

# CURSO DE ELECTROMAGNETISMO

Noémio Macias Marques

Versão não revista pelo autor, elaborada a partir dos apontamentos disponibilizados a José Pedro Mimoso, na década de oitenta, na qualidade de assistente da disciplina

PROGRAMA DA DISCIPLINA FÍSICA GERAL II

1. Campo electrostático no vácuo

143 109/143  
Forças eléctricas. Lei de Coulomb. Campo electrostático. Potencial electrostático. Teorema de Gauss.

9 h

Distribuição de cargas (dipolo, multipolo, distribuições contínuas)

Eq. Poisson; eq. de Laplace

2. Campos eléctricos na matéria

Dieléctricos; polarização e susceptibilidade dieléctrica. Cargas de polarização e cargas livres. Generalização do teorema de Gauss e eq. de

6 h

Poisson. Potencial de um condutor. Campo el. próximo de um condutor;

fórmula de Coulomb. Influência eléctrica. Probl. fundamental da electrostática. Condensadores. Energia de um sistema electrostático

3. Corrente eléctrica

Efeitos caloríficos e efeitos magnéticos. Densidade e intensidade da corrente. Eq. da conservação da carga el. Lei de Ohm; L. Joule;

6 h

suas interpretações. Campo el. da corrente. Lei da dispersão da carga em condutores homogêneos e isotropos. Corrente estacionária. Força electromotriz. Efeitos termoeléctricos reversíveis. Circuito eléctrico em corrente estacionária. Fórmulas de Ohm. Leis de Kirchoff.

4. Campo magnético

Campo magnético da corrente estacionária. Lei de Biot e Savart; Lei de Laplace; Lei de Ampère.

9 h

Campo magnético dos ímanes. Dipolos magnéticos; correntes moleculares de Ampère. Campo produzido por um corpo magnetizado. Propriedades magnéticas da matéria.

Total  
parcial

30h

A transportar 30h

5. Campo electromagnético variável

Indução electromagnética; Lei de Faraday. Introdução à teoria de Maxwell. Eq. de Maxwell - Faraday, Eq. de Maxwell - Ampère. Equação de Maxwell para os corpos em repouso. Corrente alternada em regime quase estacionário; suas leis; circuitos R,L e R,L,C.

7,5 h

2/3 da col. de E.M.I

6. Ondas electromagnéticas

Características gerais das ondas planas. Vector de Poynting; transporte da energia radiada. Ondas planas monocromáticas; sua polarização. Composição e decomposição de diferentes estados de polarização. Trem de ondas; velocidade de fase e de grupo. Meios dispersivos normais e anômalos. Estudo de reflexão e refração de ondas planas em meios homogêneos e isotrópicos. Leis de Descartes. Fórmulas de Fresnel. Polarização da luz por reflexão e refração.

9 h

7. Interferência da luz

Interferência de duas ondas monocromáticas; conceito de coerência. Produção de interferências com feixes luminosos; fendas de Young; espelho Fresnel, lentes de Bulet, interferômetros Fabry - Perot e de Michelson. Interferências por reflexão múltipla; franjas de igual inclinação e de igual espessura. Anéis de Newton.

6 h

8. Difracção

Generalidades sobre a difracção. Difracção de Fraunhofer e de Fresnel. Difracção por 1 fenda, duas fendas, por um orifício, por uma rede. Máximos e mínimos principais e secundários. Poder separador.

6 h

1º total: 37,5

Total parcial

58,5 h

Ampere

58,5h

9. Aplicações dos conceitos anteriores ao estudo do laser e da holografia.

4,5 h

10. Óptica geométrica

Aproximação da óptica geométrica. Definição de raios luminosos; energia electrom; média transportada pelo raio luminoso. Percurso óptico. Lei de intensidade luminosa em opt. geome. Propagação rectilínea nos meios homogêneos.

6 h

Leis da reflexão e refração em opt. geom. Princípio de Fermat e teorema de Malus.

11. Sistema e instrumentos de óptica

Definições e convenções. Sistemas ópticos simples. Sistemas ópticos centrados; relações fundamentais. Associação de sistemas ópticos: Aberrações de sistemas ópticos. Instrumentos de Óptica.

6 h

TOTAL : 75h

## GENERALIDADES

### 1.1 — Primeiras experiências de electrização; propriedades dos corpos electrizados. Evidência experimental de dois tipos de electricidade

As experiências fundamentais de electricidade estática podem apresentar-se da seguinte maneira:

I. Experiências de electrização. Uma vareta de vidro friccionada com faio de algodão ou uma vareta de ebonite friccionada com pele de gato — adquirem a propriedade de atrair pequenos corpos leves, ou submetidos a ligações tais que forças de fraca intensidade bastam para deslocá-los. Diz-se que essas varetas ficam carregadas de electricidade ou electrizadas, conceito que se confunde primariamente com a propriedade de atrair pequenos corpos leves; diz-se também que as varetas exercem sobre esses pequenos corpos acções eléctricas (\*). Vários outros tipos de materiais permitem pôr em evidência esta mesma propriedade. Fenómenos idênticos se observam, com efeito, se em vez de vidro se utiliza quartzo fundido, se em vez de ebonite se utiliza resina. (Pode ainda servir de exemplo uma experiência certamente bem conhecida: se se passa um pente pelos cabelos secos, ele fica a atrair pedaços de papel.). Nas experiências aqui descritas, os corpos adquirem electricidade por fricção; e fala-se de electrização por fricção. Mas a mesma propriedade pode ser comunicada a outros corpos por simples contacto com um corpo já electrizado; e fala-se nesse caso de electrização por contacto. (Ocupar-nos-emos mais adiante da electrização por influência que assume primordial importância na Electrostatica dos sistemas de condutores. São de referir também outros

(\*) As primeiras experiências deste tipo conhecidas na Antiguidade teriam sido realizadas por Thales de Mileto (séc. VI AC), friccionando o âmbar em grego, electron; daí a raiz da palavra electricidade e sua família.

processos de electrizações como os de electrização por compressão ou por aquecimento de certos cristais — piezo-electricidade e piro-electricidade).

II. Condutores e isolantes. A permanência da electrização nos corpos depende muito dos materiais e também das acções físicas a que os corpos estão submetidos. Sobre alguns materiais a electrização pode permanecer, durante um tempo longo, no local onde foi gerada por fricção ou por contacto, sem se comunicar aos pontos circundantes; tais materiais dizem-se maus condutores da electricidade; deles são exemplos: o vidro, o quartzo, a ebonite, a resina, a sêda, o âmbar, a borracha, matérias plásticas, fibras artificiais, etc.. Em outros materiais observa-se, pelo contrário, que a electrização não permanece localizada, senão por um tempo muito curto, nos pontos onde se gerou por fricção ou por contacto, comunicando-se rapidamente aos pontos circundantes, a todo o corpo, se não há acções físicas que o impeçam; tais materiais de que são exemplos os metais, as ligas metálicas, a grafite, etc., dizem-se bons condutores da electricidade. Na sua maioria, os diversos materiais da Natureza situam-se entre estes dois comportamentos limites, revelando-se condutores da electricidade em maior ou menor grau. (São condutores: a madeira, a água, o corpo humano. A água salgada é relativamente um bom condutor; a água destilada é relativamente um mau condutor. O ar húmido é um pouco condutor, o ar sêco e puro é mau condutor.) Quando se pretende conservar a electrização adquirida por um corpo de um material condutor, torna-se conveniente isolá-lo do contacto com outros corpos condutores por meio da interposição de um material mau condutor; daí a designação de isolantes, ou ainda de dieléctricos, que se dá aos materiais maus condutores.

III. Evidência experimental de dois tipos de electricidade. Consideremos ainda as varetas de vidro e de ebonite, electrizadas por fricção como se indicou no início. Se dispusermos de uma pequena bola de

medula de sabugueiro revestida, ou impregnada, de grafite e a sus-  
pendermos de um fio de seda (isolante), podemos electrizar a bola  
por contacto, quer com a vareta de vidro quer com a vareta de ebo-  
nite. Ora verifica-se que, quando electrizada por contacto com a  
vareta de vidro, a pequena bola adquire a propriedade de ser repe-  
lida por esta vareta e de ser atraída pela vareta de ebonite; em  
contrapartida, quando electrizada por contacto com a vareta de ebonite,  
a pequena bola adquire, pelo contrario, a propriedade de ser repelida  
por esta vareta e de ser atraída pela vareta de vidro. Estas expe-  
riências tornam claramente evidente a existência de dois tipos de  
electricidade distintos, perfeitamente caracterizados. Estendidas  
estas experiências a outros materiais, verifica-se que todos os cor-  
pos electrizados (por um qualquer processo) se comportam de uma  
destas duas maneiras: comunicada a sua electricidade, por contacto,  
a uma pequena bola de medula de sabugueiro impregnada de grafi-  
te, fica esta pequena bola a ser atraída pela vara de vidro e a  
ser repelida pela vareta de ebonite ou a ser atraída pela vareta  
de ebonite e repelida pela vareta de vidro. Isto permite inferir  
que só há na Natureza dois tipos distintos de electricidade, os  
quais se revelam por propriedades eléctricas opostas. Assim,  
é-se conduzido a adoptar para um dos tipos a designação de  
electricidade positiva, para o outro a designação de electricida-  
de negativa; e fala-se do sinal, (+) ou (-), da electricidade  
de que um corpo está carregado. Por convenção, electricidade  
positiva ou vítrea é a que é repelida pela vareta de vidro  
(e atraída pela de ebonite); electricidade negativa ou resinosa  
é a que é repelida pela vareta de ebonite (e atraída pela de vidro).  
Um corpo diz-se no estado neutro (ou de não-electrificação)  
quando não revela nem electrificação positiva nem electrificação nega-  
tiva. Voltando a considerar o processo de electrificação por fricção

cabe agora referir que, quando se friccionam dois corpos um sobre o outro, isolantes, ou então isolados, e inicialmente neutros, verifica-se experimentalmente que eles adquirem sempre electrizações de sinais contrários, sempre com o mesmo sinal em cada um deles. Mas, um mesmo corpo pode adquirir electrizações positiva ou negativa, consoante o material com que é friccionado. Qualquer conjunto de corpos de materiais diferentes pode ser ordenado em série de tal modo que, quando se friccionam dois quaisquer de entre eles um sobre o outro, electriza-se positivamente o que é precedente na série, negativamente o outro (supostos inicialmente neutros). Constitui-se assim uma série tribo-eléctrica (tribein, em grego: friccionar) de que é exemplo a seguinte: Pêlo de coelho; vidro; mica; lã; pêlo de gato; sêda; madeira; âmbar; resina; enxôfre, ebonite, celulóide. Vê-se, por ex., que friccionados sobre lã ou sobre sêda, o vidro fica electrizado positivamente, a ebonite negativamente. Os metais classificam-se nesta série entre a madeira e o celulóide, sendo os menos oxidáveis os mais próximos do fim da lista.

1.2 - Equilíbrio entre acções eléctricas e acções mecânicas; medições das forças eléctricas. Sobreposição de acções eléctricas: composição de forças eléctricas pela regra do paralelogramo.

A experiência revela que as acções entre corpos electrizados — acções eléctricas — podem ser compensadas, ou equilibradas, por acções mecânicas. Um exemplo disso verifica-se facilmente com o pêndulo eléctrico, que se pode constituir, por ex., com a pequena bola de medula de sabugueiro revestida de grafite e suspensa de um fio de sêda, já atrás utilizada. Quando electrizada, a pequena bola conserva a sua electrização (pois está isolada pelo fio de sêda) e fica susceptível de acusar acções eléctricas produzidas por outros corpos; ao mesmo tempo está submetida às acções mecânicas da gravidade



terrestre e da tensão do fio. Na ausência de qualquer acção eléctrica (fora da presença de outros corpos electrizados) este pêndulo comporta-se como um puro pêndulo mecânico: oscila em torno da vertical do ponto de suspensão, tem posição de equilíbrio vertical — e este equilíbrio é o resultado da compensação entre as acções mecânicas a que está submetida a pequena bola. Ora, quando enfrenta um corpo electrizado, o pêndulo assume geralmente um comportamento diferente: oscila em torno de uma posição não vertical, tem posição de equilíbrio não vertical — e neste novo comportamento, o equilíbrio tem de ser interpretado como o resultado de uma nova compensação entre o conjunto das acções mecânicas, a que a bola fica submetida, e a acção eléctrica que sofre da parte do corpo electrizado.

Fig 1a

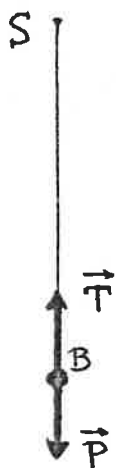


Fig 1b

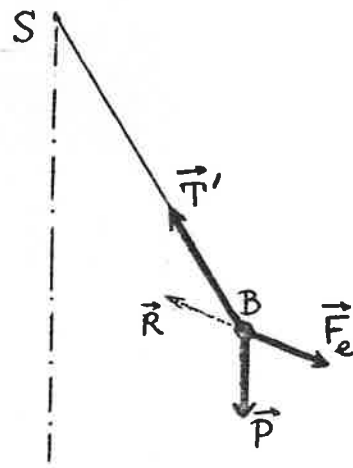


Fig 1a

Na ausência de qualquer  
corpo electrizado:

$$\vec{T} + \vec{P} = 0$$

Fig 1b

Na presença do corpo  
electrizado A:

$$\vec{T}' + \vec{P} + \vec{F}_e = 0$$



Sendo assim, como as acções se descrevem quantitativamente por grandezas físicas já bem conhecidas — as forças (mecânicas) —, uma tal compensação, um tal equilíbrio, conduz a que as acções eléctricas sejam descritas quantitativamente por grandezas físicas do mesmo carácter, que designaremos por forças eléctricas. Por outras palavras: a medição das acções eléctricas fica fundamentalmente assegurada mediante a utilização de processos experimentais de equilíbrio com acções mecânicas. (Ainda que, como é óbvio,

fossamos ulteriormente utilizar outros processos destes distintos, para medir accões eléctricas). No caso do pêndulo eléctrico atrás referido (v. Fig. 1), quando fica estabelecido o equilíbrio, a força eléctrica  $\vec{F}_e$ , que traduz a accão eléctrica exercida sobre a bola B pelo corpo electrizado A, vem dada como a força que é directamente oposta à resultante  $\vec{R}$  ( $\vec{F}_e = -\vec{R}$ ) das duas forças mecânicas em jogo,  $\vec{P}$  e  $\vec{T}$  (pêso da bola e tensão do fio sobre a bola, respectivamente). Desta forma se respecta a equação que rege o equilíbrio, de acordo com os princípios de Newton:

$$\vec{F}_e + \vec{P} + \vec{T} = 0$$

Assim é medida a força eléctrica  $\vec{F}_e$ . (Poderia igualmente considerar-se, para este efeito da medição da força eléctrica  $\vec{F}_e$  (ou da definição da força eléctrica), a própria dinâmica do sistema — ou o "equilíbrio" dinâmico — desde que na compensação de forças correspondente se não deixasse de entrar em linha de conta com a força de inércia. Limitamo-nos aqui à situação estática por razão de simplicidade.) Repare-se agora que, sendo as forças eléctricas grandezas físicas da mesma espécie que as forças mecânicas, elas gozam das mesmas propriedades operatoriais que estas últimas e, em particular, é desde já de realçar, pela sua importância, a regra do paralelogramo para somar forças. Assim, consideremos a sobreposição das duas accões eléctricas exercidas sobre uma mesma partícula de prova B pelos dois corpos electrizados C e C'. (v. Fig. 2). Se cada uma destas accões se traduz

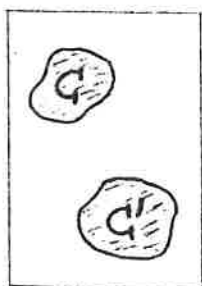
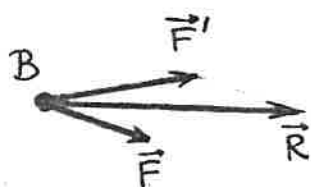


Fig 2



por uma força eléctrica sobre B, sendo  $\vec{F}$  a força produzida por C e  $\vec{F}'$  a força produzida por C', então a resultante  $\vec{R} = \vec{F} + \vec{F}'$ , calculada pela regra do paralelogramo, traduz a accão eléctrica

global do sistema [C, C'] sobre a partícula de prova B : a sobreposição

de acções eléctricas faz-se pela composição das respectivas forças eléctricas pela regra do paralelogramo. Consideremos de novo um corpo electrizado  $A$  e suponhamos que um observador, munido de uma partícula de prova  $B$ , "se passeia" pelos diferentes pontos do espaço, para medir em cada ponto a força exercida por  $A$  sobre a partícula de prova. Este observador exprime o resultado global da miríade das suas medições dizendo que o espaço envolvente do corpo electrizado  $A$  é sede de um campo de forças eléctricas, matematicamente representado por uma função (vectorial) de ponto  $\vec{F}(P)$ , unívoca, já que a cada uma das medições corresponde um resultado bem definido. A linguagem assim adoptada tem o significado de que em qualquer ponto desse espaço podem ser detectadas propriedades especiais produzidas pelo corpo  $A$ , que se manifestam como força eléctrica desde que uma partícula electrizada aí seja colocada. Mas, este campo de forças eléctricas, produzidas por  $A$  sobre  $B$ , depende do estado de electrização da partícula  $B$ , revelando-se, em cada ponto, valores em geral diferentes para diferentes partículas  $B$ . Um corpo  $A$  produz assim, não um, mas diversos campos de forças eléctricas, consoante são diversas as partículas de prova <sup>utilizadas</sup> nos diferentes conjuntos de miríades de medições. Convém analisar estes campos de forças eléctricas produzidos por  $A$ .

### 1.3 — Análise das forças eléctricas. Conceitos de campo eléctrico e de carga eléctrica. Aditividade dos campos produzidos por fontes distintas.

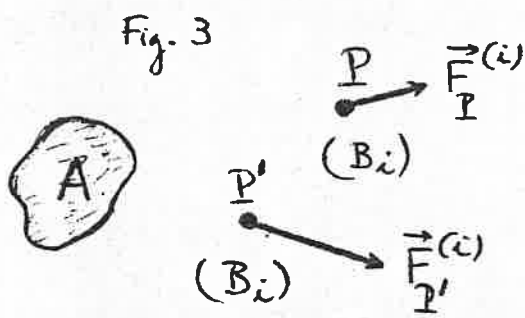
Seja  $A$  um corpo electrizado cujas acções eléctricas sobre outros corpos queremos analisar. Utilizemos para isso uma série de diferentes partículas electrizadas  $B_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) colocando-as sucessivamente, uma de cada vez, num ponto de observação  $P$  (v. Fig. 3). Admitamos que somos capazes de medir a força eléctrica que sobre cada uma destas partículas de prova exerce o corpo  $A$ . Suponhamos ainda que estas observações se estendem progressivamente a todos os pontos do espaço. O estudo experimental de situações reais

aproximadas deste esquema idealizado permite inferir os resultados que passamos a expôr. As diversas forças  $\vec{F}^{(i)}$  exercidas pelo corpo A sobre as diversas partículas  $B_i$ , sucessivamente ensaiadas, revelam possuir as seguintes importantes propriedades:

(i) Num dado ponto de observação P, as diversas forças  $\vec{F}_P^{(i)}$  têm idêntica direcção. O mesmo se constata em qualquer outro ponto de observação P', sendo que, no entanto a direcção comum às diversas forças  $\vec{F}_P^{(i)}$  varia geralmente quando se muda de ponto de observação. Podemos dizer: A acção eléctrica do corpo A sobre as partículas  $B_i$  tem localmente uma direcionalidade bem definida, variável em geral de ponto para ponto, mas independente das partículas de prova.

(ii) No tocante ao sentido assumido pelas forças  $\vec{F}_P^{(i)}$  sobre a direcção comum, observa-se sempre a mesma repartição do conjunto das partículas ensaiadas ( $B_i$ ) em duas classes de comportamentos opostos, qualquer que seja o ponto de observação. Verifica-se que estas duas classes são associadas aos dois tipos distintos de electricidade, sendo uma classe a das partículas com electricidade positiva e a outra classe a das partículas com electricidade negativa. Podemos dizer: A acção eléctrica do corpo A sobre as partículas  $B_i$  tem em cada ponto um carácter bem definido, de atracção (acção atractiva) para as de um determinado sinal, de repulsão (acção repulsiva) para as de sinal oposto, e no resto independente das partículas de prova.

(iii) Num dado ponto de observação P, as diversas forças  $\vec{F}_P^{(i)}$ , exercidas sobre as diversas partículas  $B_i$ , apresentam módulos geralmente diversos entre si, mas proporcionais aos módulos correspondentemente observados sobre as mesmas partículas noutro qualquer ponto de observação P', com uma constante de proporcionalidade que só depende de P e P'. Podemos dizer: A acção eléctrica do corpo A sobre as partículas  $B_i$  varia de intensidade quando se muda de ponto de observação numa razão bem definida, independente das partículas de prova.



Assim, ainda que as forças  $\vec{F}^{(i)}$  dependam evidentemente do estado de eletrização das partículas ensaiadas, as conclusões acima extraídas conferem à acção eléctrica do corpo A uma certa

identidade, uma estrutura própria, independente das partículas de prova. Vamos ver em seguida que uma análise das forças  $\vec{F}^{(i)}$ , com base nos resultados que acabam de ser expostos, permite efectivamente explicitar de modo quantitativo, por um lado, a influência, sobre as forças observadas, do estado de eletrização das partículas de prova, e, por outro lado, a estrutura própria da acção eléctrica produzida pelo corpo A nos diferentes pontos do espaço. Este estudo conduz-nos ao estabelecimento de dois novos conceitos físicos: carga eléctrica e campo eléctrico. Proceda-mos para isso do seguinte modo. Começemos por notar que a propriedade (iii), se designarmos por  $c_{PP'}$  a constante de proporcionalidade aí mencionada, pode ser expressa por:

$$\frac{|\vec{F}_P^{(i)}|}{|\vec{F}_{P'}^{(i)}|} = c_{PP'} \quad (\text{para toda a partícula } B_i).$$

Então, para quaisquer duas partículas  $B_k$  e  $B_l$ , pode escrever-se, em consequência:

$$\frac{|\vec{F}_P^{(k)}|}{|\vec{F}_P^{(l)}|} = \frac{|\vec{F}_{P'}^{(k)}|}{|\vec{F}_{P'}^{(l)}|} = \frac{|\vec{F}_{P''}^{(k)}|}{|\vec{F}_{P''}^{(l)}|} = \dots \quad \left( \begin{array}{l} \text{Constante,} \\ \text{independente do} \\ \text{ponto de observação} \end{array} \right)$$

E, se este resultado se combina com as propriedades (i) e (ii), pode afirmar-se que, para quaisquer duas partículas,  $B_k$  e  $B_l$ , se tem:

$$(1.1) \quad \vec{F}_P^{(k)} = \lambda_{kl} \vec{F}_P^{(l)} \quad \left( \begin{array}{l} \text{para todo o } P, \\ \text{ponto de observação,} \end{array} \right)$$

sendo  $\lambda_{kl}$  um escalar, independente de P, positivo ou negativo consoante as duas partículas  $B_k$  e  $B_l$  se acham carregadas com electricidade do mesmo sinal ou de sinal contrário, e com um valor bem determinado para cada par de partículas  $B_k$  e  $B_l$  (tem-se evidentemente  $\lambda_{lk} = \lambda_{kl}^{-1}$  e  $\lambda_{kk} = 1$ ). Mas isto significa que os diversos campos de forças  $\vec{F}_P^{(i)}$  actuando sobre as diversas partículas  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) (supostas sucessivamente, uma de cada vez) são todos

eles proporcionais uns aos outros. Se adoptarmos uma partícula electrizada,  $B_{0,2}$  como partícula de referência, o campo de forças  $\vec{F}_P^{(0)}$  pode ser adoptado, correspondentemente, como paradigma para a determinação de todos os outros campos de forças produzidos pelo corpo A sobre as diversas partículas  $B_i$ : basta multiplicar  $\vec{F}_P^{(0)}$  pelo bem determinado factor  $\lambda_{i0}$  para passar ao campo  $\vec{F}_P^{(i)}$ :

$$(1.1') \quad \vec{F}_P^{(i)} = \lambda_{i0} \vec{F}_P^{(0)} \quad (\text{para todo o } P).$$

E, com vista à mesma determinação, de qualquer campo de forças  $\vec{F}_P^{(i)}$ , pode igualmente servir de paradigma um campo vectorial  $\vec{H}(P)$  arbitrariamente proporcional a  $\vec{F}_P^{(0)}$ , ou seja, definido por:

$$(1.2) \quad \vec{H}(P) = \chi_0 \vec{F}_P^{(0)} \quad (\text{sendo } \chi_0 \text{ um escalar arbitrário}),$$

desde que, simultaneamente, se substituam os coeficientes  $\lambda_{i0}$  por novos coeficientes  $\alpha_i$  definidos por

$$\alpha_i = \lambda_{i0} / \chi_0 \quad (i = 1, 2, \dots),$$

com o auxilio do mesmo escalar arbitrário  $\chi_0$ . Obtém-se

obviamente:

$$(1.3) \quad \vec{F}_P^{(i)} = \alpha_i \vec{H}(P)$$

Vê-se assim que — adoptada uma partícula de prova de referência,  $B_0$ , e fixado um valor do escalar  $\alpha_0$  — é possível: (1.º) Determinar, mediante (1.2), um campo vectorial  $\vec{H}(P)$ , representativo de todos os campos de forças  $\vec{F}_P^{(i)}$  (que dele se obtêm por simples proporcionalidade), portanto, representativo das acções eléctricas do corpo electrizado A em todos os pontos do espaço. (2.º) Determinar, mediante (1.3), escalares  $\alpha_i$ , um para cada partícula de prova  $B_i$ , representativos da diversidade dos estados de electrização das partículas de prova, relativamente aos estados de electrização da partícula de referência. Tomado o escalar  $\alpha_0 = 1/\alpha_0$  para indicar o estado de electrização da partícula de referência, os  $\alpha_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) passam a indicar os estados de electrização das diferentes partículas  $B_i$ . (Estas duas determinações, de (1.º) e de (2.º), são, como é óbvio, interdependentes.)

A presente análise das forças eléctricas produzidas por um qualquer corpo electrizado A conduz assim a dois novos conceitos físicos, cuja mensurabilidade fica perfeitamente assegurada depois de se adoptar uma partícula de prova de referência,  $B_0$ , e de se fixar um valor para  $\alpha_0$ . Esses dois novos conceitos constituem portanto duas grandezas físicas:  $\vec{H}(P)$  designa-se por campo eléctrico produzido por A em todo o espaço;  $\alpha_i$  designa-se por carga eléctrica da partícula  $B_i$  ( $\alpha_0$ , valor arbitrariamente escolhido, é a carga eléctrica da partícula de referência  $B_0$ ).

[ Note-se que a adopção de uma partícula de referência,  $B_0$ , a fixação de um valor para  $\alpha_0$  — equivalem à adopção de uma unidade de campo eléctrico ou de uma unidade de carga eléctrica (só uma das duas grandezas é de facto independente e pode adoptar-se como fundamental, sendo a outra uma grandeza derivada)]. Na notação habitual o campo eléctrico escreve-se  $\vec{E}(P)$  e as cargas eléctricas escrevem-se  $e, q, Q$ , por exemplo; de sorte que, habitualmente, a relação (1.3), de análise das forças eléctricas, aparece muito genericamente como

$$(1.4) \quad \vec{F}_P = e \vec{E}_P \quad (\text{ou } \vec{F} = e \vec{E})$$

se nos reportarmos à força  $\vec{F}_P$  que solicita uma partícula de prova de carga eléctrica  $e$  situada no ponto  $P$  (fala-se de uma carga pontual) em que um corpo electrizado (fonte de campo eléctrico) produz o campo  $\vec{E}_P$ .

Da relação (1.4) é possível extrair, desde já, duas conclusões de interesse:

(1<sup>a</sup>) Suponhamos que a uma dada partícula, situada em  $P$ , são comunicadas duas cargas  $e_1$  e  $e_2$  que, sob a acção de um corpo electrizado, submetidas ao mesmo campo  $\vec{E}_P$ , são solicitadas pelas forças  $\vec{F}_P^{(1)} = e_1 \vec{E}_P$  e  $\vec{F}_P^{(2)} = e_2 \vec{E}_P$ , respectivamente, ambas da mesma direcção. Nestas condições, a partícula é solicitada pela força resultante (obtida por simples soma dos valores algébricos dos vectores  $\vec{F}_P^{(1)}$  e  $\vec{F}_P^{(2)}$ ):

$$(1.5) \quad \vec{F}_P = \vec{F}_P^{(1)} + \vec{F}_P^{(2)} = (e_1 + e_2) \vec{E}_P$$

expressão esta que, confrontada com (1.4), permite concluir que as cargas comunicadas a uma partícula se somam algebricamente: a carga eléctrica é uma grandeza aditiva.



(2<sup>a</sup>) Suponhamos que uma partícula de carga  $e$ , em  $P$ , se acha sob a acção eléctrica de duas fontes,  $A_1$  e  $A_2$ , as quais produzem aí os campos  $(\vec{E}_1)_P$  e  $(\vec{E}_2)_P$ , respectivamente. Então a partícula é solicitada, simultaneamente pelas duas forças

$$(\vec{F}_1)_P = e(\vec{E}_1)_P \quad \text{e} \quad (\vec{F}_2)_P = e(\vec{E}_2)_P,$$

portanto, pela resultante (obtida pela regra do paralelogramo)

$$(1.6) \quad \vec{F}_P = (\vec{F}_1)_P + (\vec{F}_2)_P = e [(\vec{E}_1)_P + (\vec{E}_2)_P].$$

Mas esta expressão, confrontada com a relação (1.4), permite concluir que os campos produzidos por duas fontes distintas se adicionam (pela regra do paralelogramo):

$$(1.6') \quad \vec{E}_P = (\vec{E}_1)_P + (\vec{E}_2)_P$$

Neste sentido, o campo eléctrico é uma grandeza aditiva.  
Fala-se de aditividade dos campos ou diz-se existir um princípio de sobreposição (linear) dos campos.

