{\text{sen}\, r}$ é constante. O valor desta constante depende dos dois meios envolvidos e do c.d.o. da luz.

A experiência mostra que esta razão constante dos senos é igual à razão das velocidades da luz nos dois meios.

$$\frac{\text{sen}\, i}{\text{sen}\, r} = \frac{v_1}{v_2} \qquad \text{(VII-1)}$$

v_1 - velocidade da luz no 1° meio

v_2 - velocidade da luz no 2° meio

O índice de refracção de um meio, que representaremos por $\underline{n}$ é dado pelo quociente entre a velocidade da luz no vácuo e a velocidade da luz no meio

$$n = \frac{\text{velocidade da luz no vácuo}}{\text{velocidade da luz no meio}} \quad ;$$

desta definição resulta que se tivermos dois meios 1 e 2 será:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\text{velocidade da luz no meio 2}}{\text{velocidade da luz no meio 1}}$$

o que tendo em conta (VII-1) dá:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\text{sen } r}{\text{sen } i} \quad , \text{ ou seja}$$

(VII-2) $$\boxed{n_1 \text{ sen } i = n_2 \text{ sen } r}$$

A grandeza $\underline{n}$ atrás definida chama-se índice de refracção absoluto; a grandeza $\frac{n_1}{n_2}$ chama-se índice de refracção do meio 1 em relação ao meio 2; o índice de refracção absoluto é pois o índice de refracção relativo ao vácuo. Dado que o índice de refracção do ar vale, nas condições normais de pressão e temperatura 1,0003, podemos, frequentemente, fazer a aproximação de tomar como índice de refracção absoluto o índice de refracção relativo ao ar, pois o erro cometido é da ordem de 0,03 %.

VII.3 - Formação de imagens em superfícies planas

I - Reflexão

A figura VII-2' mostra um pincel de luz com origem num ponto objecto B reflectido numa superfície plana. Depois

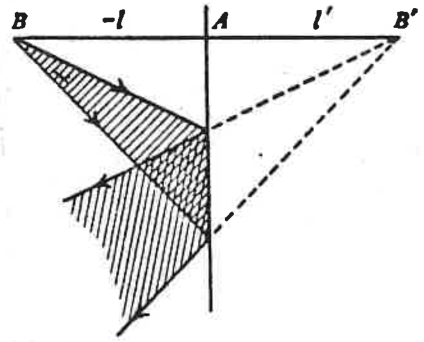


fig. VII. 2'

da reflexão o feixe parece provir do ponto imagem B', que se chama <u>imagem virtual</u> porque, efectivamente, os raios luminosos não passam por ele. As leis da reflexão levam facilmente à conclusão de que B' se situa no prolongamento da normal BA, a uma distância <u>l'</u> de A igual à distância <u>l</u> entre B e A.

<u>II - Refracção</u>

A fig. VII. 3 mostra como se comportam 4 raios luminosos com origem no ponto objecto B antes e depois de refracção na superfície AS. No caso geral, como o que aqui

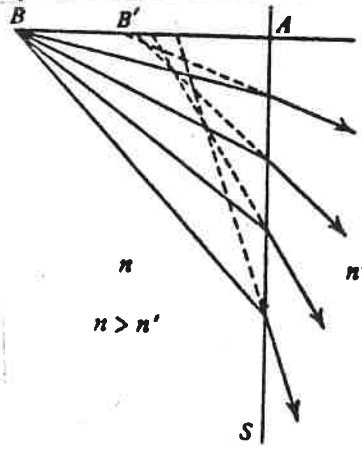


fig. VII. 3

é representado, o feixe não emerge de <u>um</u> ponto imagem; este é um dos mais simples exemplos de <u>aberração</u> produzida por um sistema óptico, ligada à sua incapacidade de fazer corresponder <u>um</u> ponto imagem a <u>um</u> ponto objecto.

Se, no entanto, apenas nos interessarmos com os raios de incidência quase normal, raios paraxiais, este efeito de aberração desaparece, como vamos ver.

Consideremos a fig. VII.4 (onde os ângulos i e i' estão exagerados para que ela fique mais clara) que representa

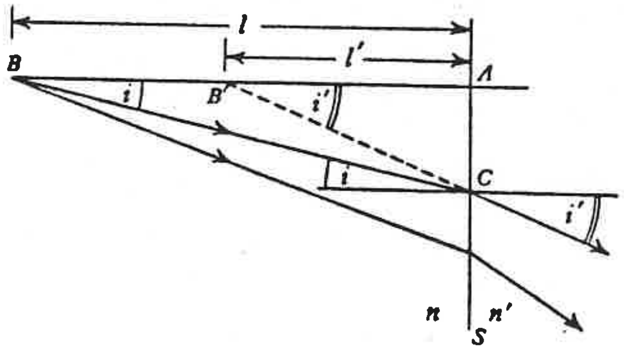


fig. VII.4

senta um feixe de raios paraxiais, com origem em B, divergindo de B' (imagem virtual de B) depois da refracção; teremos:

$$\text{sen}\, i \simeq i \simeq \text{tg}\, i$$

e de

$$\frac{n'}{n} = \frac{\text{sen}\, i}{\text{sen}\, i'} \simeq \frac{AC/AB}{AC/AB'} = \frac{l'}{l}$$

concluímos que a cada l corresponde um valor de l' independente da posição de C.

III - Reflexão total

Quando a luz é refractada na superfície de separação de dois meios, tais que n, índice de refracção do meio em que se faz a incidência é maior que n', índice de refracção do 2° meio, o ângulo r é maior que i e a partir de um certo valor de i (chamado ângulo crítico) deixa de haver refracção passando a haver apenas reflexão. A superfície de separação passa a actuar como um espelho e diz-se que há reflexão total.

Se designarmos por c o ângulo crítico, verificar-se-à:

(VII-3) $$\frac{n'}{n} = \operatorname{sen} c \, .$$

VII.4 — Formação de imagens em superfícies esféricas

Vamos agora estudar sistemas em que as superfícies separando os vários meios ópticos são esféricas. Se os centros de curvatura de todas as superfícies de refracção são colineares, tal sistema chama-se sistema centrado. A linha recta que contém os centros de curvatura chama-se eixo principal, que, frequentemente, será designado apenas por eixo.

I - Refracção numa superfície esférica simples

A fig. VII.5 representa uma superfície esférica simples que separa dois meios de índices de refracção n e n', sendo C o centro de curvatura da superfície. Qualquer linha que passa por C pode ser escolhida como eixo; o ponto de

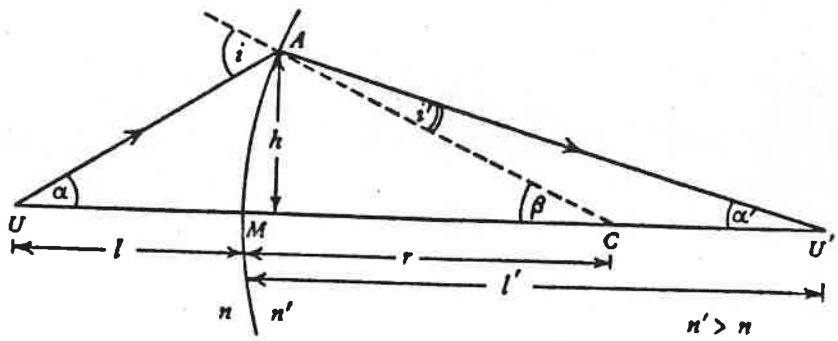


fig. VII.5

intersecção, M, do eixo com a superfície chama-se polo. Considere-se o raio UA dum ponto objecto sobre o eixo, U, incidindo na superfície em A, a uma distância h do eixo. Suponhamos que este raio depois de refractado corta o eixo em U'. Da figura tira-se que:

$$i = \alpha + \beta \qquad , \qquad i' = \beta - \alpha' \, .$$

Vamos limitar-nos ao estudo de raios paraxiais, isto é, raios que fazem pequenos ângulos com o eixo; então α, α' e β serão pequenos e, consequentemente, i e i' também o serão. Da lei de refracção temos, então:

$$n' i' = n i$$

ou
$$n'(\beta - \alpha') = n(\alpha + \beta)$$

donde: $$n'\alpha' + n\alpha = (n'-n)\beta \quad ;$$

tendo, mais uma vez, em conta que α, α' e β são pequenos:

$$\alpha' = \frac{h}{l'} \quad , \quad \alpha = \frac{h}{l} \quad \text{e} \quad , \beta = \frac{h}{r} \, ,$$ vindo pois:

$$n' \frac{h}{l'} + n \frac{h}{l} = (n'-n) \frac{h}{r}$$

ou:

$$(\text{VII-4}) \qquad \frac{n'}{l'} + \frac{n}{l} = \frac{n'-n}{r}$$

Repare-se que no resultado obtido não figura h, o que significa que a posição de U' é independente do raio incidente (partindo de U) considerado, desde que nos mantenhamos na aproximação de Gauss (paraxial); isto significa que, nestas condições, U' é o ponto imagem correspondente ao ponto objecto U. Se imaginarmos que se inverte o sentido dos raios vê-se que um ponto objecto colocado em U' dá uma imagem em U. Diz-se que U e U' são pontos conjugados.

Consideremos, agora, a situação representada na fig. VII.6; ao ponto imagem U corresponde uma imagem virtual U', na qual parece terem origem todos os raios refractados.

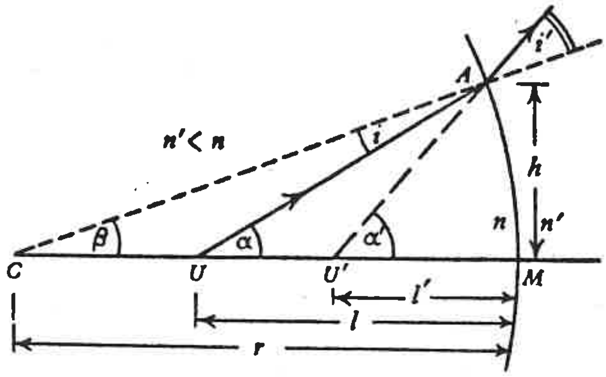


fig. VII.6

Teremos as seguintes relações:

$$i = \alpha - \beta \qquad , \qquad i' = \alpha' - \beta$$

$$n'(\alpha'-\beta) = n(\alpha-\beta) \quad , \text{ donde : } \quad n'\alpha' - n\alpha = (n'-n)\beta$$

e, finalmente :

$$\text{(VII - 5)} \qquad \frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n'-n}{r}$$

A equação (VII-5) é semelhante à equação (VII-4), mas não idêntica; se considerarmos outros tipos de situações de refracção numa superfície esférica, obteríamos, em cada caso, equações semelhantes às anteriores mas não idênticas. Será possível reduzi-las todas à mesma expressão? É-o desde que se faça uma conveniente convenção de sinais. Há várias convenções possíveis; de entre elas escolheremos a seguinte.

<u>Convenção para as distâncias</u>

<u>(a) Distâncias longitudinais</u>: são distâncias medidas ao longo do eixo <u>a partir</u> dum ponto (ou pontos) escolhido no sistema. São consideradas positivas se têm o sentido da luz incidente e negativas no caso contrário.

<u>(b) Distâncias transversais</u>: são distâncias em ângulo recto com o eixo, tais como alturas de objectos ou imagens; são consideradas positivas quando acima do eixo e negativas quando abaixo.

Sempre que possível, representaremos a luz incidente propagando-se da esquerda para a direita, e, nestas condições distâncias positivas são as medidas da esquerda para a direita e negativas as medidas em sentido contrário.

<u>Convenção para os ângulos</u>

Ângulos agudos entre raios e normais a superfícies ou entre raios e o eixo do sistema, são considerados positivos quando a rotação que levaria os raios até à normal ou até ao eixo, através desses ângulos, teria o sentido contrário ao do movimento dos ponteiros dum relógio.

Se usarmos estas convenções nos sistemas estudados an teriormente vemos que na fig. VII.5 l' e r são positivos e l é negativo. A fórmula (VII-4) virá, então, pondo $-l$ no lugar de l:

$$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n'-n}{r} .$$

Na fig. VII.6 as três distâncias vêm negativas o que mantém a forma de (VII-5). Assim, com a convenção de sinais indicada, a expressão:

(VII-6) $$\boxed{\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n'-n}{r}}$$

é válida em todas as situações; analogamente, e tendo presente a convenção para os ângulos, será em qualquer caso:

(VII-7) $$n'\alpha' - n\alpha = (n'-n)\beta = (n'-n)\,\frac{h}{r} .$$

Focos e distâncias focais

O ponto objecto do eixo ao qual corresponde uma imagem infinitamente distante (raios emergentes paralelos ao eixo) chama-se primeiro foco (foco-objecto) do sistema e será representado por F; a sua distância ao polo da superfície é a primeira distância focal, representando-se por f, e corresponde ao valor de l para $l' = \infty$, vindo, por substituição na equação (VII-6)

(VII-8) $$f = -\frac{n\,r}{n'-n}$$

O ponto imagem correspondente a um feixe incidente paralelo ao eixo é o segundo foco (foco-imagem), F'; está a uma distância, f', do polo da superfície, chamada segunda distância focal e dada por:

(VII-9) $$f' = \frac{n'\,r}{n'-n}$$

Escrevendo a equação (VII-6) sob a forma:

$$\frac{n'}{l'} \cdot \frac{r}{n'-n} - \frac{n}{l} \cdot \frac{r}{n'-n} = 1$$

e tendo em conta (VII-8) e (VII-9), vem:

$$(\text{VII}-10) \qquad \boxed{\frac{f'}{l'} + \frac{f}{l} = 1}$$

De (VII-8) e (VII-9) vem ainda:

$$(\text{VII}-11) \qquad \frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$$

Podemos ainda obter a relação:

$$(\text{VII}-12) \qquad \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} = \frac{n'-n}{r} = P$$

A grandeza P assim definida chama-se _potência da superfície_.

II – Refracção numa lente delgada

Designa-se por _lente_ um corpo transparente limitado por duas superfícies esféricas; lente delgada é aquela cuja espessura é desprezável em face dos raios das superfícies que a limitam e das distâncias objecto e imagem medidas a partir delas.

Consideremos a lente biconvexa representada na fig. VII.7 e sejam r_1 e r_2 os raios das duas superfícies. Sejam n, n' e n'' os índices de refracção dos três meios envolvidos, tal como representado; sendo U o ponto objecto axial à distância l da primeira face, a sua imagem U', à distância l' da 1ª face será formada por refracção nesta face;

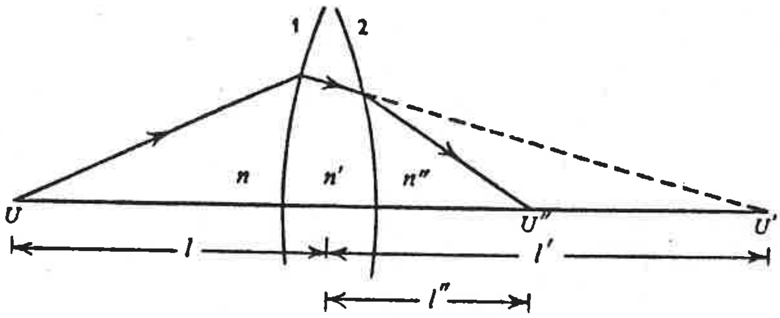


fig. VII.7

pode escrever-se:

(VII-13) $$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n'-n}{r_1} \; ;$$

U' vai ser, agora, o ponto objecto em relação à 2ª face e dada a pequena espessura da lente podemos considerá-lo também à distância l' da 2ª face; se fôr U", à distância l" da 2ª face, o ponto imagem relativo à 2ª refracção temos:

(VII-14) $$\frac{n''}{l''} - \frac{n'}{l'} = \frac{n''-n'}{r_2} \; ,$$

e, por adição de (VII-13) e (VII-14),

(VII-15) $$\frac{n''}{l''} - \frac{n}{l} = \frac{n'-n}{r_1} + \frac{n''-n'}{r_2} \; .$$

Se os meios à esquerda e à direita da lente são o mesmo: $n = n''$, temos:

$$\frac{1}{l''} - \frac{1}{l} = \left(\frac{n'}{n} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

ou, usando símbolo com uma plica para o espaço imagem e $\mu = \frac{n'}{n}$ (índice de refracção do material da lente relativo ao meio exterior).

(VII-16) $$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = (\mu - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Analogamente ao que se faz para uma superfície simples f e f' são obtidos pondo, respectivamente, l' e l iguais a infinito. Vem:

(VII-17) $$\boxed{\frac{1}{f'} = -\frac{1}{f} = (\mu - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

(VII-18) $$\boxed{\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}}$$

(VII-19) $$\boxed{\frac{f'}{l'} + \frac{f}{l} = 1}$$

Associação de lentes delgadas

Considerem-se as duas lentes delgadas representadas na fig. VII-8 separadas pela distância $\underline{d}$. O raio, paralelo ao eixo

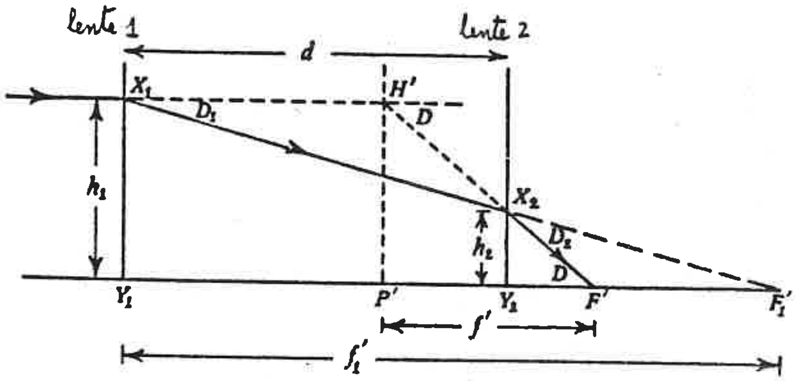


fig. VII.8

do sistema, que incide na lente 1 é refractado na direcção do 2° ponto focal F_1', sofrendo um desvio na sua direcção medido pelo ângulo $D_1 = \frac{h_1}{f_1'}$; ao incidir na 2ª lente o raio luminoso, sofrerá nova refracção, com um desvio D_2, que, dentro da aproximação, que continuamos a admitir, de pequenos ângulos de incidência, é o mesmo para qualquer incidência e será dado por $D_2 = \frac{h_2}{f'_2}$. O desvio total D é a soma de D_1 e D_2 e parece ocorrer no ponto H' de intersecção dos raios final e inicial. Vê-se facilmente, observando a figura, que o efeito produzido, no raio incidente, pela associação das duas lentes é o mesmo que seria produzido por uma lente simples, de segunda distância focal $\overline{P'F'}$ e colocada em $P'H'$; $\overline{P'F'}$ chama-se distância focal equivalente da associação; vejamos como se relaciona com as distâncias focais das lentes associadas.

De
$$D = D_1 + D_2$$

vem:
$$\frac{h_1}{f'} = \frac{h_1}{f'_1} + \frac{h_2}{f'_2}$$

Dos triângulos semelhantes $X_1 Y_1 F'_1$ e $X_2 Y_2 F'_2$ sai:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{f'_1 - d}{f'_1} \qquad \text{ou seja:} \qquad h_2 = h_1 \left(1 - \frac{d}{f'_1}\right)$$

e, por substituição na expressão anterior:

$$\frac{h_1}{f'} = \frac{h_1}{f'_1} + \frac{h_1}{f'_2} - \frac{h_1 d}{f'_1 f'_2}$$

ou:

$$\boxed{\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{d}{f'_1 f'_2}} \qquad \text{(VII-20)}$$

Desta expressão obtém-se imediatamente a relação válida para o caso de lentes delgadas coladas

$$\boxed{\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}} \qquad \text{(VII-21)}$$

O inverso da segunda distância focal de um sistema com ar nas suas duas extremidades chama-se <u>potência</u> do sistema e representa-se por <u>P</u>; exprime-se em <u>dioptrias</u> quando a distância focal se exprime em <u>metros</u>.

A equação (VII-20) pode então escrever-se:

(VII-20') $$\boxed{P = P_1 + P_2 - d\, P_1 P_2}$$

e a equação (VII-21):

(VII-21') $$\boxed{P = P_1 + P_2}$$

onde P é a potência da associação de lentes e P_1 e P_2 as potências das lentes 1 e 2, respectivamente.

Retomemos a equação (VII-17) reescrita sob a forma:

$$\frac{1}{f'} = \frac{\mu - 1}{r_1} - \frac{\mu - 1}{r_2} \quad ;$$

se supozermos o sistema imerso no ar podemos tomar $\mu = n$ com boa aproximação; virá:

$$\frac{1}{f'} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{1-n}{r_2}$$

Os termos do 2.º membro da equação anterior representam [eq. (VII-12)] as potências das superfícies que limitam a lente; então, a potência da lente, P, é dada por:

(VII-22) $$\boxed{P = P_{S_1} + P_{S_2}}$$

A potência da lente delgada é a soma das potências das superfícies que a limitam.

Imagens de objectos extensos

Para abordar este problema estudemos o efeito, na posição da imagem, dum deslocamento longitudinal e dum deslocamento transversal do objecto.

Deslocamento longitudinal do ponto objecto

Consideremos a relação (VII-10,19) que relaciona, entre si, as distâncias, ao sistema, do objecto e da sua imagem:

$$\frac{f'}{l'} + \frac{f}{l} = 1 .$$

A diferenciação desta expressão dá:

$$\frac{f'\,dl'}{l'^2} + \frac{f\,dl}{l^2} = 0 \quad , \qquad \text{donde:}$$

$$\frac{dl'}{dl} = -\,\frac{f}{f'} \cdot \frac{l'^2}{l^2} .$$

Para uma superfície simples: $\dfrac{f'}{f} = -\dfrac{n'}{n}$ e

(VII-23) $$\boxed{\frac{dl'}{dl} = \frac{n}{n'}\,\frac{l'^2}{l^2}}$$

Para uma lente delgada : $f' = -f$, e

(VII-24) $$\boxed{\frac{dl'}{dl} = \frac{l'^2}{l^2}}$$

Note-se que no caso da imagem formada por refracção $\dfrac{dl'}{dl}$ é sempre positivo, o que implica que a uma pequena variação da posição do objecto ao longo do eixo correspondo uma pequena variação da posição da imagem do mesmo sinal, ou seja no mesmo sentido ao longo do eixo.

No caso da reflexão (que corresponde a $n' = -n$), teremos:

$$\frac{dl'}{dl} = -\frac{l'^2}{l^2}$$

e portanto negativo.

<u>Deslocamento transversal do ponto objecto</u>

A fig. (VII.9) representa uma superfície esférica de separação de dois meios; C é o centro de curvatura da superfície e MC o eixo escolhido como principal. U e U' são pontos conjugados neste eixo. Considere-se o ponto objecto <u>B</u> à distância f de U;

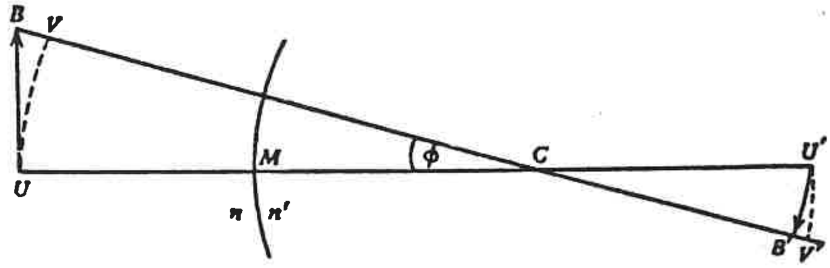


fig. VII.9

se ligarmos B a C, a linha BC pode também ser tomada como eixo do sistema pois também é perpendicular à superfície; chamar-lhe-emos eixo auxiliar. <u>B</u> terá, evidentemente um ponto imagem, <u>B'</u>, sobre o eixo auxiliar, obtido por refracção dos raios paraxiais em relação a este eixo. <u>V</u> e <u>V'</u> são, por sua vez, os pontos de intersecção, com o eixo auxiliar, dos arcos de circunferência, com centro em <u>C</u>, e de raios $\overline{CU}$ e $\overline{CU'}$ respectivamente; estão, evidentemente, às mesmas distâncias, <u>l</u> e <u>l'</u>, da superfície, que U e U', e são, portanto, pontos conjugados no eixo BC. Repare-se, agora, que <u>B</u> está mais distanciado da superfície do que <u>V</u> duma distância que designaremos por <u>$\Delta l = \overline{BV}$</u>. Pelo que vimos atrás, o ponto <u>B'</u> estará mais próximo da superfície do que <u>V'</u> duma distância <u>$\Delta l'$</u> relacionada com Δl pela expressão (VII.23). Então o objecto rectilíneo UB dará origem a uma imagem encurvada U'B', e, dum modo geral, um plano objecto que passe por U, perpendicular ao eixo, terá por imagem uma superfície curva que passa por U' e é simétrica em relação ao eixo principal. Esta curvatura da imagem corresponde a um defeito na sua obtenção que se designa por aberração do sistema.

Se a distância de B ao eixo fôr pequena comparada com as distâncias l e l', o ângulo ϕ entre os dois eixos é pequeno, e, nessas condições, no triângulo BUC a hipotenusa BC pode ser considerada igual ao lado UC; isto significa que B e V estão sensivelmente na mesma posição de tal modo que B' coincide com V', que, por sua vez, e por argumentos semelhantes, pode considerar-se sobre a perpendicular ao eixo que passa por U'. A imagem dum ponto dum plano perpendicular ao eixo que passa por U situa-se, então, num plano, perpendicular ao eixo que passa por U'; tais planos chamam-se conjugados. Um plano-objecto perpendicular ao eixo dará ainda um plano-imagem perpendicular ao eixo, quando a imagem é formada por um sistema centrado mais complicado, desde que se mantenham as mesmas limitações. Isto é necessàriamente assim visto que qualquer sistema se pode tratar como uma sucessão de superfícies entre dois meios.

Vejamos, agora, qual a relação, no caso de uma superfície simples, entre a distância y do ponto B ao eixo e a

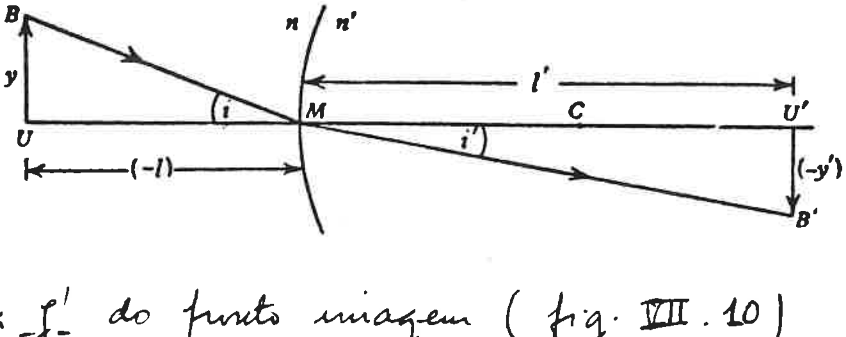


fig VII.10

distância y' do ponto imagem (fig. VII.10)

Pela lei da refracção:

$$n\, i = n'\, i'$$

ou seja:

$$n\left(\frac{f}{-l}\right) = n'\left(\frac{-f'}{l'}\right)$$

donde:

(VII-25)
$$\boxed{\frac{f'}{f} = \frac{n}{n'}\cdot\frac{l'}{l}}$$

Para uma lente delgada, tendo em conta que o raio que passa pelo centro da lente não é desviado porque nessa zona as duas superfícies são paralelas, obter-se-ia por uma dedução semelhante:

(VII-26)
$$\boxed{\frac{f'}{f} = \frac{l'}{l}}$$

As expressões (VII-23) (VII-24) (VII-25) e (VII-26) que nos dão as amplificações longitudinais e transversais para uma superfície simples e para lentes delgadas são de aplicação mais geral. Com efeito, as fórmulas que correspondem à superfície simples são aplicáveis a todos os sistemas ópticos que têm meios diferentes nas suas extremidades; as fórmulas da lente delgada aqueles que têm nos extremos o mesmo meio.

Relações de Lagrange ou de Helmholtz

Considere-se a fig. (VII.11), na qual está traçado o

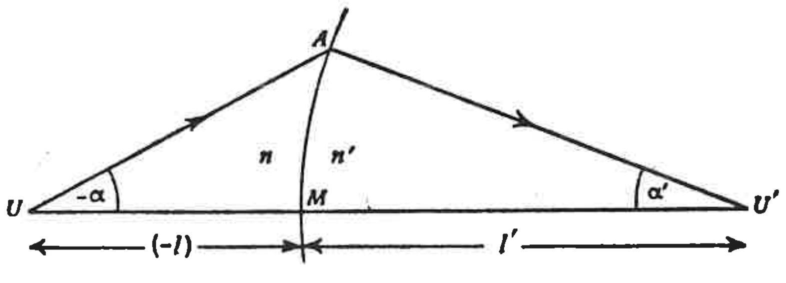


fig. VII.11

raio paraxial UA e o correspondente raio AU'.

Tem-se, evidentemente: $AM = \alpha l = \alpha' l'$;
se tivermos em conta a relação (VII-25) resulta:

(VII-27) $$\boxed{n\, y\, \alpha = n'\, y'\, \alpha'}$$

que é a chamada relação de <u>Lagrange ou relação de Helmholtz</u>.

Esta relação é válida para qualquer sistema centrado, visto que numa segunda face teríamos:

$$n' y' \alpha' = n'' y'' \alpha''$$

e relações semelhantes seriam obtidas para as sucessivas superfícies de separação dos diferentes meios do sistema; assim, obter-se-à para o sistema global

$$n\, y\, \alpha = n'\, y'\, \alpha'$$

onde os símbolos sem plica se referem ao raio incidente no sistema e os símbolos com plica ao raio que dele emerge.

A importância desta relação reside no facto de que a <u>amplificação transversal</u>, $\underline{y'/y}$, para um par de planos conjugados é relacionada com as inclinações, em relação ao eixo, dos raios que passam pelos pontos axiais desses planos; o quociente $\underline{\alpha'/\alpha}$ designa-se por <u>amplificação angular</u>. As amplificações transversal e angular são pois inversamente proporcionais.

Na fig. VII.12 apresentam-se alguns exemplos do traçado gráfico de imagens para o caso duma superfície esférica. Para lentes delgadas ter-se-iam construções semelhantes com a diferença de que neste caso f e f' seriam numericamente iguais.

Os casos (I)-(III) correspondem a superfícies convergentes.
Os casos (IV)-(VI) correspondem a superfícies divergentes.

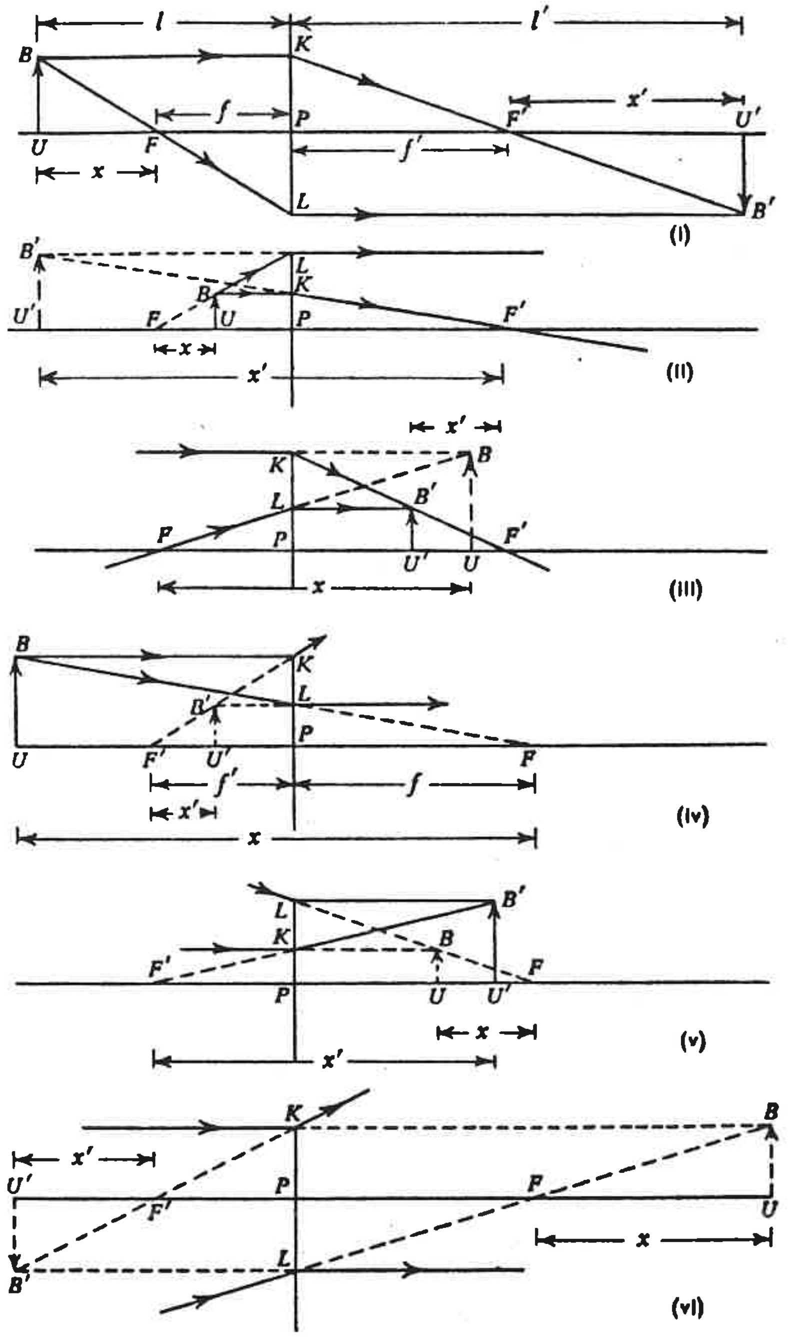


fig. VII.12

VII.5 – Planos principais dum sistema óptico centrado Pontos cardiais do sistema.

I – Definições e relações gerais dos sistemas centrados

Qualquer sistema óptico centrado, embora complexo, pode ser tratado como uma sucessão de superfícies esféricas; estas podem ser consideradas uma por uma, funcionando a imagem formada na 1ª superfície como objecto para a 2ª e assim sucessivamente; dado que este processo seria longo e fastidioso procurou-se descobrir o modo de tratar o sistema óptico como uma unidade e encontrar as relações que se lhe aplicam num tal tratamento.

Para abordar este assunto comecemos por considerar o sistema constituído por 2 lentes delgadas 1 e 2 separadas por uma distância d. Como se vê na fig. VII.13, o raio que

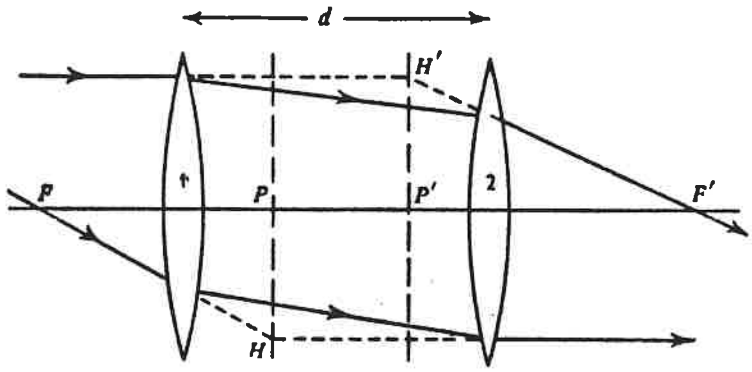


fig. VII.13

incide no sistema paralelamente ao eixo e que emerge segundo uma direcção que intersecta o eixo em F', parece ser desviado no ponto H', enquanto que o raio que incide no sistema passando pelo 1º ponto focal, parece desviado no ponto H para emergir paralelamente ao eixo; os planos, perpendiculares ao eixo, que passam pelos pontos H e H' intersectam o eixo nos pontos P e P', respectivamente.

A distância focal equivalente do sistema é dada pela equação (VII-20)

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{d}{f'_1 f'_2}$$

a qual é simétrica em f'_1 e f'_2, e portanto independente da ordem pela qual a luz atravessa as duas lentes; se considerarmos que invertemos o sentido do raio inferior (o qual passaria a <u>incidir</u> no sistema paralelamente ao eixo) concluímos que as distâncias PF e P'F' devem ser iguais, pois ambas correspondem à distância focal equivalente do sistema.

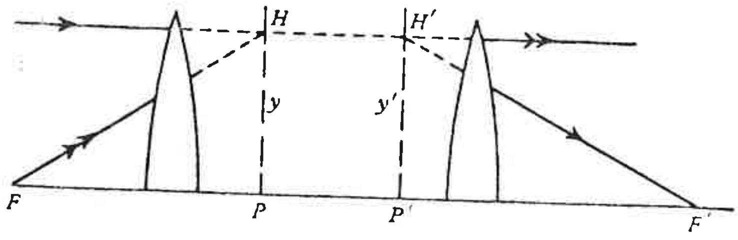


fig. VII . 13'

Na fig. VII.13' estão traçados raios semelhantes aos da fig. VII.13 mas escolhidos de tal modo que a altura, acima do eixo, do raio incidente paralelo (que emerge por F') é a mesma do raio emergente paralelo ao eixo (que tem origem em F). O par de raios, que converge em H, antes de entrar no sistema, transforma-se no par de raios que emerge divergindo de H'. H e H' comportam-se, pois, como pontos conjugados, o mesmo acontecendo a todo o par de pontos equidistantes do eixo nos planos PH e P'H'; estes planos chamam-se <u>planos principais do sistema</u> e os pontos P e P' de intersecção com o eixo

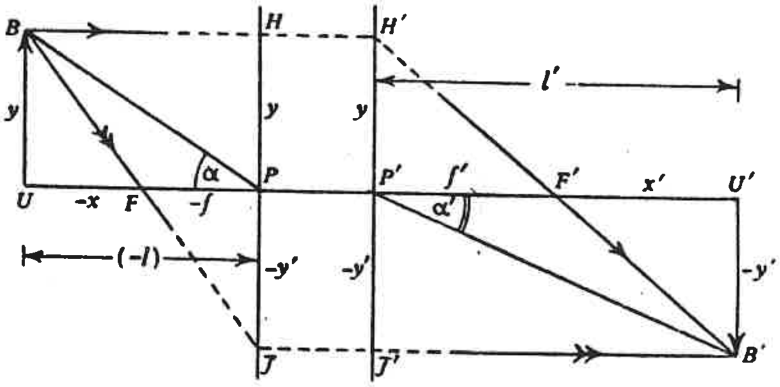


fig. VII.14

pontos principais do sistema; quando a luz tem o sentido representado <u>P</u> é o <u>1º ponto principal</u> e P' o <u>2º ponto principal</u>. Dado que H e H' são pontos conjugados, qualquer raio paraxial incidente dirigido para H deve emergir passando por H'.

Vamos agora ver que, se as posições dos planos principais são conhecidas, o comportamento do sistema pode ser previsto. Veremos mais adiante, para casos especiais, como conhecer estas posições.

Considere-se a situação representada na fig. VII.14, que nos vai servir para deduzir as relações que procuramos, as quais são, no entanto, válidas para outras situações (ordem dos planos principais alterada, diferentes posições dos objectos,...). Junto aos planos principais utilizam-se linhas tracejadas para significar que o verdadeiro percurso dos raios dentro do siste_ ma não está representado. Como se vê da figura $\underline{l}$ e $\underline{l'}$ são as distâncias do objecto e da imagem ao primeiro e segundo planos principais, respectivamente; os sinais de $\underline{l}$ e $\underline{l'}$ (medidos a partir de P e P') respeitam as convenções usuais; $\underline{x}$ e $\underline{x'}$ são as distâncias do objecto e da imagem aos focos F e F', medidas <u>a partir</u> destes, e com a mesma convenção de sinal.

Como os triângulos BUF e JPF são semelhantes, tem-se

(VII-28) $$\frac{-\mathcal{J}'}{\mathcal{J}} = \frac{-f}{-x}$$

e dos triângulos B'U'F' e H'P'F'

(VII-29) $$\frac{\mathcal{J}}{-\mathcal{J}'} = \frac{f'}{x'}$$

Por multiplicação destas expressões resulta:

(VII-30) $$\boxed{x\,x' = f f'}$$

De (VII-28) resulta ainda:

(VII-31) $$\frac{-\mathcal{J}'}{\mathcal{J}-\mathcal{J}'} = \frac{-f}{-x-f} = \frac{-f}{-l}$$

e de (VII-29):

(VII-32) $$\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}-\mathcal{J}'} = \frac{f'}{x'+f'} = \frac{f'}{l'}$$

Somando (VII-31) e (VII-32) vem:

(VII-33) $$\boxed{\frac{f'}{l'} + \frac{f}{l} = 1}$$

Note-se que da expressão (VII-28): $\frac{-\mathcal{f}'}{\mathcal{f}} = \frac{f}{x}$ se conclui que a amplificação transversal só depende da abcissa x.

As equações (VII-30) e (VII-33) são análogas a expressões obtidas para sistemas mais simples; elas mostram-se aqui de aplicação mais geral desde que l, l', f e f' sejam medidas a partir dos pontos principais como indicado.

Por divisão de (VII-31) e (VII-32) obtém-se:

$$(VII-34) \qquad \frac{\mathcal{f}'}{\mathcal{f}} = -\frac{l'}{l} \cdot \frac{f}{f'}$$

Se agora aplicarmos a relação de Lagrange, que vimos ser válida para um sistema centrado qualquer, aos planos principais; obtém-se, tendo em conta que para estes planos a amplificação transversal é $+1$,

$$n\alpha = n'\alpha'$$

ou

$$n\,\frac{\mathcal{f}}{-l} = n'\,\frac{-\mathcal{f}'}{l'}$$

donde:

$$(VII-35) \qquad \boxed{\frac{\mathcal{f}'}{\mathcal{f}} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{l'}{l}}$$

e, por comparação com (VII-34)

$$(VII-36) \qquad \boxed{\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}} \quad ;$$

facilmente se obterá também:

$$(VII-37) \qquad \boxed{\frac{dl'}{dl} = -\frac{f}{f'} \cdot \frac{l'^2}{l^2} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{l'^2}{l^2}}$$

II – Localização dos pontos principais em casos especiais

a) Sistemas constituídos por duas lentes delgadas separadas

Considere-se a fig. (VII-15); represente-se por k e k' as distâncias do primeiro plano principal à primeira lente e do 2º plano principal à 2ª lente, com as convenções de sinais habituais, e medidos a partir das lentes.