#### 1.4 — Lei de Coulomb das acções electrostáticas. Referência ao Princípio de acção e reacção.

A lei das acções electrostáticas, estabelecida experimentalmente por Coulomb em 1785, por medições directas ainda com pouca precisão, foi posteriormente verificada com grande rigor e pode enunciar-se nos seguintes termos. Suponhamos duas partículas electrizadas com cargas  $e$  e  $e'$  (duas cargas pontuais), em repouso no espaço livre (vácuo), situadas nos pontos  $O$  e  $P$ , respectivamente, à distância  $d = \overline{OP}$  (v. Fig. 4). A lei de Coulomb afirma que as acções mútuas exer-

cidas entre estas duas partículas electrizadas se traduzem por duas forças  $\vec{F}_O$  e  $\vec{F}_P$  que surgem aplicadas respectivamente em  $O$  e  $P$ , da mesma direcção, do mesmo módulo e de sentidos contrários (de sorte que  $\vec{F}_O = -\vec{F}_P$ ) possuindo estas suas características mais as seguintes propriedades: (i) A direcção comum ao par de forças  $\vec{F}_O$  e  $\vec{F}_P$  é a linha recta que une os pontos  $O$  e  $P$ . (É muito frequente designarem-se forças nestas condições por « iguais-e-directamente-opostas »). (ii) O módulo comum ao par de forças  $\vec{F}_O$  e  $\vec{F}_P$  é directamente proporcional ao produto dos valores absolutos das cargas das partículas interactuantes e inversamente proporcional ao quadrado da distância  $d$  entre os pontos  $O$  e  $P$ . (Esta última afirmação é muito frequentemente designada por lei do inverso do quadrado). (iii) O par de forças  $\vec{F}_O$  e  $\vec{F}_P$  tem carácter ou repulsivo ou atractivo, consoante as cargas das partículas interactuantes são do mesmo sinal ou de sinal contrário. Este enunciado complexo (mas preciso) da lei de Coulomb pode sintetizar-se numa transcrição vectorial simples (mas completa), como segue:

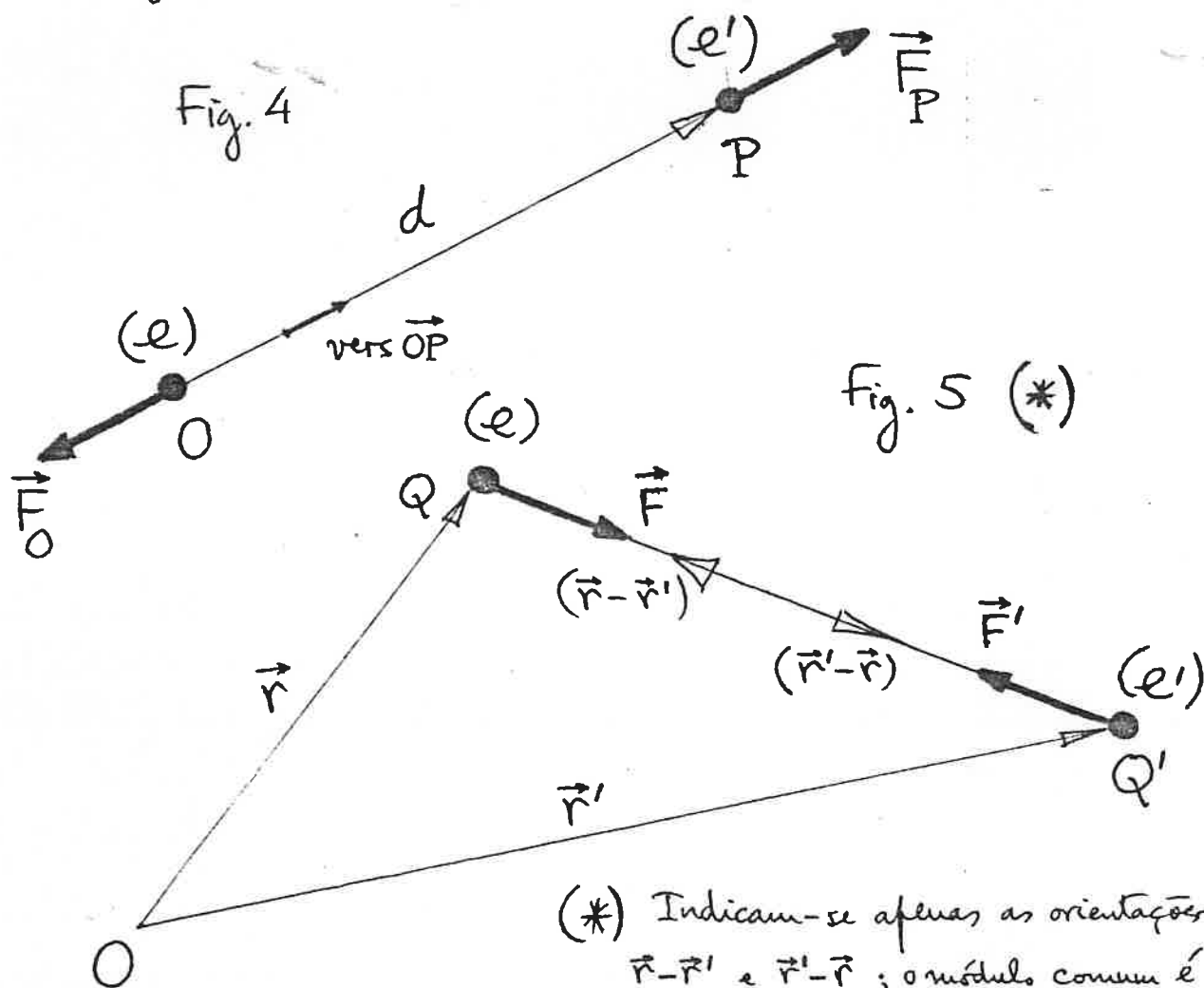
$$(1.7) \quad \begin{cases} \vec{F}_P = k_0 \frac{e e'}{d^2} \text{ vers } \vec{OP} & (\text{aplicada em } P) \\ \vec{F}_O = -\vec{F}_P & (\text{aplicada em } O) \end{cases}$$

em que  $e$  e  $e'$  entram com os seus sinais próprios e  $k_0$ , constante de proporcionalidade, é um escalar essencialmente positivo ( $\text{vers } \vec{OP} \equiv \vec{OP}/\overline{OP}$ ). É fácil verificar que estão contidas nesta expressão todas as propriedades acima descritas para o par de forças que traduz as acções

mútuas exercidas entre as duas partículas. (A Fig. 4 representa um caso de forças repulsivas.) Conviém habituarmos-nos desde já a uma outra notação, frequentemente utilizada como alternativa de (1.7). Sejam as partículas de cargas  $e$  e  $e'$  localizadas nos pontos  $Q$  e  $Q'$  referenciados a uma origem dos espaços  $O$  pelos respectivos vectores - espaço  $\vec{r} = \overrightarrow{OQ}$  e  $\vec{r}' = \overrightarrow{OQ'}$ ; as duas forças de interacção electrostática,  $\vec{F}_Q$  e  $\vec{F}_{Q'}$ , aplicadas respectivamente em  $Q$  e  $Q'$  podem exprimir-se pelas seguintes relações (v. Fig. 5):

$$(1.8) \quad \vec{F}_Q = k_0 e e' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad \vec{F}_{Q'} = k_0 e e' \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3}$$

(em que  $|\vec{r} - \vec{r}'| = d$ ), as quais respeitam  $\vec{F}_{Q'} = -\vec{F}_Q$ . (A Fig. 5 representa um caso de forças atractivas).

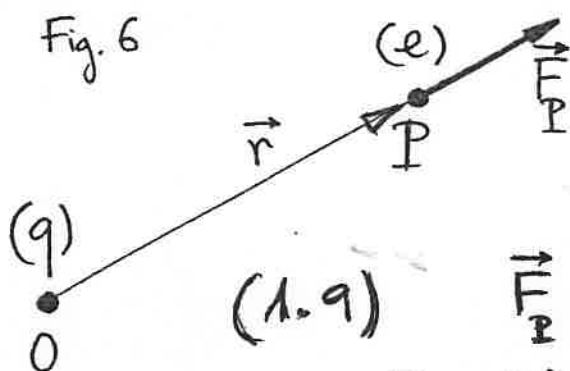


(\*) Indicam-se apenas as orientações de  $\vec{r} - \vec{r}'$  e  $\vec{r}' - \vec{r}$ ; o módulo comum é  $QQ'$ .

## 2. CAMPO ELÉCTRICO DE UMA CARGA PONTUAL

### 2.1 — Características do campo eléctrico de uma carga pontual

A lei de Coulomb das acções electrostáticas constitui o ponto de partida mais natural para o estudo da Electrostática. A expressão do campo eléctrico produzido por uma carga pontual extrai-se com efeito directamente da lei de Coulomb, fazendo uso da relação (1.4), de análise das forças eléctricas. Seja a carga pontual  $q$ , situada no ponto  $O$ , origem do espaço; e suponhamos colocada no ponto  $P$  (ponto de observação, genérico) uma partícula de prova, de carga  $e$  (v. Fig. 6). Segundo a



lei de Coulomb, a força  $\vec{F}_P$  exercida por  $q$  sobre  $e$  vem dada pela equação (1.7), ou seja, no caso presente, por:

$$(1.9) \quad \vec{F}_P = k_0 \frac{q \cdot e}{r^2} \text{ vers } \vec{OP} = k_0 \frac{q \cdot e}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

sendo  $\vec{r} \equiv \vec{OP}$  e  $r = |\vec{r}|$ , a distância  $OP$ .

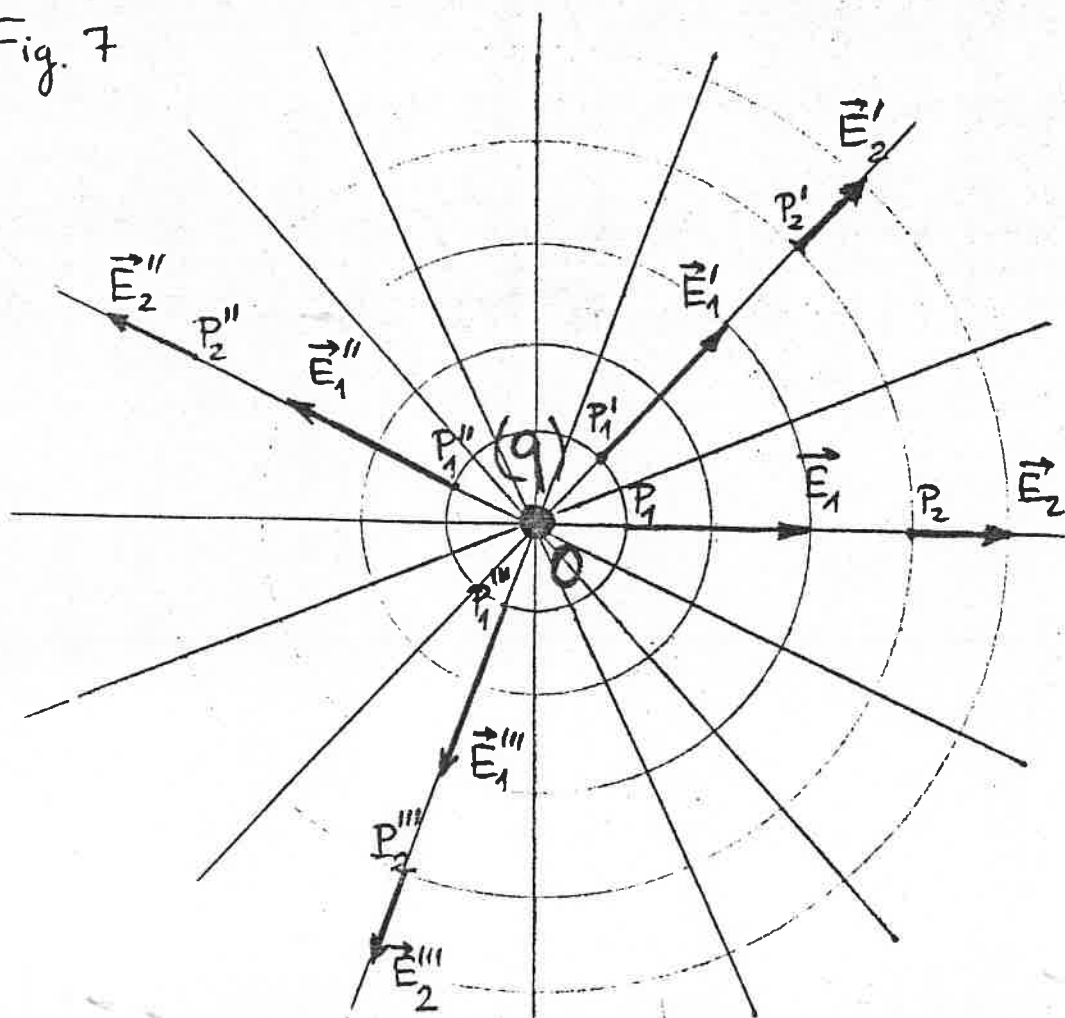
Então, aplicando a relação (1.4), resulta para o campo produzido pela carga pontual  $q$  situada em  $O$  a expressão:

$$(1.10) \quad \vec{E}_P = k_0 \frac{q}{r^2} \text{ vers } \vec{OP} = k_0 \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Esta expressão revela que o campo de uma carga pontual tem as seguintes propriedades (características):

- É um campo radial, isto é, em cada ponto dirigido segundo o raio-vector (ou vector-distância)  $\vec{r} \equiv \vec{OP}$ , que liga o ponto em que se situa a carga com o ponto de observação. As linhas de força do campo são o feixe de rectas que passam pela origem  $O$ . (v. Fig. 7).
- É um campo com simetria esférica, em torno do

Fig. 7



ponto  $O$ , em que se situa a carga. Com efeito, os valores (vectoriais) observados nos diferentes pontos são invariantes perante uma rotação dos observadores em torno de qualquer eixo passando por  $O$  (v. Fig. 7).

c) É um campo atractivo ou repulsivo, com linhas de força convergentes para  $O$ , ou divergentes de  $O$ , respectivamente, consoante a carga  $q$  é negativa ou positiva (v. Figs 8a, 8b).

Fig. 8a

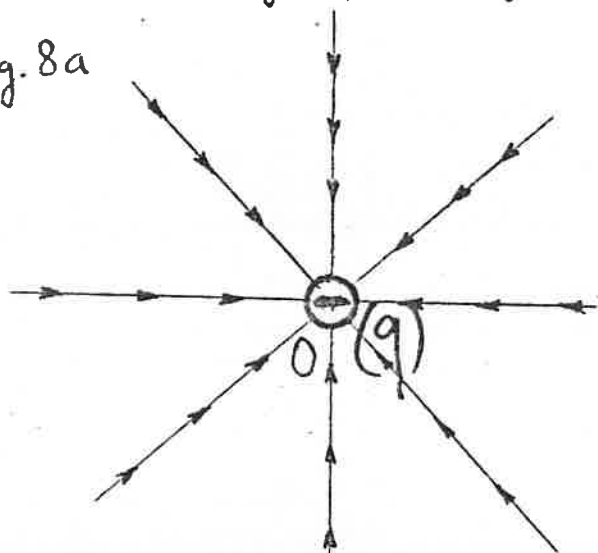
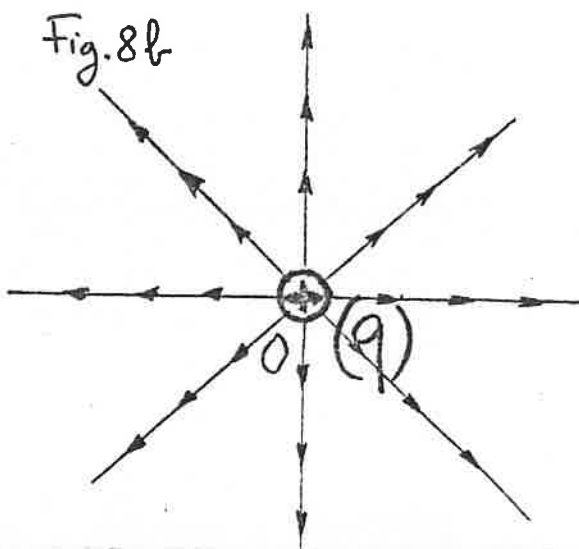


Fig. 8b



d) O campo decrece (em módulo) com a distância,  $r$ , segundo a lei do inverso do quadrado (como  $1/r^2$ ); e é nulo no infinito, tendendo para zero como  $1/r^2$ , quando  $r \rightarrow \infty$ .

e) O campo não é definido no ponto em que se situa a carga (tende para infinito quando  $r \rightarrow 0$ ), apresentando aí portanto uma singularidade, que é a única singularidade do campo.

## 2.2 — Noções de potencial. Circulações do campo. Significado físico da diferença de potencial.

Comecemos por fazer notar que a expressão (1.10), do campo eléctrico de uma carga pontual, admite facilmente a nova forma

$$(1.11) \quad \vec{E}_P = - \frac{dV}{dr} \text{ vers } \vec{OP} \quad (*)$$

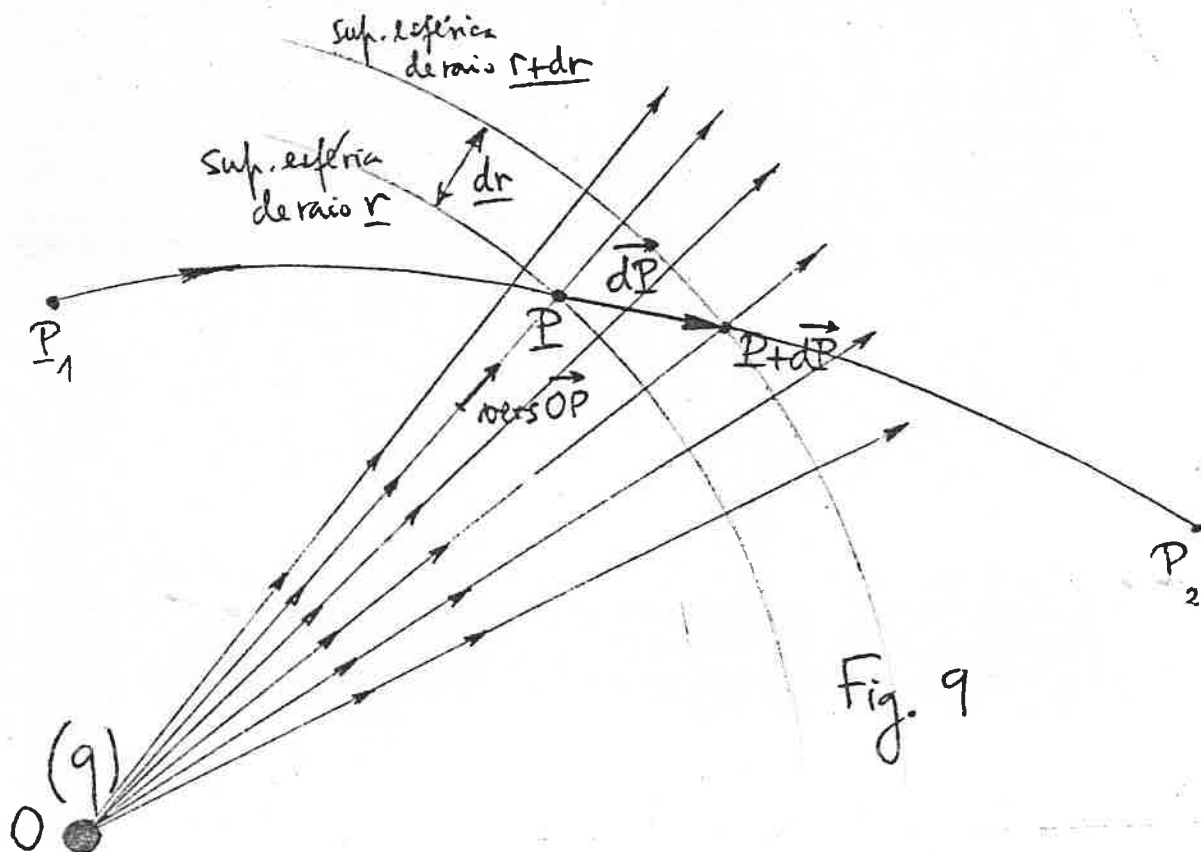
sendo  $V$  um escalar função de ponto,  $V(P)$ , definido a menos de uma constante aditiva como

$$(1.12) \quad V_P = k_0 \frac{q}{r} + \text{const.} \quad (r \equiv \vec{OP}).$$

Esta função  $V(P)$  designa-se por função potencial ou simplesmente por potencial. Por ser dado por (1.11), diz-se que o campo eléctrico deriva de um potencial escalar,  $V$ , e fala-se do potencial do campo eléctrico; passa a dizer-se mesmo, no caso presente, que a expressão (1.12) fornece o potencial "produzido" por uma carga pontual. Nessa óptica, a carga em  $O$  é a carga potenciante, o ponto  $O$  é o ponto potenciante; e o ponto  $P$  (de observação) é o ponto potenciado. Em princípio, o potencial não é senão uma função matemática auxiliar para o cálculo do campo mediante a operação indicada em (1.11). Vamos ver no entanto que

(\*) Vê-se bem que esta operação se confunde com a operação  $-\text{grad } V$ , objecto de uma lição ulterior.

se pode atribuir um importante significado físico à diferença de potencial entre dois pontos de observação. Suponhamos que queríamos calcular o trabalho realizado hipoteticamente pela força eléctrica  $\vec{F}_P = e \vec{E}_P$ , que actua sobre a partícula de prova de carga  $e$ , num deslocamento elementar idealizado  $d\vec{P}$ , do ponto  $P$  para o ponto  $P+d\vec{P}$  (v. Fig. 9).



Obteríamos o trabalho elementar

$$(1.13) \quad \delta W = \vec{F}_P \cdot d\vec{P} = e \vec{E}_P \cdot d\vec{P}$$

ou seja, o produto da carga de prova  $e$  pela circulação elementar do campo  $\vec{E}_P$  no deslocamento  $d\vec{P}$ . Ora, tendo em conta a expressão (1.11) e reparando que se tem  $\text{vers } \vec{OP} \cdot d\vec{P} = dr$  (v. Fig. 9), é fácil concluir que

$$(1.14) \quad \vec{E}_P \cdot d\vec{P} = -dV$$

e portanto que

$$(1.15) \quad \delta W = -e dV$$

Ou seja: o trabalho elementar procurado iguala a diferen-

cial exacta da função  $(-eV)$  e isto é equivalente a dizer que a circulação elementar do campo é a diferencial exacta da função  $(-V)$ . Passando a um deslocamento finito, entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$ , por exemplo, ao longo da curva indicada na Fig. 9, ter-se-á para o trabalho realizado,  $W(\widehat{P_1 P_2})$ , a expressão:

$$(1.16) \quad W(\widehat{P_1 P_2}) = \int_{\widehat{P_1 P_2}} \vec{F}_P \cdot d\vec{P} = -e \int_{\widehat{P_1 P_2}} dV = \\ = -e(V_{P_2} - V_{P_1}) = e(V_{P_1} - V_{P_2})$$

e vê-se que este resultado é independente do caminho percorrido, isto é, é o mesmo para qualquer curva  $\widehat{P_1 P_2}$  que ligue os mesmos dois pontos  $P_1$  e  $P_2$ . Assim a função potencial  $V$ , qualquer que seja o valor da constante aditiva em (1.12), fornece sempre, fela sua variação, o trabalho realizado fela força eléctrica sobre uma carga de prova unitária ( $e=1$ ) que se desloca de  $P_1$  para  $P_2$ . (Sendo a variação, aqui, uma diminuição). Isto é equivalente a dizer que a circulação do campo eléctrico, para qualquer curva  $\widehat{P_1 P_2}$ , iguala a diferença de potencial entre os extremos da curva:

$$(1.17) \quad \int_{\widehat{P_1 P_2}} \vec{E} \cdot d\vec{P} = V_{P_1} - V_{P_2}$$

(sendo a diferença contada entre o ponto de partida e o de chegada, ou seja, uma diminuição). Se, em particular,  $P_2$  coincide com um ponto infinitamente afastado,  $P_\infty$ , então (1.16) escreve-se  $W(\widehat{P_1 P_\infty}) = e(V_{P_1} - V_{P_\infty})$ ; mas  $V_{P_\infty}$  ou  $V_\infty$  é precisamente a constante arbitrada na definição de  $V$  (confronte (1.12):  $r=\infty$  faz  $V_\infty = \text{const.}$ ) e por consequência pode ter-se  $V_\infty = 0$  se se escolher como nula a constante em (1.12); resulta então  $W(\widehat{P_1 P_\infty}) = eV_{P_1}$ .



Isto quer dizer que é possível conferir ao potencial assim especialmente escolhido um significado físico preciso: o potencial num ponto representa o trabalho realizado pela força eléctrica no transporte de uma carga unitária ( $e=1$ ) — ou o “trabalho realizado pelo campo eléctrico” — desde esse ponto até ao infinito, por qualquer percurso. Este potencial assim especialmente escolhido (sob a condição  $V_{\infty} = 0$ ), para o caso do campo devido a uma carga pontual  $q$ , localizada em  $O$ , tem por expressão

$$(1.12') \quad V_P = k_0 \frac{q}{r} \quad (r \equiv \overline{OP})$$

### 2.3 — Relações entre o campo e as equipotenciais

O lugar geométrico dos pontos do espaço para os quais  $V$  tem o mesmo valor que em determinado ponto  $P_0$ , ou seja, dos pontos que satisfazem  $V(P) = V_0$ , sendo  $V_0 = V(P_0)$  — designa-se por superfície equipotencial da função escalar  $V(P)$ . A superfície equipotencial assim definida passa por  $P_0$ , obviamente; e sendo  $V(P)$  uma função unívoca, como sempre vamos supor, uma e uma só equipotencial passa por  $P_0$ . Se se substituir  $V_0$  por um parâmetro  $\Delta$  (que represente o conjunto contra-domínio de  $V(P)$ ), obtém-se a equação paramétrica da família das equipotenciais de  $V(P)$ :  $V(P) = \Delta$  (const.). No caso presente — campo devido a uma carga pontual —, atendendo a (1.12) ou a (1.12'), as equipotenciais são superfícies esféricas centradas no ponto  $O$  em que se situa a carga, com valores de potencial decrescentes com  $r$  se  $q > 0$ , crescentes com  $r$  se  $q < 0$ . O campo, calculado por (1.11), depende essencialmente do andamento da função potencial, portanto da distribuição das superfícies equi-

potenciais. E recordando as características do campo devido a uma carga pontual (v. § 2.1), é fácil verificar que satisfaz às seguintes três relações para com as equipotenciais:

1ª)  $\vec{E}$ , em cada ponto, normal à equipotencial que passa por esse ponto (campo radial, equipotencial esférica).

! → 2ª) Tem sempre o sentido das equipotenciais decrescentes  
 ( $q > 0$  : campo repulsivo, equipotenciais decrescentes com  $r$ ;  
 $q < 0$  : campo atractivo, equipotenciais crescentes com  $r$ ).

! → 3ª) Tem módulo dado pelo módulo da derivada de  $V$  em ordem à distância marcada sobre a normal às equipotenciais (conforme se extrai de (1.11), sendo as equipotenciais esféricas).

Importa registar desde já estas relações, porque adiante veremos terem elas um carácter geral: o campo eléctrico, na Electrostatica, satisfaz sempre, em todas as situações e quaisquer que sejam as fontes que o produzem, a estas mesmas três relações com as equipotenciais do potencial  $V(P)$  de que deriva (à custa do qual se exprime sempre como  $-\text{grad } V$ ).

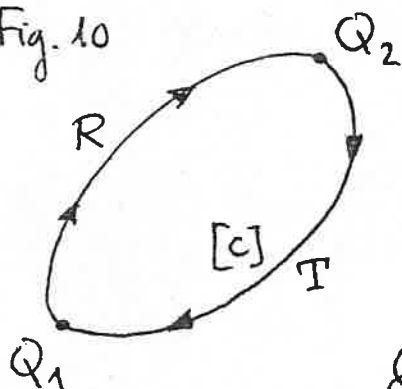
## 2.4 — Conservação da energia na Electrostatica

Da relação (1.17), ou da relação diferencial (1.14), extrai-se um resultado muito importante: é nula a circulação do campo  $\vec{E}$ , produzido por uma carga pontual, ao longo de qualquer curva fechada  $[c]$ , ou seja

$$(1.18) \quad \oint_{[c]} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

em que  $d\vec{s}$  designa o vector-deslocamento infinitamente pequeno ( $d\vec{P}$ ), ou o vector-elemento de arco, sobre a curva  $[c]$ . Para justificar este resultado, faz-se notar que qualquer curva fechada se pode decompor em dois percursos, um de ida e outro de volta entre dois pontos arbitrários  $Q_1$  e  $Q_2$  (v. Fig. 10), a saber  $\widehat{Q_1 R Q_2}$  e  $\widehat{Q_2 T Q_1}$  (na Fig. 10, as setas indicam o sentido de

Fig. 10



circulação, fixados arbitrariamente, para o cálculo do integral cíclico de (1.18)); calculando a circulação fechada ao longo de  $[C]$  mediante esta decomposição e com o uso de (1.17), resulta, com efeito:

$$\oint_{[C]} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{Q_1 R Q_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{Q_2 T Q_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \\ = (V_{Q_1} - V_{Q_2}) + (V_{Q_2} - V_{Q_1}) = 0.$$

Vamos analisar agora o significado físico que deve atribuir-se a este resultado. Consideremos uma carga pontual de prova  $e$ , colocada no campo  $\vec{E}$  produzido pela carga pontual  $q$  e idealizemos uma experiência pela qual levamos a carga  $e$  a descrever reversivelmente — com velocidade quase nula, sem acelerações, sem atrito, sem desenvolvimento de calor — uma curva fechada  $[C]$ . Nestas condições podemos pensar que não nos afastamos sensivelmente do domínio da Electrostática e que será válido aplicar as conclusões precedentes. Então, o trabalho realizado pela força eléctrica,  $\vec{F}_P = e \vec{E}_P$ , sobre a carga de prova, ao longo de  $[C]$ , é nulo em consequência de (1.18):

$$\oint_{[C]} \vec{F} \cdot d\vec{s} = e \oint_{[C]} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Nulo é portanto também o trabalho realizado pelo observador, que em cada ponto tem de compensar a força eléctrica com uma força oposta,  $-\vec{F}_P$ , para garantir que a experiência idealizada se processe sem acelerações. Consequentemente, regressa da a carga de prova à posição primitiva, o observador não pôde, mediante os trabalhos que realizou (de soma nula), ter absorvido qualquer energia do sistema, nem ter fornecido qualquer energia ao sistema. E não havendo por hipótese

qualquer outra forma possível de trocas de energia, deve concluir-se: a energia electrostática do sistema conserva-se, quando é reasumida a situação electrostática inicial. É o princípio de conservação da energia na Electrostática. Eis aí o significado físico, extremamente importante, da relação (1.18). Veremos que a validade desta relação se estende a toda a Electrostática, tendo ela sempre este mesmo significado físico, isto é, traduzindo sempre, por si própria ou por adequadas relações equivalentes, o princípio de conservação da energia.