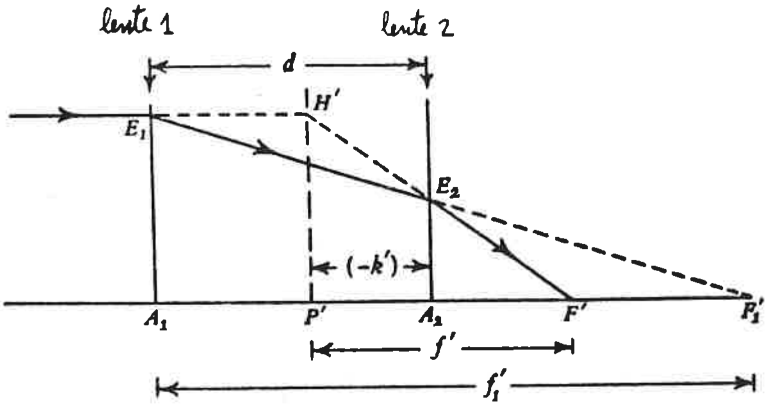


fig. VII.15

Dos triângulos $A_1E_1F'_1$ e $A_2E_2F'_1$ tem-se:

$$\frac{A_1E_1}{A_2E_2} = \frac{A_1F'_1}{A_2F'_1} = \frac{f'_1}{f'_1-d}$$

Dos triângulos $P'H'F'$ e A_2E_2F'

$$\frac{P'H'}{A_2E_2} = \frac{P'F'}{A_2F'} = \frac{f'}{f'-(-k')}$$

Como $P'H' = A_1E_1$, vem:

$$\frac{f'_1-d}{f'_1} = \frac{f'+k'}{f'} \quad \text{ou} \quad 1-\frac{d}{f'_1} = 1+\frac{k'}{f'}$$

donde:

$$(\text{VII}-38) \qquad k' = -d\,\frac{f'}{f'_1}$$

análogamente se obteria:

(VII-39) $\quad k = d\,\dfrac{f}{f_2} = d\,\dfrac{f'}{f'_2}$

b) Lente espessa

Para encontrar as posições dos planos principais utiliza-se o processo geral; o segundo plano principal é o plano, perpendicular ao eixo, onde um raio, paralelo ao eixo, parece desviar-se para emergir passando pelo foco; o primeiro plano principal encontra-se por via análoga considerando um raio paralelo ao eixo no espaço imagem. Na fig. VII.16 exemplifica-se o traçado que permite localizar P' para a lente espessa representada; no traçado dos raios em cada superfície utiliza-se a equação (VII-7).

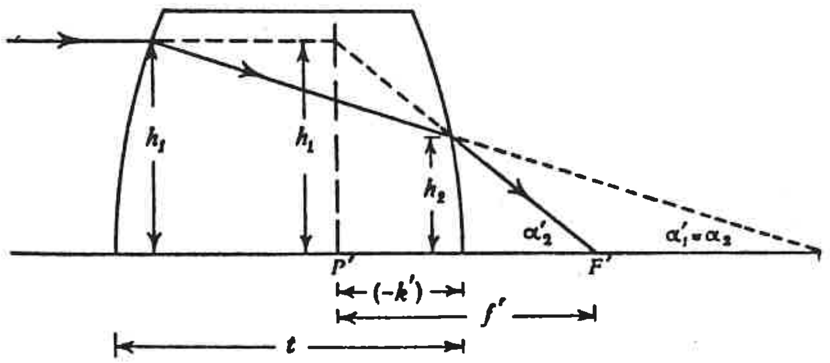


fig. VII.16

Dado que os raios paraxiais são pouco inclinados sobre o eixo, o ponto de refracção, na superfície curva, está também próximo do eixo, o que implica que esteja num plano transversal ao eixo que difere pouco do plano em que se encontra o pólo da superfície; então, para raios paraxiais, as superfícies de refracção são, aproximadamente, planos transversais ao eixo cuja separação é a espessura axial, t, da lente.

Se fôr μ o índice de refracção do material da lente e o meio exterior fôr o ar, da equação (VII-7) na sua forma:

$$n'\alpha' - n\alpha = Ph$$

aplicando às superfícies da lente representada, sai:

$$\mu \alpha'_1 = P_1 h_1 \qquad (\alpha_1 = 0)$$

$$\alpha'_2 - \mu \alpha_2 = P_2 h_2 \qquad (\alpha_2 = \alpha'_1) \quad ;$$

por outro lado, tem-se: $\quad h_1 - h_2 = t\,\alpha_2$.

Das três equações:

$$\mu \alpha_2 = P_1 h_1 \quad ; \quad \alpha'_2 - \mu \alpha_2 = P_2 h_2 \quad ; \quad h_2 = h_1 - t\,\alpha_2 \; ;$$

resulta:

$$\frac{\alpha'_2}{h_1} = P_1 + P_2 - \frac{t}{\mu} P_1 P_2$$

e como, $\dfrac{\alpha'_2}{h_1} = \dfrac{1}{f'}$, que é a potência P da lente espessa:

$$(\text{VII-40}) \qquad \boxed{P = P_1 + P_2 - \frac{t}{\mu} P_1 P_2}$$

Representando por $\underline{\kappa'}$ a distância do 2º plano principal ao polo da 2ª superfície da lente tomada como origem, vem:

$$-\kappa' = \frac{h_1 - h_2}{\alpha'_2} = \frac{t\,\alpha'_1}{\alpha'_2} = t\,\frac{P_1 h_1/\mu}{P h_1}$$

$$(\text{VII-41}) \qquad \kappa' = -\frac{t}{\mu}\,\frac{P_1}{P} \quad ;$$

analogamente se obteria:

$$(\text{VII-42}) \qquad \kappa = +\frac{t}{\mu}\,\frac{P_2}{P}$$

Se fizermos as substituições $P_1 = \dfrac{\mu - 1}{r_1}$, $P_2 = \dfrac{1-\mu}{r_2}$, obter-se-à:

$$(\text{VII-43}) \qquad \frac{1}{f'} = (\mu - 1)\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{t}{\mu}\cdot\frac{\mu - 1}{r_1 r_2}\right]$$

$$(\text{VII}-44) \qquad \kappa' = -\frac{t}{\mu} \cdot \frac{r_2}{r_2 - r_1 + \frac{t}{\mu}(\mu - 1)}$$

$$(\text{VII}-45) \qquad \kappa = -\frac{t}{\mu} \cdot \frac{r_1}{r_2 - r_1 + \frac{t}{\mu}(\mu - 1)}$$

Na fig. VII.17 representam-se as posições dos planos principais, para diferentes tipos de lentes espessas, cujas características são indicadas no quadro abaixo; tem-se, em todos os casos, $\mu = 1{,}50$; $t = 30$.

caso	r_1	r_2	κ	κ'	f'
a	+ 100	− 100	10.5	−10.5	+ 105.3
b	+ 100	∞	0	− 20	+ 200
c	+ 100	+ 200	−18.2	− 36.4	+ 363.6
d	+ 15	− 15	15	− 15	+ 22.5

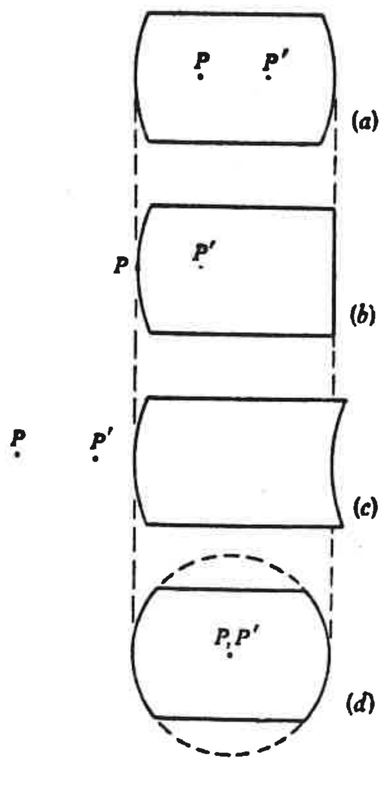


fig. VII.17

III - Pontos e planos nodais

Pontos nodais são pontos axiais tais que um raio que incide na direcção do primeiro emerge, passando pelo segundo, numa direcção paralela à de incidência.

Sejam, na fig. VII.18, N e N' dois pontos axiais conjugados, $\underline{\alpha}$, $\underline{\alpha}'$, $\underline{\beta}$ e $\underline{\beta}'$ as inclinações, em relação ao eixo, de raios paraxiais que incidem no eixo passando por N e dele emergem passando por N'.

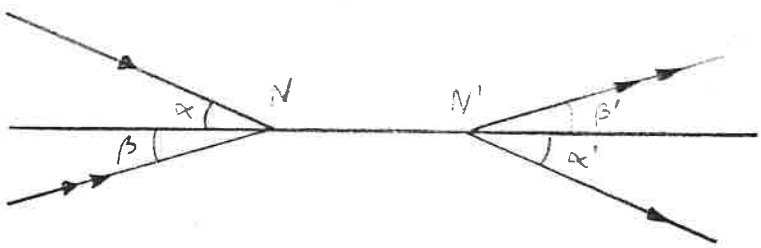


fig. VII.18

Da relação de Lagrange tem-se:

$$n' y' \alpha' = n y \alpha$$

$$n' y' \beta' = n y \beta$$

ou seja:
$$\frac{\beta'}{\beta} = \frac{\alpha'}{\alpha} \quad ;$$

se N e N' forem os pontos nodais procurados será $\alpha' = \alpha$, donde, pela relação anterior, $\beta' = \beta$; analogamente, para qualquer outro par de raios conjugados se terão direcções de incidência e emergência paralelas; daqui resulta que um feixe de raios que converge em N com uma dada abertura angular emerge de N' com a mesma abertura. Por esta razão N e N' também se chamam pontos de amplificação angular unitária positiva.

A localização dos pontos nodais em relação aos focos e pontos principais pode encontrar-se a partir da construção representada na fig. VII.19. Trace-se a linha FH que passa pelo 1º ponto focal e corta o plano principal em H; o raio emergente correspondente será paralelo ao eixo, passando por H';

no 2º plano principal, à mesma altura em relação ao eixo que H; seja B' o ponto em que este raio intersecta o 2º plano focal;

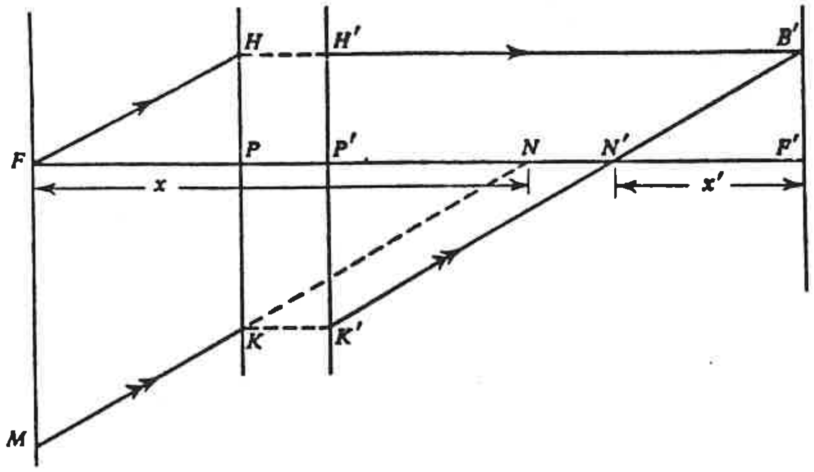


fig. VII. 19

como B' está no 2º plano focal ele será a imagem dum feixe de raios paralelos, que terá, necessàriamente a inclinação de FH, visto que este raio passa por B' depois da refracção. Então, um raio emergente, que passe por B', paralelo a FH, será paralelo à sua direcção de incidência; B'N', que satisfaz esta condição, corta, pois, o eixo no <u>2º ponto nodal</u>. Seja K' o ponto de intersecção com o 2º plano principal da recta B'N'; K será o ponto em que o raio incidente, que emerge por K'N'B', corta o 1º plano principal. Trace-se uma linha, passando por K, paralela a K'N'B'; corta o eixo em N e o 1º plano focal em M; o raio MK é o raio incidente que se transforma em K'B' e <u>N</u> é evidentemente o <u>1º ponto nodal.</u>

Da fig. VII. 19 também se pode deduzir as posições dos pontos nodais. Visto que KK'N'N é um paralelogramo

$$NN' = KK' = PP'$$

ou seja a separação dos pontos nodais é igual à dos pontos principais e, se, como no caso representado, o 2º ponto principal está à direita do 1º o mesmo acontece com os pontos nodais.

Por outro lado, como os triângulos FPH e N'F'B' são iguais

$$N'F' = FP = f$$

e como os triângulos FMN e K'H'B' também são iguais:

$$FN = H'B' = P'F' = f'.$$

Os pontos nodais são, pois, os pontos conjugados para os quais:

$$x = f' \quad , \quad x' = f$$

ou seja, a distância do 1º foco ao 1º ponto nodal é igual à segunda distância focal e a distância entre o 2º foco e o 2º ponto nodal é a primeira distância focal. Assim, as posições dos pontos nodais fica completamente determinada conhecidos as posições dos focos e dos pontos principais.

Se o sistema tiver nas suas extremidades meios com o mesmo índice de refracção, será $f' = -f$ e

$$FN = x = f' = -f = FP,$$

o que significa que P e N coincidem; o mesmo se poderia concluir para P' e N'. Logo, se o sistema tiver nas suas extremidades meios com o mesmo índice de refracção os pontos nodais e os pontos principais coincidem.

Chamam-se planos nodais os planos transversais ao eixo que passam pelos pontos nodais; são, evidentemente, planos conjugados para os quais se obtém, pela relação de Lagrange

$$\text{(VII-46)} \qquad \frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{n}{n'}$$

esta relação comparada com (VII-35) mostra que para os planos nodais se tem

$$l = l'$$

IV — Associação de sistemas ópticos

Consideremos dois sistemas ópticos centrados (1) e (2) de pontos cardinais, respectivamente, (H_1, H'_1, F_1, F'_1) e ($H_2 H'_2 F_2 F'_2$) e de eixos coincidentes. Seja Δ a distância entre o foco imagem F'_1 do sistema (1) e o foco objecto F_2 do sistema (2); chama-se-lhe intervalo dos dois sistemas.

Para encontrar, gráficamente, a posição dos pontos cardinais ($H H' F F'$) do sistema resultante, procede-se da seguinte maneira (fig. VII.20):

Traça-se um raio incidente paralelo ao eixo, que emerge do sistema (1) passando pelo foco F'_1 e vai incidir no sistema (2),

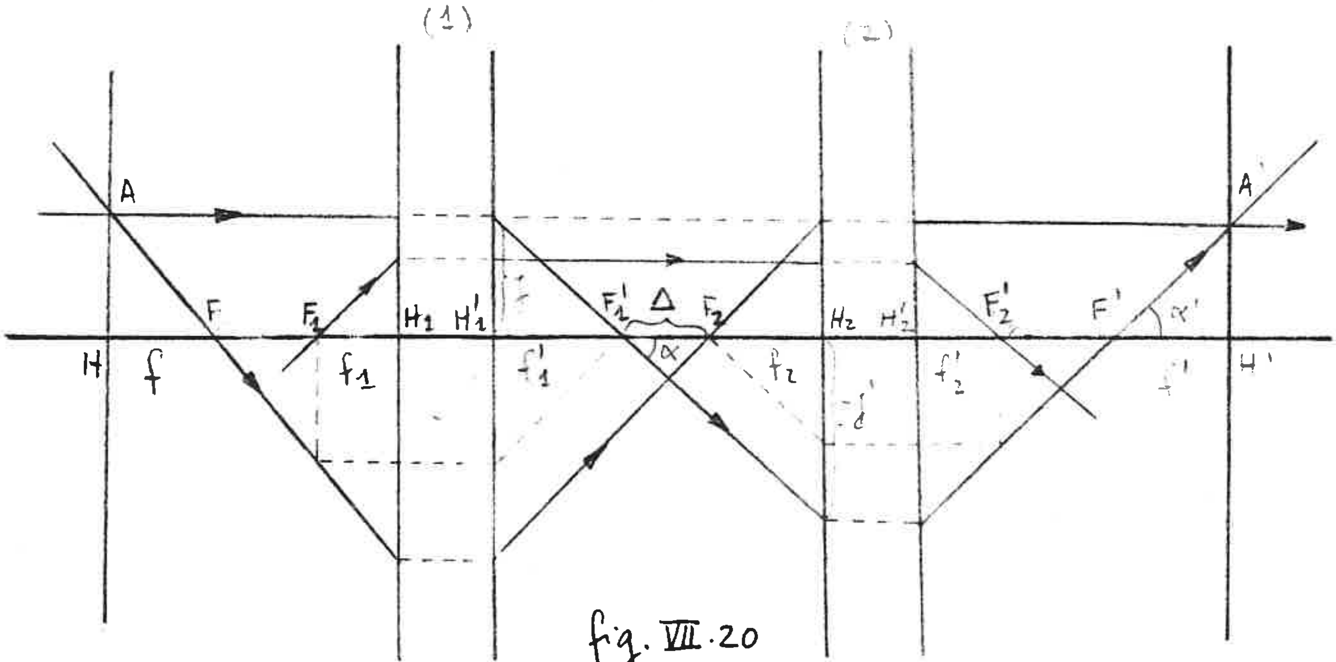


fig. VII.20

determina-se o seu conjugado em relação a este sistema por meio de um raio auxiliar paralelo que passa pelo foco F_2. O raio emergente do sistema (2) encontra o eixo no ponto <u>F'</u> que é o <u>foco imagem do sistema resultante</u> e encontra, no ponto A', o prolongamento do raio incidente seu conjugado. O plano normal ao eixo que passa por A' é o <u>plano principal imagem</u> <u>H'</u> do <u>sistema resultante</u>.

Procura-se depois o raio incidente cujo conjugado no espaço-imagem é paralelo ao eixo e passa pelo ponto A'. Para isso considera-se invertido o sentido de propagação da luz; ao raio paralelo ao eixo, que passa pelo ponto A' do espaço-imagem, corresponde um raio que passa pelo foco F_2; o raio incidente, conjugado deste em relação ao sistema (1) determina-se por meio de um raio auxiliar paralelo que passa pelo foco F'_1; o raio incidente encontra o eixo no ponto $\underline{F}$ que é o foco objecto do sistema resultante e encontra, no ponto A, o prolongamento do raio emergente seu conjugado; o plano normal ao eixo que passa por A é o plano principal objecto, $\underline{H}$, do sistema resultante.

Vejamos, agora, como estabelecer as relações entre as distâncias focais $f, f', f_1, f'_1, f_2, f'_2$ dos sistemas resultante e associados.

Continuando a considerar a aproximação paraxial:

$\operatorname{tg}\alpha \simeq \alpha$; $\operatorname{tg}\alpha' \simeq \alpha'$; donde:

$$\alpha = \frac{\mathcal{J}}{f'_1} \qquad -\alpha' = \frac{\mathcal{J}}{-f'} \qquad \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{f'}{f'_1}$$

$$\alpha = \frac{-\mathcal{J}'}{-f_2+\Delta} \qquad -\alpha' = \frac{-\mathcal{J}'}{f'_2+\overline{F'_2F'}} \qquad \frac{\alpha}{\alpha'} = -\frac{f'_2+\overline{F'_2F'}}{-f_2+\Delta} \quad ;$$

Como os pontos F'_1 e F' são conjugados em relação ao sistema (2):

$$\overline{F'_2F'} \times (-\Delta) = f_2 f'_2 \quad , \quad \text{donde}: \ \overline{F'_2F'} = -\frac{f_2f'_2}{\Delta}$$

Substituindo esta expressão de $\overline{F'_2F'}$ na expressão de $\frac{\alpha}{\alpha'}$:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = -\frac{f'_2 - \frac{f_2f'_2}{\Delta}}{-f_2+\Delta} = -\frac{\frac{f'_2(\Delta - f_2)}{\Delta}}{-f_2+\Delta} = -\frac{f'_2}{\Delta}$$

e, igualando à primeira expressão obtida para $\frac{\alpha}{\alpha'}$:

$$\frac{f'}{f'_1} = -\frac{f'_2}{\Delta} \quad , \quad \text{ou}$$

$$\text{(VII-47)} \qquad \boxed{f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta}}$$

Tenhamos agora em conta que pelo facto de os pontos F e F_2 serem conjugados em relação ao sistema (1), temos:

$$\overline{F_1F} \times \Delta = f_1 f'_1 \qquad \overline{F_1F} = \frac{f_1 f'_1}{\Delta} \quad ;$$

por os pontos F'_1 e F' serem conjugados em relação ao sistema (2):

$$(-\Delta) . \overline{F'_2F'} = f_2 f'_2 \qquad \overline{F'_2F'} = \frac{f_2 f'_2}{-\Delta} \quad ;$$

dos pontos F_1 e F'_2, conjugados em relação ao sistema resultante:

$$\overline{FF_1} . \overline{F'F'_2} = f f' \quad , \text{ou seja:}$$

(VII-48) $$f f' = \frac{f_1 f'_1 f_2 f'_2}{-\Delta^2} \quad ;$$

substituindo na expressão (VII-48) o valor de f' dado por (VII-47):

(VII-49) $$\boxed{f = \frac{f_1 f_2}{\Delta}}$$

Note-se que esta expressão de f também se poderia ter obtido, por processo análogo ao que utilizámos para calcular f', a partir das inclinações sobre o eixo do raio incidente AF e do seu conjugado em relação ao sistema (1).

CAP. VIII — INTERFERENCIAS

VIII . 1 — Introdução

A teoria das interferências ópticas baseia-se no princípio de sobreposição dos campos electromagnéticos; de acordo com este princípio, o campo eléctrico $\vec{E}$ produzido num ponto por várias fontes é dado pela soma:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots\cdots$$

onde $\vec{E}_1, \vec{E}_2 \ldots\ldots$ são os campos criados, nesse ponto, pelas diferentes fontes, separadamente. O mesmo é válido para os campos magnéticos.

Consideremos, então, duas ondas planas, harmónicas, polarizadas linearmente, com a mesma frequência $\underline{\omega}$. Os campos eléctricos serão:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01}\, e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1)}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02}\, e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_2)}$$

$\vec{k}_1$ e $\vec{k}_2$ são os vectores de onda, com a direcção da propagação da onda respectiva.

Se a diferença de fase, $\phi_1 - \phi_2$, fôr constante, as duas fontes dizem-se coerentes; as ondas resultantes dizem-se também, coerentes.

Como se sabe, a intensidade (média) num ponto é proporcional ao quadrado da amplitude do campo nesse ponto; teremos, então, a menos de um factor constante:

$$I = |\vec{E}|^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}^* = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1^* + \vec{E}_2^*)$$

$$= \vec{E}_{01}^{\,2} + \vec{E}_{02}^{\,2} + 2\,\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos\theta$$

$$= I_1 + I_2 + 2\,\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos\theta$$

com $\theta = \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \phi_1 - \phi_2$.

O termo $2\,\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos\theta$ é o termo de interferência, que nos mostra que a intensidade resultante pode ser, conforme o valor de θ, maior ou menor que $I_1 + I_2$. Uma vez que θ depende de $\vec{r}$ vão aparecer variações espaciais da intensidade; estas variações correspondem às franjas de interferência que se observam quando se combinam dois feixes de luz coerentes.

Se as fontes, origem das duas ondas, forem incoerentes, $\phi_1 - \phi_2$ variará, no tempo, de modo aleatório; se o intervalo de tempo de uma observação, Δt, for muito maior que o intervalo de tempo, δt, durante o qual $\phi_1 - \phi_2$ mantém o seu valor, o valor médio de $\cos\theta$ durante Δt será nulo e não se observarão figuras de interferência. Aponte-se, a título de exemplo, que para as lâmpadas de descarga em gás (lâmpadas de mercúrio, de neon ...) se tem $\delta t \sim 10^{-8}$ s, e para os lasers $\delta t \sim 10^{-3}$ s.

VIII.2 - Experiência de Young

A experiência clássica de demonstração de interferência da luz foi realizada pela primeira vez por Thomas Young em 1802.

Na experiência original a luz do Sol era utilizada como fonte e passava, primeiro por um orifício S, e, depois, a uma distância apreciável, por dois

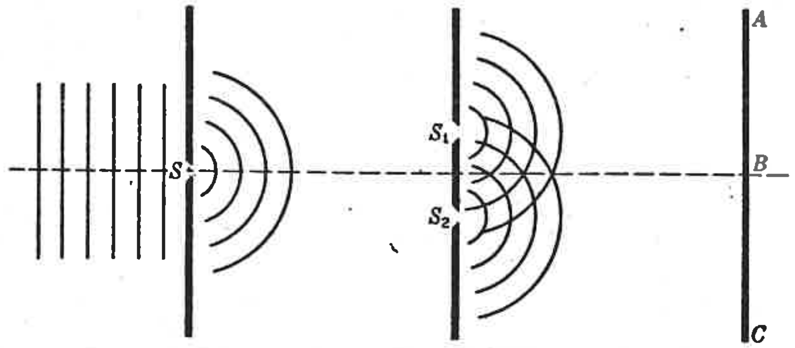


fig. VIII.1

orifícios S_1 e S_2. Os dois conjuntos de ondas esféricas emergindo de S_1 e S_2 interferem provocando no alvo AC uma figura de intensidade variável.

A análise da experiência de Young, que nos permitirá calcular a intensidade nos pontos do alvo AC, baseia-se no cálculo da diferença de fase entre as duas ondas que chegam a cada ponto. Admitindo que as ondas são esféricas com um factor de fase do tipo $e^{i(kr-\omega t)}$, a diferença de fase, $\underline{\delta}$, no ponto P, será dada por:

$$\delta = K(d_2 - d_1) = K\Delta \qquad \text{com} \qquad \Delta = d_2 - d_1$$

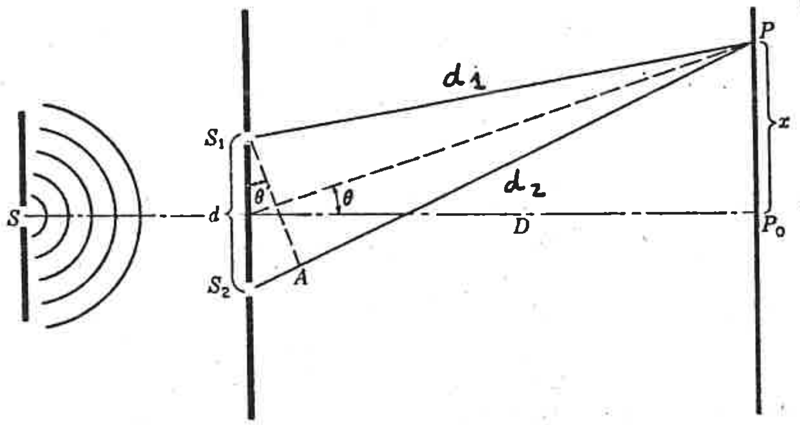


fig. VIII.2

Como os orifícios S_1 e S_2 estão simètricamente dispostos em relação a S, as ondas partem em fase desses orifícios.

Nas condições experimentais, a distância, $\underline{D}$, do alvo ao anteparo onde se encontram S_1 e S_2, é muito maior que a distância, $\underline{d}$, entre os dois orifícios; nestas condições, podemos fazer as aproximações:

$$\Delta \simeq d \operatorname{sen}\theta \simeq d\,\frac{x}{D} \qquad e \qquad \delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta \simeq \frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{dx}{D} \;;$$

os <u>máximos de intensidade</u> correspondem a ter:

$$\delta = 0\,,\ \pm 2\pi\,,\ \pm 4\pi, \ldots, \pm 2m\pi \qquad \text{com } \underline{m} \text{ inteiro}$$

ou seja: $$\frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{dx}{D} = 2m\pi \qquad \text{donde:}$$

$$\frac{dx}{D} = m\lambda \quad \Longrightarrow \quad \underline{x = m\lambda\frac{D}{d}} \;;$$

os valores <u>mínimos da intensidade</u> correspondem a:

$$\delta = \pi\,,\ 3\pi\,,\ 5\pi, \ldots\ldots, (2m+1)\pi \qquad \underline{m} \text{ inteiro}$$

ou seja: $$\frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{dx}{D} = (2m+1)\pi \qquad \text{donde:}$$

$$\frac{dx}{D} = \frac{2m+1}{2}\lambda \quad \Longrightarrow \quad \underline{x = \left(m+\tfrac{1}{2}\right)\lambda\frac{D}{d}}\,.$$

O número inteiro <u>m</u> que caracteriza uma franja brilhante chama-se <u>ordem de interferência</u>.

De acordo com as equações atrás escritas, a distância, no alvo, entre duas franjas sucessivas, que se obtém variando <u>m</u> de uma unidade em qualquer das equações vale: $\lambda D/d$; esta distância, chamada <u>interfranja</u>, vari pois proporcionalmente a <u>D</u> e a <u>λ</u> e é inversamente proporcional à distância entre as duas origens; a determinação da interfranja permite calcular o comprimento de onda, <u>λ</u>, desde que as outras distâncias sejam bem conhecidas.

<u>VIII.3 Outros dispositivos de obtenção de figuras de interferência</u>

a) <u>Biprisma de Fresnel</u>

Como se vê na figura VIII.3 o duplo prisma refrac ta o feixe de luz proveniente da fonte S dando origem a dois feixes que parecem ter origem nas "fontes" S_1 e S_2 (fig. VIII.3).

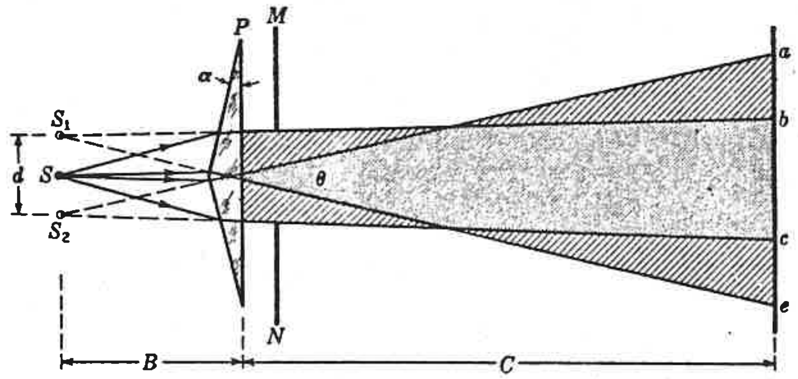


fig. VIII.3

se os anteparos M e N estão colocados na posição indicada, só haverá franjas de interferência na região bc. Este dispositivo também permite determinar o c.d.o. da luz utilizada desde que se conheçam a distância d entre as fontes virtuais, B+C entre as fontes e o alvo e a interfranja Δx; será:

$$\lambda = \frac{d\,\Delta x}{B+C}$$

b) Espelhos de Fresnel

Neste dispositivo a luz é reflectida em dois espelhos planos ligeiramente inclinados um em relação ao outro. Os espelhos produzem duas imagens virtuais da fonte S como se vê na fig. VIII.4. Estas imagens actuam de mo-

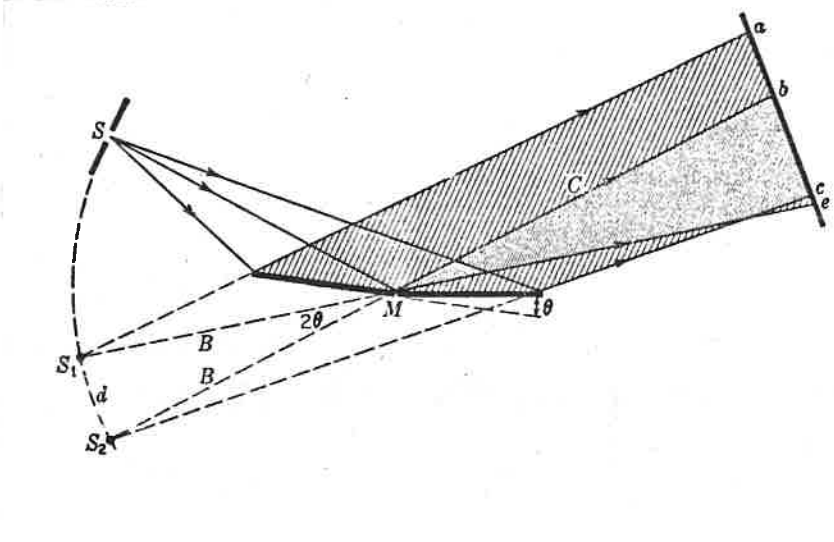


fig. VIII.4

do análogo ao das imagens formadas no biprisma e as franjas de interferência são observadas na região $\underline{bc}$ em que os feixes reflectidos se sobrepõem; aqui, também, o c.d.o., $\underline{\lambda}$, pode ser calculado pela expressão:

$$\lambda = \frac{d\,\Delta x}{B + C}$$

c) Espelho de Lloyd

A interferência é produzida pela sobreposição do feixe proveniente directamente da fenda (sem reflexão) e do

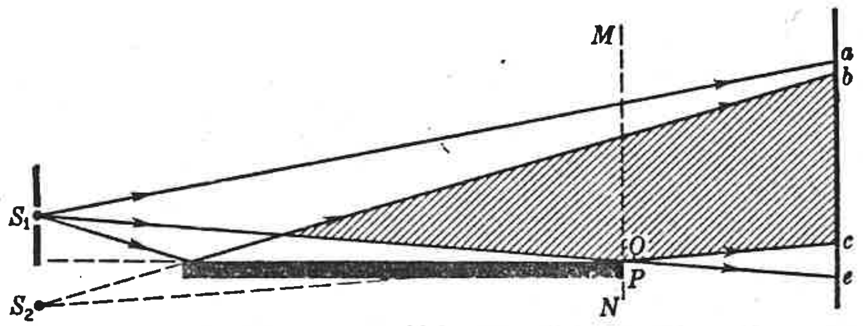


fig. VIII.5

feixe proveniente da imagem desta obtida num espelho plano (fig. VIII.5)

Todos os exemplos de dispositivos que aqui apresentámos para obter franjas de interferência são do tipo dito de "divisão da frente de onda". Outro tipo é o dito de "divisão da amplitude"; um exemplo de dispositivo deste último tipo é o interferómetro de Michelson que vamos estudar de seguida.

VIII-4 – Interferómetro de Michelson

Este interferómetro está representado esquematicamente na fig. VIII.6; a suas peças principais são dois espelhos planos M_1 e M_2, extremamente polidos, e e duas lâminas plano-paralelas G_1 e G_2; a primeira destas lâminas é levemente espelhada na sua 2ª face o que é re-

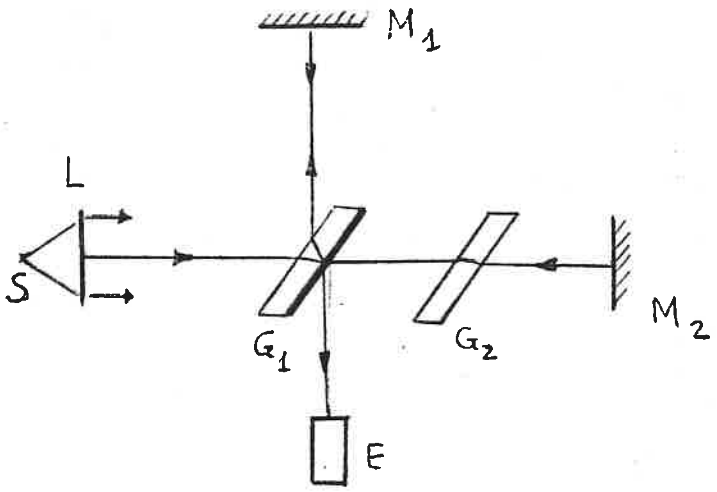


fig. VIII. 6

presentado pelo espessamento do traço. A luz, proveniente da fonte S, ao incidir na lâmina G_1 sob um ângulo de 45° é parcialmente reflectida na direcção do espelho M_1 e parcialmente transmitida na direcção de M_2; há aqui, pois, uma divisão de amplitude. Em qualquer dos espelhos a luz incide segundo a normal, sendo reflectida na mesma direcção e sentido contrário; a luz reflectida em M_1 atravessa G_1 uma terceira vez antes de atingir o dispositivo de observação E, e a reflectida por M_2, atravessa G_2 segunda vez e é reflectida em G_1 para ir também atingir E. A lâmina G_2 tem por fim tornar igual o percurso no vidro para os dois raios (lâmina compensadora); isto é especialmente importante quando se trabalha com luz branca. O espelho M_1 pode mover-se paralelamente a si próprio e o espelho M_2 pode rodar de modo a tornar-se perfeitamente perpendicular a M_1.

Da sobreposição dos dois feixes coerentes, reflectidos por M_1 e M_2, resultam franjas de interferência cujo aspecto depende da inclinação relativa dos espelhos.

a) Espelhos perpendiculares; franjas de igual inclinação

Suponhamos que a luz incidente é monocromática e suponhamos o espelho <u>real</u>, M_2, substituído pela sua imagem virtual, M'_2, obtida por reflexaõ em G_1 (fig. VIII.7); como

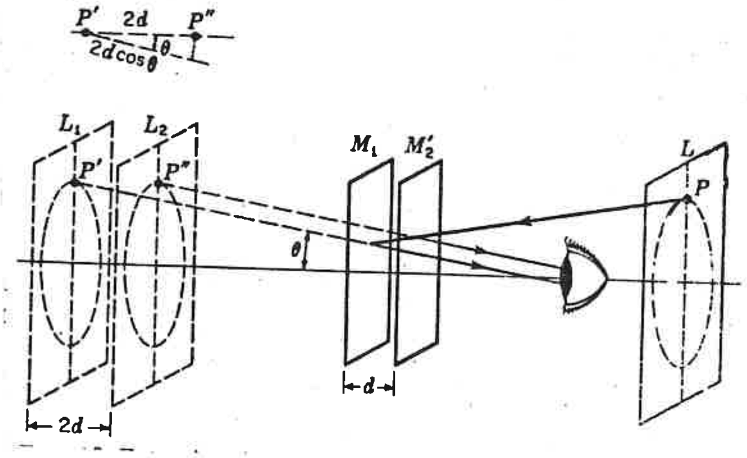


fig. VIII.7

os espelhos M_1 e M_2 saõ perpendiculares, M_1 e M'_2 seraõ paralelos. Analogamente, a fonte extensa, L, pode considerar-se colocada por trás do observador com imagens L_1 e L_2 obtidas em M_1 e M'_2. Estas fontes virtuais saõ coerentes, sendo a fase de pontos correspondentes, a mesma, em cada instante. Se for <u>d</u> a separaçaõ $M_1 M'_2$, as fontes virtuais estaõ separadas por <u>2d</u>.

Se <u>d</u> for igual a um número inteiro de meios comprimentos de onda, $m\frac{\lambda}{2}$, a diferença de percurso <u>2d</u> será igual a um número inteiro de comprimentos de onda e todos os raios reflectidos segundo a normal aos espelhos estaraõ em fase; os raios inclinados, porém, normalmente naõ estaraõ em fase.

A diferença de percurso de dois raios provenientes dos pontos P' e P'', imagens de P, é $\underline{2d\cos\theta}$ em que $\underline{\theta}$ é o ângulo de qualquer um dos raios luminosos, provenientes de P' ou P'', com o eixo. Teremos entaõ máximos de intensidade para os ângulos $\underline{\theta}$ que satisfazem a relaçaõ:

$$2d\cos\theta = m\lambda \qquad \text{(VIII.1)}$$

Visto que para cada conjunto de valores <u>d</u>, <u>m</u> e <u>λ</u>, o ângulo θ é constante, os máximos aparecerão na forma de círculos em torno da perpendicular aos espelhos tirada do dispositivo de observação.

Franjas de interferência do tipo das aqui apresentadas, em que a diferença de fase dos feixes que interferem é determinada pelo seu ângulo de inclinação, θ, chamam-se franjas de igual inclinação.

A expressão (VIII.1) mostra-nos que a franja de ordem zero, corresponderá a um ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$, e que à medida que nos aproximamos do centro da figura de interferência o valor de m correspondente às sucessivas franjas é crescente, isto é, as franjas vão sendo de ordem sucessivamente mais elevada. A mesma expressão permite-nos, ainda, concluir, que, se aumentarmos d, o que se consegue movendo M_1 paralelamente a si próprio, o ângulo θ, correspondente a um dado m, aumenta, podendo, assim, ser observadas franjas de ordem cada vez mais elevada; é como se do centro da figura fossem irrompendo anéis, uns atrás dos outros.

Como no centro a condição de máximo é:

$$2d = m\lambda \qquad (\cos\theta = 1)$$

fàcilmente se vê que um novo anel surge quando a espessura d aumenta de $\frac{\lambda}{2}$.

Se fizermos diminuir d, aproximando o espelho M_1 de M_2', as conclusões são contrárias, os anéis parecem ser "engolidos" no centro, e quando M_1 e M_2' coincidem, a figura de interferência desaparece porque os raios estão em fase para todos os ângulos θ.

Na fig. VIII.8 (a–e) pode ver-se o aspecto de figuras de interferência obtidas num interferómetro de Michelson nas condições descritas, correspondendo a figura central, (c), ao caso $\underline{d=0}$ e as figuras (b) e (c) a valores de $\underline{d}$ inferiores aos das figuras (a) e (e).

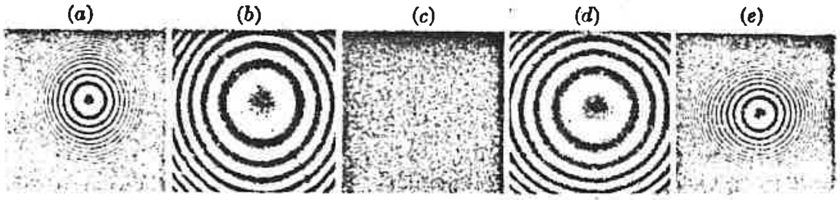


fig. VIII . 8

b) Espelhos não perpendiculares; franjas de igual espessura

Se os espelhos M'_2 e M_1 não estiverem perfeitamente paralelos ainda é possível observar franjas de interferência. Neste caso, o espaço entre os espelhos tem a forma de cunha como se pode ver na fig. VIII . 9. Os dois

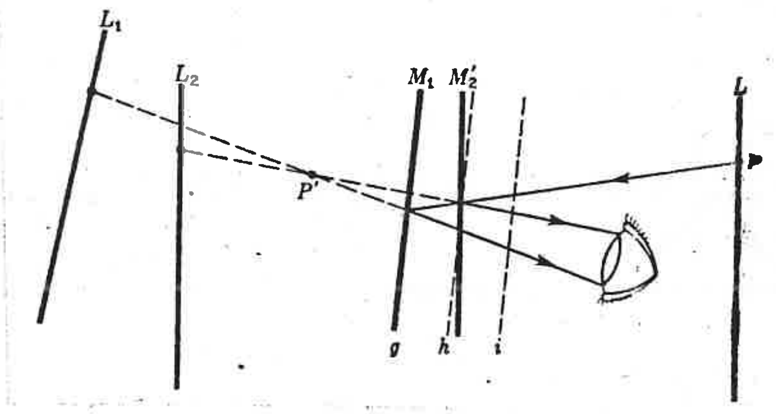


fig. VIII . 9

raios luminosos que atingem o observador (correspondentes a um mesmo ponto P da fonte), já não são paralelos e parecem provir do ponto P'; as franjas de interferência que se observam são, agora, praticamente rectas, porque a variação da diferença de percurso é devida, sobretudo, à variação da espessura da camada de ar entre os espelhos; com efeito, com uma camada em forma de cunha, os pontos de igual espessura encontram-se ao longo de linhas rectas paralelas à aresta da cunha. Note-se, no entanto, que se $\underline{d}$ tiver um valor apreciável, as franjas não serão rigorosamente rectas, porque, então, a inclinação também intervirá para a diferença de percurso.