## 2.5 — Teorema de Gauss para o campo de uma carga pontual

### 2.5.1 — Noção de fluxo de um campo vectorial — A noção de fluxo de um campo vectorial surge a propósito da exploração do campo que um observador pode fazer utilizando um elemento de superfície cuja orientação no espaço é livre de escolher para cada uma das suas medições. A um elemento de superfície nestas condições associa-se uma grandeza física puramente geométrica representável por um vector, que se designe por elemento de área orientado, a saber, o vector cujo módulo é a área do elemento de superfície e cuja orientação é a do vector unitário normal à superfície e com um sentido convencionalmente fixado. A atribuição deste sentido confere sinais (+) e (-) às duas faces do elemento de superfície, orientando-se a normal como uma seta que fura a superfície da face negativa para a face positiva. Um elemento de área orientado, como os exemplos da Fig. 11, pode portanto exprimir-se por $\vec{dS} = \vec{n} dS$ ou $\vec{d\Sigma} = \vec{\nu} d\Sigma$ , etc.. Seja o campo vectorial $\vec{B}(P)$ . Em muitas situações físicas revela-se útil que o observador meça a quantidade escalar

$$(1.19) \quad \vec{B} \cdot \vec{dS} = \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

no ponto P em que se encontra e para a orientação  $\vec{n}$  do ele-

mento de superfície, de área  $dS$ , de que dispõe. Esta quantidade escalar é precisamente, por definições, o fluxo elementar do campo  $\vec{B}$  através do elemento de área orientado  $d\vec{S}$  (no ponto  $P$ ). Para alguns campos, em certas situações, o fluxo assim definido tem um significado físico imediatamente acessível. Exemplo muito simples e bem ilustrativo é o caso do campo das velocidades de escoamento de um fluido,  $\vec{v}(P)$ ; com efeito, vê-se facilmente que a quantidade  $\vec{v} \cdot \vec{n} dS$  (fluxo elementar do campo  $\vec{v}(P)$  através de  $d\vec{S}$ ) se confunde com o débito que passa através de  $dS$  na direcção e sentido de  $\vec{n}$  (sendo o débito, por definição, o volume de fluido escoado por unidade de tempo). A Fig. 12 ajuda a tirar essa conclusão. Com efeito, o fluido que escoo no intervalo de tempo  $dt$  (infinitamente pequeno), através de  $dS$ , preenche o cilindro representado na Fig. 12, com base em  $dS$  e geratriz igual ao deslocamento  $d\vec{l}$  percorrido no tempo  $dt$  (isto é,  $d\vec{l} = \vec{v} dt$ ). Ora tal cilindro tem uma altura  $d\vec{l} \cdot \vec{n}$  (que é a projecção da geratriz sobre a normal à base) e portanto um volume  $dW = d\vec{l} \cdot \vec{n} dS$ ; este é volume escoado no tempo  $dt$  e daí resulta um débito  $dW/dt = \vec{v} \cdot \vec{n} dS$ , igual ao referido fluxo, como queríamos mostrar. Na maior parte dos casos, contudo, o significado físico do fluxo não transparece com esta facilidade, exigindo um exame mais aprofundado da situação.

Fig. 11

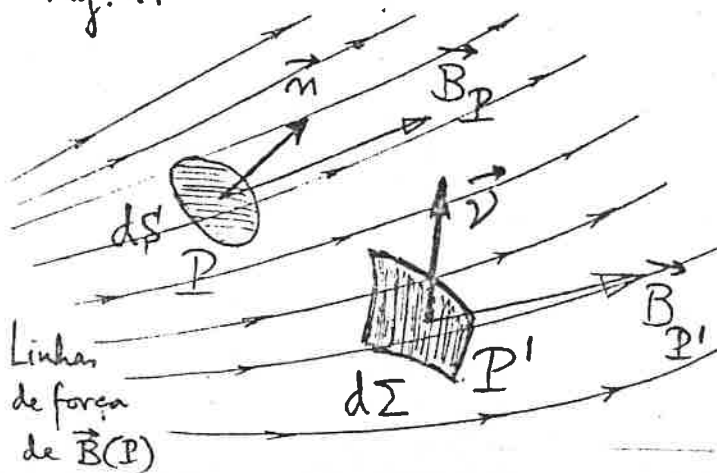
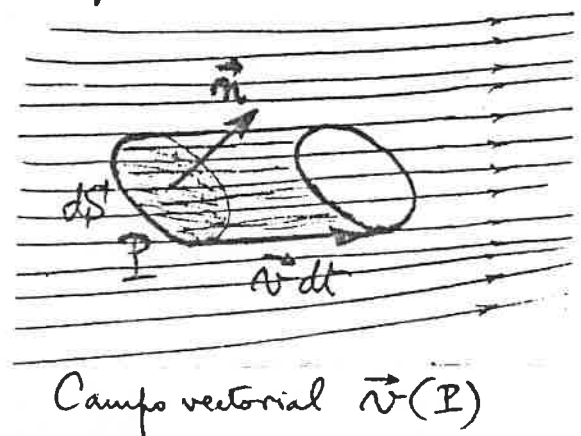


Fig. 12



A noção de fluxo pode estender-se a uma superfície finita. O fluxo  $\Phi$  através de uma superfície finita  $S$ , que suporemos regular, — fixado previamente, sob algum critério, um sentido para as normais nos diferentes pontos de  $S$  — é a soma dos fluxos elementares correspondentes à decomposição de  $S$  em elementos  $d\vec{S}$ , ou seja, é dado pelo integral

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS \quad (*)$$

(1.20)

Assume particular interesse o caso em que  $S$  é uma superfície fechada. Então, um critério bastante simples e natural de fixação do sentido das normais nos diferentes pontos é o de serem todas orientadas para o exterior da superfície fechada, ou todas para o interior, e dizemos que se trata do fluxo que "sai" através de  $S$ , ou do fluxo que "entra" através de  $S$ , respectivamente; diferindo estes dois fluxos apenas no sinal, obviamente. [(\*). Note-se que, se a superfície  $S$  não é regular, mas apenas contém algumas linhas de singularidades, pode mostrar-se que é ainda válido, sob condições pouco restritivas, definir o fluxo através de  $S$  — considerando-o como a soma dos fluxos através das zonas regulares em que  $S$  é decomposta pelas suas linhas de singularidades. Exemplos: superfície limitrofe de um cubo, de um poliedro em geral (são fluxos parciais os fluxos através das faces); superfície limitrofe de um cilindro (fluxos parciais através da superfície lateral e das bases).]

### 2.5.2 — Aplicações aos campos eléctricos de uma carga pontual —

Seja agora o campo produzido por uma carga pontual,  $\vec{E}(P)$ , dado por (1.10). Tem-se, para o fluxo elementar através de um  $d\vec{S}$  no ponto  $P$ :

$$\vec{E}_P \cdot \vec{n} \, dS = k_0 q \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{n} \, dS$$

Mas, com a ajuda da Fig. 13, facilmente se reconhece que a quantidade

$$\left| \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{n} \, dS \right| = \frac{1}{r^2} |\cos \alpha| \, dS = \frac{d\Sigma}{r^2}$$

se identifica com a medida do ângulo sólido sob o qual um obser-

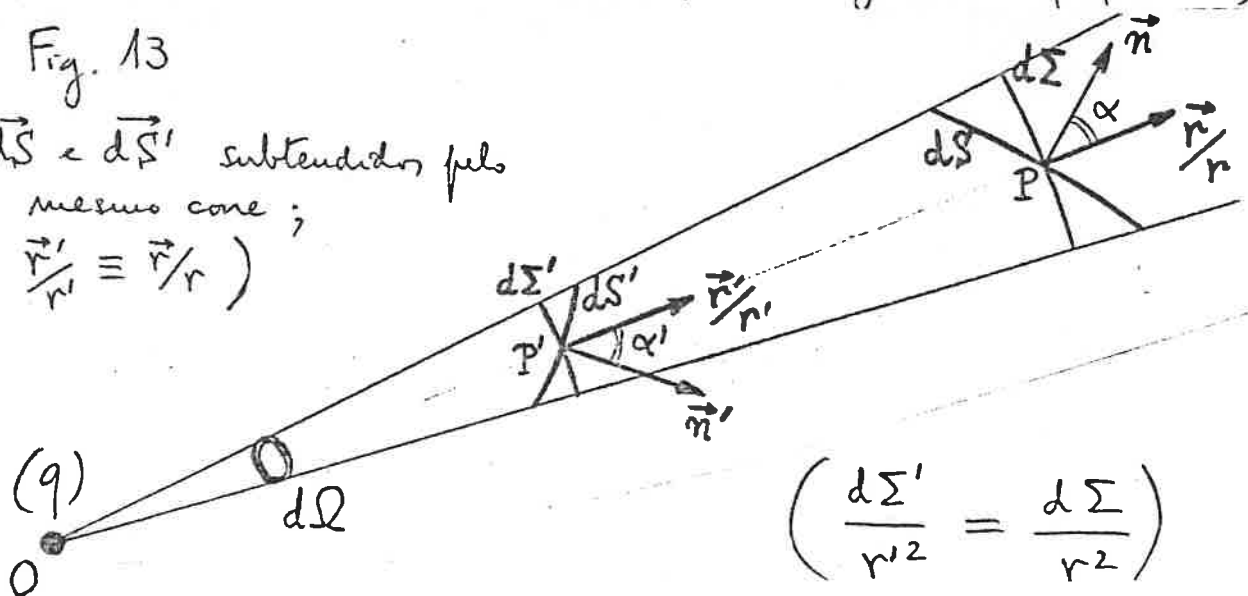
rador localizado em  $O$  (ponto em que se situa a carga  $q$  que produz o campo) « vê » a face interna do elemento de superfície esférica centrada em  $O$  e de raio  $r$ , de área  $d\Sigma$ , subtendido pelo mesmo cone que subtende o elemento de área  $dS$  (\*). Tal quantidade mede portanto também o ângulo sólido sob o qual o observador « vê » o elemento  $dS$ . Todavia, aproveitando o carácter vectorial de  $d\vec{S}$  (a sua orientação), convém definir esse ângulo sólido,  $d\Omega$ , mais precisamente, mediante a relação:

$$(1.21) \quad d\Omega = \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{n} dS \quad (\vec{r} \equiv \vec{OP}).$$

Diremos que esta relação define o ângulo sólido sob o qual um observador em  $O$  « vê » a face negativa do elemento de área  $d\vec{S} = \vec{n} dS$ , localizado em  $P$ . Tem assim o ângulo sólido um carácter algebrico: positivo, quando o observador em  $O$  efectivamente vê a face negativa de  $d\vec{S}$ ; negativo, quando o observador efectivamente vê a face positiva; nulo, se a direcção de observação,  $\vec{r}/r$ , fica transversal à orientação,  $\vec{n}$ , de  $d\vec{S}$  (se a direcção de observação é tangente à superfície  $dS$ ).

Fig. 13

( $d\vec{S}$  e  $d\vec{S}'$  subtendidos pelo mesmo cone;  
 $\frac{\vec{r}'}{r'} \equiv \frac{\vec{r}}{r}$ )



$$\left( \frac{d\Sigma'}{r'^2} = \frac{d\Sigma}{r^2} \right)$$

(\*) Esta medida de ângulo sólido, que o constitui em grandeza física, é uma extensão da medida de ângulo plano, em radianos, como a razão entre o comprimento do arco de circunferência subtendido e o raio. Para o ângulo sólido, a medida exprime-se em estereoradianos.

Nestas condições, o fluxo elementar do campo eléctrico produzido por uma carga pontual  $q$ , localizada em  $O$ , através de um qualquer elemento de área  $d\vec{S}$ , localizado em  $P$  (ponto genérico de observação), vale:

$$(1.22) \quad \vec{E} \cdot d\vec{S} = k_0 q d\Omega$$

o que quer dizer que é directamente proporcional ao ângulo sólido sob o qual um hipotético observador localizado em  $O$  vê o elemento de área  $d\vec{S}$  (sendo  $k_0 q$  a constante de proporcionalidade). Reconhece-se na simplicidade deste resultado o efeito conjugado de duas características essenciais do campo, como quem diz, da lei de Coulomb, que lhe está na origem: a direccionalidade de  $\vec{E}$  em  $\vec{r}/r$  (o seu carácter radial) e a dependência do módulo de  $\vec{E}$  em  $1/r^2$ . Por outras palavras: um resultado tão simples acha-se fundamentalmente ligado ao facto de se tratar aqui de um campo de forças centrais com uma dependência da distância segundo a lei do inverso do quadrado. Repare-se agora que, qualquer que seja o elemento de área  $d\vec{S}'$  subtendido pelo mesmo cone que subtende  $d\vec{S}$  (v. Fig. 13), se obtém sempre o mesmo valor absoluto para o fluxo; mas todo o cone partindo de  $O$  é um tubo de linhas de força de  $E(P)$ ; então, o fluxo (por ex., no sentido do afastamento da carga) conserva-se ao longo de um tubo de linhas de força. Atendendo a (1.22) pode ainda dizer-se que é constante, e vale  $k_0 q$ , a razão entre o fluxo ao longo de um cone partindo de  $O$  e o ângulo sólido contido nesse cone; mais: esta propriedade é independente da direcção do eixo do cone, em conformidade com a simetria esférica do campo. Este fluxo por unidade de ângulo sólido, assim definido, constante para todos os pontos do espaço e independente da orientação e da grandezza de  $d\vec{S}$ , é, à parte o factor  $k_0$ , uma medida da carga  $q$  que produz o campo (esse, o seu significado físico).

2.5.3 — Teorema de Gauss — A expressão (1.22) permite passar quase imediatamente ao fluxo através de uma qualquer superfície (regular),  $S$ , o qual pode definir-se por (1.20). Obtém-se



$$(1.23) \quad \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = k_0 q \int_S d\Omega$$

Assume especial interesse o caso em que  $S$  é uma superfície fechada porque então o integral contido no 2º membro de (1.23) depende de uma maneira simples da situação da superfície  $S$  relativamente ao ponto  $O$ , em que se localiza a carga. Com efeito, supondo para fixar ideias que nos ocupamos do fluxo que sai através de  $S$ , ou seja, que as normais  $\vec{n}$  são todas orientadas para o exterior de  $S$ , há a distinguir três situações: a) Se a superfície  $S$  envolve o ponto  $O$  ( $O$  interior a  $S$ ), o observador em  $O$  vê todos os elementos de área sob um ângulo sólido positivo; e englobando a soma deles todo o espaço, obtém-se como resultado  $4\pi$ , para o integral do 2º membro. (Este é com efeito o valor do ângulo sólido global sob o qual se "vê" uma superfície esférica, a partir do seu centro (v. Fig. 14):  $\int_{\Sigma} d\Omega = \int_{\Sigma} \frac{d\Sigma}{R^2} \stackrel{!}{=} \frac{1}{R^2} \int_{\Sigma} d\Sigma = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$ ). b) Se a superfície  $S$  passa pelo ponto  $O$  ( $O$  assente sobre  $S$ ), o observador em  $O$  vê ainda todos os elementos de área sob um ângulo sólido positivo, mas a soma deles engloba apenas justamente um hemi-espaço, o que fica para o mesmo lado que  $S$ , do plano tangente a  $S$  em  $O$ , sendo o resultado agora, obviamente,  $2\pi$ , ângulo sólido global sob o qual se "vê" uma hemi-superfície esférica, a partir do seu centro (aqui a hemi-superfície esférica centrada em  $O$  e limitada pelo plano tangente a  $S$  em  $O$ , v. Fig. 15). c) Finalmente, se a superfície  $S$  não envolve o ponto  $O$  ( $O$  exterior a  $S$ ), o observador em  $O$  vê uma parte dos elementos de área sob um ângulo sólido positivo, outra parte sob um ângulo sólido negativo, com uma compensação global de resultado nulo, visto que a cada elemento de área ( $dS_1$ ) de  $S$  se pode associar um outro ( $dS_2$ ), subtendido pelo mesmo cone e a que corresponde um ângulo sólido simétrico (com o mesmo módulo  $d\Sigma/R^2$ , mas de sinal contrário) (v. Fig. 16). Em resumo: O fluxo do campo eléctrico produzido por uma carga pontual,

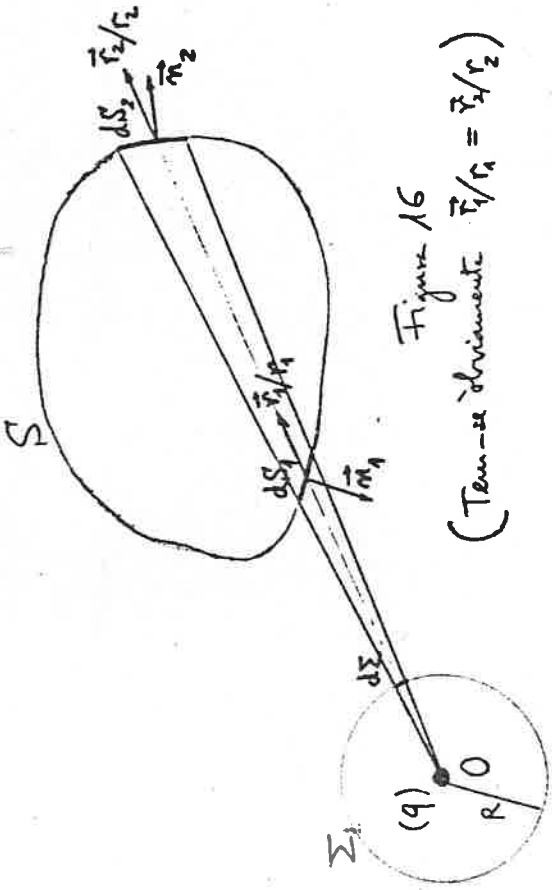


Figure 16  
(Tangente obliqua  $\vec{r}_1/r_1 = \vec{r}_2/r_2$ )

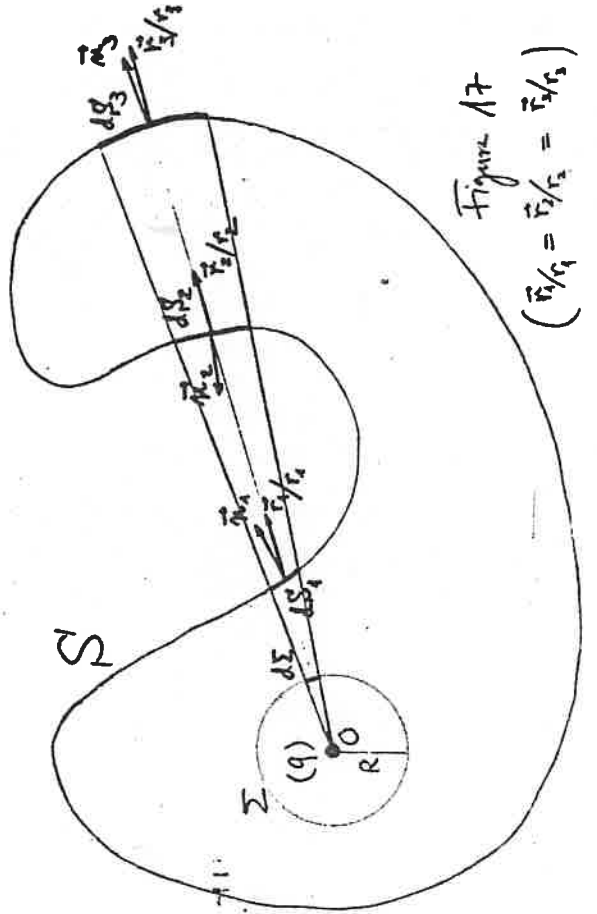


Figure 17  
( $\vec{r}_1/r_1 = \vec{r}_2/r_2 = \vec{r}_3/r_3$ )

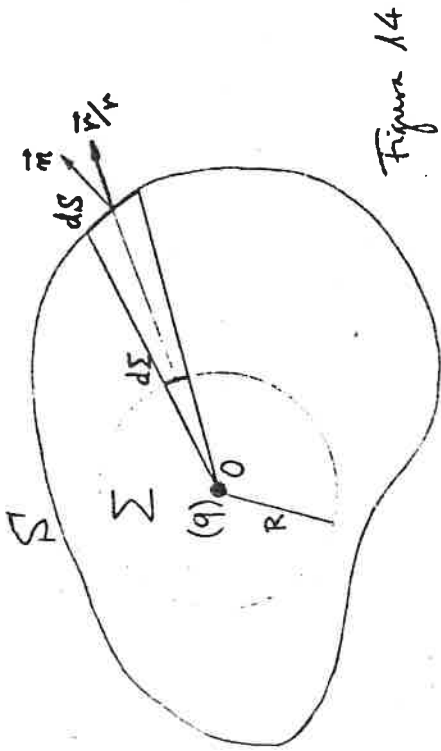


Figure 14

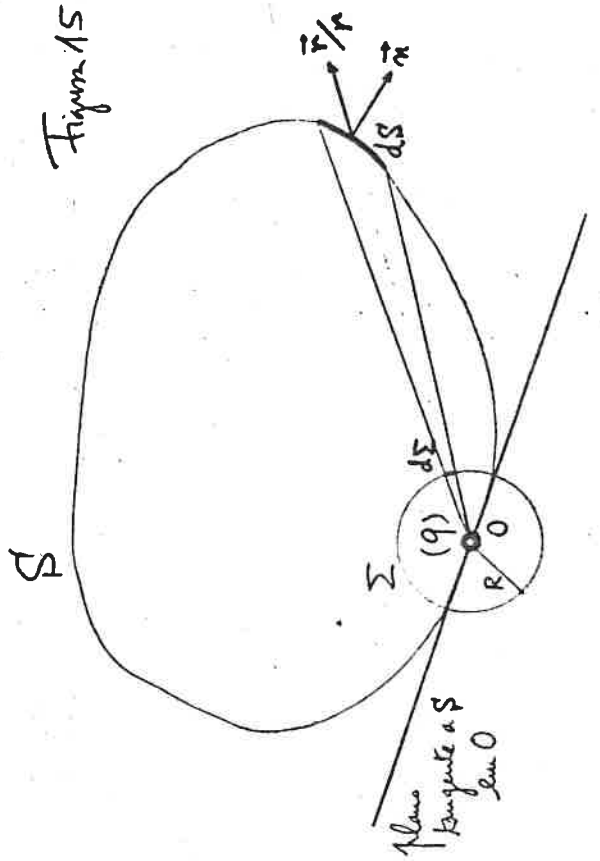


Figure 15

que sai através de uma superfície fechada  $S$ , verifica a seguinte afirmação tripartida: (1.24) (\*)

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \begin{cases} 4\pi k_0 q, & \text{se a carga é interior a } S \\ 2\pi k_0 q, & \text{se a carga assenta sobre } S \\ 0, & \text{se a carga é exterior a } S. \end{cases}$$

Este enunciado constitui o célebre Teorema de Gauss, da Electrostatica, na sua primeira forma (válida para o campo de uma carga pontual). Adiante se farão dele generalizações importantes. Repare-se que pela 1.ª parte da afirmação (1.24), a carga  $q$  fica proporcional ao fluxo do campo  $\vec{E}$  através de qualquer superfície fechada  $S$  que envolva a carga:

$$(1.25) \quad q = \frac{1}{4\pi k_0} \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{4\pi k_0} \Phi$$

e isto acentua o significado físico do fluxo, a que já nos tínhamos referido: à parte o factor constante  $1/4\pi k_0$ , esse fluxo constitui uma medida da carga eléctrica que produz o campo, se a superfície  $S$  a envolve. Por razões históricas, foi esta constante de proporcionalidade  $1/4\pi k_0$  que, em detrimento de  $k_0$  (constante da lei de Coulomb), veio a prevalecer no formalismo da Electrostatica, sob a notação de  $\epsilon_0$  e a designação de constante dieléctrica ou poder indutor específico, do vácuo.

(\*) Observações: A demonstração aqui desenvolvida, do Teorema de Gauss, supõe, para não alongar demasiadamente o discurso, que a superfície fechada  $S$  fica sempre para o mesmo lado de qualquer plano tangente. Daí resultam os três únicos casos possíveis a), b) e c). Para o caso mais geral, pode todavia fazer-se do mesmo modo a demonstração, usando sempre a composição dos (vários) ângulos sólidos correspondentes aos (vários) elementos de área subtendidos pelo mesmo cone elementar. A Fig. 17 é ilustrativa de uma tal operação.