Franjas de interferência como as que aqui nos aparecem em que a principal razão de diferença de percurso resulta duma variação de espessura, designam-se por franjas de igual espessura.

VIII . 5 - Interferências por reflexão múltipla

Alguns dos mais belos efeitos obtidos por interferência resultam de múltiplas reflexões da luz entre duas superfícies de uma lâmina delgada de material transparente; são observadas, por exemplo, com uma fina camada de óleo na água, bolas de sabão, etc.

a) Camada plano-paralela

Considere-se um raio luminoso que incide numa camada plano-paralela num ponto A como se representa na fig. VIII . 10; uma parte desse raio será reflectida (raio 1)

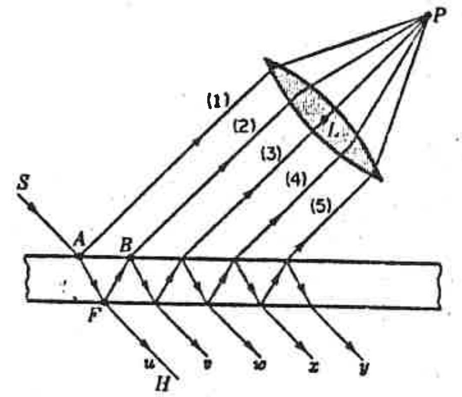


fig. VIII . 10

e outra parte refractada na direcção AF; esta última, chegada a F é, em parte, reflectida para B, em parte refractada para H; em B haverá nova reflexão e nova refracção. A continuação deste processo dará origem a dois feixes de raios paralelos, um de cada lado da camada; em qualquer destes feixes a intensidade diminui, ràpidamente, de um raio para o seguinte

Se o feixe de raios paralelos (do lado "de cima" da camada, fôr levado a convergir em P, por meio da lente L, cada raio terá percorrido uma distância diferente e as diferenças de fase podem ser de modo a produzir interferências construtivas ou destrutivas.

Para calcular a diferença de fase entre estes raios vamos começar por calcular a diferença de percurso óptico (produto do índice de refracção pela distância percorrida) para um par de raios sucessivos tais como (1) e (2).

Seja, como representado na fig. VIII.11, d a espessura da camada, n o seu índice de refracção, λ o c.d.o. da luz e ϕ e ϕ' os ângulos de incidência e de refracção.

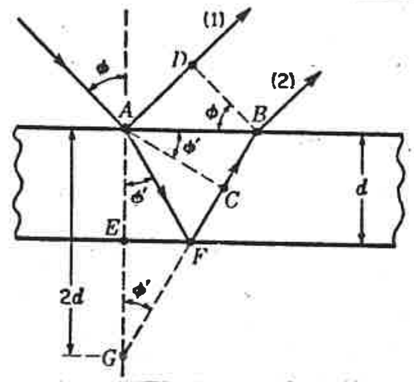


fig. VIII. 11

Se $\overline{BD}$ fôr perpendicular ao raio (1), os percursos ópticos a partir de B e de D até ao foco da lente serão iguais; a partir de A, o raio (2) tem o percurso $\overline{AFB}$ na camada e o raio (1) o percurso $\overline{AD}$ no ar; a diferença de percursos ópticos será:

$$\Delta = n(\overline{AFB}) - \overline{AD} .$$

Se $\overline{BF}$ fôr prolongado até intersectar a linha $\overline{AE}$ em G, será $\overline{AF} = \overline{GF}$, porque, os ângulos, de incidência e de reflexão, na face inferior são iguais; temos então:

$$\Delta = n(\overline{GB}) - \overline{AD} = n(\overline{GC} + \overline{CB}) - \overline{AD}$$

Sendo a linha $\overline{AC}$ perpendicular a $\overline{FB}$, as linhas $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$ representam duas posições, sucessivas, duma superfície de onda; como os percursos ópticos devem ser iguais, para qualquer raio, entre duas superfícies de onda, pode escrever-se:

$$n\ \overline{CB} = \overline{AD}$$

vindo:

$$\Delta = n\,\overline{GC} = n \times 2\,d \cos\phi'$$

Se esta diferença de percursos ópticos fôr igual a um número inteiro de comprimentos de onda, era de esperar que os raios (1) e (2) chegassem, em fase, ao ponto P e produzissem um máximo de intensidade; temos, no entanto, que ter em conta, o facto de que, na reflexão na superfície de separação de um meio menos denso para um meio mais denso (de maior índice de refracção) há uma <u>mudança de fase de π</u>, como pode ser explicado pela Óptica electromagnética; ora, o raio (1) sofre uma reflexão deste tipo, o que significa que:

(VIII.2) $2\,n\,d\cos\phi' = m\,\lambda$ condição de mínimo

sendo:

(VIII.3) $2\,n\,d\cos\phi' = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$ condição de máximo

Vejamos o que se passa com os raios (3), (4), (5).... Visto que a geometria é a mesma, a diferença de percurso entre os raios (3) e (2) será, também, dada por: $2nd\cos\phi'$; mas, visto que agora não há reflexão com mudança de fase, se se verificar a condição, $2\,n\,d\cos\phi' = m\lambda$, o raio (3) estará em fase com (2), e o mesmo acontecerá para os sucessivos pares.

Logo, se se verificar:

$\underline{2nd\cos\phi' = m\lambda}$, teremos $\begin{cases} (1) \text{ e } (2) \text{ em oposição de fase} \\ (2), (3), (4), \dots \text{ em fase} \end{cases}$

se se verificar:

$\underline{2nd\cos\phi' = (m+\frac{1}{2})\lambda}$ $\begin{cases} (1) \text{ e } (2) \text{ em fase} \\ (3), (5), (7), \dots \text{ em oposição} \\ \text{de fase com } (2), (4), (6) \dots \end{cases}$

Visto que (2) é mais intenso que (3), (4) mais intenso que (5), etc., estes pares não se anulam, e visto que a série mais forte está em fase com (1), que é o mais forte de todos, teremos, para:

$\underline{2nd\cos\phi' = (m+\frac{1}{2})\lambda}$ __máximo de intensidade__

Vejamos o que se passa com o mínimo de intensidade. O raio (2) está em oposição de fase com (1) mas como (1) tem uma amplitude muito maior que (2) não se anulam completamente; porém, como vamos ver, à soma de (3), (4), (5), ..., todos em fase com (2), corresponde uma amplitude que vai compensar, exactamente, a diferença de amplitudes entre (1) e (2).

Seja $\underline{a}$ a amplitude da onda incidente, $\underline{r}$ o coeficiente de reflexão (o mesmo quer na superfície superior, quer na inferior), $\underline{t}$ e $\underline{t'}$ os coeficientes de transmissão, respectivamente, na passagem do meio menos denso para o mais denso, e na passagem do meio mais denso para o menos denso; teremos, então, para as sucessivas ondas, as amplitudes representadas na fig. VIII. 12.

Somando as amplitudes de todos os raios que abandonam a face superior, excepto o primeiro virá:

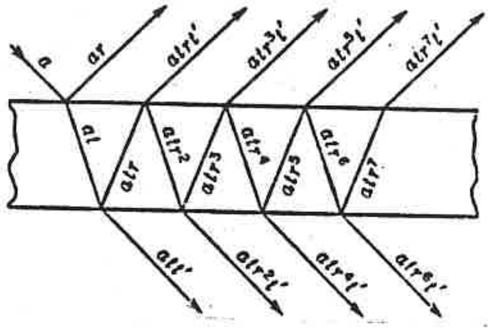


fig. VIII · 12

$$A = a t r t' + a t r^3 t' + a t r^5 t' + a t r^7 t' + \dots$$
$$= a t r t' \left(1 + r^2 + r^4 + r^6 + \dots \right) ;$$

como $r < 1$, a série geométrica tem uma soma finita $S = \dfrac{1}{1 - r^2}$, donde:

$$A = a t r t' \frac{1}{1 - r^2} ;$$

ora, pode provar-se * que se tem: $t t' = 1 - r^2$, logo

$$A = a r$$

que é a amplitude do raio (1); haverá, então, interferência completamente destrutiva.

Da condição de máximo que acabámos de apresentar, vemos que a cada franja brilhante, (um certo valor de <u>m</u>) corresponde um valor bem determinado de ϕ, de modo que a franja terá a forma de um arco de circunferência com centro no pé da perpendicular traçada do olho do observador para o plano da camada; temos, pois, <u>franjas de igual inclinação</u>.

---

* ver: "Fundamentals of Optics", F.A. JENKINS and H.E. WHITE, Mc Graw Hill, 3ª edição, pag. 208

Repare-se, que, para que se possam observar franjas de interferência, é necessário ter uma fonte extensa. Com efeito, se tivessemos uma fonte pontual muito distante, teriamos apenas um valor para o ângulo de incidência, e o feixe de raios paralelos que atingiria o observador, teria apenas uma direcção (a que corresponderia à lei da reflexão); o observador veria, apenas, um ponto, brilhante ou escuro conforme a diferença de fase correspondente a esse ângulo de incidência.

Se os raios que emergem pelo lado inferior da camada também forem levados a convergir darão, igualmente, lugar a figuras de interferência; como, neste caso, não há mudança de fase devida à reflexão, a equação:

$$\underline{2\,n\,d\cos\phi' = m\lambda} \quad \text{é condição de } \underline{\text{máximo}}$$

e a equação:

$$\underline{2\,n\,d\cos\phi' = \left(m+\tfrac{1}{2}\right)\lambda} \quad \text{é condição de } \underline{\text{mínimo}}$$

Quando se verifica a condição de máximo os raios u, v, w, ... estão todos em fase; quando se verifica a condição de mínimo estão, alternadamente, em oposição de fase. Se o coeficiente de reflexão, r, fôr baixo, (como no caso de vidros não espelhados), a amplitude de u é muito maior que as amplitudes de todos os outros raios, de modo que os mínimos nunca são de intensidade nula.

As intensidades, reflectida e transmitida, para uma camada com coeficiente de reflexão $r = 0{,}2$, estão representadas na fig. VIII.13, em função da diferença de fase $\delta = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$; a condição de máximo de luz transmitida (mínimo de reflectida), $\Delta = m\lambda$, corresponde a $\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} m\lambda = m \times 2\pi$.

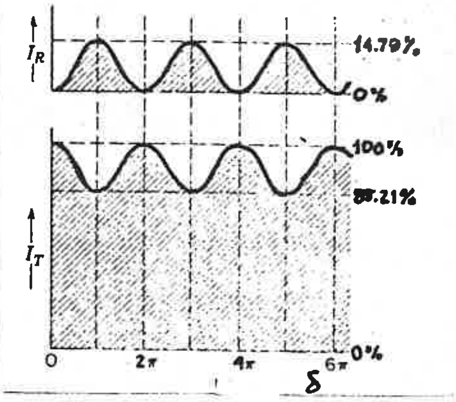


fig. VIII . 13

Como se compreende pela observação da fig. VIII . 13 as franjas de interferência no feixe transmitido serão muito menos contrastadas que no feixe reflectido.

b) Camada em forma de cunha

Se a camada não fôr plano-paralela, como no caso da fig. VIII . 14, os raios que interferem não são paralelos;

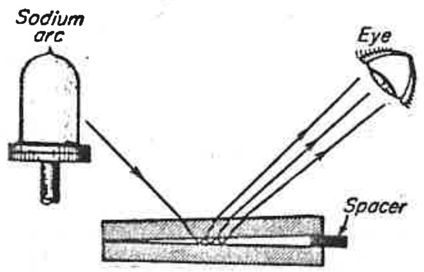


fig. VIII . 14

as franjas resultantes (semelhantes às obtidas no interferómetro de Michelson quando os espelhos não estão paralelos), se as duas superfícies são planas (camada em forma de cunha) serão, pràticamente, rectas segundo as linhas de igual espessura. A diferença de percurso para um dado par de raios será dada, pràticamente, por $2nd\cos\phi'$, e, se nos pusermos na situação de observação pràticamente segundo a normal ($\cos\phi' \simeq 1$), os máximos corresponderão a:

$$2nd = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

Ao passar de uma franja para a seguinte <u>m</u> aumenta de uma unidade, correspondendo a uma variação $\frac{\lambda}{2}$ da espessura óptica da camada $\underline{nd}$.

As franjas obtidas com este dispositivo, são, como se compreende do que foi dito atrás franjas de igual espessura. Têm grande interesse prático porque permitem fazer o teste do grau de perfeição de uma superfície plana; com efeito, se tivermos uma superfície perfeitamente plana e outra que o não seja, as franjas, obtidas na camada de ar entre elas, serão de forma irregular, acompanhando as regiões de igual espessura, $\underline{d}$ (fig. VIII. 15).

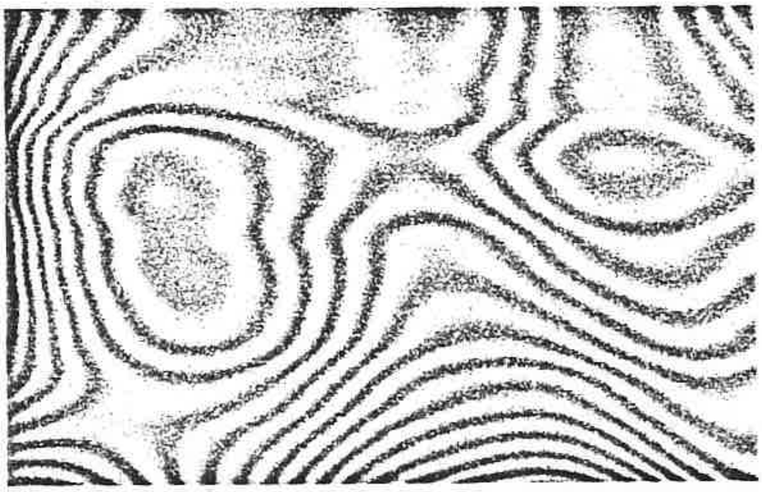


fig. VIII. 15.

c) Anéis de Newton

As franjas chamadas anéis de Newton são outro exemplo de franjas de igual espessura; são observadas na camada de ar entre uma superfície plana de vidro e a superfície esférica duma lente convexa que contactam no ponto central; as franjas são circulares em torno do ponto de contacto.

Sendo a observação feita na perpendicular a condição de mínimo será:

$$2d = m\,\lambda \qquad \text{(VIII.4)}$$

($n \simeq 1$ por se tratar de uma camada de ar)

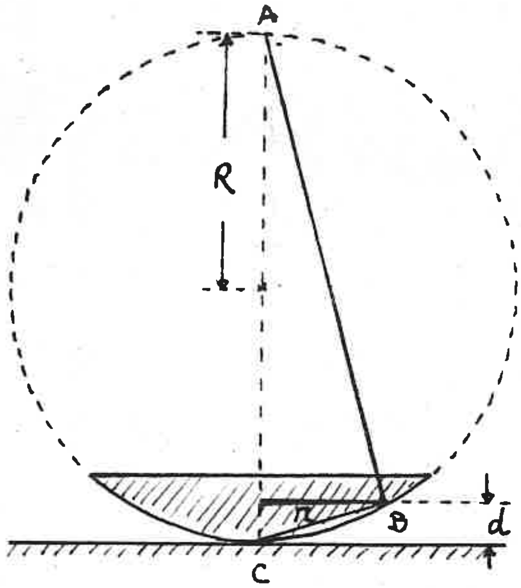


fig. VIII . 16

Se fôr R, muito grande, o raio de curvatura da superfície esférica (fig. VIII . 16), o valor de r, raio do anel de Newton que corresponde à espessura d, será dado por:

$$(2R - d) . d = r^2$$

visto que, num triângulo rectângulo (triângulo ABC), a altura em relação à hipotenusa é o meio proporcional entre os segmentos que determina na hipotenusa. Como $d \ll R$, vem:

$$2Rd \simeq r^2 \qquad \text{ou} \qquad d \simeq \frac{r^2}{2R}$$

que, substituído na equação (VIII . 4), dá:

$$2 \times \frac{r_m^2}{2R} = m\lambda \quad , \text{ ou}$$

$$(\text{VIII} . 5) \qquad \lambda = \frac{r_m^2}{mR}$$

que dá o comprimento de onda de luz em função do raio, r_m, do anel escuro de ordem m.

Nas condições que acabámos de descrever a mancha central é escura devido à mudança de fase, π, que ocorre se a reflexão é na superfície de separação de um meio menos denso para um meio mais denso.

Thomas Young introduziu uma modificação na experiência utilizando, na placa inferior, um material de índice de refracção superior ao do da lente e enchendo o espaço entre elas com um óleo de índice de refracção intermédio; assim, ambas as reflexões são com mudança de fase e a mancha central passa a ser brilhante.

A luz transmitida também apresenta anéis de interferência; êstes anéis são complementares dos da luz reflectida, sendo, portanto, a mancha central brilhante, quando na reflectida ela é escura; pelas razões já apresentadas em VIII.5 a) o contraste entre os anéis escuros e brilhantes é fraco.

d) Interferómetro de Fabry-Perot

Este interferómetro utiliza interferência por reflexão múltipla na camada de ar entre duas placas rigorosamente paralelas, parcialmente reflectoras, de vidro ou quartzo (fig. VIII.17).

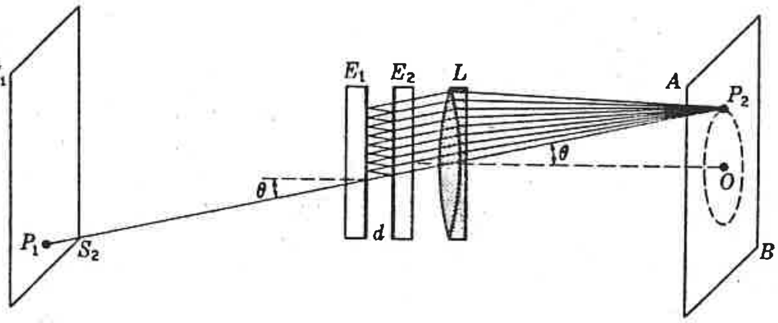


fig. VIII.17

A luz, monocromática, proveniente da fonte extensa ($S_1 S_2$) vai dar origem, depois de múltiplas reflexões, a feixes transmitidos de raios paralelos que são levados a convergir por meio da lente L; assim, o raio proveniente de P_1, que incide segundo um ângulo θ, dá origem a um feixe de raios paralelos com o mesmo ângulo de inclinação, que vai convergir no ponto P_2. A condição de máximo, será, considerando $n=1$ (para o ar),

$$2 d \cos\theta = m \lambda .$$

Esta condição será satisfeita por todos os pontos da circunferência que passa por P_2 e tem centro em O, intersecção do eixo da lente com o alvo. Quando θ diminui, $\cos\theta$ aumenta até que se atinge um outro máximo quando <u>m</u> aumenta de uma unidade; vamos, assim, obter uma sucessão de anéis brilhantes com centro em <u>O</u>, como está representado na fig. VIII - 18.

FABRY–PEROT fringes.

fig. VIII . 18

Se a distância <u>d</u> entre as placas pode variar deslocando uma delas paralelamente a si própria, o dispositivo descrito designa-se por interferómetro de Fabry-Perot; se a distância <u>d</u> é mantida perfeitamente fixa designa-se por padrão de Fabry-Perot.

ELECTROMAGNETISMO II

Licenciaturas em Física

Ano lectivo 1986/87

Capítulo IX:

INTERFERÊNCIAS DAS ONDAS LUMINOSAS

(Elementos de estudo de apoio às Aulas Teóricas)

Páginas IX-1 a IX-38

INTERFERÊNCIAS DAS ONDAS LUMINOSAS

1. Introdução

Como vimos no Cap. VII — Fundamentos electromagnéticos da Ópktica Geométrica —, dentro dos limites das aproximações aí adoptadas, a intensidade ao longo de um feixe luminoso varia, de ponto para ponto, na razão inversa da área da secção recta do tubo de raios luminosos. No mesmo âmbito, mas de modo mais geral, essa variação pode ser dada pela expressão (23') do § 7, Cap. VII. Assim, se o meio não fôr fortemente inhomogéneo, sendo por consequência os raios luminosos [ou as frentes de onda] curvas [ou superfícies] suficientemente regulares, poderemos garantir — a partir desse estudo, e em conformidade com os factos experimentais(*) — que a intensidade de um feixe luminoso se apresenta de modo geral com uma distribuição espacial lentamente variável de ponto para ponto.

Porém, quando dois ou mais feixes de luz são sobrepostos, a distribuição de intensidade já não pode, em geral, ser descrita de uma maneira tão simples. Com efeito, a sobreposição linear, em cada ponto do espaço, dos campos electromagnéticos associados aos

---

(*) Estamos desde logo a pôr de parte as regiões divisórias de sombra-luz, em que ocorrem efeitos de difracção; e fazemos também excepção de pontos focais, que representam singularidades dos feixes de raios luminosos.

diversos feixes luminosos permite prever que <u>não</u> <u>haja em geral uma sobreposição linear das intensidades dos diversos feixes, em cada ponto.</u>

Recordemos que a intensidade luminosa, $\underline{I}$, se define como a média no tempo do módulo do vector de Poynting, com o significado físico de quantidade de energia que atravessa na unidade de tempo uma unidade de área normal à orientação do fluxo de energia, que é a orientação de propagação local.

Para uma onda plana tem-se $I = a\,\overline{w}$ ($\underline{a}$, velocidade de propagação; $\underline{w}$, densidade volúmica de energia electromagnética, $w = w_e + w_m$), ou seja:

(1) $$I = c\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cdot\overline{\vec{E}^2} \quad ;$$

e, como vimos na Cap. VII, esta relação é ainda válida, pelo menos num bom grau de aproximação, para ondas de tipo mais geral, nomeadamente para frentes de onda $\mathcal{S}(\vec{r}) = \text{const.}$ não-planas.