### 3. CAMPO ELÉCTRICO PRODUZIDO POR UMA DISTRIBUIÇÃO (DISCRETA) DE CARGAS PONTUAIS

Consideremos uma distribuição (discreta) de  $N$  partículas eletrizadas. Seja  $\vec{E}_\alpha(\mathcal{P})$ , genericamente, o campo que produz no ponto  $\mathcal{P}$ , isoladamente (por si só), a partícula eletrizada  $\alpha$ , de carga  $q_\alpha$ , localizada no ponto  $Q_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, N$ ). Então, o campo elétrico produzido em  $\mathcal{P}$  pela distribuição de cargas vem dado por:

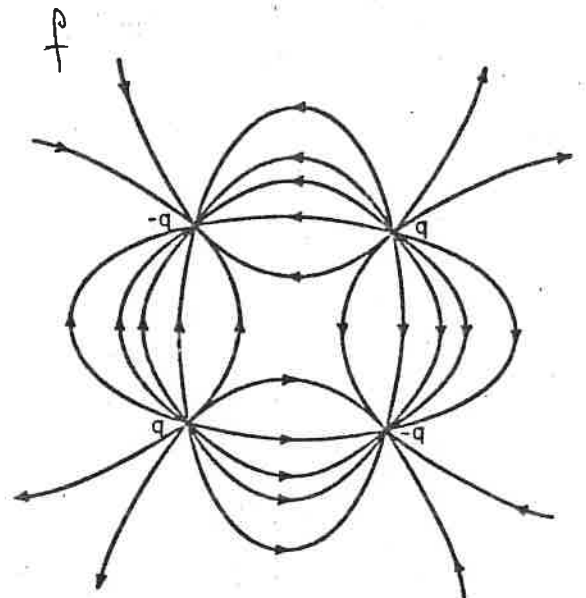
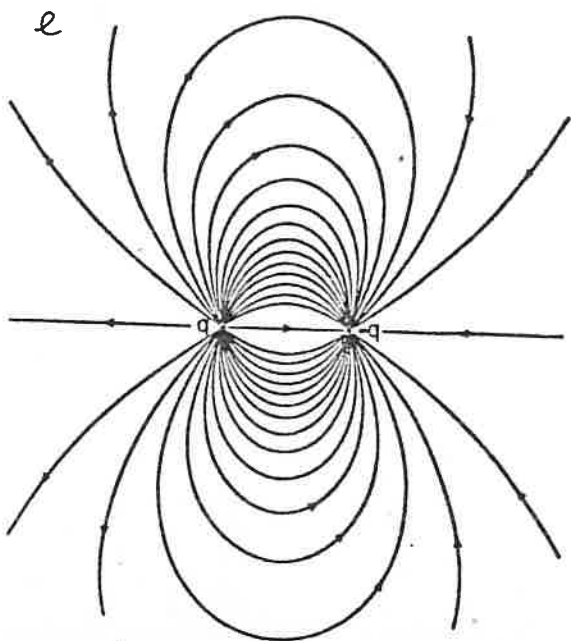
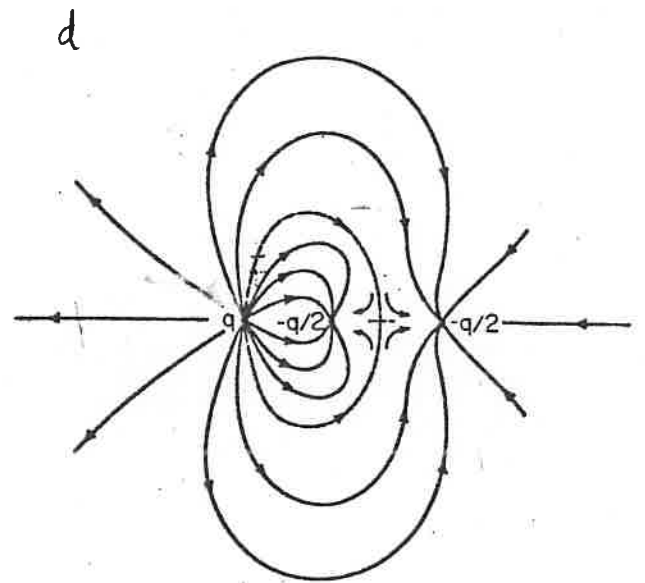
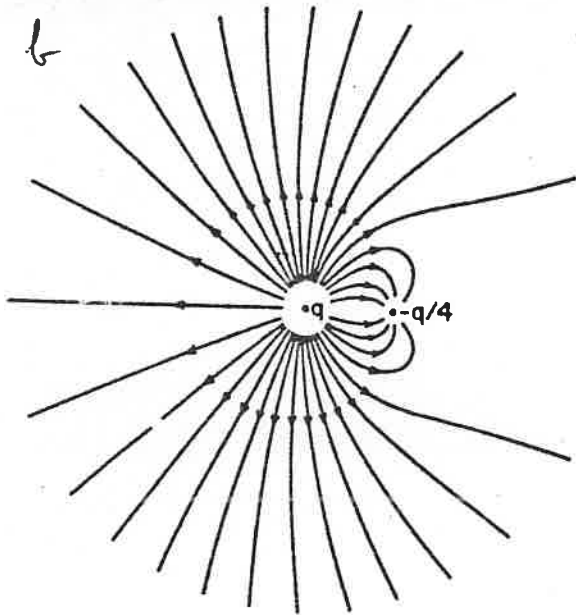
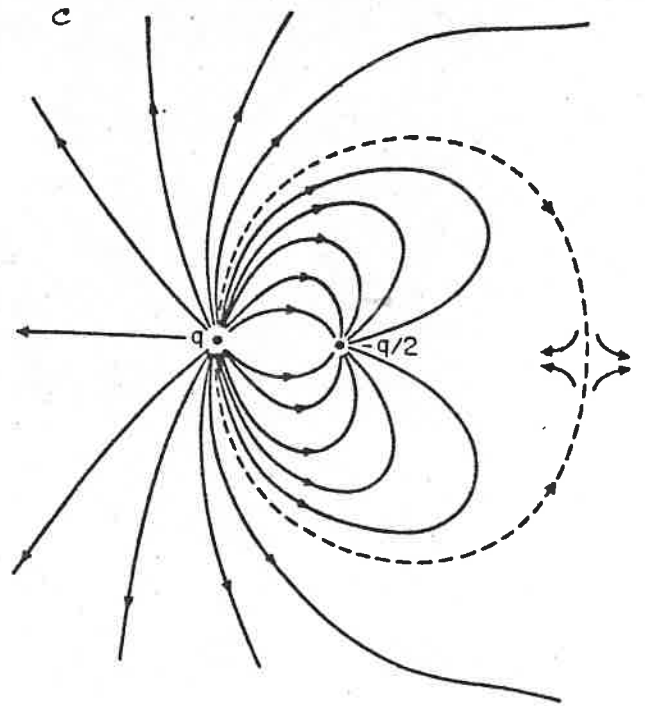
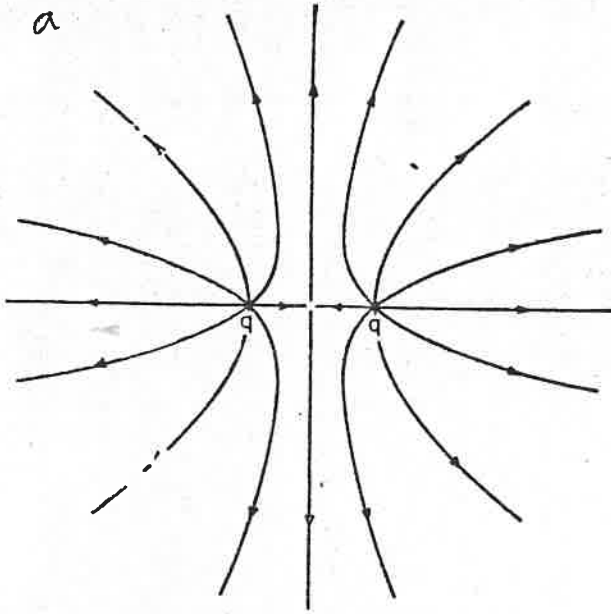
$$(1.26) \quad \vec{E}(\mathcal{P}) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{E}_\alpha(\mathcal{P})$$

Isto resulta da aditividade dos campos devidos a várias fontes, posta em evidência no § 1.3; e vamos ver adiante que esta propriedade permite estender facilmente os resultados anteriores ao estudo do campo elétrico produzido por uma distribuição de cargas pontuais. Combinando (1.10) com (1.26),  $\vec{E}(\mathcal{P})$  assume a expressão

$$(1.26') \quad \vec{E}(\mathcal{P}) = k_0 \sum_{\alpha=1}^N \frac{q_\alpha}{r_{Q_\alpha \mathcal{P}}^2} \text{ vers } \overrightarrow{Q_\alpha \mathcal{P}} \quad \left( r_{Q_\alpha \mathcal{P}} \equiv \overline{Q_\alpha \mathcal{P}} \right)$$

Deve notar-se que a composição dos campos devidos a várias cargas pontuais, descrita por (1.26'), vem, obviamente, destruir a simetria esférica do campo e modificar substancialmente a distribuição radial das linhas de força, características do campo produzido por uma única carga pontual (v. § 2.1). Parece-nos instrutivo a esse respeito observar as figuras das linhas de força do campo produzido por algumas distribuições simples, reproduzidas na Fig. 18 (As linhas tracejadas separam regiões de comportamentos distintos das linhas de força).

Procuramos agora saber que forma vão assumir, para uma distribuição de cargas pontuais, as duas propriedades essenciais do campo elétrico que já analisámos (§§ 2.4 e 2.5) no caso do campo produzido por uma única carga pontual, como notáveis implicações, da lei de Coulomb: a conservação da energia e o teorema de Gauss.



(i) Tomemos a eq. (1.18) que traduz a conservação da energia para o campo de uma única carga pontual. Para cada uma das cargas  $q_\alpha$  é lícito escrever, qualquer que seja a curva fechada  $[c]$ :

$$\oint_{[c]} \vec{E}_\alpha \cdot d\vec{s} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N)$$

Ora, atendendo a que a integração é uma operação linear, se adicionarmos em  $\alpha$  (de 1 a  $N$ ) os  $1^\circ$  membros das eq.<sup>s</sup> precedentes, vem, por (1.26):

$$\sum_{\alpha=1}^N \oint_{[c]} \vec{E}_\alpha \cdot d\vec{s} = \oint_{[c]} \left( \sum_{\alpha=1}^N \vec{E}_\alpha \right) \cdot d\vec{s} = \oint_{[c]} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Portanto, para o campo global, ainda é lícito escrever

$$(1.27) \quad \oint_{[c]} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

qualquer que seja a curva fechada  $[c]$ . E esta equação traduz, na presente situação mais geral, o princípio de conservação da energia.

(ii) Consideremos agora o teorema de Gauss para o campo produzido por uma carga pontual única, sob a forma da afirmação tripartida (1.24). Idêntica afirmação é válida para cada uma das cargas  $q_\alpha$ , qualquer que seja a superfície fechada  $S$ :

$$(\alpha=1, 2, \dots, N) \quad \int_S \vec{E}_\alpha \cdot \vec{n} dS = \begin{cases} q_\alpha / \epsilon_0, & \text{se } Q_\alpha \text{ é interior a } S \\ q_\alpha / 2\epsilon_0, & \text{se } Q_\alpha \text{ assenta sobre } S \\ 0 \text{ (zero),} & \text{se } Q_\alpha \text{ é exterior a } S. \end{cases}$$

Somemos estas equações, sobre  $\alpha$ , de 1 a  $N$ . Da soma dos  $1^\circ$  membros, pela linearidade da integração e por (1.26), resulta o fluxo do campo global, que sai através da superfície fechada  $S$ :  $\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS$ .

No tocante à soma dos  $2^\circ$  membros, pode dizer-se que: cada uma das cargas ( $\alpha'$ ) interiores a  $S$  contribui com uma parcela  $q_{\alpha'} / \epsilon_0$ ; cada uma das cargas eventualmente assentes sobre  $S$  ( $\alpha''$ ) contribui com uma parcela  $1/2 q_{\alpha''} / \epsilon_0$ ; enquanto que as cargas ( $\alpha'''$ ) exteriores a  $S$  não contribuem para a soma. Então, para o campo global, e com qualquer superfície fechada  $S$ , cumpre-se que:

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\substack{\text{(Para todo } Q_{\alpha'} \\ \text{interior a } S)}} Q_{\alpha'} + \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{\substack{\text{(Para todo } Q_{\alpha''} \\ \text{assente sobre } S)}} Q_{\alpha''}.$$

Ou, com notação mais leve, e designando por  $q_{\text{int}}$  a soma das cargas da distribuição que ficam interiores a  $S$  e por  $q_S$  a soma das cargas da distribuição que assentam sobre  $S$ :

$$(1.28) \quad \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{int}} + \frac{1}{2\epsilon_0} q_S.$$

Sob esta forma se exprime, na presente situação mais geral, o teorema de Gauss. Se, em particular, não há cargas assentes sobre  $S$ :

$$(1.28') \quad \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{int}} ;$$

e nós dizemos mais simplesmente: o fluxo do campo eléctrico, <sup>que sai</sup> através de uma superfície fechada  $S$  (sobre a qual não assentam cargas), é proporcional à carga total interior a  $S$ . Transparece assim, de maneira precisa, nesta situação mais geral, o significado físico do fluxo do campo eléctrico através de uma superfície fechada.

As duas propriedades (1.27) e (1.28) são as implicações fundamentais da lei de Coulomb para o campo eléctrico produzido por uma qualquer distribuição de cargas pontuais. Adiante veremos que o conhecimento completo de um campo  $\vec{E}(P)$  se acha intimamente ligado ao conhecimento da circulação de  $\vec{E}$  para toda a curva fechada  $[c]$  e do fluxo de  $\vec{E}$  para toda a superfície fechada  $S$ . Daí, a importância das duas propriedades (1.27) e (1.28), com a ajuda das quais se consegue sempre fazer uma exploração útil do campo, ou mesmo, nalguns casos, aceder à sua determinação prática. De resto, quando passarmos ao estudo das distribuições contínuas de carga eléctrica, teremos ocasião de ver como se baseia sobre estas duas propriedades a exploração do campo, mediante a utilização das noções de rotacional e de divergência, a elas ligadas.

## 4. GRADIANTE DE UM ESCALAR

Torna-se conveniente neste ponto fazer uma interrupção destinada a introduzir o conceito de operador gradiente, as suas propriedades e suas representações. Aproveita-se para aplicar desde logo esse instrumento matemático aos assuntos já tratados; isso, de certo modo, prepara a sua frequente utilização em todo o nosso estudo, daqui por diante.

### 4.1 — Definição e significado físico do gradiente.

Consideremos um ponto  $Q(a, b, c)$  na região do espaço onde se acha definido o escalar função de ponto  $V(P) \equiv V(x, y, z)$ , função que suponhamos unívoca, finita e contínua nessa região. Tomemos um eixo genérico, passando por  $Q$ ; seja  $\vec{e}_\alpha$  o vector unitário da sua orientação e seja  $\alpha$  a variável real que representa as distâncias marcadas, sobre o eixo, a partir de  $Q$ , e afectadas de sinal (positivo no sentido de  $\vec{e}_\alpha$ ). O escalar  $V(x, y, z)$  assume ao longo desse eixo valores que podemos representar por uma função unívoca, finita e contínua, de uma só variável,  $v(\alpha)$ . Suponhamos que  $v(\alpha)$  admite derivada para  $\alpha=0$  (i.e., no ponto  $Q$ ). Esta derivada,  $(\frac{dv}{d\alpha})_{\alpha=0}$ , assim genericamente caracterizada em correspondência com o eixo genérico de orientação  $\vec{e}_\alpha$  (representemo-la por  $G(\vec{e}_\alpha)$ ), é a derivada dirigida de  $V(P)$  segundo  $\vec{e}_\alpha$ , no ponto  $Q$ . Também pode ser designada por  $(\frac{\partial V}{\partial \alpha})_Q$ : trata-se, com efeito, da derivada parcial de  $V$  em ordem a uma coordenada  $\alpha$ , no ponto  $Q$ . O significado físico da derivada dirigida é imediato: ela traduz o valor que tem, no ponto  $Q$ , a taxa de variação do escalar  $V$  por unidade de comprimento, medida por um observador que se desloca, a partir de  $Q$ , ao longo e no sentido de um eixo de orientação  $\vec{e}_\alpha$ .

É evidente que, quando se passa ao eixo de orientação simétrica, se obtém um valor simétrico para a derivada dirigida:  $G(-\vec{e}_\alpha) = -G(\vec{e}_\alpha)$ . Assim, o conjunto das derivadas dirigidas no ponto  $Q$ ,  $(G(\vec{e}_\alpha))$ , se não se reduz ocasionalmente ao elemento nulo, contém necessariamente um sub-conjunto de elementos positivos. Suponhamos agora que o conjunto das derivadas



dirigidas no ponto  $Q$  admite um máximo (forçosamente não-negativo; nulo, só quando o conjunto se reduz ao elemento nulo); e seja  $\vec{e}_v$  a orientação do eixo para o qual o máximo é atingido:  $\text{Máx}(G(\vec{e}_v)) = G(\vec{e}_v)$ . Para muitos tipos de funções  $V(x, y, z)$ , este máximo existe e é finito para cada ponto  $Q$ , em geral; e, quando não nulo, é atingido para uma única orientação  $\vec{e}_v$ . Estamos então em condições de definir o gradiente do escalar  $V$  no ponto  $Q$ , designado por  $\text{grad}_Q V$ : é um vector cujo módulo é o máximo valor do conjunto das derivadas dirigidas de  $V$  no ponto  $Q$ , ou seja  $G(\vec{e}_v) \equiv \left(\frac{dV}{dv}\right)_{v=0} \equiv \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)_Q$ , e cuja orientação (directão e sentido) é aquela para a qual se atinge esse valor máximo. Pode escrever-se:

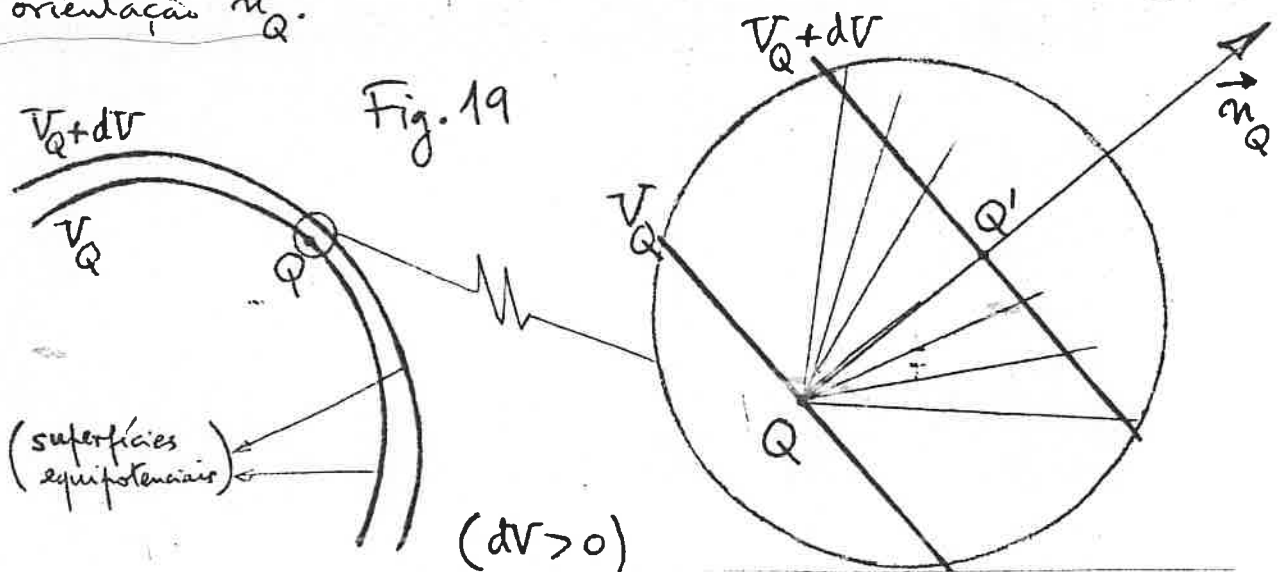
$$(1.29) \quad \text{grad}_Q V \equiv G(\vec{e}_v) \vec{e}_v \equiv \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)_Q \vec{e}_v.$$

Quanto ao significado físico do vector assim definido, que decorre directamente do de derivada dirigida, podemos afirmar que o gradiente de um escalar  $V$  no ponto  $Q$  representa para um observador que pretenda deslocar-se a partir de  $Q$ : em módulo, a máxima taxa de variação do escalar que o observador detecta por unidade de comprimento de percurso, a partir de  $Q$  e para um ponto na sua vizinhança próxima; em direcção e sentido, a orientação segundo a qual o observador se deve deslocar, a partir de  $Q$ , para obter essa máxima taxa de variação.

#### 4.2 — Relações entre $\text{grad } V$ e as equipotenciais de $V$

Consideremos as superfícies equipotenciais de  $V$  na vizinhança do ponto  $Q$ . Em primeiro lugar, é evidente que  $\text{grad}_Q V$  tem o sentido das equipotenciais crescentes. Além disso, é fácil mostrar que  $\text{grad}_Q V$  se dirige segundo a normal em  $Q$  à equipotencial que passa por  $Q$ . Tomemos para esse efeito a equipotencial  $V_Q$ , que passa por  $Q$ , e uma equipotencial infinitamente vizinha  $V_Q + dV$  para o lado das equipotenciais crescentes ( $dV > 0$ ); na vizinhança de  $Q$ , as duas equipotenciais confundem-se com os respectivos planos tangentes,

em  $Q$  e em  $Q'$ , paralelos entre si (v. Fig. 19 — a normal à equipotencial  $V_Q$  em  $Q$  intersecta a equipotencial  $V_Q + dV$  no ponto  $Q'$ ). Nestas condições, a Geometria ensina que o percurso mínimo, de entre os possíveis para se atingir, a partir de  $Q$ , a equipotencial  $V_Q + dV$  — portanto, para se obter uma mesma variação  $dV (> 0)$  do escalar  $V$ , é precisamente o percurso segundo a normal em  $Q$ . (de orientação  $\vec{n}_Q$ ), de  $Q$  para  $Q'$ ; mas, com uma mesma variação, positiva, de  $V$ , é ao percurso mínimo que corresponde a máxima taxa de variação por unidade de comprimento de percurso. O vector  $\text{grad}_Q V$  tem pois a orientação  $\vec{n}_Q$ .



Finalmente, e em consequência, o módulo de  $\text{grad}_Q V$  vem dado por  $(\frac{\partial V}{\partial n})_Q$ , se designarmos por  $n$  a variável real associada às distâncias sobre o eixo normal  $\vec{n}_Q$ . Pode escrever-se, como uma versão de (1.29), enriquecida de conteúdo, a seguinte igualdade

$$(1.30) \quad \text{grad}_Q V = \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_Q \vec{n}_Q$$

que sintetiza as relações de  $\text{grad}_Q V$  com as equipotenciais de  $V$ .

Pode dizer-se que o operador gradiente, quando aplicável em todos os pontos da região do espaço em que  $V(P)$  é definida, transforma o campo escalar  $V(P)$  no campo vectorial  $\text{grad}_P V$  (vector função de ponto); e existe entre os dois campos uma conexão geométrica que importa realçar. Com efeito, por (1.30), as linhas de força do campo vectorial  $\text{grad}_P V$  são as trajectórias ortogonais da família de

superfícies equipotenciais do campo escalar  $V(P)$ .

### 4.3 — Circulação de um gradiente.

Continuando a pensar no campo vectorial  $\text{grad}_P V$ , atrás referido, consideremos agora a sua circulação elementar para um deslocamento qualquer  $d\vec{P}$ , do ponto  $P$  para  $P+d\vec{P}$ :  $d\vec{P} \cdot \text{grad}_P V$ . Se utilizarmos a igualdade (1.30), essa circulação resulta igual a  $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_P \vec{n}_P \cdot d\vec{P}$  e a Fig. 20 mostra que isso vale  $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_P dn$ , ou seja,  $\left(\frac{dV}{dn}\right)_{n=0} dn$ , pelo § 4.1;

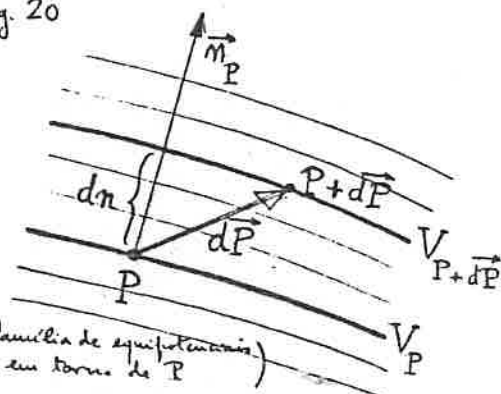
ora esta última expressão identifica-se com a variação de  $V$  correspondente a  $dn$  sobre a normal  $\vec{n}_P$ , variação esta que coincide com a correspondente a  $d\vec{P}$ ,  $dV = V(P+d\vec{P}) - V(P)$ .

Tem-se, portanto:

$$(1.31) \quad d\vec{P} \cdot \text{grad}_P V = dV$$

para qualquer deslocamento elementar  $d\vec{P}$  a partir de  $P$ , sendo  $dV$  a correspondente variação do escalar  $V$ . (Obtém-se uma verificação particular imediata para um deslocamento  $d\vec{P}$  sobre a equipotencial  $V_P$ :  $dV=0$ ; e  $\text{grad}_P V (\propto \vec{n}_P) \perp d\vec{P}$ ). Do ponto de vista matemático, a importância desta propriedade é acrescida pelo facto de que ela implica, reciprocamente, a definição de gradiente dada no § 4.1; uma tal equivalência justifica que alguns autores façam mesmo da identidade (1.31) uma definição intrínseca do operador gradiente. Do ponto de vista físico, o grande interesse por esta propriedade provém do facto de que o conhecimento de  $\text{grad } U$  permite encontrar mediante a simples circulação, a variação de  $U$  para qualquer deslocamento elementar do observador. Passando agora à circulação ao longo de um percurso finito  $\overline{P_1 P_2}$  pode repetir-se aqui o cálculo já efectuado na eq. (1.16) do § 2.2, vindo:

Fig. 20



$$(1.32) \quad \int_{\widehat{P_1 P_2}} d\vec{P} \cdot \text{grad}_{\vec{P}} V = \int_{\widehat{P_1 P_2}} dV = V_{P_2} - V_{P_1}.$$

E para a circulação ao longo de qualquer curva fechada  $[C]$  (circulação fechada) tem-se

$$(1.33) \quad \oint_{[C]} d\vec{P} \cdot \text{grad}_{\vec{P}} V = 0$$

Por força de (1.33), se o campo vectorial  $\vec{A}(\vec{P})$  se pode exprimir como gradiente de um escalar  $\phi(\vec{P})$  ( $\vec{A} = \text{grad} \phi$ ), então tem-se  $\oint_{[C]} \vec{A} \cdot d\vec{s} = 0$  com qq. curva fechada  $[C]$ . Mostra-se que, reciprocamente, sempre que  $\oint_{[C]} \vec{A} \cdot d\vec{s} = 0$  se cumpre com qq. curva fechada  $[C]$ , existe um campo escalar  $\phi(\vec{P})$  do qual  $\vec{A}(\vec{P})$  deriva pela operação gradiente:  $\vec{A} = \text{grad} \phi$ .

#### 4.4 — Representação cartesiana de $\text{grad} V$ .

A propriedade fundamental (1.31) permite encontrar facilmente qualquer derivada dirigida de  $V(\vec{P})$  no ponto  $Q$ , desde que se conheça  $\text{grad}_Q V$ . Seja genericamente a derivada dirigida segundo a orientação  $\vec{e}_\alpha$ ,  $G(\vec{e}_\alpha)$ . Tomemos um deslocamento infinitamente pequeno  $d\vec{Q} = d\alpha \vec{e}_\alpha$  ao longo do eixo  $\vec{e}_\alpha$ . Então, por (1.31), a variação de  $V$  correspondente a  $d\vec{Q}$  é dada por  $d\vec{Q} \cdot \text{grad}_Q V$  ou seja  $(\vec{e}_\alpha \cdot \text{grad}_Q V) d\alpha$ ; mas a mesma variação também se exprime como  $dV(\alpha) = \left(\frac{dV}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha = G(\vec{e}_\alpha) d\alpha = \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right)_Q d\alpha$ . Donde resulta:

$$(1.34) \quad G(\vec{e}_\alpha) = \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right)_Q = \vec{e}_\alpha \cdot \text{grad}_Q V,$$

o que quer dizer que a projecção do vector  $\text{grad}_Q V$  sobre um eixo — a sua componente segundo esse eixo — iguala a derivada parcial, no ponto  $Q$ , em ordem à coordenada  $\alpha$  definida ao longo e no sentido do eixo. Sendo assim, as componentes cartesianas de  $\text{grad}_{\vec{P}} V$ , relativamente a um sistema de eixos  $[Oxyz]$  são respectivamente  $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_P$ ,  $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_P$  e  $\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_P$ .

Pode escrever-se

$$(1.35) \quad \text{grad}_P V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_P \vec{e}_x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_P \vec{e}_y + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_P \vec{e}_z.$$

Note-se que a representação cartesiana de  $\text{grad}_P V$ , a que assim chegamos, é perfeitamente coerente com a conhecida expressão da diferencial da função  $V(x, y, z)$  no ponto  $P$ , dada por:

$$(1.36) \quad dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_P dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_P dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_P dz$$

e que pode obter-se a partir de (1.31) combinada com (1.35), sendo  $dx, dy, dz$  (diferenciais, arbitrárias e independentes entre si, das variáveis  $x, y, z$  de que depende  $V$ ) as componentes cartesianas do vector deslocamento elementar  $d\vec{P}$  em (1.31).

Se adoptarmos como princípio convencional que o "produto" (simbólico) do operador diferenciante  $\frac{\partial}{\partial x}$  por uma quantidade  $U$  (escalar, função de ponto, por exemplo) significa a derivada parcial  $\frac{\partial U}{\partial x}$ , então a eq. (1.35) pode ser re-escrita simbolicamente como

$$(1.35') \quad \text{grad } U = \left( \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) U$$

ou seja, em termos de um vector simbólico cujas componentes cartesianas são  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$  e  $\frac{\partial}{\partial z}$  e que é designado por  $\vec{\nabla}$ :

$$(1.37) \quad \vec{\nabla} \equiv \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

O símbolo  $\nabla$  chama-se "nabla" e  $\vec{\nabla}$  é o vector-nabla ou operador vectorial nabla. Segundo o mesmo princípio convencional acima introduzido, a eq. (1.35') traduz que o gradiente de  $U$  pode obter-se pelo "produto" (simbólico) do escalar  $U$  pelo vector-nabla:

$$(1.35'') \quad \text{grad } U \equiv \vec{\nabla} U.$$

#### 4.5 — O gradiente como operador linear.

A partir da definição de  $\text{grad } V$  (§ 4.1), ou da sua propriedade fundamental (1.31), e tendo em conta a lineari-

dade das operações de diferenciação, mostra-se facilmente que o gradiente é um operador linear, i.e., um operador que satisfaz em todo o ponto as duas seguintes relações:

$$(1.38) \quad \begin{cases} \text{grad}(U+V) = \text{grad} U + \text{grad} V \\ \text{grad}(\lambda U) = \lambda \text{grad} U \end{cases}$$

quaisquer que sejam  $U$  e  $V$ , funções de ponto admitindo gradiente, e qualquer que seja a constante  $\lambda$ .

#### 4.6 — Gradiente de funções de funções

Consideremos o escalar função de ponto  $V \equiv \varphi(P)$  e seja  $U$  um escalar função de  $V$ ,  $U = f(V)$ ; então  $U$  é também função de ponto  $U \equiv f[\varphi(P)] \equiv \psi(P)$ . Interessa em muitas situações saber como se exprime  $\text{grad} U$  em termos de  $\text{grad} V$ , suposta conhecida a função  $U = f(V)$ . Para isso, escrevamos (1.31) para ambas as funções de ponto  $U$  e  $V$ , e relativamente ao mesmo deslocamento  $d\vec{P}$ , arbitrário:  $d\vec{P} \cdot \text{grad} V = dV$ ;  $d\vec{P} \cdot \text{grad} U = dU$ . Mas sabe-se que  $dU = \frac{dU}{dV} dV = f'(V) dV$  (diferencial da função de uma variável  $U = f(V)$ ). Então

$$d\vec{P} \cdot \text{grad} U = \frac{dU}{dV} dV = \frac{dU}{dV} d\vec{P} \cdot \text{grad} V$$

e, porque  $d\vec{P}$  é arbitrário, resulta:

$$(1.39) \quad \text{grad} U = \frac{dU}{dV} \text{grad} V$$

Vê-se, por (1.39), que, para uma função de funções, o comportamento do operador gradiente é formalmente idêntico ao da operação de diferenciação, linhas acima recordadas.

#### 4.7 — Gradiente do escalar distância

A distância de um ponto  $P(x, y, z)$  à origem do referencial,  $O$ ,  $r \equiv |\vec{OP}|$ , é um escalar função de ponto  $r(P)$ , dos mais simples e dos que mais frequentemente ocorrem no nosso estudo. Importa, desde já, determinar  $\text{grad}_P r$ . Isso pode fazer-se por vários

caminhos; utilizemos a representação cartesiana (1.35). Visto que se tem  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , resulta  $(\frac{\partial r}{\partial x})_P = \frac{x}{r}$ , etc.; portanto,

$$\text{grad}_P r = \frac{x}{r} \vec{e}_x + \frac{y}{r} \vec{e}_y + \frac{z}{r} \vec{e}_z, \text{ ou seja:}$$

$$(1.40) \quad \text{grad}_P r = \frac{\vec{r}}{r} = \text{vers } \vec{OP} \quad (\vec{r} \equiv \vec{OP})$$

Para toda a função de ponto  $U(P)$  que seja uma função exclusiva da distância  $r \equiv |\vec{OP}|$ ,  $U = U(r)$ , suposta conhecida, torna-se fácil encontrar  $\text{grad}_P U$ , por aplicação de (1.39) e (1.40):

$$(1.41) \quad \text{grad}_P U(r) = \frac{dU}{dr} \frac{\vec{r}}{r} \quad (\vec{r} \equiv \vec{OP})$$

Exemplo de aplicação de (1.41):  $\text{grad}_P \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$ .