Então, supondo que se sobrepõem dois feixes de luz, (1) e (2), teremos $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ e

(2) $$\vec{E}^2 = \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2\,\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2 \quad ;$$

donde resulta, em cada ponto, a partir de (1):

(3) $$I = I_1 + I_2 + J_{12}$$

com

(4) $$I_1 = c\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cdot\overline{\vec{E}_1^2} \quad ; \quad I_2 = c\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cdot\overline{\vec{E}^2}$$

(5) e $$J_{12} = c\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cdot\overline{\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2} \quad .$$

Òbviamente, I, intensidade global correspondente ao campo $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$, não iguala, em geral, $I_1 + I_2$. Notando que o termo adicional J_{12} pode ser positivo ou negativo (eventualmente nulo), tira-se a conclusão de que I tanto pode exceder a soma $I_1 + I_2$ como ficar inferior a $I_1 + I_2$, podendo neste caso descer até zero que é o seu valor mínimo (pois que, por (1), $I \geqslant 0$). Sempre que se tenha $J_{12} = 0$, virá òbviamente $I = I_1 + I_2$.

Ora, a análise de diferentes situações de sobreposição de feixes luminosos põe em evidência que, ao contrário do que acontece com I_1 e I_2 (que apresentam distribuições espaciais lentamente variáveis de ponto para ponto, como acima se referiu), <u>a quantidade J_{12} pode ser ràpidamente variável de ponto para ponto</u>, acarretando para a intensidade global I um comportamento semelhante. Adiante veremos porquê.

Isso acontece designadamente quando a luz emanada de uma fonte é dividida, <u>mediante aparelhagem adequada e convenientemente ajustada</u>, em dois feixes que depois são levados a sobrepôr-se. A intensidade na região de sobreposição pode acusar uma rápida variação de ponto para ponto, entre máximos que excedem a soma das intensidades dos dois feixes e mínimos por vezes nulos. Adiante veremos como isso acontece.

Este fenómeno chama-se <u>interferência</u> da luz. O termo J_{12}, dado por (5) e intervindo em (3), designa-se por <u>termo de interferência</u>. Nos pontos em que o seu valor é positivo produz-se <u>interferência construtiva</u> ($I > I_1 + I_2$) ; nos pontos em que o seu valor é negativo produz-se <u>interferência destrutiva</u> ($I < I_1 + I_2$) .

Note-se que quando queremos comparar intensidades em diferentes pontos de um <u>meio homogéneo</u> — como acontece nos diversos exemplos que adiante estudaremos — , a quantidade $\overline{\vec{E}^2}$ — média no tempo do quadrado do vector campo eléctrico — pode ser adoptada como medida da intensidade. Isto é, na expressão (3) tomaremos

$$(6) \qquad I = \overline{\vec{E}^2} \quad , \quad I_1 = \overline{\vec{E}_1^2} \quad , \quad I_2 = \overline{\vec{E}_2^2}$$

$$(7) \qquad \text{e} \qquad J_{12} = 2\, \overline{\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2}$$

(omitindo em todos os termos o factor de proporcionalidade $c\sqrt{\varepsilon/\mu}$, o mesmo nos diferentes pontos de observação).

2. Interferência de duas ondas monocromáticas

2A.— Comecemos por estudar de modo geral a sobreposição de duas ondas monocromáticas na sua dependência temporal e com a mesma frequência , <u>ω</u> .

Convém adoptar a habitual representação complexa, mediante a relação

$$(8) \qquad \vec{E}(\vec{r}, t) = Real\{\vec{A}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}\}$$

em que o vector complexo $\vec{A}(\vec{r})$ tem componentes cartesianas dadas de modo muito geral por :

$$(9) \qquad A_\nu(\vec{r}) = a_\nu(\vec{r})\, e^{i\alpha_\nu(\vec{r})}$$

sendo $a_\nu(\vec{r})$ e $\alpha_\nu(\vec{r})$ funções de ponto, reais; a_ν são as amplitudes e α_ν as funções de fase. Como se sabe (v. Apêndice ao Cap. VII), admitindo já que se toma a média no tempo sobre um intervalo de medição τ_m muito grande comparado com o período $T = 2\pi/\omega$ ($\tau_m >> T$), tem-se, com (8) e (9):

$$(10) \qquad \overline{\vec{E}^2} = \frac{1}{2}\vec{A}\cdot\vec{A}^* = \frac{1}{2}\sum_\nu a_\nu^2 \quad .$$

Suponhamos então que num certo ponto P se vão sobrepôr duas ondas monocromáticas, cujos campos $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$, de tipo (8), têm amplitudes complexas $\vec{A}_1(\vec{r})$ e $\vec{A}_2(\vec{r})$ definidas por componentes de tipo análogo a (9). As intensidades I_1 e I_2, dadas por (6) calcular-se-ão mediante (10):

$$(11) \qquad I_1 = \frac{1}{2}\sum_\nu a_{1\nu}^2 \quad ; \quad I_2 = \frac{1}{2}\sum_\nu a_{2\nu}^2 \quad .$$

Quanto ao <u>termo de interferência</u> J_{12}, dado por (7), virá (Cf. Apêndice ao Cap VII):

$$(12) \qquad \begin{aligned} J_{12} = 2\,\overline{\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2} &= 2\times\frac{1}{2}\,\mathrm{Real}\left\{\vec{A}_1\cdot\vec{A}_2^*\right\} \\ &= \sum_\nu a_{1\nu}a_{2\nu}\cos(\alpha_{1\nu}-\alpha_{2\nu}) \end{aligned}$$

na sua expressão mais geral.

2B. — Admitamos agora, em particular, que as duas ondas em sobreposição são ambas, em cada ponto, polarizadas linearmente. Podemos nesse caso atribuir-lhes, em cada ponto, fases iguais para as três componentes $\nu = x, y, z$. Ou seja:

(i) No âmbito da aproximação à Óptica Geométrica deveremos adoptar em (9) funções de fase dadas por

$$\alpha_\nu(\vec{r}) = k_0\, \mathcal{S}(\vec{r}) + \varphi \tag{13}$$

tendo aqui $\mathcal{S}(\vec{r})$ o significado de percurso óptico vencido pela onda desde a sua fonte até o ponto de observação P (a que corresponde o vector-posição $\vec{r}$) e φ, constante, o significado de uma constante de fase inerente à fonte.

(ii) Para o caso de ondas planas (em meios homogéneos(*)) deveremos impôr em (9) que cada a_ν é uma constante e que, além disso, $\alpha_\nu(\vec{r})$ tem a forma $\vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi$ ($\vec{k}$, vector de onda; φ, constante).

Obviamente, a expressão (13) pode tomar-se como formalmente representativa das duas situações consideradas, (i) e (ii).

Nestas condições a expressão (12) vai assumir o aspecto particular

$$J_{12} = \cos\delta \sum_\nu a_{1\nu}\, a_{2\nu} \tag{14}$$

em que

$$\delta = \alpha_{1x} - \alpha_{2x} = \alpha_{1y} - \alpha_{2y} = \alpha_{1z} - \alpha_{2z}$$

(*) Neste capítulo, está sempre subjacente ao nosso estudo a suposição de que os meios são isótropos, lineares e não-condutores.

se pode escrever sob a forma

$$(15) \qquad \delta = k_0 \, \Delta \mathcal{S} + (\varphi_1 - \varphi_2) \quad .$$

Aqui, $\Delta \mathcal{S}$ representa a diferença dos percursos ópticos vencidos pelas duas ondas desde as respectivas fontes até o ponto de observação P:

$$(16) \qquad \Delta \mathcal{S} = \mathcal{S}_1(\vec{r}) - \mathcal{S}_2(\vec{r}) \quad ;$$

e $(\varphi_1 - \varphi_2)$ representa òbviamente a diferença entre as constantes de fase inerentes às duas fontes. (Em conformidade com as significações atribuidas aos termos da expressão (13).)

Supondo que as duas ondas são estritamente monocromáticas, $(\varphi_1 - \varphi_2)$ é bem uma constante. Considerando então a relação (15), torna-se evidente que para um c.d.o. λ_0 suficientemente pequeno, ou seja, para um k_0 suficientemente grande, basta uma pequena variação de $\Delta \mathcal{S}$ $[\, \partial(\Delta \mathcal{S}) \,]$, quando se passa de um ponto de observação P para um outro ponto de observação vizinho de P $[\, P + \overrightarrow{\partial P} \,]$, para que se produza uma variação importante de $\underline{\delta}$ $[\, \partial \delta = 2\pi/\lambda_0 \, \partial(\Delta \mathcal{S}) \,]$ — susceptível de acarretar uma variação drástica para $\cos \delta$. Compreende-se assim que, por (14), J_{12} possa variar ràpidamente de ponto para ponto, como já fora anunciado. Isso justifica que haja, ou que possa haver, interferência entre as duas ondas monocromáticas sobrepostas.

2C.— Contudo, a luz produzida por uma fonte real nunca é estritamente monocromática, mas, como nos ensina a teoria atomística, sofre flutuações irregulares quer nas amplitudes quer nas fases, flutuações estas demasiados rápidas para serem seguidas pela visão humana ou por um detector físico ordinário. As flutuações nas duas fontes não se encontram em geral correlacionadas e daí resulta que $(\varphi_1 - \varphi_2)$ pode ter variações incontroláveis e caóticas ao longo do tempo de medição τ_m. Duas fontes nestas condições dizem-se <u>fontes incoerentes</u>.

Admitindo que os intervalos de tempo ∂t, durante os quais $(\varphi_1 - \varphi_2)$ se mantém constante, são muito maiores que o período T das ondas $(\partial t \gg T)$, as <u>médias temporais</u> atrás praticadas (expressões (10)-(12)) mantêm-se ainda válidas e asseguram a existência de <u>interferência</u> dentro de cada intervalo de tempo ∂t. <u>Grosso modo</u>, podemos atribuir à ordem de grandeza destes ∂t o significado de '<u>tempo de coerência</u>' das duas fontes. Todavia, as flutuações aleatórias de $(\varphi_1 - \varphi_2)$ dentro do tempo de medição τ_m, sobretudo com $\partial t \ll \tau_m$, — considerando embora que as condições da montagem experimental mantêm $k_0 \Delta\mathcal{S}$ fixo para cada ponto de observação P — conduzem a um δ aleatório que induz uma <u>média estatística nula</u> para $\cos\delta$, e, em consequência, produz $J_{12} = 0$, e $I = I_1 + I_2$ em todos os pontos, para o tempo de medição τ_m. Isto significa que <u>as</u>

<u>interferências existentes para cada ∂t resultam nessas circunstâncias completamente inobservâveis.</u> (Sabemos bem da experiência que se não obtêm quaisquer efeitos de interferência a partir de duas fontes separadas, tais como dois filamentos incandescentes colocados lado a lado. Fontes deste tipo, bem como lâmpadas de néon ou de vapor de mercúrio, por exemplo, têm 'tempos de coerência' ∂t inferiores a 10^{-8} segundo. Mesmo as modernas fontes de luz altamente monocromáticas — os lasers — a menos que se utilizem esquemas especiais de sincronização — apresentam 'tempos de coerência' da ordem de 10^{-3} segundo. Então, com fotografia rápida (tempos de exposição 10^{-3} segundo ou menores) torna-se viável fotografar figuras de interferência a partir de dois lasers separados e não-sincronizados; mas para fontes ordinárias isto é totalmente impossível. (R.B.[3]))

O método tradicional de obter fontes luminosas susceptíveis de originarem <u>efeitos de interferência observáveis</u> consiste em produzir artificiosamente duas fontes secundárias S_1 e S_2, mediante dispositivos ópticos sobre os quais se faz incidir a luz proveniente de uma fonte simples S. As duas fontes S_1 e S_2, assim intimamente ligadas a uma mesma fonte simples S, têm as suas flutuações em geral correlacionadas de modo bastante preciso. Isso consegue-se na prática utilizando dois feixes provenientes da mesma fonte, que são separados um do outro mediante arranjos especiais, e são levados à sobreposição depois de efectuarem percursos ópticos distintos. Deve esclarecer-se que, em circunstâncias normais, com um ajuste experimental cuidadosamente realizado, se pode obter, na correlação das flutuações de fase entre as duas fontes, uma correspondência ponto-por-ponto suficientemente exacta. Então, se a fase φ_1 da vibração luminosa proveniente de um ponto Q_1 na fonte S_1 muda bruscamente de certo valor, também a fase φ_2 da vibração luminosa proveniente do ponto Q_2 correspondente na fonte S_2 variará do mesmo valor, simultâneamente. Daqui resulta que a diferença $(\varphi_1 - \varphi_2)$, para qualquer par de pontos correspondentes nas duas fontes, permanecerá sempre constante — e assim os efeitos de interferência serão estacionários (pois o carácter aleatório de $(\varphi_1 - \varphi_2)$ dentro do tempo de medição τ_m estará então completamente eliminado). Duas fontes de luz S_1 e S_2 nestas condições, dizem-se mutuamente coerentes.(*) A referida correspondência ponto-por-ponto na correlação de fase entre as duas fontes está na base da eficácia de qualquer experiência de interferência entre feixes luminosos.

(*) A correlação entre as flutuações das fontes S_1 e S_2 pode ser completa ou parcial — os dois feixes que se sobrepõem podem ser completamente coerentes ou apenas parcialmente coerentes. Pode mostrar-se que o 'grau de correlação' que existe entre as flutuações entre dois feixes de luz, determina a 'nitidez' dos efeitos de interferência na sua sobreposição; e, inversamente, a

/...

Observe-se por fim que (R.B. [2]), enquanto para produzir fontes coerentes de luz são imprescindíveis os arranjos especiais já referidos, o mesmo não acontece com feixes de micro-ondas, i.e., ondas radio-eléctricas com c.d.o.'s da ordem de alguns centímetros (também chamadas ondas centimétricas). Tais radiações electromagnéticas são produzidas por um oscilador que emite uma onda contínua, cuja fase permanece constante durante um tempo suficientemente longo face ao tempo de observação τ_m. Duas fontes de micro-ondas, independentes, (da mesma frequência) são portanto coerentes e podem ser utilizadas para demonstração experimental de interferência de duas ondas monocromáticas. Pela conveniente ordem de grandeza do seu c.d.o., tais experiências constituem uma fácil ilustração de muitos efeitos comuns de interferências no domínio óptico, cuja observação exige habitualmente montagens de muito mais difícil ajustamento.

2D.— Suponhamos o caso de duas ondas planas monocromáticas propagando-se segundo uma dada orientação $\vec{s}$ e polarizadas linearmente em ângulo recto. Se aplicarmos o nosso conhecimento de que as ondas são transversais, i.e., que ambos os vectores $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ assentam no plano de onda, então, para que sejam polarizadas em ângulo recto, tem que cumprir-se

---

'nitidez' observada revela o 'grau de correlação' que existe entre as flutuações dos dois feixes. (R.B. [1])

constantemente $\vec{E}_1 . \vec{E}_2 = 0$ donde resulta que por (7), $J_{12} = 0$: não há neste caso qualquer interferência (em todos os pontos de observação se tem sempre $I = I_1 + I_2$). [Note-se que a mesma conclusão é lícita para dois feixes de raios luminosos na aproximação da Óptica Geométrica desde que possuam localmente polarizações lineares em ângulo recto (o campo electromagnético de um raio luminoso tem localmente as propriedades de transversalidade de uma plana; e, como já recordámos, respeita a equação de média (1)).]

Esta conclusão vem perfeitamente ao encontro das experiências de Fresnel e Arago, em que estes dois físicos verificaram que duas ondas polarizadas linearmente em ângulo recto nunca interferem, quando sobrepostas em qualquer região do espaço.

[Deve observar-se no entanto que, no plano da História das Ideias em Física, estas experiências de Fresnel e Arago desempenharam o importante papel de virem demonstrar justamente o carácter transversal das vibrações luminosas no âmbito da teoria ondulatória da luz (devida a Huyghens e desenvolvida por Fresnel). Expliquemos isso.

Digamos, para começar, que se pode chegar à mesma expressão (14) de J_{12}, meramente como uma consequência da teoria ondulatória da luz e sem recorrer essencialmente à teoria electromagnética de Maxwell (repare-se que na nossa demonstração de (14), contida em 2A. e 2B. não se faz nenhum uso, designadamente, do carácter transversal dos campos; só as suas propriedades ondulatórias são, de facto, utilizadas). Posto isto, na verdade, o carácter transversal das vibrações luminosas infere-se directamente da expressão (14) — <u>no âmbito da teoria ondulatória da luz</u> — quando se têm em conta as experiências de Fresnel e Arago. Vejamos como se estabelece essa notável inferência.

Suponhamos que as duas ondas se propagam segundo o eixo dos zz, assentando o vector luminoso da primeira no plano (xz) enquanto o vector luminoso da segunda vai assentar no plano (yz). Então $a_{1y}=0$ e $a_{2x}=0$; e, a partir de (14), resulta:

$$J_{12} = a_{1z}\,a_{2z}\cos\delta \quad .$$

Visto que os resultados de Fresnel e Arago mostram que nenhuma interferência se verifica sob as circunstâncias específicas das suas experiências, em caso algum e com qualquer diferença de fase δ entre as duas ondas, somos forçados a concluir que $a_{1z}=0$ e $a_{2z}=0$, i.e., que os vectores luminosos são perpendiculares à direcção de propagação. Estava assim estabelecido o carácter transversal das ondas luminosas, no âmbito da teoria ondulatória da luz — avançado, pela 1ª vez, por Young (1817), tendo tomado conhecimento das experiências de Fresnel e Arago (1816).

Em contrapartida, na teoria electromagnética da luz, o carácter transversal das ondas luminosas é um resultado teórico imposto pelas equações de Maxwell às ondas planas. Assim, nesta nova perspectiva, as experiências de Fresnel e Arago, acima referidas, não constituem senão mais um dos notáveis factos experimentais a receber interpretação cabal dentro da teoria electromagnética da luz.]

2E.— Consideremos agora a distribuição de intensidade resultante da sobreposição de duas ondas monocromáticas que se propagam segundo o eixo dos zz e são polarizadas linearmente ambas com os vectores $\vec{E}$ na direcção do eixo dos xx — para fixar ideias. Então

$$a_{1y} = a_{1z} = a_{2y} = a_{2z} = 0 \quad ;$$

de sorte que, utilizando (11) e (14), vem:

$$(17) \quad \begin{cases} I_1 = \frac{1}{2}\, a_{1x}^2 \qquad I_2 = \frac{1}{2}\, a_{2x}^2 \\ J_{12} = a_{1x}\, a_{2x} \cos\delta = 2\sqrt{I_1 I_2}\,.\cos\delta \end{cases}.$$

A intensidade global resulta então, a partir de (3):

$$(18) \qquad I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,.\cos\delta$$

Haverá obviamente máximos de intensidade para os pontos de observação que façam

$$(19\text{-a}) \qquad |\delta| = 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ \dots \quad , \text{ com:}$$

$$(19\text{-b}) \qquad I_{máx} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\ .$$

E haverá mínimos de I para os pontos tais que

$$(20\text{-a}) \qquad |\delta| = \pi,\ 3\pi,\ \dots \quad , \text{ com}$$

(20-b) $$I_{mín} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \, .$$

No caso especial de as duas ondas transportarem igual intensidade ($I_1 = I_2$), o resultado (18) reduz-se a

(21) $$I = 2I_1(1+\cos\delta) = 4I_1\cos^2\frac{\delta}{2}$$

e a intensidade global varia então entre um valor máximo $I_{máx} = 4I_1$ e um valor mínimo $I_{mín} = 0$, conforme a Figura 1.

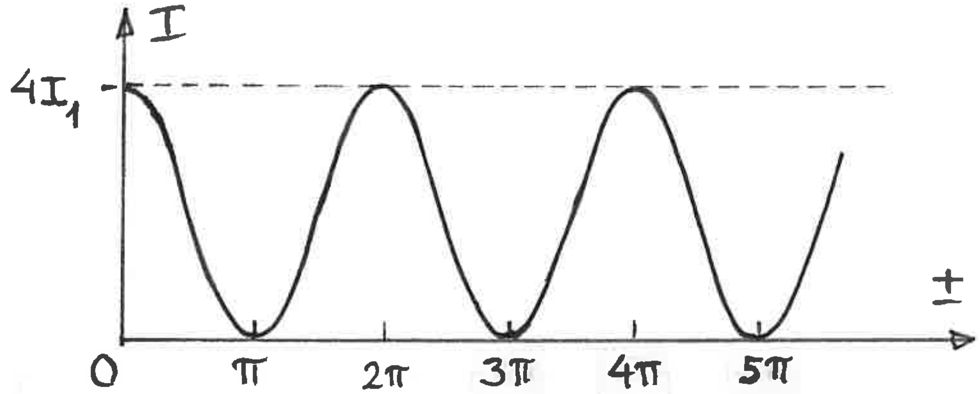


Figura 1

Note-se que, depois da discussão feita no § 2D., só há interferência efectivamente para as componentes de $\vec{E}_1$ e de $\vec{E}_2$ segundo uma mesma direcção e, por consequência, a situação agora considerada bate todas as possibilidades de interferência entre duas ondas que se propagam numa dada orientação: basta estudar a interferência das componentes (cada uma de) segundo duas direcções transversais à orientação de propagação e perpendiculares entre si, para poder interpretar o fenómeno global, nas diferentes situações que se apresentem.

Pode mostrar-se (R.B. [1], pag 259) são ainda válidos para feixes de luz natural. Admitiremos isso no decurso do nosso estudo.

3. Interferências entre dois feixes resultantes de partição de frente de onda. Franjas de Young.

3A. — Experiência de Young.