Note-se que os resultados (1.40) e (1.41) poderiam facilmente ser obtidos, independentemente, mediante as conclusões do §4.2 e constatando que as equipotenciais são, em ambos os casos, superfícies esféricas centradas em  $O$ .

A consideração da distância entre dois quaisquer pontos  $P$  e  $Q$ ,  $r_{PQ} \equiv |\vec{PQ}|$ , e o facto de se tratar então de um escalar que tanto é uma função de  $P$  como uma função de  $Q$ , leva naturalmente à determinação de dois gradientes:  $\text{grad}_P r_{PQ}$  e  $\text{grad}_Q r_{PQ}$ .

Sendo  $r_{PQ}^2 = (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2$  e reparando que

$$\frac{\partial r_{PQ}}{\partial x_P} = \frac{x_P - x_Q}{r_{PQ}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial r_{PQ}}{\partial x_Q} = -\frac{x_P - x_Q}{r_{PQ}}, \text{ etc.,}$$

mostra-se que os dois gradientes são simétricos:

$$(1.42) \quad \text{grad}_P r_{PQ} = -\text{grad}_Q r_{PQ}$$

Do mesmo modo, são simétricos os dois gradientes de uma qualquer função exclusiva da distância  $r_{PQ}$ ,  $U = U(r_{PQ})$ :

$$(1.43) \quad \text{grad}_P U(r_{PQ}) = -\text{grad}_Q U(r_{PQ})$$

## 4.8 — Utilização do operador gradiente para obter a variação de uma grandeza vectorial

No § 4.3 pôs-se em evidência que o conhecimento de  $\text{grad } U$  permite encontrar, mediante a simples circulação elementar (1.31), a variação  $dU$  correspondente a um qualquer deslocamento do observador,  $d\vec{P}$ . Dado um campo vectorial função de ponto,  $\vec{B}(\mathbf{P})$ , vamos mostrar que o mesmo operador gradiente presta igualmente bons serviços na determinação da variação  $d\vec{B} = \vec{B}(\mathbf{P} + d\vec{P}) - \vec{B}(\mathbf{P})$  correspondente a um qualquer  $d\vec{P}$ . Na verdade, recorrendo à decomposição cartesiana de  $\vec{B}$ ,  $\vec{B} = \sum_{\gamma} B_{\gamma} \vec{e}_{\gamma}$  ( $\gamma = x, y, z$ ), sendo cada componente  $B_{\gamma}$  uma função de ponto, obtém-se evidentemente  $d\vec{B} = \sum_{\gamma} (dB_{\gamma}) \vec{e}_{\gamma}$  com  $dB_{\gamma} = d\vec{P} \cdot \text{grad}_{\mathbf{P}} B_{\gamma}$  por (1.31) e portanto:

$$(1.44) \quad d\vec{B} = \sum_{\gamma} (d\vec{P} \cdot \text{grad}_{\mathbf{P}} B_{\gamma}) \vec{e}_{\gamma}$$

É usual escrever-se, em vez de (1.44), mas com o mesmo significado a seguinte expressão deste resultado:

$$(1.44') \quad d\vec{B} = (d\vec{P} \cdot \text{grad}_{\mathbf{P}}) \vec{B}$$

entendendo-se aqui que o operador  $d\vec{P} \cdot \text{grad}_{\mathbf{P}}$  actua sobre cada uma das componentes de  $\vec{B}$  para fornecer a componente homologa de  $d\vec{B}$ . Estas expressões serão também utilizadas adiante.

## 4.9 — Aplicações do operador gradiente ao campo eléctrico.

4.9.1 — Campo produzido por uma carga pontual — A partir da expressão (1.11) obtida no § 2.2 para o campo eléctrico de uma carga pontual e tendo em conta (1.41), segue-se imediatamente que:

$$(1.45) \quad \vec{E}_{\mathbf{P}} = -\text{grad}_{\mathbf{P}} V$$

Passaremos a escrever (1.45), de preferência a (1.11), com as mesmas implicações. E diremos: o campo eléctrico de uma carga pontual deriva de um potencial escalar  $V$  pela operação  $-\text{grad } V$ .



(Recorde-se que este potencial  $V$  é dado pela eq. (1.12) do § 2.2). Facilmente se reconhecem nas propriedades de  $\vec{E}_P$  traduzidas por (1.14) e (1.17) do § 2.2 e por (1.18) do § 2.4 as propriedades estabelecidas no § 4.3 para todo o campo vectorial que se possa exprimir como  $-\text{grad} V$ . Do mesmo modo, as relações de  $\vec{E}_P$  com as equipotenciais de  $V$ , discutidas no § 2.3, constituem nada mais que uma ocorrência particular das conclusões do § 4.2.

#### 4.9.2 — Campo produzido por uma distribuição de cargas pontuais.

— Dado que para cada uma das cargas da distribuição o campo,  $\vec{E}_\alpha$ , cumpre a relação (1.45), com  $V_\alpha$  dado por (1.12) do § 2.2, de modo geral, entã tem-se ( $\alpha = 1, \dots, N$ ):

$$\vec{E}_\alpha = -\text{grad} V_\alpha \quad \text{com} \quad V_\alpha = k_0 \frac{q_\alpha}{r_{Q_\alpha P}} + \text{const.}$$

(em que se usam as notações do § 3. e  $r_{Q_\alpha P} \equiv |\vec{Q}_\alpha P|$ ). Se tivermos em conta a aditividade dos campos (relação (1.26) do § 3.) e o carácter linear do operador gradiente, vem para o campo produzido por toda a distribuição

$$(1.46) \quad \vec{E} = -\text{grad} V, \quad \text{com} \quad V = \sum_{\alpha=1}^N V_\alpha.$$

Cumpre-se portanto ainda a relação (1.45) para o campo global, com um potencial global que se obtém também por aditividade dos potenciais  $V_\alpha$  (aqui, mediante uma soma algébrica de escalares).

Se, em particular, se adopta para todos os potenciais  $V_\alpha$  a condição  $V_\infty = 0$ , a mesma condição respeitara o potencial global  $V$ , com o significado físico preciso daí decorrente. Este potencial global, nulo no infinito, será entã definido por:

$$(1.47) \quad V(P) = k_0 \sum_{\alpha=1}^N \frac{q_\alpha}{r_{Q_\alpha P}} \quad (r_{Q_\alpha P} \equiv |\vec{Q}_\alpha P|).$$

A Fig 21 ilustra a conexão geométrica (determinada pela relação (1.45)) entre as superfícies equipotenciais de  $V$  (representadas

pelas secções no plano do papel, a tracejado) e as linhas de força de  $\vec{E}$  (a cheio), para duas muito simples distribuições de cargas pontuais: a — sistema  $+q, +q$ ; b — sistema  $-q, +q$ . (As linhas de força de  $\vec{E}$  são as trajetórias ortogonais das equipotenciais).

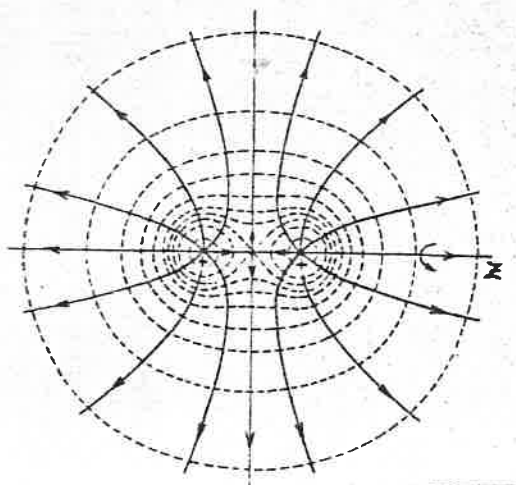


Fig 21-a

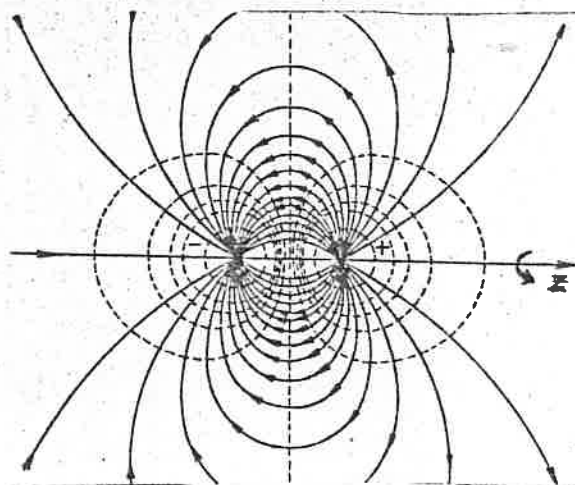


Fig 21-b



## 5. DIPOLO ELÉCTRICO

De entre as mais simples distribuições de cargas pontuais, sobressaem, pelo seu interesse, o dipolo eléctrico. Designa-se assim o sistema de duas cargas pontuais,  $-e$  e  $+e$ , com o mesmo módulo e sinal contrário, colocadas a uma distância muito pequena uma da outra. (Na Fig. 22, as cargas estão localizadas nos pontos A e B, respectivamente). Vamos supor, mais precisamente, que a distância  $\overline{AB}$ , dimensão geométrica do sistema, é muito menor que a distância  $\overline{AP}$  a que o observador, em P, se encontra do sistema:

$$(1.48) \quad \overline{AB} \ll \overline{AP}$$

O campo criado pelo dipolo eléctrico pode calcular-se começando por achar o potencial que lhe está associado e utilizando depois a operação  $\vec{E} = -\text{grad}V$ . Ora, o potencial 'produzido' pelo dipolo (sistema  $(-e)$  em A;  $(+e)$  em B) para um observador em P,  $V_P^{\text{dip.}}$ , obtém-se pela soma algébrica dos potenciais 'produzidos' no mesmo ponto P por cada uma das cargas do sistema (tendo em conta a aditividade dos potenciais, já justificada

no § 4.9.2); vem portanto:  $V_P^{dip} = V_P^{(+e)} + V_P^{(-e)}$ .

$$\text{Mas } V_P^{(-e)} = \frac{k_0(-e)}{r}$$

$$\text{ou } V_P^{(-e)} = -\frac{k_0(+e)}{r'_+}$$

$$\text{ou } V_P^{(-e)} = -V_{P'}^{(+e)}$$

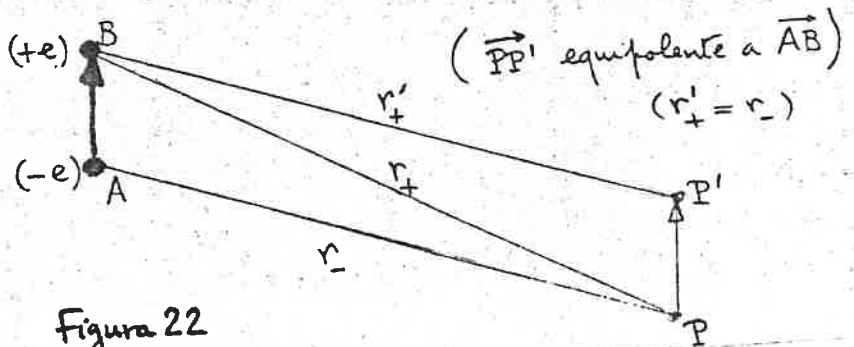


Figura 22

como a Fig. 22 ajuda a ver ( $\vec{PP}'$ , vector-deslocamento auxiliar, foi construído equipolente a  $\vec{AB}$ ; donde  $r'_+ = r_-$ ). Então:

$$V_P^{dip} = V_P^{(+e)} - V_{P'}^{(+e)} = -\left(V_{P'}^{(+e)} - V_P^{(+e)}\right)$$

e sendo  $\vec{PP}'$  um deslocamento muito pequeno pela condição (1.48), pode tomar-se como infinitamente pequeno; donde resulta:

$$V_{P'}^{(+e)} - V_P^{(+e)} = \vec{PP}' \cdot \text{grad}_P V^{(+e)}$$

por aplicação de (1.31). Ou seja, dentro da mesma aproximação ( $r_+ \approx r_-$ ; pode escrever-se simplesmente  $r$  como a distância de  $\vec{AB}$  a  $P$ ):  $V_P^{dip} = -k_0 \left( e \vec{AB} \cdot \text{grad}_P \frac{1}{r} \right)$ .

Se designarmos por  $\vec{p}$  o produto  $e \vec{AB}$  — momento do dipolo — (grandeza que associa deste modo as características do sistema:  $e$ , módulo comum às duas cargas;  $\vec{AB}$  vector-distância que as une, da negativa para a positiva, por convenção) tem-se enfim:

$$(1.49) \quad V_P^{dip} = -k_0 \vec{p} \cdot \text{grad}_P \frac{1}{r} \quad \left( \text{com } k_0 \frac{e}{r} \cdot \text{grad}_P \right)$$

Passemos agora os cálculos do campo. Tem-se:

$$\vec{E}_P^{dip} = -\text{grad}_P \left( -k_0 \vec{p} \cdot \text{grad}_P \frac{1}{r} \right),$$

expressão cujo desenvolvimento directo, pela representação cartesiana de gradiente, conduz a:

Convenção para o sinal do momento dipolar

Mais simples

$$(1.50) \quad \vec{E}_P^{\text{dip.}} = k_0 \left[ \frac{3}{r^5} (\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right]$$

O mesmo resultado pode ser obtido por uma outra via, utilizando coordenadas a que melhor se adapta a simetria do campo. Seja o dipolo de momento  $\vec{p}$  localizado em  $O$  (v. Fig. 23). Se designarmos por  $\theta$  o ângulo de  $\vec{p}$  com  $\vec{OP}$  ( $P$ , localização do observador) segue-se de (1.49):

$$(1.49') \quad V_P^{\text{dip.}} = k_0 \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

( $p = |\vec{p}|$ ) — expressões de  $V_P^{\text{dip.}}$  nas coordenadas esféricas que se representam sobre a Fig. 23:

$P \equiv P(r, \theta, \varphi)$  (o eixo polar ( $zz$ ) orienta-se segundo  $\vec{p}$ ).

Note-se desde logo que a independência em  $\varphi$  patente em (1.49') reflecte a simetria cilíndrica do campo, em torno do eixo ( $zz$ ), ou seja, em torno de  $\vec{p}$ , como poderia prever-se. Basta agora conhecer as componentes do operador gradiente em coordenadas esféricas (puro problema de cálculo diferencial), a saber:

$$(\text{grad } V)_r = \frac{\partial V}{\partial r}; \quad (\text{grad } V)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}; \quad (\text{grad } V)_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

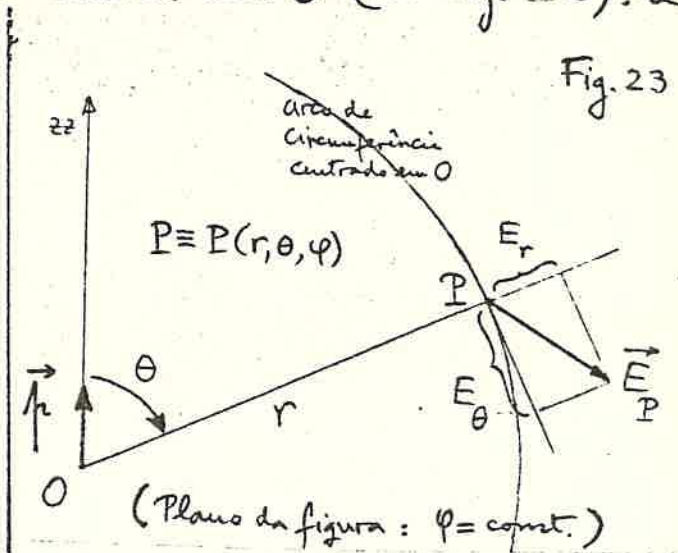
para extrair de (1.49') as componentes do campo eléctrico criado pelo dipolo de momento  $\vec{p}$ , localizado em  $O$ , para um observador localizado em  $P(r, \theta, \varphi)$ :

$$(1.51) \quad E_r^{\text{dip.}} = \frac{2k_0 p \cos \theta}{r^3}; \quad E_\theta^{\text{dip.}} = \frac{k_0 p \sin \theta}{r^3}; \quad E_\varphi^{\text{dip.}} = 0$$

A partir de (1.51), a expressão de  $\vec{E}^{\text{dip.}}$  reconstitui-se como

$$(1.50') \quad \vec{E}^{\text{dip.}} = E_r^{\text{dip.}} \vec{e}_r + E_\theta^{\text{dip.}} \vec{e}_\theta$$

utilizando os vectores unitários  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$  correspondentes às



coordenadas esféricas  $r, \theta, \varphi$  ( $\vec{e}_r \equiv \text{vers } \vec{OP}$ ;  $\vec{e}_\theta$ , vector unitário da tangente em  $P$  à circunferência centrada em  $O$  no plano da figura, com o sentido dos  $\theta$  crescentes;  $\vec{e}_\varphi$ , vector unitário da normal ao plano da figura, para o fundo). É fácil verificar a equivalência entre (1.50) e (1.50'). O resultado (1.51) é susceptível de dois comentários: 1) O anulamento da componente em  $\varphi$  traduz o facto de que o campo criado pelo dipolo jaz no plano definido pelas suas duas cargas pontuais e pelo ponto de observação (ou por  $\vec{f}$  e  $P$ : plano da figura). Isto comprova-se por composição directa dos campos produzidos pelas duas cargas.

2) A independência de  $E_r^{\text{dip}}$  e  $E_\theta^{\text{dip}}$  relativamente a  $\varphi$ , é mais um reflexo da simetria cilíndrica do campo em torno do eixo que passa por  $\vec{f}$ ; basta observar-se o que se passa num hemiplano partindo desse eixo, para dispor do comportamento do campo em todo o espaço — por revolução em torno do eixo. A

Figura 24 ilustra bem todas estas considerações (dipolo orientado segundo o eixo dos  $zz$ ; linhas de força do campo representadas a cheio; secções das superfícies equipotenciais representadas a tracejado) e mostra mais uma vez as linhas de força como trajectórias ortogonais das equipotenciais em conformidade com  $\vec{E} = -\text{grad}V$ .

Note-se por fim que, diferentemente

do que acontece com o campo de uma carga pontual, o módulo do campo produzido por um dipolo (bem como qualquer uma das componentes do campo), como se vê por (1.50) ou por (1.51), decrece com a distância,  $r$ , conforme o inverso do cubo; revela-se assim que o dipolo tem uma acção de mais curto alcance que uma carga — conclusão facilmente interpretável pelo efeito de compensação das acções individuais das duas cargas.

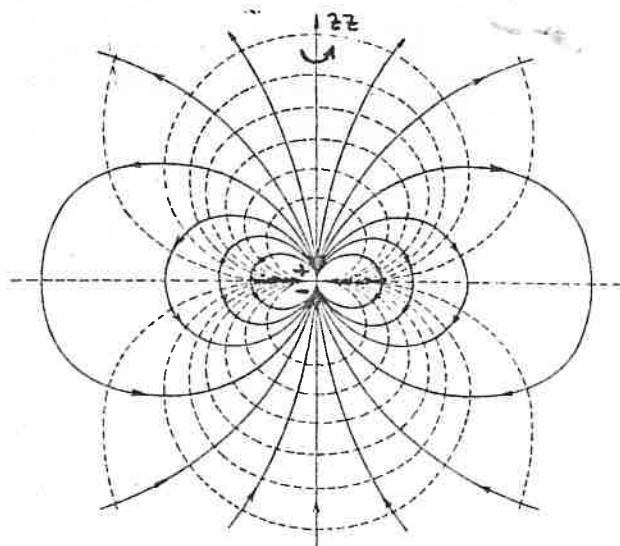


Figura 24

## 5-A. CAMPO PRODUZIDO POR UMA DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS A GRANDE DISTÂNCIA DO OBSERVADOR

### 5-A.1 — Desenvolvimento multipolar do potencial

Consideremos uma distribuição de cargas pontuais  $q_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) localizadas nos pontos  $O_i (x_i, y_i, z_i)$  numa região confinada do espaço com dimensões muito pequenas em face da distância a que se encontra o observador, em  $P(x, y, z)$ . Se for  $O$  um ponto arbitrário interior a essa região, tomado para origem das coordenadas, deve pois cumprir-se a condição genérica

$$(1.48-A) \quad |\vec{OO}_i| \ll |\vec{OP}| \quad (q_i \text{ } \underline{i})$$

O potencial criado pela distribuição vale, no ponto  $P$ :

$$(1.49-A) \quad V_P = k_0 \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{O}_i P|}$$

Ora a condição (1.48-A) sugere que se dê a cada uma das funções

$$1/|\vec{O}_i P| = [(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2]^{-1/2} = f(x_i, y_i, z_i)$$

o desenvolvimento de Taylor em torno da origem  $O(0,0,0)$ :

$$(1.50-A) \quad f(x_i, y_i, z_i) = f(0,0,0) + \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \right)_{0,0,0} \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_i \partial \beta_i} \right)_{0,0,0} \alpha_i \beta_i + \dots$$

O 1º termo dá  $1/r$ , com  $r = |\vec{OP}|$ . O 2º termo, visto que

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \right)_{0,0,0} = \left( -\frac{1}{|\vec{O}_i P|^2} \frac{\alpha_i - \alpha}{|\vec{O}_i P|} \right)_{0,0,0} = \frac{1}{r^2} \frac{\alpha}{r} \quad (r = |\vec{OP}|),$$

resulta

$$\frac{1}{r^2} \text{grad}_P r \cdot \vec{OO}_i$$

O potencial  $V_P$  fica portanto a poder ser calculado mediante um desenvolvimento que resulta de introduzir (1.50-A) em (1.49-A). Aproveitadas já as expressões que acabámos de encontrar para os dois primeiros termos de (1.50-A), teremos assim:

$$V_P = k_0 \left\{ \frac{1}{r} \left( \sum_{i=1}^N e_i \right) + \frac{1}{r^2} \text{grad}_P r \cdot \left( \sum_{i=1}^N e_i \vec{OO}_i \right) + \dots \right\} \quad (1.51-A)$$

Dado que  $\text{grad}_P r$  é um vector unitário (orientação de  $\vec{OP}$ ), independente de  $\underline{r}$  (depende apenas das restantes coordenadas esféricas do ponto  $P$ , a saber, as coordenadas angulares  $\theta$  e  $\varphi$ ) vê-se que os dois termos explicitados em (1.51-A) variam com a distância  $r$ , a que se encontra o observador, relativamente a  $O$ , como as potências  $1/r$  e  $1/r^2$ , respectivamente. O prosseguimento da análise dos subsequentes termos de (1.50-A) levaria facilmente à conclusão de que o desenvolvimento (1.51-A) de  $V_P$  se constitui de uma série de potências de  $1/r$ , com coeficientes independentes de  $\underline{r}$  (em geral dependentes de  $\theta$  e  $\varphi$ ).

Um tal desenvolvimento traduz um cálculo de  $V_P$  por aproximações sucessivas. Mostra-se que, se for  $a$  o máximo módulo dos vectores  $\vec{OO}_i$ , <sup>se</sup> comete-se neste cálculo um erro relativo cujo limite superior é de ordem  $\underline{n}$  em  $a/r$  (note-se que  $a/r \ll 1$ , por (1.48-A), quando se toma na série a soma dos  $\underline{n}$  primeiros termos).

Repare-se agora que o 1.º termo do desenvolvimento (1.51-A) se identifica claramente com o potencial que seria

produzido em P por uma carga de valor  $\sum_{i=1}^N e_i$ , colocada no ponto O; que o 2º termo se identifica claramente com o potencial que seria produzido em P por um dipolo de momento  $\sum_{i=1}^N e_i \vec{OO}_i$ , colocado no ponto O. Pode avançar-se que o 3º termo, não explicitado em (1.51-A), se identifica com o potencial que seria produzido em P por um quadrípolo (com certo momento quadrípolar). E assim por diante. Note-se que tais identificações são feitas sempre com base na forma dos sucessivos termos, designadamente, na dependência formal que manifestam relativamente às coordenadas de P (por exemplo, as coordenadas esféricas); é o caso de  $1/r$  no 1º termo, de  $1/r^2 \cos \theta$  no 2º termo (confronte com (1.12') e com (1.49), respectivamente).

Ao mesmo tempo, essas identificações põem em evidência os sucessivos momentos multipolares que podem ser associados à distribuição de que estamos a observar o campo produzido a grande distância. Assim:

$$e = \sum_{i=1}^N e_i \quad \text{momento de ordem 0 (monopolo)}$$

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N e_i \vec{OO}_i \quad \text{momento de ordem 1 (dipolo)}$$

O momento de ordem 0,  $e$ , carga total da distribuição, é um escalar; o momento de ordem 1,  $\vec{p}$ , momento dipolar da distribuição referido ao ponto O, é um vector polar; o momento de ordem 2, i.e., o momento quadrípolar, revelar-se-ia como um tensor de ordem 2.

O desenvolvimento (1.51-A) é pois um desenvolvimento multipolar. Corresponde-lhe, bem entendido, um desenvolvimento multipolar para o campo produzido nas referidas circunstâncias.



## 5-A.2 — Interpretação física do cálculo do potencial pelo desenvolvimento multipolar

Ao cálculo do potencial efectuado mediante o desenvolvimento (1.51-A) pode dar-se uma interpretação física curiosa.

Na verdade, facilmente se admite que, a uma distância suficientemente grande, uma boa aproximação para  $V_P$  resulta precisamente de tomar o potencial produzido pelas cargas da distribuição supostas todas transportadas para um mesmo ponto  $O$  (muito vizinho de qualquer  $O_i$ , para um observador em  $P$ , sob a condição (1.48-A)) — e isso consiste o 1.º termo do desenvolvimento (1.51-A). Mas pode mostrar-se que o transporte de uma carga nessas circunstâncias se acompanha da criação de um dipolo: com efeito, é de todo o ponto equivalente ter a carga  $(+e)$  no ponto  $Q$  (v. Fig 24-A, I) ou a carga  $(+e)$  no ponto  $O$  acompanhada de um dipolo  $[-e)$  em  $O$ ,  $(+e)$  em  $Q$ ] (v. Fig 24-A, III), pois esta última situação resulta da primeira pelo simples facto de imaginarmos que se sobrepõem em  $O$  as duas cargas  $(-e)$ ,  $(+e)$  cujo efeito global é nulo em todos os pontos do espaço (v. Fig 24-A, II).

$(+e) \cdot Q$

$O$

Fig 24-A, I

$(+e) \cdot Q$

$(-e)(+e)$

Fig 24-A, II

$(+e) \cdot Q$

$(-e)(+e)$

Fig 24-A, III

Assim, a primeira aproximação já realizada, deve agora acrescentar-se, para melhorar o cálculo, o potencial produzido pelos dipolos criados pelo transporte das cargas  $e_i$  para a

origem  $O$ , a partir das suas respectivas localizações  $O_i$  na distribuição dada, ou seja, pelo dipolo  $[(-e_i) \text{ em } O, (+e_i) \text{ em } O_i]$ , de momento genérico  $e_i \vec{OO}_i$ ; esse acrescento necessário é o objectivo do 2.º termo do desenvolvimento (1.51-A). Porém, se é lícito tomar como potencial do dipolo  $[(-e_i) \text{ em } O, (+e_i) \text{ em } O_i]$  a expressão

$$-k_0 (e_i \vec{OO}_i) \cdot \text{grad}_{\underline{P}} \frac{1}{r}, \text{ na medida em que}$$

se cumpre a condição (1.48-A), já não é seguro que nestas circunstâncias seja lícito somar os momentos  $e_i \vec{OO}_i$  dos diferentes dipolos, como se faz na expressão do 2.º termo do desenvolvimento (1.51-A), para obter a acção resultante do conjunto desses dipolos. Pode mostrar-se, com efeito, que a soma, pela regra do paralelogramo, dos momentos de dois dipolos se torna fisicamente viável mediante a criação de um quadrípolo. O potencial resultante da acção dos quadrípulos assim gerados deve por ser acrescentado ao cálculo de  $V_{\underline{P}}$  e isso faz-nos passar ao 3.º termo do desenvolvimento (1.51-A). E assim por diante.

### 5-A.3 — Tipos de distribuições localizadas.

À luz do desenvolvimento de  $V_{\underline{P}}$  que descrevemos aqui, é possível distinguir vários tipos de distribuições localizadas nas condições acima expostas.

#### 5-A.3.1 — Distribuições monopolar

Se  $\sum_{i=1}^N e_i \neq 0$ , estamos em presença de uma distribuição monopolar. A parte principal de  $V_{\underline{P}}$  é o 1.º termo do desenvolvimento e, de acordo com o exposto no § 5-A.1, podemos tomá-la para valor de  $V_{\underline{P}}$  com um erro relativo de 2.ª ordem em  $a/r$ . Todavia, se escolhermos con-

venientemente a origem  $O$  (em princípio arbitrária) podemos minorar esse erro. Com efeito, se a nova origem  $\bar{O}$  for tal que

$$(1.52-A) \quad \sum_{i=1}^N e_i \vec{O\bar{O}_i} = 0$$

resulta imediatamente o anulamento do 2º termo em (1.51-A); e o erro relativo cometido, quando se toma para valor de  $V_P$  o novo 1º termo, é então de  $3^{\text{a}}$  ordem em  $a/r$ , ou seja, em  $(a/r)^2$ . A nova origem  $\bar{O}$ , satisfazendo a condição (1.52-A), acha-se a partir da origem  $O$  arbitrária, inicialmente tomada, mediante a operação

$$(1.53-A) \quad \vec{O\bar{O}} = \frac{\sum_{i=1}^N e_i \vec{O\bar{O}_i}}{\sum_{i=1}^N e_i}$$

e diz-se centro de cargas (ou "baricentro" dada a analogia formal de (1.53-A) com a definição de baricentro ou centro de gravidade de um sistema mecânico). Assim, em resumo, para uma distribuição monopolar, o potencial num ponto  $P$ , sob a condição (1.48-A), é, a menos de um erro de  $3^{\text{a}}$  ordem em  $a/r$ , o mesmo que seria criado por uma carga pontual de valor  $\sum_{i=1}^N e_i$ , colocada no centro de cargas da distribuição,  $\bar{O}$  :  $V_P \approx k_0 \left( \sum_{i=1}^N e_i \right) / |\vec{O\bar{O}P}|$ .

### 5-A.3.2 — Distribuições dipolar

Se  $\sum_{i=1}^N e_i = 0$ , mas  $\sum_{i=1}^N e_i \vec{O\bar{O}_i} \neq 0$ ,

dizemos tratar-se de uma distribuição dipolar. A parte principal de  $V_P$  é agora o 2º termo do desenvolvimento (1.51-A): o potencial produzido em  $P$ , sob a condição (1.48-A) por uma distribuição dipolar é, a menos de um erro relativo de  $1^{\text{a}}$  ordem em  $a/r$ , o mesmo que produziria em  $P$  um dipolo de valor  $\vec{p} = \sum_{i=1}^N e_i \vec{O\bar{O}_i}$  colocado no ponto  $O$ .

Note-se que, para uma tal distribuição, o momento dipolar eléctrico da distribuição,  $\vec{p}$ , é invariante face a uma mudança da origem  $O$ , como pode facilmente mostrar-se. O momento dipolar eléctrico tem pois aqui um sentido físico intrínseco e caracteriza a distribuição dipolar.

Não havendo, para esta distribuição, centro de cargas, por ser  $\sum_{i=1}^N e_i = 0$  (por (1.53-A), o centro de cargas da distribuição estaria no infinito), há no entanto lugar para definir, por um lado, centro de cargas positivas, e, por outro lado, centro de cargas negativas, adoptando a mesma definição (1.53-A) para cada um dos subconjuntos de cargas em que a distribuição se pode considerar repartida. Se designarmos por  $e_{m\alpha}$  ( $\alpha = 1, \dots, N'$ ) as cargas negativas, tem-se para o centro de cargas negativas,  $A$ :

$$(1.54-A, I) \quad \vec{OA} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{N'} e_{m\alpha} \vec{OO}_{m\alpha}}{\sum_{\alpha=1}^{N'} e_{m\alpha}} ;$$

se designarmos por  $e_{p\beta}$  ( $\beta = 1, \dots, N''$ ) (com  $N' + N'' = N$ ) as cargas positivas, tem-se para o centro de cargas positivas,  $B$ ,

$$(1.54-A, II) \quad \vec{OB} = \frac{\sum_{\beta=1}^{N''} e_{p\beta} \vec{OO}_{p\beta}}{\sum_{\beta=1}^{N''} e_{p\beta}} .$$

$$\text{Tem-se evidentemente} \quad \sum_{\alpha=1}^{N'} e_{m\alpha} + \sum_{\beta=1}^{N''} e_{p\beta} = 0$$

$$\text{donde} \quad \sum_{\alpha=1}^{N'} e_{m\alpha} = -e \quad , \quad \sum_{\beta=1}^{N''} e_{p\beta} = +e \quad , \quad (e > 0).$$

Considerando agora o momento dipolar da distribuição,  $\vec{p}$ , podemos relacioná-lo com os dois centros de cargas definidos; tem-se

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N e_i \vec{OO}_i = \sum_{\beta=1}^{N''} e_{p\beta} \vec{OO}_{p\beta} + \sum_{\alpha=1}^{N'} e_{m\alpha} \vec{OO}_{m\alpha} =$$

$$= \left( \sum_{\beta=1}^{N''} e_{p\beta} \right) \vec{OB} + \left( \sum_{\alpha=1}^{N'} e_{m\alpha} \right) \vec{OA} = e (\vec{OB} - \vec{OA}) = e \vec{AB}$$

Assim, o momento dipolar do sistema de cargas,  $\vec{p}$ , essa quantidade invariante que caracteriza uma distribuição com carga total nula ( $\sum_{i=1}^N e_i = 0$ ), revela-se idêntica ao momento do dipolo que se constitui (mentalmente) por associação da carga total negativa ( $\sum_{\alpha=1}^{N'} e_{m\alpha} = -e$ ) concentrada e localizada no centro de cargas negativas, A, com a carga total positiva ( $\sum_{\beta=1}^{N''} e_{p\beta} = +e$ ) concentrada e localizada no centro das cargas positivas, B (v. Fig 25-A):

$$(1.55-A) \quad \vec{p} = e \vec{AB}$$



Fig 25-A

Como corolário deste teorema, pode afirmar-se que: a condição necessária e suficiente para que seja nulo o momento dipolar de um sistema de cargas com carga total nula (sistema neutro) é que o centro de cargas positivas coincida com o centro de cargas negativas. Em particular, se uma distribuição neutra tem centro de simetria, é nulo o seu momento dipolar.

[Dentro de certas aproximações, a distribuição das cargas eléctricas das diversas partículas constituintes de uma molécula (núcleos e electrões), pode assimilar-se à distribuição estática (neutra) correspondente às posições médias dessas partículas. Nestas condições, moléculas cuja configuração de equilíbrio tem centro de simetria, como  $H_2$ ,  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $CO_2$ ,  $CH_4$ ,  $CCl_4$ ,  $SF_6$ , etc. não possuem momento dipolar (permanente). Moléculas cuja configuração de equilíbrio não tem centro de simetria, como  $ClH$ ,  $CO$ ,  $OH_2$ ,  $NH_3$ ,  $CH_2Cl$ ,  $C_2H_5OH$ , etc., possuem em geral um momento dipolar (permanente) diferente de zero. Note-se que a acção de um campo eléctrico

exterior sobre uma molécula, considerada como globalmente fixa no espaço, provoca uma pequena perturbação (\*) no estado da dinâmica interna do sistema das suas partículas constituintes; e isto traduz-se nomeadamente numa deformação das órbitas electrónicas. Assim, uma molécula imersa num campo eléctrico (que vamos supor uniforme à escala intramolecular) — apresentará uma distribuição das posições médias das suas partículas distinta da distribuição que apresenta quando isolada (na ausência de campo). Na medida em que é determinada pela presença de um campo axialmente simétrico, relativamente a uma orientação bem definida do espaço, essa nova distribuição estática das posições médias das partículas (continuando sempre a ser uma distribuição neutra) não possui certamente centro de simetria, mesmo quando a distribuição primitiva o possuía. Gera-se assim, portanto, um momento dipolar induzido (induzido pelo campo exterior).

Designadamente, no tocante às moléculas não-polares (de momento dipolar permanente nulo), o centro das cargas positivas (de soma  $q$ , vamos supor) localiza-se agora, na distribuição da molécula deformada, a uma distância  $l$  do centro das cargas negativas (de soma  $-q$ ) e o momento dipolar actual iguala  $ql$  ( $\vec{p}_{ind} \equiv ql$ ). Nas moléculas polares (de momento dipolar permanente diferente de zero), consideradas globalmente fixas no espaço, a acção de um campo eléctrico exterior traduz-se numa modificação do momento dipolar pré-existente, resultando o momento dipolar actual da soma de um momento dipolar induzido com o momento dipolar permanente ( $\vec{p}_{total} \equiv \vec{p}_0 + \vec{p}_{ind}$ ). O momento dipolar induzido depende essencialmente, por um lado, da estrutura da molécula e, por outro lado, depende do campo  $\vec{E}$ , da sua grandeza e da sua orientação relativamente aos eixos próprios da molécula (eixos de simetria). ]

(\*) Sendo os campos eléctricos intramoleculares da ordem de  $10^{11}$  Volt/metro, compreende-se que os campos exteriores habituais não constituam senão uma pequena perturbação.

## 5-A. QUADRIPOLO ELÉCTRICO

### 5-A.1 — Potencial e campo de um quadripolo eléctrico.

Na sequência do § 5 (pág.<sup>s</sup> 46-49) vamos agora ocupar-nos de uma outra distribuição de cargas pontuais, ainda bastante simples e também de grande importância — o quadripolo eléctrico. Trata-se de um sistema de quatro cargas pontuais, do mesmo módulo e de sinais contrários duas a duas, colocadas, com alternância de sinal  $(-e, +e, -e, +e)$ , nos vértices de um paralelogramo de lados muito pequenos em face da distância  $a$  que se encontra o observador (v. Fig 22-A). É evidente que um tal sistema se pode também encarar como constituído por dois dipolos eléctricos, com momentos do mesmo módulo e antiparalelos,  $+\vec{p}$  e  $-\vec{p}$ , muito próximos um do outro face à distância  $a$  que se encontra o observador.

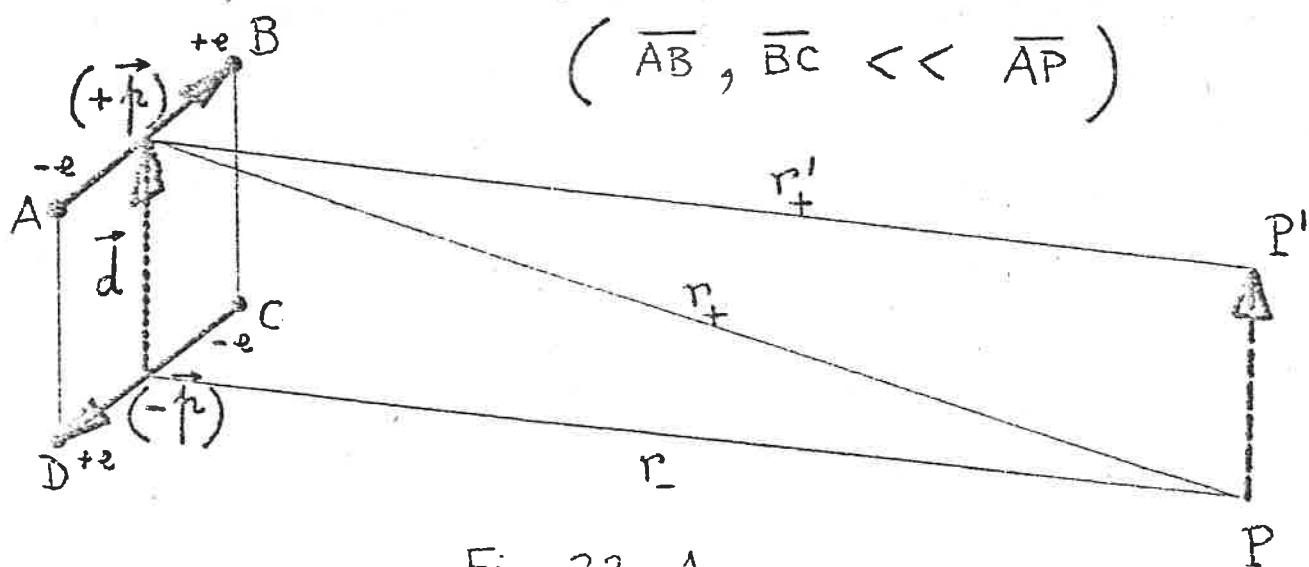


Fig. 22-A

Na Fig. 22-A as cargas estão localizadas nos pontos A, B, C e D, definindo os dipolos  $+\vec{p} = e\overline{AB}$  e  $-\vec{p} = -e\overline{CD}$ ; e pode tomar-se o vector  $\vec{d}$ , equipolente a  $\overline{DA}$  e a  $\overline{CB}$ , como medida da distância entre esses dois

dipolos, marcada de  $-\vec{p}$  para  $+\vec{p}$ . Se P for o ponto em que se encontra o observador genérico, tem-se

$$(1.48-A) \quad \overline{AB}, \overline{BC} \ll \overline{AP}$$

e esta dupla condições constitui o critério usado para precisar a aproximação que adiante se pratica no cálculo do campo produzido em P pela distribuição aqui considerada.

Vamos adotar um método inteiramente análogo ao do § 5. Assim, o campo criado pelo quadrupolo eléctrico vai calcular-se começando por achar o potencial que lhe está associado e utilizando depois a operação - grad. Ora, o potencial produzido pelo quadrupolo para um observador em P,  $V_P^{\text{quad}}$ , obtém-se pela soma algébrica dos potenciais produzidos no mesmo ponto P por cada um dos dois dipolos,  $+\vec{p}$  e  $-\vec{p}$ , que constituem o quadrupolo. (Isto justifica-se pela aditividade dos potenciais, v. § 4.9.2). Vem portanto:

$$(1.49-A) \quad V_P^{\text{quad}} = V_P^{(+\vec{p})} + V_P^{(-\vec{p})}$$

Agora, tendo em conta o resultado (1.49) do § 5, e olhando à Fig. 22-A (em que  $\vec{PP}'$ , vector deslocamento auxiliar, foi construído como equipolente a  $\vec{d}$ ), pode escrever-se, sem erro apreciável

$$V_P^{(-\vec{p})} = -k_0 (e \vec{CD}) \cdot \text{grad}_{P, r} \frac{1}{r} = - \left[ -k_0 (e \vec{AB}) \cdot \text{grad}_{P', r'} \frac{1}{r'} \right] = -V_{P'}^{(+\vec{p})};$$

e a substituição em (1.49-A) conduz a

$$V_P^{\text{quad}} = - \left( V_{P'}^{(+\vec{p})} - V_P^{(+\vec{p})} \right)$$

Então, sendo  $\vec{PP}'$  um deslocamento muito pequeno, por



(1.48-A), pode tomar-se como infinitamente pequeno, e, recorrendo à propriedade fundamental do operador grad, (1.31), resulta:

$$V_P^{\text{quad}} = -\vec{PP}' \cdot \text{grad}_P V^{(+\vec{r})}$$

Ou seja (com  $r_+ \approx r_-$ , designados simplesmente por  $r$ ):

$$(1.50-A) \quad V_P^{\text{quad}} = k_0 \vec{d} \cdot \text{grad}_P (\vec{r} \cdot \text{grad} \frac{1}{r})$$

em que se introduziu (1.49) e se substituiu  $\vec{PP}'$  por  $\vec{d}$ . Esta é a expressão do potencial produzido em P pelo quadripolo acima considerado, dentro da aproximação que é admitida pelo critério (1.48-A). A partir de (1.50-A) pode passar-se ao cálculo do campo:  $\vec{E}_P^{\text{quad}} = -\text{grad}_P V^{\text{quad}}$ .

### 5-A.2 — Momento do quadripolo eléctrico.

A expressão de  $V_P^{\text{quad}}$ , (1.50-A), pode desenvolver-se mediante a representação cartesiana das diferentes operações aí envolvidas; com  $\alpha$  e  $\beta$  correntes por  $(x, y, z)$ , vem:

$$\begin{aligned} V_P^{\text{quad}} &= k_0 \sum_{\alpha\beta} d_\alpha r_\beta \left[ \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_P = \\ &= k_0 \sum_{\alpha\beta} d_\alpha r_\beta \left[ \frac{1}{r^5} (3\alpha\beta - \delta_{\alpha\beta} r^2) \right]_P \\ &= k_0 \sum_{\alpha\beta} \left( \frac{\alpha\beta}{r^5} \right)_P (3d_\alpha r_\beta - \delta_{\alpha\beta} \vec{d} \cdot \vec{r}) \end{aligned}$$

( $\delta_{\alpha\beta}$ , símbolo de Kronecker, traduz a matriz identidade:  $\delta_{\alpha\beta} = 1$ , se  $\alpha = \beta$ ;  $\delta_{\alpha\beta} = 0$ , se  $\alpha \neq \beta$ ).

Mas isto significa que se pode transcrever a expressão de  $V_P^{\text{quad}}$  em linguagem tensorial, como segue:

$$(1.51-A) \quad V_P^{\text{quad}} = k_0 \frac{1}{r^3} (\text{grad}_P r \times \text{grad}_P r) \cdot \vec{Q}$$

com

$$(1.52-A) \quad \vec{Q} = 3 \vec{d} \times \vec{p} - \mathbb{1} \vec{d} \cdot \vec{p},$$

em que o sinal  $\times$  significa produto tensorial de dois vectores e o sinal  $\cdot$  em (1.51-A) significa que se opera o produto interno dos dois tensores (soma dos produtos dos elementos homólogos). Note-se que o carácter tensorial das grandezas  $\text{grad}_P r \times \text{grad}_P r$  e  $\vec{Q}$  se infere essencialmente do facto de que um produto tensorial de dois vectores é um tensor de 2ª ordem;  $\vec{Q}$  contém além disso uma parcela,  $\mathbb{1} \vec{d} \cdot \vec{p}$ , que se identifica com o produto de um escalar pelo tensor de 2ª ordem - identidade. O tensor de 2ª ordem  $\vec{Q}$  que se designa por momento do quadrípolo associa as diferentes grandezas características do sistema de cargas:  $\vec{p}$ , representando os dois dipolos constituintes, e  $\vec{d}$ , vector representativo da distância entre os dois dipolos constituintes, de  $-\vec{p}$  para  $+\vec{p}$ . O momento do quadrípolo,  $\vec{Q}$ , traduz a intensidade da fonte, quando se pensa na acção eléctrica do quadrípolo nos diferentes pontos do espaço. Entretanto, o factor  $\frac{1}{r^3} \text{grad}_P r \times \text{grad}_P r$  traduz por sua vez a dependência espacial dessa mesma acção eléctrica. Se utilizarmos, para referenciar o ponto P, coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$  centradas no ponto em que

se situa o quadripolo, poderemos discernir nessa dependência espacial, por um lado, um simples factor  $1/r^3$  de exclusiva dependência radial, e, por outro lado, um factor complexo  $\text{grad}_I r \times \text{grad}_P r$  de exclusiva dependência angular (em  $\theta$  e  $\varphi$ ). Vê-se que o potencial produzido pelo quadripolo decresce com a distância  $r$  (a que se encontra o observador relativamente ao quadripolo) segundo o inverso do cubo; e, em consequência, o módulo do campo, bem como qualquer uma das suas componentes, decresce segundo o inverso da quarta potência de  $r$ . Revela-se assim que o quadripolo tem uma acção de mais curto alcance que um dipolo — conclusão facilmente interpretável pelo efeito de compensação das acções individuais dos dipolos constituintes.

### 5-A.3 — Outra expressão para o momento de um quadripolo.

Tendo em conta as novas notações da Fig 23-A, vê-se que o resultado (1.50-A), e por consequência a expressão do momento do quadripolo (1.52-A), tanto pode reescrever-se

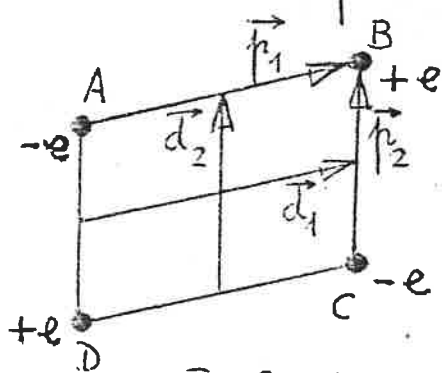


Fig 23-A

utilizando os dipolos constituintes  $\vec{p}_1$  e  $-\vec{p}_1$  à distância  $\vec{d}_2$ , como, evidentemente, utilizando os dipolos constituintes  $\vec{p}_2$  e  $-\vec{p}_2$  à distância  $\vec{d}_1$ . Donde resulta que é válido pôr

$$\vec{Q} = \frac{1}{2} \left[ 3(\vec{d}_2 \times \vec{p}_1 + \vec{d}_1 \times \vec{p}_2) - \mathbb{1}(\vec{d}_2 \cdot \vec{p}_1 + \vec{d}_1 \cdot \vec{p}_2) \right]$$

e sendo que  $\vec{p}_1 = e \vec{d}_1$  e  $\vec{p}_2 = e \vec{d}_2$  (v. Fig. 23-A), vem a seguinte forma simétrica para o momento do quadripolo:

$$(1.52-A) \quad \vec{Q} = \frac{1}{2} e \left[ 3(\vec{d}_1 \times \vec{d}_2 + \vec{d}_2 \times \vec{d}_1) - \mathbb{1} 2 \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \right].$$

Ora, a partir de (1.52-A), mostra-se que, tomada uma origem arbitrária  $O$ , como referência para as posições dos quatro vértices  $A, B, C, D$  do paralelogramo-suporte do quadrípolo, pode escrever-se

$$\vec{Q} = \frac{1}{2} \left[ (-e) \left( 3 \vec{OA} \times \vec{OA} - \mathbb{1} \vec{OA}^2 \right) + (+e) \left( 3 \vec{OB} \times \vec{OB} - \mathbb{1} \vec{OB}^2 \right) + (-e) \left( 3 \vec{OC} \times \vec{OC} - \mathbb{1} \vec{OC}^2 \right) + (+e) \left( 3 \vec{OD} \times \vec{OD} - \mathbb{1} \vec{OD}^2 \right) \right],$$

expressão que pode resumir-se em:

$$(1.53-A) \quad \vec{Q} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 e_i \left( 3 \vec{OO}_i \times \vec{OO}_i - \mathbb{1} \vec{OO}_i^2 \right),$$

sendo  $e_i$  ( $i=1,2,3,4$ )  $\equiv (-e, +e, -e, +e)$  e  $\vec{OO}_i$  ( $i=1,2,3,4$ )  $\equiv (\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD})$ , respectivamente.

Sob esta forma, tudo se passa como se cada carga tivesse uma contribuição independente para o momento  $\vec{Q}$ , segundo uma mesma lei para as diferentes cargas. Visto que  $O$  é uma origem arbitrária, esta decomposição de  $\vec{Q}$  não é única; é porém bem determinada para cada origem  $O$  escolhida.

Deve sublinhar-se desde já que a expressão (1.53-A), assim encontrada, coincide com a particularização para um quadrípolo da expressão geral, que deduziremos no § 9.1, do momento quadrípolar de uma qualquer distribuição de cargas pontuais localizadas numa região confinada do espaço com dimensões muito pequenas em face da distância a que se encontra o observador.

#### 5-A.4 — Algumas propriedades importantes do tensor $\vec{Q}$ .

Deixa-se aos leitores o cuidado de mostrar que o tensor  $\vec{Q}$  é representado por uma matriz simétrica, de traço nulo.

## 6. CAMPO PRODUZIDO POR UMA DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA EM VOLUME

### 6.1 — Densidade volúmica de carga (eléctrica)

Continuando a tratar de distribuições idealizadas de cargas eléctricas, no vácuo, abordemos agora as distribuições contínuas em volume. Suponhamos que uma certa quantidade de electricidade  $e$  se encontra disseminada por todo o volume  $v$  de uma dada região do espaço, de tal modo que cada elemento de volume infinitesimal não contém mais que uma parcela de  $e$  infinitamente pequena, pelo menos da mesma ordem. Por outras palavras: considerando em torno de um qualquer ponto  $Q$  dessa região o elemento de volume circunvizinho genérico,  $\Delta v$ , e sendo  $\Delta e$  a carga contida em  $\Delta v$ , admitamos que existe sempre, e é finito, o limite

$$(1.52) \quad \rho_Q = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta e}{\Delta v}$$

supondo que  $\Delta v$ , ao tender para zero, se cerra sobre o ponto  $Q$ . Dir-nos-emos, nestas condições, em presença de uma distribuição contínua de carga eléctrica no volume  $v$ , para a qual se pode desde logo definir, em cada ponto  $Q$  (de  $v$ ), a densidade de carga por unidade de volume ou densidade volúmica de carga, como a grandeza  $\rho_Q$  dada por (1.52). Quando  $Q$  bate todo o volume  $v$  obtém-se, de (1.52), uma função de ponto  $\rho(Q)$ , que admitiremos unívoca, finita e contínua em todo o ponto interior de  $v$  (podendo haver descontinuidade quando se atravessa a superfície limítrofe de  $v$ ). Esta função  $\rho(Q)$  caracteriza de modo completo a distribuição contínua de carga eléctrica em volume.

Suposta operada uma decomposição do volume  $v$  em elementos infinitamente pequenos, pode passar-se a encarar a distribuição contínua de carga eléctrica nesse volume como uma distribuição compacta de um número infinito de cargas pontuais infinitamente pe-

quenas dadas pela relação genérica

$$(1.53) \quad de = \rho(Q) dv,$$

que decorre de (1.52), sendo  $de$  a carga elementar (infinitamente pequena) contida no elemento de volume  $dv$  (infinitamente pequeno) circunvizinho ao ponto genérico  $Q$ . A carga total da distribuição vem dada pela soma (integração) das cargas elementares correspondentes à decomposição operada no volume  $v$ :

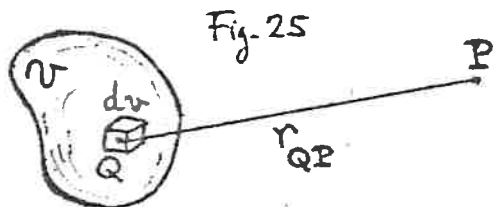
$$(1.53') \quad e = \int_v de = \int_v \rho(Q) dv.$$

Baseando-nos nesta assimilação, podemos agora aplicar às distribuições contínuas em volume os resultados obtidos, no estudo precedente, para o campo produzido pelas distribuições de cargas pontuais.

## 6.2 — Campo eléctrico e função potencial

Assim, por conveniente adaptação da relação (1.26') do § 3, obtém-se para o campo  $\vec{E}(P)$ , produzido no ponto  $P$  por uma distribuição contínua no volume  $v$ , com densidade  $\rho(Q)$ , a expressão (v. Figura 25):

$$(1.54) \quad \vec{E}(P) = k_0 \int_v \frac{\rho(Q)}{r_{QP}^2} \text{vers } \vec{QP} dv$$



A validade desta expressão do campo não suscita qualquer dúvida para o caso de  $P$  ser exterior ao volume da distribuição.

Mas no caso de ser  $P$  interior a  $v$  (coincidente com um determinado  $Q'$ ) deve-se resolver a dificuldade que surge pelo facto de haver um elemento de volume potenciante  $dv'$ , circunvizinho de  $Q' \equiv P$ , cuja contribuição é aparentemente indeterminada visto ser nula a distância  $r_{Q'P}$ . Esta aparente indeterminação levanta-se no entanto considerando que  $r_{QP}$ , quando  $Q \rightarrow Q'$ , é um infinitamente pequeno da ordem de uma di-

mensão linear,  $\delta l$ , do elemento de volume  $dv'$ , enquanto o próprio  $dv'$  é um infinitamente pequeno da ordem do cubo de uma sua di- mensão linear,  $(\delta l)^3$ ; e, em consequência disto, a contribuição do elemento potenciante  $dv'$  não cria obstáculo ao cálculo do integral.  
 Em suma, a expressão (1.54) é válida quer para pontos exteriores quer para pontos interiores ao volume  $v$ . Repare-se que também

→ aqui é admissível a reformulação

$$(1.55-a) \quad \vec{E}(P) = -\text{grad}_P V$$

com uma função potencial  $V(P)$  dada por

$$(1.55-b) \quad V(P) = k_0 \int_v \frac{\rho(Q)}{r_{QP}} dv$$

Mostra-se com efeito que este algoritmo reconstitui (1.54) e é válido quer para pontos exteriores, quer para pontos interiores (\*). Note-se que, para  $P$  interior, a contribuição do elemento potenciante  $dv'$ , circunvizinho de  $Q' \equiv P$ , para o integral (1.55-b), aparentemente indeterminada, é na verdade desprezável (como acontece com (1.54)).

→ Pode mostrar-se que o campo produzido por uma distribuição volumica,  $\vec{E}(P)$ , é contínuo em toda a parte (Ver, mais adiante, § 7.4). Por outro lado, sendo  $\vec{E}(P)$  finito em cada ponto,  $V(P)$  é uma função contínua em todo o espaço. Assim, nomeadamente quando se atravessa a superfície limítrofe do volume carregado,  $V(P)$  e as suas primeiras derivadas ( $\vec{E}(P)$ ) são funções contínuas, muito embora aí possa haver descontinuidade na densidade volumica da distribuição,  $\rho(P)$ . Adiante veremos que  $\rho(P)$  se liga com efeito, muito directamente, não a  $V(P)$  ou as suas primeiras derivadas mas sim a uma composição de 2<sup>as</sup> derivadas de  $V(P)$  (Ver § 6.4.2 :  $\text{lap}_P V = -\rho(P)/\epsilon_0$ ).

(\*) Cf. A. da Silveira, Teoria da Electricidade - 1<sup>a</sup> Parte, 21-27.  
 E. Durand, Electrostatique - I (1964), 313-317.

Deve observar-se que quer o campo  $\vec{E}(P)$ , quer o potencial dado por (1.55-b) tendem para zero quando o ponto potenciado  $P$  se desloca para infinito, isto é, se afasta indefinidamente da distribuição de carga (semelhantemente ao que se passa com outras distribuições já estudadas). Tomando um ponto de referência,  $O$ , (fixo) no interior ou próximo da distribuição e designando por  $R$  a distância  $\overline{OP}$  que dele faz o observador (móvel), é importante salientar que: a)  $V(P)$  tende para zero qñ  $R \rightarrow \infty$ , constituindo um infinitamente pequeno da mesma ordem que  $1/R$  (pelo menos) qñ  $R \rightarrow \infty$ ; diz-se que  $V(P)$  é regular no infinito, com  $1/R$ . b)  $\vec{E}(P)$  tende para zero qñ  $R \rightarrow \infty$ , constituindo qualquer das suas componentes um infinitamente pequeno da mesma ordem que  $1/R^2$  (pelo menos); diz-se que  $\vec{E}(P)$  é um campo regular no infinito, com  $1/R^2$ . Com efeito, é fácil comprovar, a partir respectivamente de (1.55-b) e de (1.54), que  $\lim_{R \rightarrow \infty} [R V(P)]$  e  $\lim_{R \rightarrow \infty} [R^2 \vec{E}(P)]$  são ambos finitos, podendo anular-se em casos especiais.