A experiência clássica de demonstração de interferência da luz foi realizada pela 1ª vez por Thomas Young em 1802. A luz do Sol, originalmente utilizada como fonte passava primeiro por um orifício S e depois incidia em dois orifícios S_1 e S_2, praticados num segundo anteparo, muito próximos um do outro. As duas ondas emergindo de S_1 e S_2, produziam, num alvo de observação AC, colocado a uma distância muito grande face à distância $\overline{S_1S_2}$, **iluminação de intensidade variável de ponto para ponto**, ao longo da direcção paralela a S_1S_2 [(Figura 2)].

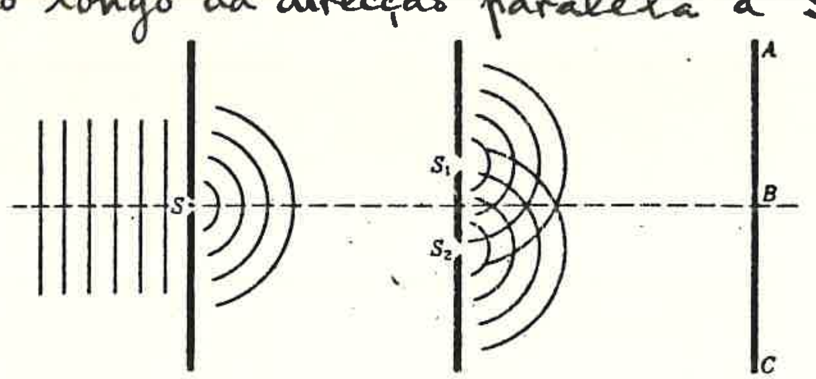


Figura 2

Na análise que vamos fazer desta experiência, suporemos que a luz proveniente de uma fonte pontual S, monocromática, incide sobre dois orifícios S_1 e S_2 muito próximos entre si — a uma distância $\underline{d}$ e equidistantes de S. Estes orifícios S_1 e S_2 vão actuar como fontes secundárias, monocromáticas, <u>em fase</u> (dada a equidistância a S) e originam dois feixes coerentes que interferem quando sobrepostos numa região atrás do anteparo S_1S_2. Em ordem à eficácia da observação de interferências, suporemos que o alvo de observação fica a uma distância $\underline{a}$ de $\overline{S_1S_2}$ muito maior que $\underline{d}$ ($a \gg d$).

Vamos estudar a figura de interferência que se forma sobre um plano xOy normal a um eixo bissector CO de $\overline{S_1S_2}$, sendo o eixo dos xx paralelo a S_1S_2 (Figura 3).

($s_1 = \overline{S_1P}$; $s_2 = \overline{S_2P}$)

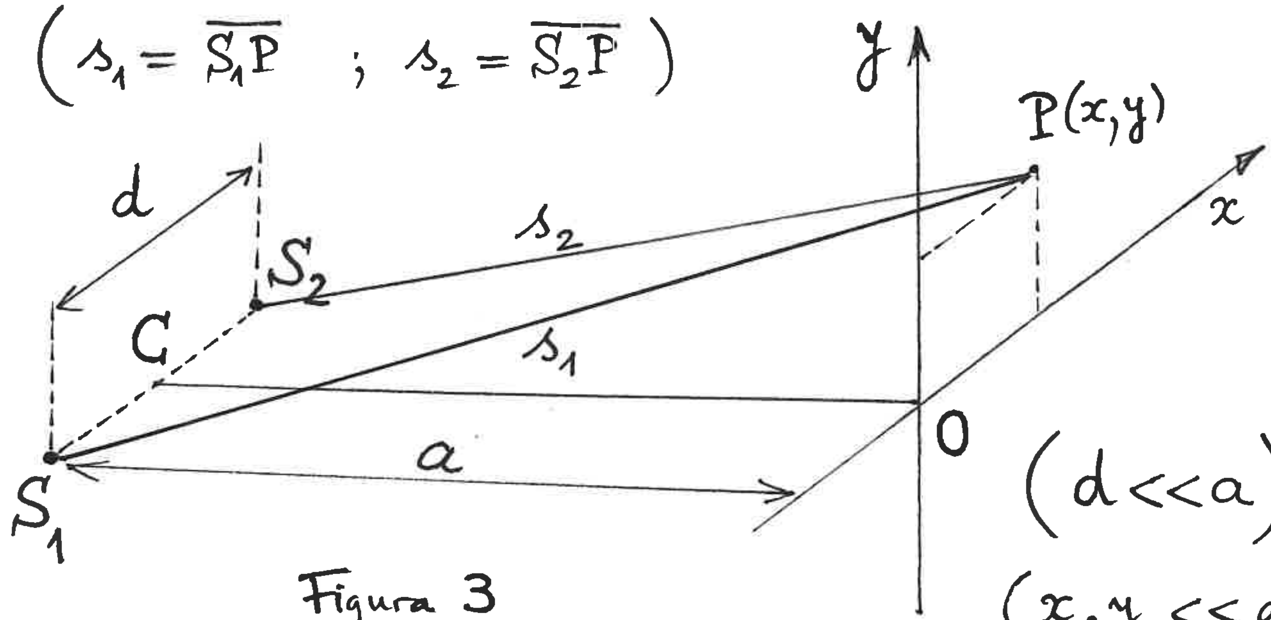


Figura 3

$(d \ll a)$

$(x, y \ll a)$

Tem-se : $S_1\left(\frac{d}{2}, 0, a\right)$; $S_2\left(-\frac{d}{2}, 0, a\right)$; $P(x, y, 0)$.

Vem portanto :

$$s_1 = \left[a^2 + y^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$s_2 = \left[a^2 + y^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2\right]^{1/2} \quad ;$$

donde resulta : $s_2^2 - s_1^2 = 2xd$.

Mas, porque $d \ll a$, pode praticar-se a aproximação

$$s_1 + s_2 \simeq 2a \quad .$$

A diferença de percurso geométrico pode calcular-se mediante :

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{s_2^2 - s_1^2}{s_2 + s_1} \cong \frac{2xd}{2a} \text{, i.e.:}$$

(22) $$\Delta s \cong \frac{xd}{a}$$

(Nesta aproximação, desprezam-se termos de ordem superior a d/a, x/a e y/a).

Se $\underline{n}$ é o índice de refracção do meio no qual a experiência é realizada (meio que supomos homogéneo), então a diferença de percursos ópticos de S_2 e de S_1 para o ponto de observação P (Cf. expressão (16)) é dada portanto por

(23) $$\Delta \mathcal{S} \cong n \Delta s = \frac{nxd}{a}$$

e a correspondente diferença de fase $\underline{\delta}$ (Cf. a expressão (15)) é:

(24) $$\delta \cong \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{nxd}{a} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{xd}{a}$$

porque, sendo as fontes S_1 e S_2 coerentes e síncronas, $(\varphi_1 - \varphi_2)$ é constantemente nula.

Visto que o ângulo $S_1\widehat{P}S_2$ é muito pequeno, por ser $d \ll a$, podemos considerar que as ondas provenientes de S_1 e S_2 se propagam na mesma direcção. De modo que a intensidade em cada ponto P de observação pode calcular-se pela expressão (18) do § 2E. . De acordo com (19-a) haverá máximos de intensidade para

(25) $$x = m\lambda \frac{a}{d} \text{, com } |m| = 0, 1, 2, \ldots;$$

e, de acordo com (20-a), haverá mínimos de intensidade para

(26) $$x = m\lambda\frac{a}{d}, \text{ com } |m| = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$$

Como a diferença de fase δ é, nesta aproximação, independente de y, os máximos e os mínimos (mais geralmente, os pontos de igual intensidade) perfilam-se no plano de observação (xOy) paralelamente a Oy e a figura de interferência é portanto constituída por bandas claras e bandas escuras alternadamente, todas paralelas a Oy, ou seja todas desenvolvidas segundo direcções em ângulo recto com a direcção S_1S_2 que liga as duas fontes secundárias. (V. Figura 4)

Esta figura recebe o nome de <u>franjas de interferência de Young</u> ou simplesmente <u>franjas de Young</u>. O número inteiro <u>m</u> que caracteriza

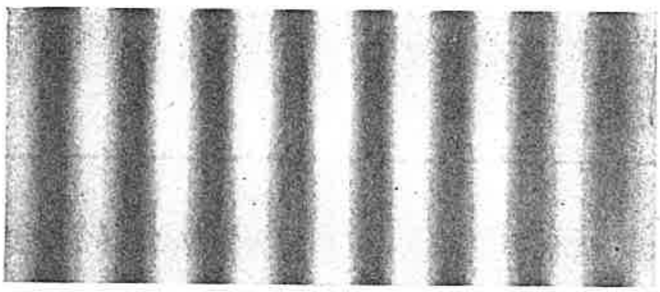


Figura 4

(Franjas de Young)

$\rightarrow| \quad |\leftarrow$

<u>interfranja</u> : $\dfrac{a\lambda_0}{nd} = \dfrac{a\lambda}{d}$

um máximo, i.e., o centro de uma franja brilhante (ou clara) pode designar-se por <u>ordem de interferência</u>.

A distância entre os centros de duas franjas brilhantes consecutivas designa-se por <u>interfranja</u>. (V.

Figura 4). O seu valor, $\frac{a\lambda}{d}$, que resulta de tomar em (25) $|\Delta x|$, para $|\Delta m| = 1$, permite bem justificar que a figura de interferência só se torne eficazmente visível, para c.d.o.'s muito pequenos (da ordem de 1μ), se $d << a$; de outro modo as franjas ficariam indiscerníveis numa mancha brilhante com uma intensidade variando uniformemente sobre o alvo. Por outro lado, a determinação experimental da interfranja permite medir o c.d.o. da radiação monocromática utilizada, desde que as distâncias $\underline{a}$ e $\underline{d}$ sejam conhecidas com suficiente rigor.

A análise feita deixou bem claro que aqui se trata de um método de obtenção de feixes interferentes por <u>partição da frente de onda</u> do feixe primário. Neste caso, o feixe primário é dividido pela passagem através de aberturas em anteparos, dispostas lado a lado. Noutros casos, como se verá seguidamente, a frente de onda primária é fraccionada de modo diferente, por exemplo, pela interposição de duas distintas superfícies refractantes ou de duas distintas superfícies reflectoras, a seccionarem duas regiões distintas da frente de onda primária, produzindo desse modo a sua partição.

3B. — <u>Outros dispositivos de interferências por partição de frente de onda</u>

1) <u>Biprisma de Fresnel</u>

Como se vê na figura 5-1 o duplo prisma refracta o feixe de luz proveniente da fonte S dando origem a dois feixes que parecem ter origem nas "fontes" S_1 e S_2 (fig. 5-1).

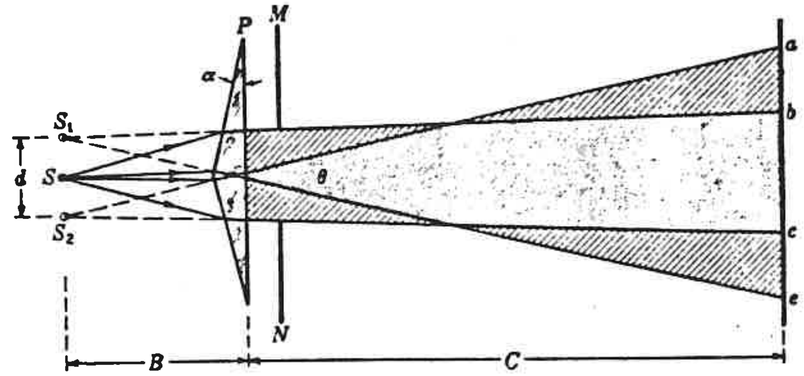


fig- 5-1

se os anteparos M e N estão colocados na posição indicada, só haverá franjas de interferência na região $\underline{bc}$. Este dispositivo também permite determinar o c.d.o. da luz utilizada desde que se conheçam a distância $\underline{d}$ entre as fontes virtuais, $\underline{B+C}$ entre as fontes e o alvo e a interfranja $\underline{\Delta x}$; será:

$$\lambda = \frac{d\,\Delta x}{B+C}$$

2) Espelhos de Fresnel

Neste dispositivo a luz é reflectida em dois espelhos planos ligeiramente inclinados um em relação ao outro. Os espelhos produzem duas imagens virtuais da fonte S como se vê na fig. 5-2. Estas imagens actuam de mo-

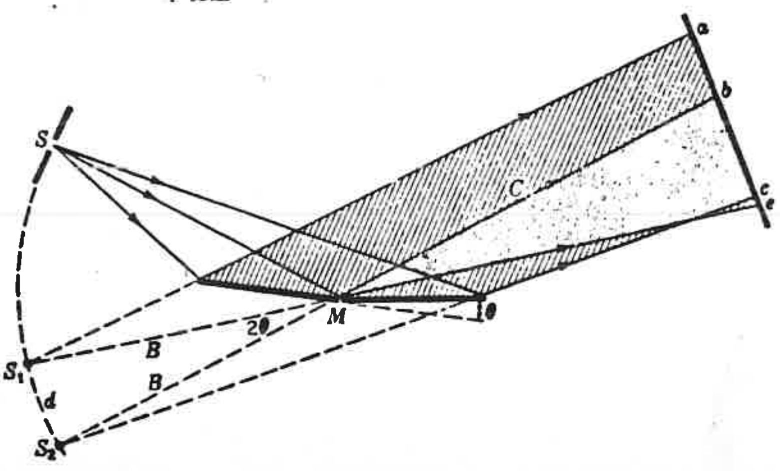


fig. 5-2

do análogo ao das imagens formadas no biprisma e as franjas de interferência são observadas na região bc em que os feixes reflectidos se sobrepõem; aqui, também, o c.d.o., λ, pode ser calculado pela expressão:

$$\lambda = \frac{d\,\Delta x}{B + C}$$

3) Espelho de Lloyd

A interferência é produzida pela sobreposição do feixe proveniente directamente da fenda (sem reflexão) e do

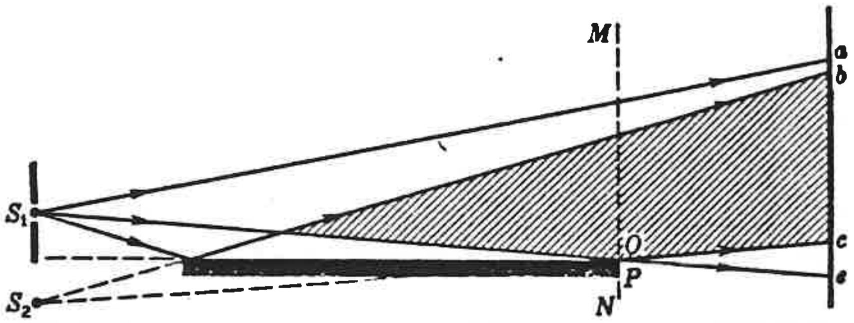


fig. 5.3

feixe proveniente da imagem desta obtida num espelho plano (fig. 5-3)

Todos os exemplos de dispositivos que aqui apresentámos para obter franjas de interferência são do tipo dito de "divisão da frente de onda". Outro tipo é o dito de "divisão da amplitude"; um exemplo de dispositivo deste último tipo é o interferómetro de Michelson que vamos estudar de seguida.

4. Interferómetro de Michelson

Este interferómetro está representado esquematicamente na figura .6; as suas peças principais são dois espelhos planos M_1 e M_2, extremamente polidos, e e duas lâminas plano-paralelas G_1 e G_2; a primeira destas lâminas é levemente espelhada na sua 2ª face o que é re-

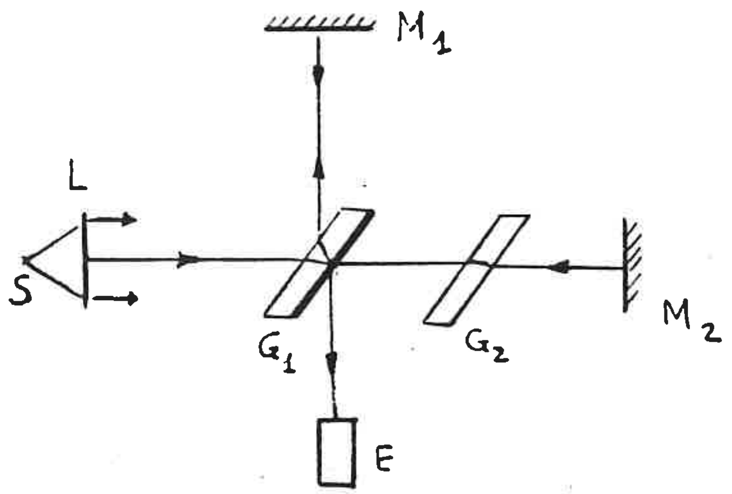


figura 6

presentado pelo espessamento do traço. A luz, proveniente da fonte *S*, ao incidir na lâmina G_1 sob um ângulo de 45° é parcialmente reflectida na direcção do espelho M_1 e parcialmente transmitida na direcção de M_2; há aqui, pois, uma *divisão de amplitude*. Em qualquer dos espelhos a luz incide segundo a normal, sendo reflectida na mesma direcção e sentido contrário; a luz reflectida em M_1 atravessa G_1 uma terceira vez antes de atingir o dispositivo de observação *E*, e a reflectida por M_2, atravessa G_2 segunda vez e é reflectida em G_1 para ir também atingir *E*. A lâmina G_2 tem por fim tornar igual o percurso no vidro para os dois raios (*lâmina compensadora*); isto é especialmente importante quando se trabalha em luz branca. O espelho M_1 pode mover-se paralelamente a si próprio e o espelho M_2 pode rodar de modo a tornar-se perfeitamente perpendicular a M_1.

Da sobreposição dos dois feixes coerentes, reflectidos por M_1 e M_2, resultam franjas de interferência cujo aspecto depende da inclinação relativa dos espelhos.

a) *Espelhos perpendiculares; franjas de igual inclinação*

Suponhamos que a luz incidente é monocromática e suponhamos o espelho real, M_2, substituído pela sua imagem virtual, M'_2, obtida por reflexão em G_2 (figura 7); como

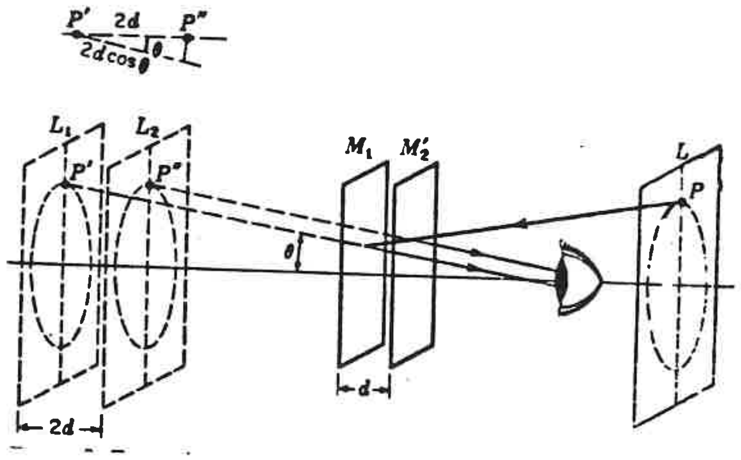


figura 7

os espelhos M_1 e M_2 são perpendiculares, M_1 e M'_2 serão paralelos. Analogamente, a fonte extensa, L, pode considerar-se colocada por trás do observador com imagens L_1 e L_2 obtidas em M_1 e M'_2. Estas fontes virtuais são coerentes, sendo a fase de pontos correspondentes, a mesma, em cada instante. Se for d a separação $M_1 M'_2$, as fontes virtuais estão separadas por 2d.

Se d for igual a um número inteiro de meios comprimentos de onda, $m\frac{\lambda}{2}$, a diferença de percurso 2d será igual a um número inteiro de comprimentos de onda e todos os raios reflectidos segundo a normal aos espelhos estão em fase; os raios inclinados, porém, normalmente não estarão em fase.

A diferença de percurso de dois raios provenientes dos pontos P' e P'', imagens de P, é $2d\cos\theta$ em que θ é o ângulo de qualquer um dos raios luminosos, provenientes de P' ou P'', com o eixo. Teremos então máximos de intensidade para os ângulos θ que satisfazem a relação:

(27) $$2d\cos\theta = m\lambda$$

Visto que para cada conjunto de valores d, m e λ, o ângulo θ é constante, os máximos aparecerão na forma de círculos em torno da perpendicular aos espelhos tirada do dispositivo de observação.

Franjas de interferência do tipo das aqui apresentadas, em que a diferença de fase dos feixes que interferem é determinada pelo seu ângulo de inclinação, θ, chamam-se _franjas de igual inclinação_.

A expressão (27) mostra-nos que a franja de ordem _zero_, corresponderá a um ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$, e que à medida que nos aproximamos do centro da figura de interferência o valor de _m_ correspondente às sucessivas franjas é crescente, isto é, as franjas vão sendo de ordem sucessivamente mais elevada. A mesma expressão permite-nos, ainda, concluir, que, se aumentarmos _d_, o que se consegue movendo M_1 paralelamente a si próprio, o ângulo θ, correspondente a um dado _m_, aumenta, podendo, assim, ser observadas franjas de ordem cada vez mais elevada; é como se do centro da figura fossem irrompendo anéis, uns atrás dos outros.

Como no centro a condição de máximo é:

$$2d = m\lambda \qquad (\cos\theta = 1)$$

fácilmente se vê que um novo anel surge quando a espessura _d_ aumenta de $\frac{\lambda}{2}$.

Se fizermos diminuir _d_, aproximando o espelho M_1 de M_2', as conclusões são contrárias, os anéis parecem ser "engolidos" no centro, e quando M_1 e M_2' coincidem, a figura de interferência desaparece porque os raios estão em fase para todos os ângulos θ.