### 6.3 — Propriedades integrais do campo

Baseando-nos ainda na mesma assimilação de toda a distribuição contínua em volume a uma distribuição compacta de cargas pontuais, fazemos agora a transposição das duas propriedades essenciais do campo eléctrico analisadas primeiro nos §§ 2.4 e 2.5 para o caso de uma carga pontual única e generalizadas depois no § 3 para uma distribuição de cargas pontuais.

(i) A propriedade (1.27) transcreve-se como formalmente idêntica: o campo  $\vec{E}(P)$  dado por (1.54) cumpre a condição

$$(1.56) \quad \oint_{[c]} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

qualquer que seja a curva fechada  $[c]$ . Esta equação traduz o



princípio de conservação da energia. Refere-se que, de acordo com o § 4.3, a propriedade (1.56) é equivalente à expressão (1.55-a).

(ii) No tocante ao teorema de Gauss, podemos adoptar a transcrição directa de (1.28') pois é lícito afirmar que no caso de uma distribuição contínua em volume, não há cargas assentes sobre qualquer superfície ainda mesmo que a superfície em causa corte a região (o volume) onde se localiza a distribuição (onde  $\rho(Q) \neq 0$ ). (Com efeito, o integral de  $\rho(Q)$  ao longo de um domínio de medida volumétrica nula é zero). Assim, para uma qualquer superfície fechada  $S$ , envolvendo um volume  $\tau$ , escreve-se a partir de (1.28') :

$$(1.57) \quad \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho(M) \, d\omega$$

sendo  $M$  o ponto corrente no volume  $\tau$  e  $d\omega$  o elemento de volume que lhe é circunvizinho. Para o cálculo do integral do 2º membro (que representa a carga da distribuição que fica interior a  $S$ , de acordo com (1.28'))

só conta efectivamente o volume da intersecção de  $\tau$ , volume carregado, com  $\tau$ , volume envolvido por  $S$ .

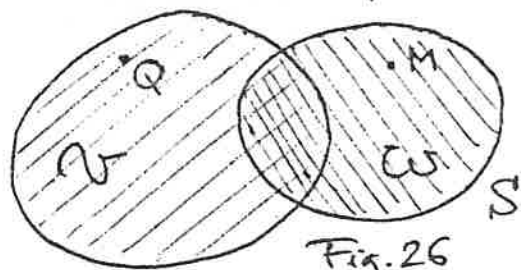


Fig. 26

Estas duas propriedades (i) e (ii), integrais (globais), porque são válidas, respectivamente para qualquer curva fechada  $[C]$  em (1.55) e para qualquer superfície fechada  $S$  em (1.57), não agora poder ser utilizadas para uma análise local do campo eléctrico, que se revela de um grande interesse e conduz à versão diferencial de (1.56) e (1.57).

#### 6.4 — Formulação diferencial (local) das propriedades do campo produzido por uma distribuição volumétrica.

##### 6.4.1 — Noção de divergência. A divergência de $\vec{E}(P)$ . Equação de Poisson.

Reportemo-nos a um ponto  $N$  qualquer do espaço, exterior ou interior à distribuição volumica considerada. Começemos pela propriedade (ii) do § anterior. Consideremos uma superfície fechada  $S$ , muito pequena, genérica e compreendendo sempre o ponto  $N$  no seu interior; suponhamos que é  $\Delta v$  o volume envolvido por  $S$  e  $\Delta e$  a carga da distribuição volumica que eventualmente nele esteja contida. Então, pelo teorema de Gauss, eq. (1.57), vem:

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \Delta e.$$

Dividamos ambos os membros por  $\Delta v$  e suponhamos depois que  $S$  se contrai sobre o ponto  $N$  (tendendo  $\Delta v$  ao mesmo tempo para zero). No limite, e por aplicação de (1.52), vem:

$$(1.58) \quad \lim_{\substack{S \rightarrow N \\ (\Delta v \rightarrow 0)}} \frac{\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS}{\Delta v} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_N$$

(da existência de limite no 2º membro, infere-se que também existe o limite do 1º membro). Relaciona-se assim genericamente o valor da densidade volumica no ponto  $N$  — grandeza caracterizadamente local — com uma análise local do campo eléctrico traduzida pelo limite explicitado no 1º membro. Ora este limite é, por definição, a divergência do campo vectorial  $\vec{E}$  no ponto  $N$ , designada por  $\text{div}_N \vec{E}$ :

$$(1.59) \quad \text{div}_N \vec{E} = \lim_{\substack{S \rightarrow N \\ (\Delta v \rightarrow 0)}} \frac{\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS}{\Delta v}$$

com o significado físico que imediatamente transparece:  $\text{div}_N \vec{E}$  é um escalar que dá o fluxo de  $\vec{E}$  que sai através de uma superfície fechada infinitamente pequena  $S$ , encerrando  $N$ , por unidade do volume envolvido por  $S$ . Introduz-se assim um operador que, actuando sobre um campo vectorial  $\vec{E}(\underline{P})$ , origina um campo escalar  $\text{div}_P \vec{E}$ ; veremos tratar-se de um operador

diferencial, dado em representação cartesiana por (\*)

$$(1.60) \quad \operatorname{div}_{\mathbf{P}} \vec{E} = \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)_{\mathbf{P}}$$

Combinando (1.58) com (1.59) obtêm-se

$$(1.61) \quad \operatorname{div}_{\mathbf{N}} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{N})$$

Assim, no caso presente, o campo escalar  $\operatorname{div}_{\mathbf{N}} \vec{E}$ , como uma consequência do teorema de Gauss (propriedade (ii)), identifica-se localmente com a densidade volumétrica de carga da distribuição, à parte o factor  $1/\epsilon_0$ . A equação diferencial (1.61) é designada por equação de Poisson. Ela constitui a tradução local do teorema de Gauss para as distribuições em volume, ou, se quisermos, a versão diferencial de (1.57). Note-se que nos pontos em que  $\rho(\mathbf{P}) = 0$  (em particular, no espaço livre de cargas) temos  $\operatorname{div}_{\mathbf{P}} \vec{E} = 0$ ; e observe-se também que a função  $\operatorname{div}_{\mathbf{P}} \vec{E}$  é descontínua, em geral, ao atravessar-se a superfície limítrofe do volume carregado.

#### 6.4.2 — Noção de rotacional. O rotacional de $\vec{E}(\mathbf{P})$ .

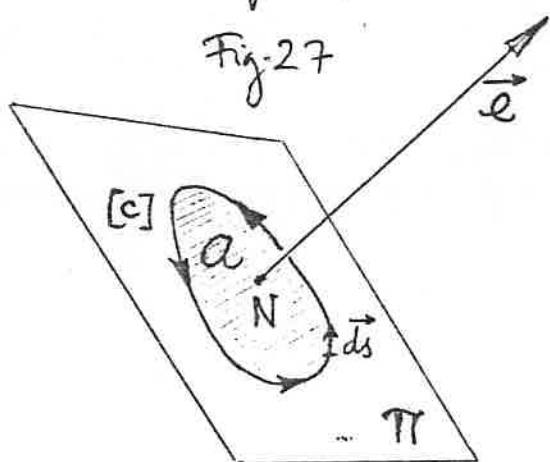
##### Carácter irrotacional do campo.

Reportando-nos ao mesmo ponto  $\mathbf{N}$ , passemos agora à propriedade (i) do § anterior. As operações de circulação permitem fazer um outro tipo, mais complexo, de análise local de um campo vectorial (\*\*). Abstraindo por enquanto do nosso problema específico,

(\*\*) A complexidade acrescida resulta do facto de que, diferentemente do que se passa com as superfícies fechadas  $S$ , às curvas fechadas  $[c]$  vai ser possível atribuir diferentes orientações no espaço, obtendo-se assim resultados diferenciados, constante a orientação, para a análise a que conduzem as circulações ao longo das curvas  $[c]$ .

(\*) Ver Apêndice : Propriedades do operador divergência.

suponhamos dado, de maneira geral, um campo vectorial  $\vec{G}(\mathbb{P})$ . Tomemos um eixo genérico passando por  $N$ , seja  $\vec{e}$  o vector unitário da sua orientação e designe  $\Pi$  o plano normal a  $\vec{e}$  e passando por  $N$ . Assente neste plano  $\Pi$ , consideremos genericamente uma curva fechada  $[c]$ , <sup>(muito pequena,)</sup> compreendendo sempre  $N$  no seu interior; seja  $a$  a área plana por ela limitada. (V. Figura 27). Calculemos a circulação de  $\vec{G}$  ao longo



de  $[c]$  no sentido directo relativamente à orientação do eixo  $\vec{e}$  (\*):  $\oint_{[c]} \vec{G} \cdot d\vec{s}$ . Suponhamos agora que a curva  $[c]$ , sempre no plano  $\Pi$ , se contrai sobre o ponto  $N$ , ao mesmo tempo que  $a$  tende para zero. A circulação  $\oint_{[c]} \vec{G} \cdot d\vec{s}$ , se  $\vec{G}$  é finito, como suponho, também tende

para zero e pode acontecer que constitua um infinitamente pequeno da mesma ordem que  $a$ . Supondo que assim é, existe o limite

$$(1.62) \quad \Gamma(\vec{e}) = \left\{ \lim_{\substack{[c] \rightarrow N \\ (a \rightarrow 0)}} \frac{\oint_{[c]} \vec{G} \cdot d\vec{s}}{a} \right\} \vec{e}$$

dependente da orientação das curvas  $[c]$  no espaço, do plano  $\Pi$ , portanto de  $\vec{e}$ . E vamos admitir que se pode obter  $\Gamma(\vec{e})$

desta maneira, genericamente (i.e. para qualquer eixo  $\vec{e}$ ).

Notando que  $\Gamma(-\vec{e}) = -\Gamma(\vec{e})$ , o conjunto dos valores  $\Gamma(\vec{e})$  tem um sub-conjunto de valores positivos e, admitindo má-

(\*) O sentido directo relativamente à orientação do eixo  $\vec{e}$  é o sentido de rotação que deve imprimir-se a um saca-rolhas, dirigido segundo o eixo, para ter progressão no sentido do eixo. É a regra do saca-rolhas, ou regra de Stokes.

ximo, ele é positivo. Seja  $\vec{\sigma}$  a orientação para a qual o máximo é atingido:  $\text{Máx} (\Gamma(\vec{e})) = \Gamma(\vec{\sigma})$ . Para muitos tipos de campos vectoriais  $\vec{G}(P)$  este máximo existe e é finito para cada ponto  $N$ , em geral; e, quando não é nulo, é atingido para uma única orientação  $\vec{\sigma}$ . Somos assim conduzidos a resumir os resultados desta análise mediante a introdução de um vector, o rotacional do campo vectorial  $\vec{G}$  no ponto  $N$ , designado por  $\text{rot}_N \vec{G}$  e que se define como:  $\text{rot}_N \vec{G} \equiv \Gamma(\vec{\sigma}) \vec{\sigma}$ ; ou seja:

$$(1.63) \quad \text{rot}_N \vec{G} = \text{Máx} (\Gamma(\vec{e})) \vec{\sigma} \quad (*)$$

com  $\Gamma(\vec{e})$  dado genericamente por (1.62) e  $\vec{\sigma}$  a orientação atrás definida. Pode atribuir-se-lhe o seguinte significado físico:  $\text{rot}_N \vec{G}$  é um vector cujo módulo representa a máxima circulação por unidade de área que pode detectar um observador colocado em  $N$ , utilizando curvas fechadas infinitamente pequenas  $[C]$ , que encerram  $N$  e assentam sobre planos passando por  $N$ ; cuja direcção é perpendicular ao plano onde se atinge a referida máxima circulação por unidade de área; e cujo sentido se encontra relacionado pela regra de Stokes com o sentido de circulação correspondente à obtenção daquele valor máximo. Introduz-se assim um operador que, actuando sobre um campo vectorial  $\vec{G}(P)$ , origina um outro campo vectorial  $\text{rot}_N \vec{G}$ ; veremos tratar-se de um operador diferencial, dado em repre-

(\*) Deve notar-se que esta definição implica que o vector  $\text{rot}_N \vec{G}$  resulta um vector axial (subentendido que  $\vec{G}$  é um vector polar): pressupõe a fixação prévia de uma axialidade do espaço ao estabelecer o sentido das circulações como o sentido directo relativamente ao eixo  $\vec{e}$ .

sentação cartesiana por (\*)

$$(1.64) \quad \text{rot}_{\mathbf{P}} \vec{G} = \left( \frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} \right)_{\mathbf{P}} \vec{e}_x + \left( \frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} \right)_{\mathbf{P}} \vec{e}_y + \left( \frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} \right)_{\mathbf{P}} \vec{e}_z$$

→ Voltando agora ao nosso problema específico, vê-se facilmente que a propriedade (i) do § 6.3 — eq. (1.56), para qualquer curva fechada  $[C]$  — conduz necessariamente a

$$(1.65) \quad \text{rot}_{\mathbf{N}} \vec{E} = 0 \quad :$$

o rotacional de  $\vec{E}(\mathbf{P})$  é nulo em todos os pontos do espaço (exterior ou interior à distribuição). A equação diferencial (1.65) constitui a tradução local do princípio de conservação da energia para as distribuições em volume, ou, se quisermos, a versão diferencial de (1.56). Note-se todavia que esta equação (1.65) é universal na Electrostática, porque sabemos que em todas as situações e para todos os tipos de distribuições se cumpre sempre a equação integral (1.56), onde quer que o campo  $\vec{E}(\mathbf{P})$  seja bem definido, e com qualquer curva fechada  $[C]$ . Um campo com rotacional nulo em todos os pontos do espaço diz-se um campo irrotacional. O campo eléctrico  $\vec{E}(\mathbf{P})$  tem pois para as distribuições em volume um carácter irrotacional. E esta propriedade é universal na Electrostática, se se excluírem os pontos de singularidade em que o campo não é definido.

Repare-se por fim que a eq. (1.65) pode ser vista também como uma consequência de (1.55-a), que de resto já foi observado ser equivalente a (1.56) (Ver § 6.3, (i)).

⊗ Assim,  $\vec{E} = -\text{grad } V$  implica  $\text{rot } \vec{E} = 0$ ; pode mostrar-se que, reciprocamente, se  $\text{rot}_{\mathbf{P}} \vec{E} = 0$  para todo o  $\mathbf{P}$ , então

⊗  $\vec{E}$  pode exprimir-se como gradiente de algum escalar.

(\*) Ver Apêndice: Propriedades do operador rotacional.

### 6.4.3 — Equação diferencial para $V(P)$ . Operador Laplaciano.

Sendo  $\vec{E} = -\text{grad}_P V$ , isso leva a transcrever a eq. (1.61) como  $(\text{div grad})_P V = -1/\epsilon_0 \rho(P)$ . Ora, a operação composta  $(\text{div grad})_P V$  constitui o laplaciano do escalar  $V$  no ponto  $P$ , operador diferencial de 2ª ordem, que se designa por  $\text{lap}_P V$  e cuja representação cartesiana se exprime por

$$(1.66) \quad \text{lap}_P V = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_P$$

como resulta de combinar (1.60) com (1.35). A equação de Poisson, (1.61), assume pois a nova forma

$$(1.67) \quad \text{lap}_P V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(P)$$

Esta é a equação diferencial a que obedece a função potencial  $V(P)$ .  
 Comentários: (a) Conhecida a densidade  $\rho(P)$  de uma dada distribuição volumétrica de carga, a resolução (integração) da eq. (1.67) permite obter a função potencial  $V(P)$  como a solução física adequada, de entre as soluções matemáticas possíveis. Sabemos já que a expressão geral (1.55-b) traduz a resposta correcta a este problema. Mas a resolução (integração) de (1.67) constitui um método de determinar  $V(P)$ , alternativo do que se consubstancia no cálculo do integral (1.55-b). Consoante as características da distribuição dada, assim se recorre a um ou outro método. (b) Em sentido inverso, se se conhece  $V(P)$ , então, como é óbvio, a equação (1.67) fornece directamente a densidade  $\rho(P)$ , suposta desconhecida ou incompletamente conhecida.

Refere-se que se  $\rho(P)$  apresenta descontinuidade quando se atravessa a superfície limítrofe do volume carregado, é ao nível de  $\text{lap}_P V$  que ela se manifesta: também há descontinuidade pelo menos numa das 2ªs derivadas (não-cruzadas) de  $V(P)$  (Confronte com as observações do § 6.2). Note-se enfim que nas regiões em que  $\rho=0$  — espaço livre de cargas — cumpre-se  $\text{lap} V = 0$  (equação de Laplace).

#### 6.4.4. — As "fontes" do campo. Referência ao teorema de Helmholtz (dos campos vectoriais)

Reunindo as duas equações diferenciais encontradas nos §§ 6.4.1 e 6.4.2, conclui-se que o campo de uma distribuição em volume de densidade  $\rho(Q)$  deve satisfazer ao sistema

$$(1.68) \quad \begin{cases} \text{rot}_{\mathcal{P}} \vec{E} = 0 \\ \text{div}_{\mathcal{P}} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathcal{P}) \end{cases} \quad \left( \begin{array}{l} \text{em todo } \mathcal{P} \\ \text{do espaço} \end{array} \right)$$

Para além do significado físico de cada uma das duas equações de per si, a importância deste sistema decorre ainda do facto de que as duas propriedades do campo aí postas, em evidência —  $\text{rot}_{\mathcal{P}} \vec{E}$  e  $\text{div}_{\mathcal{P}} \vec{E}$  — quando conhecidas em todo o ponto do espaço, como é aqui o caso, fornecem no seu conjunto uma informação completa em ordem à determinação do campo  $\vec{E}$  em qualquer ponto, sob a condição, efectivamente satisfeita, de ser  $\vec{E}$  regular no infinito, com  $1/R^2$ . A reconstituição do campo à custa do conhecimento dessas duas propriedades, como "fontes" do campo, é assegurada por um corolário do teorema de Helmholtz (dos campos vectoriais), como veremos. (\*)  
Nessa perspectiva, o campo  $\vec{E}$  de que nos ocupamos aqui, por (1.68), não tem "fontes" de rotacional ou vórtices e tem "fontes" de divergência coincidentes (à parte o factor  $\frac{1}{\epsilon_0}$ ) com a densidade de distribuição volumínica de carga,  $\rho(Q)$ .

## 7. CAMPO PRODUZIDO POR UMA DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA EM SUPERFÍCIE

### 7.1 — Densidade superficial de carga (eléctrica)

Abordemos agora as distribuições contínuas em superfície.

(\*) Ver Apêndice : Teorema de Helmholtz (dos campos vectoriais)



Suponhamos que uma certa quantidade de electricidade  $e$  se encontra espraçada por toda uma superfície  $S$ , de tal modo que cada elemento de superfície, de área infinitesimal, não contém mais que uma parcela de  $e$  infinitamente pequena da mesma ordem. Por outras palavras: considerando em torno de um qualquer ponto  $N$  sobre  $S$  o elemento de superfície,  $\Delta S$ , desse mesmo domínio e genericamente circunvizinho de  $N$ , e sendo  $\Delta e$  a carga contida em  $\Delta S$ , vamos admitir que existe sempre, e é finito, o limite

$$(1.69) \quad \sigma_N = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta e}{\Delta S} \quad ||$$

supondo que o elemento de superfície  $\Delta S$ , cuja área tenda para zero, se contrai sobre o ponto  $N$ . Dir-nos-emos, nestas condições, em presença de uma distribuição contínua de carga eléctrica na superfície  $S$ , para a qual se pode desde logo definir, em cada ponto  $N$  (de  $S$ ), a densidade de carga por unidade de superfície (ou de área) ou densidade superficial de carga, como a grandeza  $\sigma_N$  dada por (1.69). Quando  $N$  bate toda a superfície carregada  $S$ , obtém-se, a partir de (1.69), uma função de ponto  $\sigma(N)$  que admitiremos mbroca, finita e contínua em todo o ponto sobre  $S$  (podendo haver descontinuidade quando se atravessa a curva limítrofe de  $S$ ). Esta função  $\sigma(N)$  caracteriza de modo completo a distribuição contínua de carga eléctrica em superfície.

### 7.2 — A distribuição contínua em superfície como degenerescência de uma distribuição volumica.

Consideremos uma distribuição contínua em volume definida numa região em camada (região limitada por duas superfícies de forma quaseidêntica  $S$  e  $S'$ , de grandes dimensões face à espessura, quase uniforme, que as separa) — v. Figura 28; e dividamos a camada em cilindros do tipo do representado: de base  $\Delta S$ , com geratriz normal

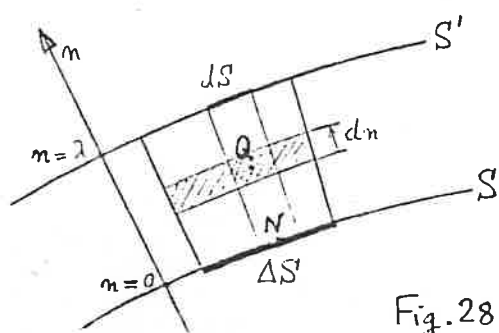


Fig. 28

a  $S$  e com volume  $\Delta v = \lambda \Delta S$ . Se fôr  $\rho(Q)$  a densidade volúmica da distribuição, a carga contida em  $\Delta v$  valerá

$$(1.70) \quad \Delta e = \int_{\Delta v} \rho(Q) dv = \int_{\Delta S} \int_0^\lambda \rho(Q) dn dS$$

atendendo à decomposição em elementos de volume representada na Figura. Suponhamos agora que a camada se comprime progressivamente na direcção normal, aproximando-se  $S'$  de  $S$  até à coincidência (tendendo  $\lambda$  para zero, no cilindro genérico), mas sob a condição que a carga  $\Delta e$  contida em cada cilindro se conserve constante — para o que deveremos admitir que, neste processo,  $\rho \rightarrow \infty$ . No limite de tal evolução, a camada devém uma superfície e a distribuição de carga torna-se uma distribuição superficial, resultante da condensação da carga da distribuição volúmica original. Realizando, nessas condições, a passagem ao limite sobre a eq. (1.70), obtém-se

$$\Delta e = \int_{\Delta S} \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty}} \left[ \int_0^\lambda \rho(Q) dn \right] dS$$

E, porque  $\Delta e$  representa agora a carga contida em  $\Delta S$ , a definição (1.69) conduz a

$$(1.71) \quad \sigma(N) = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty}} \left[ \int_0^\lambda \rho(Q) dn \right]$$

Esta fórmula traduz a degenerescência de uma distribuição volúmica para uma distribuição superficial e pode admitir-se que ela fornece um instrumento de projecção, sobre o segundo domínio, das propriedades válidas no primeiro. Permite em todo o caso assegurar que uma distribuição superficial de carga seja encarada, quando isso fôr conveniente, como uma distribuição no volume de uma camada de espessura muito pequena com uma densidade volúmica muito grande; assim se dissipam, no tratamento de algumas grandezas do campo, as descontinuidades que surgem sobre a superfície carregada, sendo substituídas por variações bruscas mas contínuas.

### 7.3 — Campo e potencial num ponto exterior à superfície.

Analogamente ao que foi feito para as distribuições em volume, vamos tentar aplicar às distribuições contínuas em superfície os resultados obtidos para o campo produzido por distribuições de cargas pontuais. Baseamo-nos para isso em que se pode passar a encarar uma distribuição contínua em superfície como uma distribuição compacta de um número infinito de cargas pontuais infinitamente pequenas dadas pela relação genérica

$$(1.72) \quad de = \sigma(N) dS$$

que decorre de (1.59), quando se supõe operada uma decomposição da superfície  $S$  em elementos de superfície infinitamente pequenos  $dS$ , sendo  $de$  a carga elementar (infinitamente pequena) contida em  $dS$ . (\*)

Assim, para um ponto  $P$  exterior à distribuição, por conveniente adaptação da relação (1.25') do § 3, obtém-se para o campo  $\vec{E}(P)$  produzido por uma distribuição contínua na superfície  $S$ , com densidade  $\sigma(N)$ , a expressão

$$(1.73) \quad \vec{E}(P) = k_0 \int_S \frac{\sigma(N)}{r_{NP}^2} \text{vers } \vec{NP} dS \quad \left( \begin{array}{c} P \\ \text{exterior} \end{array} \right)$$

e a validade desta expressão não suscita qualquer dúvida. Pode mostrar-se que este campo é contínuo enquanto o ponto  $P$  se mantém exterior à superfície carregada (ver § 7.5). Repare-se agora que a expressão (1.73) pode ser reformulada segundo

$$(1.74-a) \quad \vec{E}(P) = -\text{grad}_P V$$

e mediante a adopção de uma função potencial  $V(P)$  dada por

$$(1.74-b) \quad V(P) = k_0 \int_S \frac{\sigma(N)}{r_{NP}} dS$$

como é fácil comprovar, visto que, sendo  $P$  exterior ao domínio  $S$ ,

(\*) A carga total da distribuição virá dada pela soma (integração):

$$(1.721) \quad e = \int_S de = \int_S \sigma(N) dS$$

as operações  $\text{grad}_P$  e  $\int_S \dots dS$  são permutáveis (a função integranda é finita e contínua no domínio  $S$ ). Note-se que sendo o campo finito fica assegurado que  $V(P)$  é função contínua para pontos exteriores.

Entretanto, para um ponto  $P$  sobre a distribuição superficial, recorrendo a uma análise do mesmo tipo que a do § 6.2 para as distribuições contínuas em volume, constata-se desta vez que não é viável estender a essa situação do ponto potenciado a adaptação de (1.26') do § 3. para o cálculo do campo. Com efeito, a contribuição do elemento de superfície potenciante  $dS'$ , circunvizinho do ponto  $N'$  com que coincide o ponto potenciado, é indeterminada visto ser nula a distância  $r_{N'P}$ ; e tal indeterminação não se reduz a um infinitésimo: quando  $N \rightarrow N'$ ,  $r_{NP}^2$  é um infinitamente pequeno da mesma ordem que o próprio  $dS'$ . Existe assim um impasse ao cálculo do integral (1.73) e portanto não é possível definir, mediante essa expressão, o campo para um ponto  $P$  sobre a superfície carregada. Veremos no § seguinte que esta inviabilidade tem uma razão profunda: o campo não pode de facto definir-se sobre a superfície carregada visto que é descontínuo quando o observador (no ponto potenciado) atravessa a superfície. Pode no entanto mostrar-se que a função potencial num ponto  $P$  exterior, dada por (1.74-b), admite uma extensão analítica formalmente idêntica para quando  $P$  cai sobre  $S$ , e de tal modo que resulta contínua ao atravessar-se a superfície. (\*) A expressão (1.74-b) é pois válida quer para os pontos exteriores quer para os pontos sobre  $S$  e  $V(P)$  é contínua em todo o espaço (incluindo portanto os pontos sobre a distribuição).

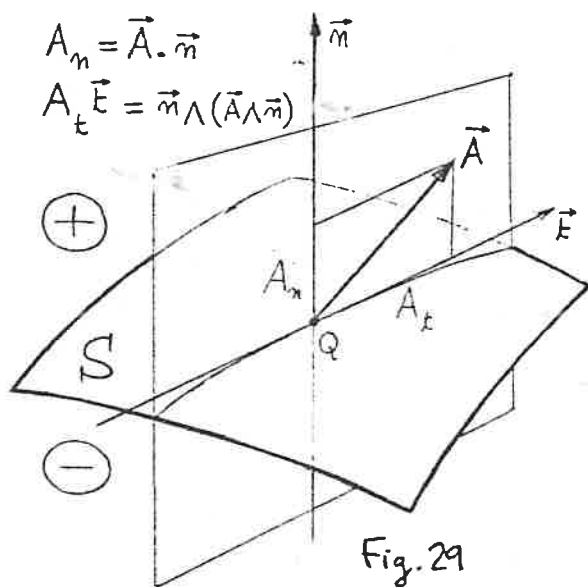
São inteiramente aplicáveis às distribuições em superfície as considerações feitas para as distribuições em volume a respeito do compor-

(\*) Cf. A. da Silveira, Teoria da Electricidade - 1ª parte, 36-39.  
E. Durand, Electrostatique - I (1964), 225-226.

tamento do campo e do potencial quando o ponto potenciado se desloca para infinito, isto é, se afasta indefinidamente da distribuição (ver § 6.2). Assim: a)  $V(\mathcal{P})$  é regular no infinito, com  $1/R$ ; b)  $\vec{E}(\mathcal{P})$  é regular no infinito, com  $1/R^2$ .