Na figura 8 (a-e) pode ver-se o aspecto de figuras de interferência obtidas num interferómetro de Michelson nas condições descritas, correspondendo a figura central, (c), ao caso $d=0$ e as figuras (b) e (c) a valores de d inferiores aos das figuras (a) e (e).

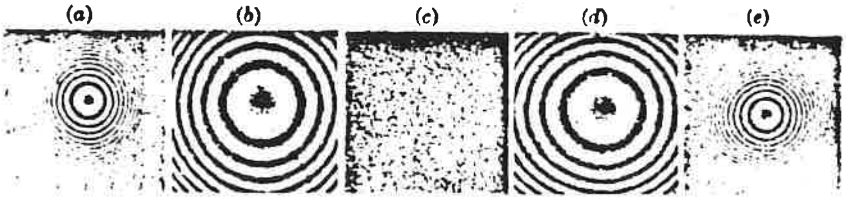


figura 8

b) Espelhos não perpendiculares; franjas de igual espessura

Se os espelhos M_2' e M_1 não estiverem perfeitamente paralelos ainda é possível observar franjas de interferência. Neste caso, o espaço entre os espelhos tem a forma de cunha como se pode ver na figura 9. Os dois

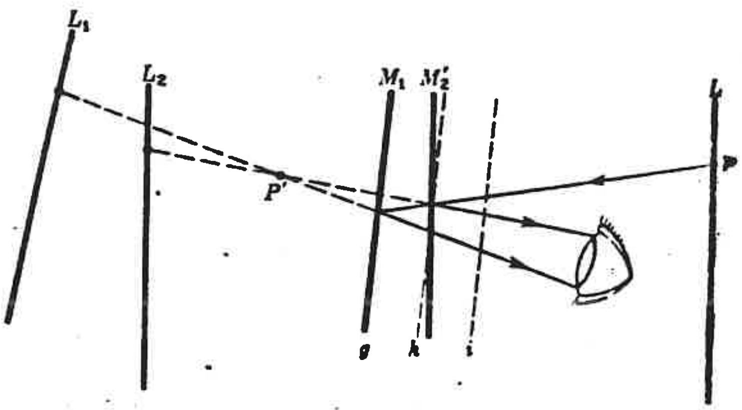


figura 9

raios luminosos que atingem o observador (correspondentes a um mesmo ponto P da fonte), já não são paralelos e parecem provir do ponto P'; as franjas de interferência que se observam são, agora, praticamente rectas, porque a variação da diferença de percurso é devida, sobretudo, à variação da espessura da camada de ar entre os espelhos; com efeito, com uma camada em forma de cunha, os pontos de igual espessura encontram-se ao longo de linhas rectas paralelas à aresta da cunha. Note-se, no entanto, que se d tiver um valor apreciável, as franjas não serão rigorosamente rectas, porque, então, a inclinação também intervirá para a diferença de percurso.

Franjas de interferência como as que aqui nos aparecem em que a principal razão de diferença de percurso resulta duma variação de espessura, designam-se por <u>franjas de igual espessura</u>.

5. Interferências por reflexão múltipla

Alguns dos mais belos efeitos obtidos por interferência resultam de múltiplas reflexões da luz entre duas superfícies de uma lâmina delgada de material transparente; são observadas, por exemplo, com uma fina camada de óleo na água, bolas de sabão, etc.

a) Camada plano-paralela

Considere-se um raio luminoso que incide numa camada plano-paralela num ponto A como se representa na figura 10; uma parte desse raio será reflectida (raio 1)

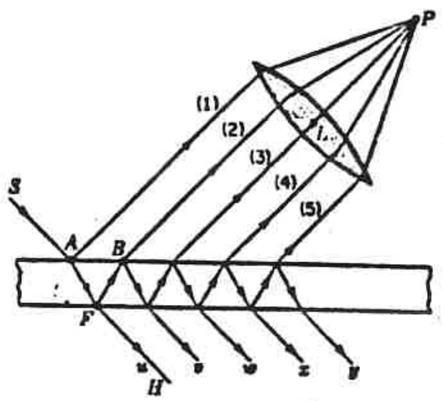


figura 10

e outra parte refractada na direcção AF; esta última, chegada a F é, em parte, reflectida para B, em parte refractada para H; em B haverá nova reflexão e nova refracção. A continuação deste processo dará origem a dois feixes de raios paralelos, um de cada lado da camada; em qualquer destes feixes a intensidade diminui, rapidamente, de um raio para o seguinte.

Se o feixe de raios paralelos (do lado "de cima" da camada, fôr levado a convergir em P, por meio da lente L, cada raio terá percorrido uma distância diferente e as diferenças de fase podem ser de modo a produzir interferências construtivas ou destrutivas.

Para calcular a diferença de fase entre estes raios vamos começar por calcular a diferença de percurso óptico (produto do índice de refracção pela distância percorrida) para um par de raios sucessivos tais como (1) e (2).

Seja, como representado na figura 11, d a espessura da camada, n o seu índice de refracção, Δ o c.d.o. da luz e ϕ e ϕ' os ângulos de incidência e de refracção.

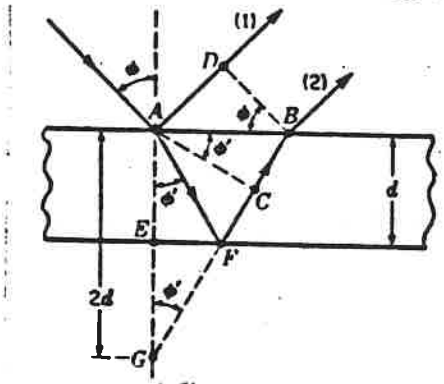


figura 11

Se $\overline{BD}$ fôr perpendicular ao raio (1), os percursos ópticos a partir de B e de D até ao foco da lente serão iguais; a partir de A, o raio (2) tem o percurso $\overline{AFB}$ na camada e o raio (1) o percurso $\overline{AD}$ no ar; a diferença de percursos ópticos será:

$$\Delta = n(\overline{AFB}) - \overline{AD}.$$

Se $\overline{BF}$ fôr prolongado até intersectar a linha $\overline{AE}$ em G, será $\overline{AF} = \overline{GF}$, porque, os ângulos, de incidência e de reflexão, na face inferior são iguais; teremos então:

$$\Delta = n(\overline{GB}) - \overline{AD} = n(\overline{GC} + \overline{CB}) - \overline{AD}$$

Sendo a linha $\overline{AC}$ perpendicular a $\overline{FB}$, as linhas $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$ representam duas posições, sucessivas, duma superfície de onda; como os percursos ópticos devem ser iguais, para qualquer raio, entre duas superfícies de onda, pode escrever-se:

$$n\ \overline{CB} = \overline{AD}$$

vindo:

$$\Delta = n\ \overline{GC} = n \times 2\ d\ \cos\phi'$$

Se esta diferença de percursos ópticos fôr igual a um número inteiro de comprimentos de onda, era de esperar que os raios (1) e (2) chegassem, em fase, ao ponto P e produzissem um máximo de intensidade; temos, no entanto, que ter em conta, o facto de que, na reflexão na superfície de separação de um meio menos denso para um meio mais denso (de maior índice de refracção) há uma <u>mudança de fase de π</u>, como pode ser explicado pela Óptica electromagnética, ora, o raio (1) sofre uma reflexão deste tipo, o que significa que:

(28) $2\,n\,d\cos\phi' = m\lambda$ condição de mínimo

sendo:

(29) $2\,n\,d\cos\phi' = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$ condição de máximo

Vejamos o que se passa com os raios (3), (4), (5)... Visto que a geometria é a mesma, a diferença de percurso entre os raios (3) e (2) será, também, dada por: $2nd\cos\phi'$ mas, visto que agora não há reflexão com mudança de fase, se se verificar a condição, $2\,n\,d\cos\phi' = m\lambda$, o raio (3) estará em fase com (2), e o mesmo acontecerá para os sucessivos pares.

Logo, se se verificar:

$\underline{2nd\cos\phi' = m\lambda}$, temos $\begin{cases} (1) \text{ e } (2) \text{ em oposição de fase} \\ (2), (3), (4), \dots \text{ em fase} \end{cases}$

se se verificar:

$\underline{2nd\cos\phi' = (m+\frac{1}{2})\lambda}$ $\begin{cases} (1) \text{ e } (2) \text{ em fase} \\ (3), (5), (7), \dots \text{ em oposição} \\ \text{de fase com } (2), (4), (6) \dots \end{cases}$

Visto que (2) é mais intenso que (3), (4) mais intenso que (5), etc., estes pares não se anulam, e visto que a série mais forte está em fase com (1), que é o mais forte de todos, temos, para:

$\underline{2nd\cos\phi' = (m+\frac{1}{2})\lambda}$ <u>máximo de intensidade</u>

Vejamos o que se passa com o mínimo de intensidade. O raio (2) está em oposição de fase com (1) mas como (1) tem uma amplitude muito maior que (2) não se anulam completamente; porém, como vamos ver, à soma de (3), (4), (5), ..., todos em fase com (2), corresponde uma amplitude que vai compensar, exactamente, a diferença de amplitudes entre (1) e (2).

Seja $\underline{a}$ a amplitude da onda incidente, $\underline{r}$ o coeficiente de reflexão (o mesmo quer na superfície superior, quer na inferior), $\underline{t}$ e $\underline{t'}$ os coeficientes de transmissão, respectivamente, na passagem do meio menos denso para o mais denso, e na passagem do meio mais denso para o menos denso; temos, então, para as sucessivas ondas, as amplitudes representadas na figura 12.

Somando as amplitudes de todos os raios que abandonam a face superior, excepto o primeiro visível:

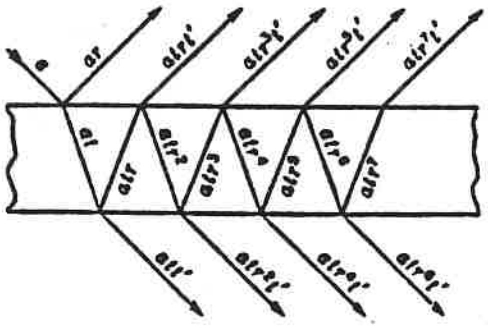


figura 12

$$A = atrt' + atr^3t' + atr^5t' + atr^7t' + \dots$$
$$= atrt'(1 + r^2 + r^4 + r^6 + \dots) \;;$$

como $r<1$, a série geométrica tem uma soma finita

$$S = \frac{1}{1-r^2}, \text{ donde:}$$

$$A = atrt' \frac{1}{1-r^2} \;;$$

ora, pode provar-se * que se tem: $tt' = 1 - r^2$, logo

$$A = ar$$

que é a amplitude do raio (1); haverá, então, interferência completamente destrutiva.

Da condição de máximo que acabámos de apresentar, vemos que a cada franja brilhante, (um certo valor de <u>m</u>) corresponde um valor bem determinado de ϕ, de modo que a franja terá a forma de um arco de circunferência com centro no pé da perpendicular traçada do olho do observador para o plano da camada; temos, pois, <u>franjas de igual inclinação.</u>

---

* ver: "Fundamentals of Optics", F.A. JENKINS and H.E. WHITE, Mc Graw Hill, 3ª edição, pag. 208

Repare-se, que, para que se possam observar franjas de interferência, é necessário ter uma <u>fonte extensa</u>. Com efeito, se tivessemos uma fonte pontual muito distante, teríamos apenas um valor para o ângulo de incidência, e o feixe de raios paralelos que atingiria o observador, teria apenas uma direcção (a que corresponderia à lei da reflexão); o observador veria, apenas, um ponto, brilhante ou escuro conforme a diferença de fase correspondente a esse ângulo de incidência.

Se os raios que <u>emergem</u> pelo lado inferior da camada também forem levados a convergir darão, igualmente, lugar a figuras de interferência; como, neste caso, não há mudança de fase devida a reflexão, a equação:

$$\underline{2nd\cos\phi' = m\lambda} \quad \text{é condição de } \underline{\text{máximo}}$$

e a equação:

$$\underline{2nd\cos\phi' = \left(m+\tfrac{1}{2}\right)\lambda} \quad \text{é condição de } \underline{\text{mínimo}}$$

Quando se verifica a condição de <u>máximo</u> os raios <u>u</u>, <u>v</u>, <u>w</u>, ... estão <u>todos em fase</u>; quando se verifica a condição de <u>mínimo</u> estão, <u>alternadamente</u>, em <u>oposição de fase</u>. Se o coeficiente de reflexão, <u>r</u>, for baixo, (como no caso de vidros não espelhados), a amplitude de <u>u</u> é muito maior que as amplitudes de todos os outros raios, de modo que os mínimos nunca são de intensidade nula.

As intensidades, reflectida e transmitida, para uma camada com coeficiente de reflexão $r = 0,2$, estão representadas na figura 13, em função da diferença de fase $\delta = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$; a condição de máximo de luz transmitida (mínimo de reflectida), $\Delta = m\lambda$, corresponde a $\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}m\lambda = m \times 2\pi$.

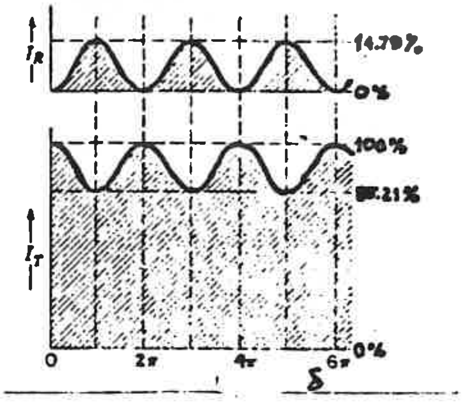


figura 13

Como se compreende pela observação da fig. VIII. 13 as franjas de interferência no feixe transmitido serão muito menos contrastadas que no feixe reflectido.

b) Camada em forma de cunha

Se a camada não fôr plano-paralela, como no caso da figura 14, os raios que interferem não são paralelos;

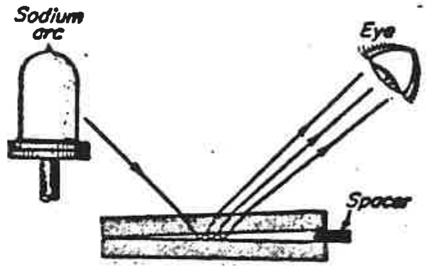


figura 14

as franjas resultantes (semelhantes às obtidas no interferómetro de Michelson quando os espelhos não estão paralelos), se as duas superfícies são planas (camada em forma de cunha) serão, pràticamente, rectas segundo as linhas de igual espessura. A diferença de percurso para um dado par de raios será dada, pràticamente, por $2nd\cos\phi'$, e, se nos puzermos na situação de observação pràticamente segundo a normal ($\cos\phi' \simeq 1$), os máximos corresponderão a:

$$2nd = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

Ao passar de uma franja para a seguinte <u>m</u> aumenta de uma unidade, correspondendo a uma variação $\frac{\lambda}{2}$ da espessura óptica da camada $\underline{nd}$.

As franjas obtidas com este dispositivo, são, como se compreende do que foi dito atrás _franjas de igual espessura_. Têm grande interesse prático porque permitem fazer o teste do grau de perfeição de uma superfície plana; com efeito, se tivermos uma superfície perfeitamente plana e outra que o não seja, as franjas, obtidas na camada de ar entre elas, serão de forma irregular, acompanhando as regiões de igual espessura, $\underline{d}$ (figura 15).

figura 15.

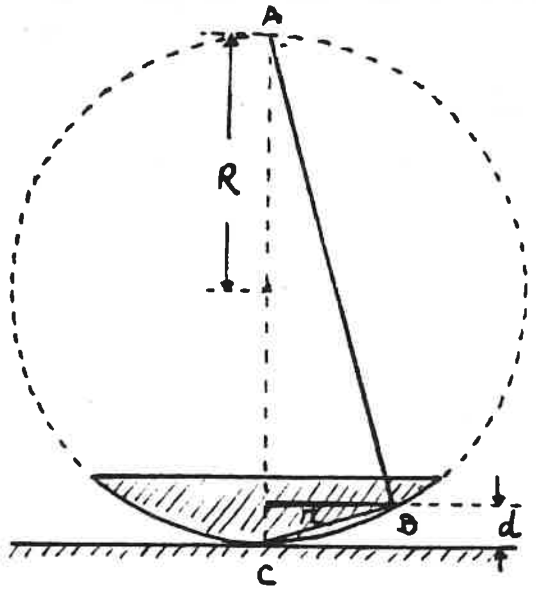
c) Anéis de Newton

As franjas chamadas _anéis de Newton_ são outro exemplo de franjas de igual espessura; são observadas na camada de ar entre uma superfície plana de vidro e a superfície esférica duma lente convexa que contactam no ponto central; as franjas são circulares em torno do ponto de contacto.

Sendo a observação feita na perpendicular a condição de mínimo será:

(30) $$2d = m\lambda$$

($n \simeq 1$ por se tratar de uma camada de ar)



Se for $\underline{R}$, muito grande, o raio de curvatura da superfície esférica (figura 16), o valor de $\underline{r}$, raio do anel de Newton que corresponde à espessura $\underline{d}$, será dado por:

$$(2R-d).d = r^2$$

figura 16

visto que, num triângulo rectângulo (triângulo ABC), a altura em relação à hipotenusa é o meio proporcional entre os segmentos que determina na hipotenusa. Como $\underline{d \ll R}$, vem:

$$2Rd \simeq r^2 \qquad \text{ou} \qquad d \simeq \frac{r^2}{2R}$$

que, substituído na equação (30), dá:

$$2 \times \frac{r_m^2}{2R} = m\lambda \quad , \text{ ou}$$

(31)
$$\lambda = \frac{r_m^2}{mR}$$

que dá o comprimento de onda da luz em função do raio, $\underline{r_m}$, do anel escuro de ordem $\underline{m}$.

Nas condições que acabámos de descrever a mancha central é escura devido à mudança de fase, $\underline{\pi}$, que ocorre se a reflexão é na superfície de separação de um meio menos denso para um meio mais denso.

Thomas Young introduziu uma modificação na experiência utilizando, na placa inferior, um material de índice de refracção superior ao do da lente e enchendo o espaço entre elas com um óleo de índice de refracção intermédio; assim, ambas as reflexões são com mudança de fase e a mancha central passa a ser brilhante.

A luz transmitida também apresenta anéis de interferência; êstes anéis são complementares dos da luz reflectida, sendo, portanto, a mancha central brilhante, quando na reflectida ela é escura; pelas razões já apresentadas em 5.a) o contraste entre os anéis escuros e brilhantes é fraco.

d) Interferómetro de Fabry-Perot

Este interferómetro utiliza interferência por reflexão múltipla na camada de ar entre duas placas rigorosamente paralelas, parcialmente reflectoras, de vidro ou quartzo, (figura 17).

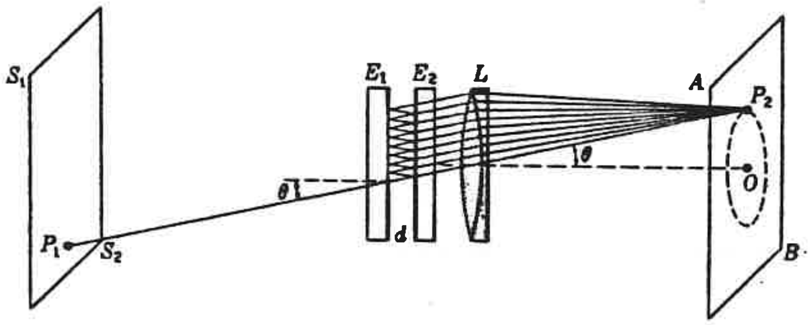
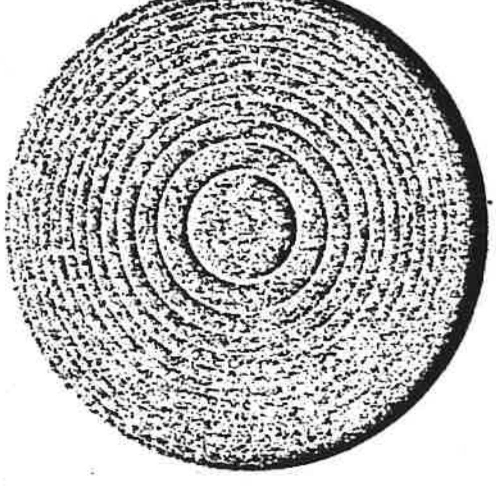


figura 17

A luz, monocromática, proveniente da fonte extensa (S_1S_2) vai dar origem, depois de múltiplas reflexões, a feixes transmitidos de raios paralelos que são levados a convergir por meio da lente L; assim, o raio proveniente de P_1, que incide segundo um ângulo θ, dá origem a um feixe de raios paralelos com o mesmo ângulo de inclinação, que vai convergir no ponto P_2. A condição de máximo, será, considerando $n=1$ (para o ar),

$$2\,d\cos\theta = m\,\lambda\ .$$

Esta condição será satisfeita por todos os pontos da circunferência que passa por P_2 e tem centro em O, intersecção do eixo da lente com o alvo. Quando θ diminui, $\cos\theta$ aumenta até que se atinge um outro máximo quando m aumenta de uma unidade; vamos, assim, obter uma sucessão de anéis brilhantes com centro em O, como está representado na figura 18.



FABRY–PEROT fringes.

figura 18

Se a distância d entre as placas pode variar deslocando uma delas paralelamente a si própria, o dispositivo descrito designa-se por interferómetro de Fabry-Perot; se a distância d é mantida perfeitamente fixa designa-se por padrão de Fabry-Perot.

(R.B.) REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] – Max BORN & Emil WOLF, Principles of Optics (Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light) 4th Edition, 1970

[2] – Francis A. JENKINS & Harvey E. WHITE, Fundamentals of Optics 4th Edition, 1976

[3] – Miles V. KLEIN, Optics, 1970