#### 7.4 — Descontinuidade do campo quando se atravessa uma superfície carregada (distribuição contínua)

Procedamos agora a uma análise local do que se passa sobre uma superfície carregada no tocante ao campo eléctrico produzido por esta distribuição. Seja  $Q$  um ponto sobre a superfície carregada  $S$ ,  $\Pi$  o plano tangente a  $S$  em  $Q$ ; designemos por  $\oplus$  e  $\ominus$  as duas regiões do espaço separadas por  $S$  na zona aqui considerada; tomemos sobre a normal a  $S$  em  $Q$  o vector unitário dessa direcção orientado de  $\ominus$  para  $\oplus$ ,  $\vec{n}$



cas orientado de  $\ominus$  para  $\oplus$ ,  $\vec{n}$  (ver Fig. 29). Qualquer vector  $\vec{A}$  aplicado no ponto  $Q$  define com  $\vec{n}$  um plano normal a  $S$  que corta  $\Pi$  segundo uma determinada tangente; seja  $\vec{t}$  um vector unitário dirigido segundo essa tangente. É evidente que  $\vec{A}$  admite a decomposição

$$\vec{A} = A_n \vec{n} + A_t \vec{t}$$

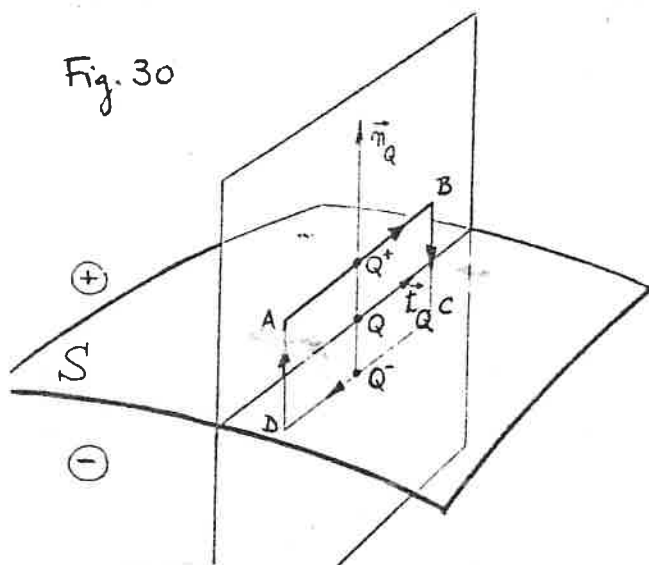
sendo  $A_n$  e  $A_t$  designadas por (respectivamente) componente normal e componente tangencial de  $\vec{A}$ , em relação a  $S$  em  $Q$ . (\*) A análise local que vamos fazer incide justamente sobre as componentes normal e tangencial do campo eléctrico. Para levar a cabo esta análise, sempre com base

(\*) Esta decomposição confunde-se com a que é traduzida pela identidade (1.75) 
$$\vec{A} = (\vec{A} \cdot \vec{n}) \vec{n} + \vec{n} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{n}),$$
 com a identificação dada na legenda da Fig. 29.

na assimilação da distribuição contínua em superfície a uma distribuição compacta de cargas pontuais, utilizaremos as propriedades integrais do campo generalizadas no § 3. para as distribuições de cargas pontuais, a saber, as relações (1.27) e (1.28').

#### 7.4.1 — Continuidade da componente tangencial.

Consideremos um qualquer plano normal a  $S$  em  $Q$ , intersectando  $\Pi$  segundo uma determinada tangente; designemos por  $\vec{t}_Q$  o vector unitário de uma orientação fixada sobre essa tangente. Sobre esse plano normal, com centro em  $Q$  e na sua vizinhança, descrevamos um rectângulo: com dois lados infinitamente pequenos, paralelos à tangente, um na região  $\oplus$  outro na região  $\ominus$  e passando respectivamente pelos pontos  $Q^+$  e  $Q^-$  infinitamente próximos de  $Q$  sobre a normal; sendo os outros dois lados (dirigidos segundo a normal) infinitamente pequenos de ordem superior relativamente aos primeiros (ver Fig. 30). Calculemos a



circulação do campo ao longo deste rectângulo no sentido indicado na Figura; ela compõe-se de quatro circulações elementares, sendo as paralelas à normal desprezáveis em face das paralelas à tangente, pois os percursos respectantes às primeiras são infinitésimos de ordem superior relativamente aos outros dois e o campo  $\vec{E}$  é finito em todos os pontos exterior a  $S$ .

As circulações paralelas à tangente somam (se fôr  $|\vec{AB}| = |\vec{CD}| = dl$ ):

$$\vec{E}(Q^+) \cdot \vec{AB} + \vec{E}(Q^-) \cdot \vec{CD} = \vec{E}(Q^+) \cdot \vec{t}_Q dl + \vec{E}(Q^-) \cdot (-\vec{t}_Q) dl$$

Então, se aplicarmos a relação (1.27) (o rectângulo é circuito fechado), se dividirmos por  $dl$  e se passarmos ao limite quando o rectângulo se contrai sobre o ponto  $Q$ , resulta:

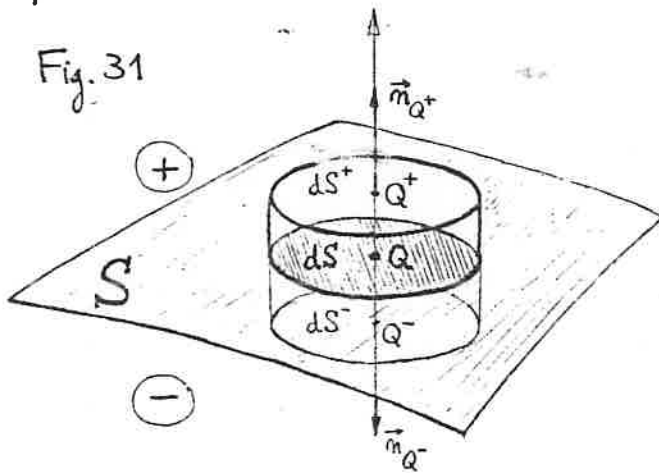
$$(1.76) \quad (\vec{E}_Q^+ - \vec{E}_Q^-) \cdot \vec{t}_Q = 0 \quad ,$$

se designarmos por  $\vec{E}^+$  e  $\vec{E}^-$  os limites do valor (vectorial) do campo quando se tende para  $Q$  (sobre  $S$ ) caminhando pela região  $\oplus$  e caminhando pela região  $\ominus$ , respectivamente. (\*) A relação obtida, (1.76), significa que qualquer componente tangencial do campo eléctrico não sofre descontinuidade quando o observador atravessa a superfície carregada.

continuidade  
da componente  
tangencial do  
campo

### 7.4.2 — Descontinuidade da componente normal

Consideremos agora um elemento da superfície carregada,  $dS$ , circunvizinho a  $Q$ ; e, tomando o contorno de  $dS$  como directriz, descrevamos um cilindro de geratrizes paralelas à normal em  $Q$  e com bases paralelas ao plano tangente, uma na região  $\oplus$ ,  $dS^+$ , outra na região  $\ominus$ ,  $dS^-$ , e passando respectivamente pelos pontos  $Q^+$  e  $Q^-$  infinitamente próximos de  $Q$  sobre a normal (ver Fig. 31). Suponhamos que a altura do cilindro é um infinitésimo de ordem superior relativamente a qualquer dimensão linear das bases; nestas condições a área lateral é desprezável em face da área de qualquer das bases. A superfície limítrofe do cilindro (superf. lateral + bases) é uma superfície fechada



a que pode aplicar-se o teorema de Gauss, sob a forma (1.28').

[Com efeito, nenhuma carga existe sobre a superfície limítrofe do cilindro, nem mesmo no contorno de  $dS$  que é a sua intersecção com a superfície carregada  $S$ . Sendo o contorno um domínio linear (com área nula), é nula a carga de distribuição superficial nele contida.]  
Calculemos o fluxo de  $\vec{E}$  que sai através da superfície limítrofe do

(\*) No cálculo da circulação  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ , os pontos em que o retângulo furta a superfície  $S$ , de eventual descontinuidade para  $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ , não contam para o integral.

cilindro. O fluxo através da superfície lateral é desprezável face aos fluxos através das bases, por ser desprezável a área lateral face a  $dS^+$  ou  $dS^-$  e  $\vec{E}$  ser finito em todo o ponto exterior a  $S$ . (\*)

Os fluxos que saem através das bases  $dS^+$  e  $dS^-$  (fluxos elementares) valem, respectivamente,  $\vec{E}(Q^+) \cdot \vec{n}_{Q^+} dS^+$  e  $\vec{E}(Q^-) \cdot \vec{n}_{Q^-} dS^-$ .

Por outro lado, a carga interior à superfície limitrofe do cilindro vale  $\sigma(Q) dS$ . Então, a aplicação do teorema de Gauss sob a forma (1.28') conduz a

$$\vec{E}(Q^+) \cdot \vec{n}_{Q^+} dS^+ + \vec{E}(Q^-) \cdot \vec{n}_{Q^-} dS^- = 1/\epsilon_0 \sigma(Q) dS.$$

Notando que  $dS^+ = dS^- = dS$  (e estas quantidades podem suprimir-se da equação) e que  $\vec{n}_Q = \vec{n}_{Q^+} = -\vec{n}_{Q^-}$ , e se passarmos ao limite quando o cilindro se contrai sobre o ponto  $Q$ , vem:

$$(1.77) \quad (\vec{E}_Q^+ - \vec{E}_Q^-) \cdot \vec{n}_Q = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(Q),$$

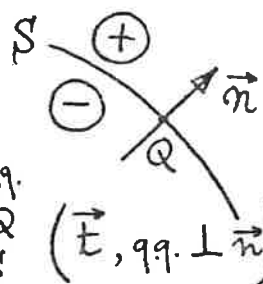
tendo  $\vec{E}^+$  e  $\vec{E}^-$  o significado já atribuído no § 7.4.1.

A relação obtida, (1.77), significa que a componente normal do campo eléctrico sofre uma descontinuidade quando o observador atravessa a superfície carregada e que o valor local dessa descontinuidade é  $1/\epsilon_0 \sigma(Q)$ .

### 7.4.3 — Expressão geral da descontinuidade

As conclusões dos parágrafos precedentes, (1.76) e (1.77), podem ser reunidas num esquema geral, como segue:

$$(1.78) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\vec{E}^+ - \vec{E}^-) \cdot \vec{n} = \sigma/\epsilon_0 \\ (\vec{E}^+ - \vec{E}^-) \cdot \vec{t} = 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{num qq.} \\ \text{ponto } Q \\ \text{sobre } S \end{array} \right\} \quad \left( \vec{E}, \text{ qq. } \perp \vec{n} \right).$$



(\*) No cálculo deste fluxo, o contorno de  $dS$ , que pertence ao domínio de integração, e é constituído de pontos onde eventualmente o campo é descontínuo, não conta todavia para o integral, por ser um domínio linear (de área nula).



Isto significa que: Embora qualquer componente tangencial seja sempre contínua, o campo eléctrico produzido por uma distribuição superficial é em geral descontínuo quando se atravessa a superfície, porque a componente normal o é em geral, apresentando uma descontinuidade proporcional, em cada ponto da superfície, à densidade superficial de carga nesse ponto, mediante o factor de proporcionalidade  $1/\epsilon_0$ . O campo é contínuo ao atravessar-se a superfície apenas nos pontos em que seja  $\sigma = 0$ . Pode escrever-se uma expressão global para a descontinuidade de  $\vec{E}$  sobre uma superfície carregada num ponto genérico  $Q$ : (\*)

$$(1.79) \quad \vec{E}_Q^+ - \vec{E}_Q^- = \frac{\sigma(Q)}{\epsilon_0} \vec{n}_Q \quad \left( \vec{n}_Q: \begin{array}{c} \oplus \\ \uparrow \\ \ominus \end{array} \right)$$

(\*) Uma alternativa para representar equivalentemente o comportamento de  $\vec{E}$  quando se atravessa a superfície é ainda a seguinte:

$$(1.80) \quad \begin{cases} (\vec{E}_Q^+ - \vec{E}_Q^-) \cdot \vec{n}_Q = 1/\epsilon_0 \sigma(Q) \\ (\vec{E}_Q^+ - \vec{E}_Q^-) \wedge \vec{n}_Q = 0 \end{cases}$$

em conformidade com a decomposição descrita por (1.75). [O anulamento da componente tangencial descrita por  $\vec{n} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{n})$  é condição necessária e suficiente para o anulamento de qq. comp. tang. de  $\vec{A}$ .]

Como uma consequência da descontinuidade de  $\vec{E}$ , as linhas de força do campo têm, em geral, sobre uma superfície carregada, pontos singulares de interrupção (traduzindo a não existência de campo, pontualmente) que são ao mesmo tempo pontos angulosos (traduzindo o salto entre os valores (vectoriais)  $\vec{E}^-$  e  $\vec{E}^+$ ). Tal comportamento é descrito como refracção das linhas de força. Como decorre claramente de (1.79), a não existência de descontinuidade na componente tangencial do campo determina que os dois limites  $\vec{E}_Q^+$  e  $\vec{E}_Q^-$  assentem no mesmo plano normal, visto que fazem

uma diferença paralela a  $\vec{n}_Q$ ; e determina também que os dois limites tenham iguais componentes tangenciais (segundo q.q. orientações tangencial)  $\vec{E}'_0$

que mostra a Fig. 32, com um caso de  $\sigma(Q) > 0$  (representa-se a tangente do mesmo

plano normal já referido, com um vector unitário  $\vec{t}_Q^*$  que é o vector de  $\vec{n} \wedge (\vec{E}_Q^+ \wedge \vec{n})$ , por ex.). Tais observações são úteis para o traçado das figuras de refração das linhas de força.

Recordando que as condições de descontinuidade (1.78) constituem uma tradução sobre a superfície carregada das duas propriedades fundamentais (1.27) e (1.28'), as quais se traduzem nas distribuições contínuas em volume por (1.68) — podemos inferir que as relações (1.68) se transformam nas relações (1.78) quando uma distribuição volumica em camada evolue por condensação da carga para uma distribuição em superfície (ver § 7.2). Por isso alguns autores apontam as relações (1.78) como a degenerescência das relações (1.68), na mesma perspectiva em que a distribuição contínua em superfície é vista como uma degenerescência da distribuição contínua em volume numa camada.

### 7.5 — Continuidade do campo nos pontos exteriores à distribuição superficial

Análises locais idênticas às que foram realizadas nos §§ 7.4.1 e 7.4.2 poderiam obviamente ensaiar-se em qualquer ponto M exterior à distribuição superficial, utilizando uma superfície  $\Sigma_M$  puramente geométrica, a passar por M, como referência. No tocante ao § 7.4.1, a demonstração pode ser retida por inteiro. E a respeito do § 7.4.2, a inexistência de qualquer carga

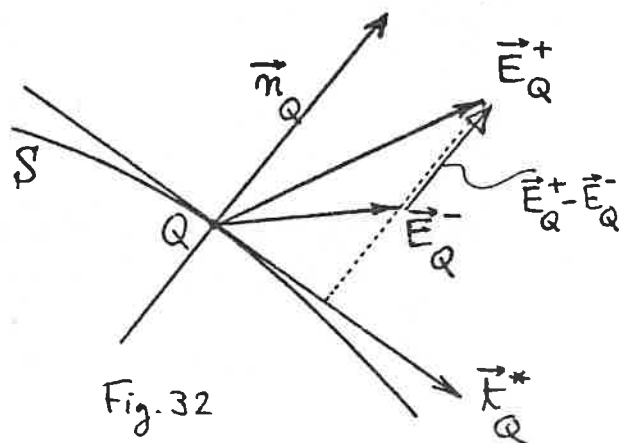


Fig. 32

superficial sobre a superfície auxiliar  $\Sigma_M$  acaba evidentemente por conduzir à continuidade do campo. (\*) Justifica-se assim a afirmação do § 7.3, pág. 64.

(\*) A mesma ideia pode aplicar-se às distribuições contínuas em volume, para pontos exteriores ou para pontos interiores à distribuição, indiferentemente, com a mesma conclusão de continuidade do campo. Com efeito, mesmo quando  $M$  é um ponto interior a uma distribuição volumica, a superfície auxiliar  $\Sigma_M$  nunca contém sobre ela qualquer carga superficial. Mais formalizadamente: recordando a demonstração do § 7.4.2, pode observar-se que a carga contida no interior de um cilindro análogo ao da Fig. 31 para a presente situação (de uma distribuição volumica) — tende para zero quando o cilindro se contrai sobre o ponto  $M$ . É claro que a demonstração do § 7.4.1 pode ser retida por inteiro, também aqui. Assim fica justificada a afirmação do § 6.2, pág. 52.

Deve por fim observar-se que em todo o ponto exterior à distribuição superficial, analogamente ao que se passa com uma distribuição volumica, o campo cumpre as equações diferenciais

$$(1.81) \quad \begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbb{P}} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{rot}_{\mathbb{P}} \vec{E} = 0 \end{cases} \quad \left( \mathbb{P}, \text{ ponto exterior} \right. \\ \left. \text{à distribuição} \right)$$

que resultam aqui por uma análise idêntica à que foi feita para as distribuições em volume. Da transcrição destas equações no formalismo do potencial (mediante  $\vec{E} = -\operatorname{grad}_{\mathbb{P}} V$  — expressão idêntica à 2ª eq. (1.81) —, que vai introduzir-se na 1ª eq. (1.81)) resulta mais uma vez  $\operatorname{lap}_{\mathbb{P}} V = 0$ . A equação de Laplace cumpre-se em todo o ponto  $\mathbb{P}$  exterior à distribuição — no espaço livre de cargas.

## 8. CONDUTORES NA ELECTROSTÁTICA

Vamos a partir de agora ocupar-nos das distribuições de carga eléctrica nos corpos materiais, aplicando-lhes os estudos precedentes sobre distribuições idealizadas. Começaremos pelas distribuições nos condutores em equilíbrio electrostático.

### 8.1 — Introdução. Electões livres e electões ligados.

Recorde-se a distinção entre condutores e isolantes, sugerida pelos diferentes comportamentos dos corpos nos fenómenos de electrização (§ 1.1 - II). Um corpo condutor caracteriza-se pela grande mobilidade que nele manifestam as cargas eléctricas, que lhe são comunicadas. Note-se no entanto que esta faculdade que a electricidade possui de se mover livremente se verifica na realidade apenas no interior do condutor; na superfície limitrofe só podem produzir-se livremente deslocamentos tangenciais ou dirigidos para o interior; as ligações existentes entre a matéria e a electricidade impedem os deslocamentos normais à superfície limitrofe, que levariam as cargas a sair do condutor para o vácuo. Entretanto, num corpo isolante, as cargas eléctricas não possuem mobilidade.

As propriedades reveladas experimentalmente pelos condutores, designadamente no tocante ao equilíbrio electrostático e à corrente eléctrica, podem ser razoavelmente interpretadas quando se tem em conta a constituição atómico-molecular da matéria e os comportamentos diversos, ao nível microfísico, que somos levados a admitir para as partículas elementares constituintes. (\*)

---

(\*) Deve fazer-se a reserva de que uma compreensão profunda dos fenómenos e uma interpretação minimamente rigorosa dos dados experimentais só podem atingir-se mediante o recurso ao tratamento dos sistemas atómico-moleculares no âmbito da Mecânica Quântica, o que fica obviamente fora do alcance deste Curso.

Os átomos podem agregar-se entre si de modos muito diferentes na constituição da matéria. Assim, para um corpo no estado gasoso, os átomos encontram-se, em geral, agrupados em pequenos núme-ro constituindo edifícios mais complexos, as moléculas, com dimensões ainda da mesma ordem de grandeza que as dos átomos —  $1 \text{ \AA}$ . A distância média entre duas moléculas, em condições normais de pressão e temperatura, é da ordem de grandeza de  $10^3 \text{ \AA}$ , isto é, suficientemente elevada, face às dimensões das moléculas, para que estas se possam considerar isoladas, ou submetidas a interações muito fracas. Pode dizer-se portanto que, neste tipo de agregação atômico-molecular, os electrões apresentam um comportamento ditado só pela dinâmica interna da molécula a que pertencem. Entretanto, no extremo oposto, para um corpo sólido, todos os átomos constitutivos se encontram muito mais próximos uns dos outros: a distância entre dois átomos vizinhos é aí da ordem de  $1 \text{ \AA}$ , ou seja, da própria dimensão dos átomos, ou ainda, da distância que separa os electrões do núcleo. Existe assim uma forte interação entre os átomos que se reflecte macroscopicamente na coesão e nas conhecidas propriedades mecânicas dos sólidos. Mas essa forte interação também vai traduzir-se no facto de que os electrões num corpo sólido se podem comportar de maneira muito diferente da dos electrões de um corpo no estado gasoso. Com efeito, neste tipo de agregação atômico-molecular, os electrões, ainda submetidos à dinâmica interna do átomo a que estão originariamente adstritos, podem ser no entanto profundamente influenciados no seu comportamento pelas acções exercidas pelos átomos vizinhos, extremamente próximos. Isto é particularmente flagrante nos metais, dada a sua estrutura cristalina em que os átomos se agregam em arranjos regulares, especialmente periódicos, no interior de volumes com dimensões de  $10^2$  a  $10^4 \text{ \AA}$ , por sua vez agregáveis em estru-

turas mais amplas, e em que os núcleos ocupam posições sensivelmente fixas. Podemos esquematizar os comportamentos dos electrões na rede cristalina de um metal em duas categorias:

(i) Os electrões que, no átomo isolado, se encontram mais perto do núcleo, estão no metal submetidos ainda, preponderantemente, à dinâmica interna do átomo e permanecem portanto na vizinhança próxima do núcleo. É o comportamento dos electrões ligados.

(ii) Os electrões que, no átomo isolado, se encontram mais afastados do núcleo (os periféricos), ficam no metal submetidos às acções eléctricas de todas as cargas que os envolvem; e, dada a regularidade da rede cristalina constituinte, os efeitos de tais acções podem ser quase perfeitamente compensados, de forma que alguns desses electrões deixam de estar localizados na vizinhança de um núcleo particular. Eles circulam então por todo o volume da estrutura cristalina a que pertencem. É o comportamento dos electrões livres.

Podem mostrar-se que o conjunto dos electrões livres se move no interior do metal segundo leis estatísticas semelhantes às que regem o movimento completamente desordenado das moléculas de um gás num recinto fechado. (\*) É a existência deste "gás" de electrões livres em constante agitação completamente desordenada em torno dos núcleos e com capacidade para se moverem ao longo de toda a rede cristalina — que explica a fácil mobilidade das cargas eléctricas nos condutores.

Os electrões livres não podem todavia abandonar o metal (através da superfície limitrofe) — isso requer um trabalho de extracção muito elevado (\*). [Quando a temperatura se eleva ou quando sobre a superfície se criam campos muito intensos, mesmo a frio, consegue-se extrair electrões para fora de um metal, mas não

(\*) Cf. Genthzen & Kneser, Física (trad. portug.), 1973, pg 240-241.

consideraremos aqui tais experiências.]. Num bom condutor, a densidade volúmica em electrões livres — que difere de metal para metal — é sempre muito elevada (\*). Admite-se, em contrapartida, que num isolante todos os electrões se comportam como electrões ligados, explicando-se assim a não existência de mobilidade para as cargas eléctricas. Os diversos materiais da Natureza, entre estas duas situações limites, justificam-se-iam como condutores da electricidade em maior ou menor grau consoante a sua densidade volúmica em electrões livres. [\*] Ver Pág. anterior]

## 8.2 — Noção de condutor perfeito. Princípio de Poisson

A fim de facilitar o tratamento físico-matemático de abordagem das propriedades dos condutores, convém introduzir o conceito de Condutor perfeito, que é um conceito-limite do qual os condutores reais se aproximam assintoticamente. Pode definir-se condutor perfeito como um corpo homogéneo no interior do qual as cargas eléctricas têm a mais completa mobilidade (limitada apenas no tocante aos deslocamentos normais à superfície limítrofe que levariam as cargas a sair do condutor para o vácuo). Na perspectiva do parágrafo precedente, um condutor perfeito constituiria um reservatório inesgotável de electrões livres. Do conceito de condutor perfeito decorre uma propriedade fundamental designada por Princípio de Poisson: Em todo o ponto interior de um condutor perfeito em equilíbrio electrostático, o campo eléctrico é nulo:

$$(1.82) \quad \underline{\vec{E}}_{\text{interior}} \equiv 0$$

Com efeito, se fosse  $\vec{E} \neq 0$  nalgum ponto interior do condutor haveria aí uma força média significativa actuando sobre os electrões livres — presentes em qualquer elemento de volume — e estes deslocar-se-iam, o que contradiz a hipótese de equilíbrio electrostático. Veremos que deste Princípio decorre todo o presente estudo.

## 8.3 — Consequências imediatas do Princípio de Poisson

### 8.3.1 — A distribuição de carga num condutor em equilíbrio electrostático

Em conformidade com as considerações do § 8.1, a distribuição da electricidade num condutor deverá sem dúvida descrever-se, em tratamento macroscópico como uma distribuição contínua de cargas eléctricas em volume ou em superfície. (\*) Mas, começando por inquirir da possível existência de uma efectiva distribuição em volume, o exame da equação de Poisson (1.61), aplicável nessa eventualidade, afasta decisivamente tal ideia. Com efeito, sendo nulo o campo no interior do condutor (pelo Princípio de Poisson), tem-se aí  $\text{div } \vec{E} = 0$  e portanto  $\rho = 0$ . Quer dizer: em cada elemento de volume no interior do condutor, as cargas positivas e negativas das partículas (estatisticamente) nele existentes neutralizam-se entre si, de modo exacto. Então, forçosamente, a carga total de um condutor acha-se inteiramente repartida, em distribuição contínua, pela sua superfície limítrofe. Damos a seguir dois exemplos simples de distribuições.

---

(\*) Com efeito, as mínimas dimensões sobre que incidem as experiências usuais da Electrostatica (macroscópicas) são muito grandes à escala atómica<sup>(†)</sup> e cada elemento de volume de observação contém miríades de partículas constituintes da matéria com suas respectivas cargas (electrões, núcleos; ou: electrões livres, iões fixos na rede cristalina); mas isso significa que, à escala do observador (macroscópica), a estrutura granular da electricidade, característica da constituição atómico-molecular da matéria, é completamente inobservável, deixando transparecer uma imagem de continuum, tal como acontece com a estrutura granular da própria matéria.

---

(†) Para se fazer uma ideia concreta: num sólido cristalino, sobre um comprimento de 1  $\mu\text{m}$ , há um número de átomos da ordem de  $10^4$ .



Exemplo (1): Suponhamos um condutor carregado e isolado de quaisquer acções eléctricas exteriores. Uma vez que não há qualquer outra fonte, a distribuição da carga do condutor pela sua superfície limitrofe, descrita por uma função  $\sigma(Q)$ , há-de ser tal que produza (ela própria, por si só) um campo efectivamente nulo em todo o ponto interior. Torna-se evidente que a função  $\sigma(Q)$ , condicionada por essa exigência, vai depender essencialmente da forma geométrica da superfície limitrofe. Em particular, se se trata de um corpo esférico, a densidade superficial  $\sigma$  correspondente, deve, por razão de simetria, ser uniforme (com o mesmo valor sobre toda a superfície); e é fácil verificar que uma distribuição uniforme de carga numa superfície esférica produz efectivamente um campo nulo em todo o ponto interior.

Exemplo (2): Consideremos agora um condutor neutro, que é colocado num campo fixo, de valor  $\vec{E}_0(P)$  em cada ponto P. É de indagar por que processo físico vai o condutor atingir o equilíbrio electrostático. Os electrões livres presentes em toda a massa do corpo, submetidos agora ao campo  $\vec{E}_0(P)$ , tenderão naturalmente a mover-se na direcção e no sentido contrário do campo, indo acumular-se sobre determinadas regiões da superfície limitrofe do condutor (a qual constitui barreira para tais deslocamentos) e aí se gerará portanto uma densidade superficial de carga  $\sigma < 0$ ; opera-se, ao mesmo tempo, necessariamente, uma rarefacção de electrões livres noutras regiões da superfície limitrofe, em que se gerará portanto uma densidade  $\sigma > 0$ . Mas esta nova distribuição de cargas no condutor (\*) produz um novo campo que contraria e tende a equilibrar, em cada ponto, o campo pré-existente. Os movimentos efectivos dos electrões livres cessam quando, em cada ponto interior, o campo total for nulo. O condutor adquire então a distribuição de equilíbrio electrostático, em que permanece. [ (\*) Um condutor neutro, isolado de quaisquer acções eléctricas, tem densidade de carga nula, em todos os pontos da superfície limitrofe.]

Exemplo (1) : Suponhamos um condutor carregado e isolado de quaisquer acções eléctricas exteriores. Uma vez que não há qualquer outra fonte, a distribuição da carga do condutor pela sua superfície limitrofe, descrita por uma função  $\sigma(Q)$ , há-de ser tal que produza (ela própria, por si só) um campo efectivamente nulo em todo o ponto interior. Torna-se evidente que a função  $\sigma(Q)$ , condicionada por essa exigência, vai depender essencialmente da forma geométrica da superfície limitrofe. Em particular, se se trata de um corpo esférico, a densidade superficial  $\sigma$  correspondente, deve, por razão de simetria, ser uniforme (com o mesmo valor sobre toda a superfície); e é fácil verificar que uma distribuição uniforme de carga numa superfície esférica produz efectivamente um campo nulo em todo o ponto interior.

Exemplo (2) : Consideremos agora um condutor neutro, que é colocado num campo fixo, de valor  $\vec{E}_0(P)$  em cada ponto P. É de indagar por que processo físico vai o condutor atingir o equilíbrio electrostático. Os electrões livres presentes em toda a massa do corpo, submetidos agora ao campo  $\vec{E}_0(P)$ , tenderão naturalmente a mover-se na direcção e no sentido contrário do campo, indo acumular-se sobre determinadas regiões da superfície limitrofe do condutor (a qual constitui barreira para tais deslocamentos) e aí se gerará portanto uma densidade superficial de carga  $\sigma < 0$ ; opera-se, ao mesmo tempo, necessariamente, uma rarefacção de electrões livres noutras regiões da superfície limitrofe, em que se gerará portanto uma densidade  $\sigma > 0$ . Mas esta nova distribuição de cargas no condutor (\*) produz um novo campo que contraria e tende a equilibrar, em cada ponto, o campo pré-existente. Os movimentos efectivos dos electrões livres cessam quando, em cada ponto interior, o campo total for nulo. O condutor adquire então a distribuição de equilíbrio electrostático, em que permanece. [ (\*) Um condutor neutro, isolado de quaisquer acções eléctricas, tem densidade de carga nula, em todos os pontos da superfície limitrofe.]

### 8.3.2 — Potencial de um condutor

Se  $\vec{E} = 0$  em todo o ponto interior do condutor em equilíbrio electrostático (Princípio de Poisson), então a função potencial, que permite deduzir o campo pela operação  $\vec{E} = -\text{grad } V$ , é uma função constante no interior do condutor:  $V = \text{const.}$ . E, sendo a função potencial contínua mesmo sobre a distribuição (Ver § 7.3, pag 65), conclui-se que  $V(P)$  tem, à superfície limítrofe do condutor, o mesmo valor constante que no interior. Então: A superfície limítrofe de um condutor em equilíbrio electrostático é uma superfície equipotencial. Mais: Um condutor em equilíbrio electrostático é uma região equipotencial. Sendo possível adoptar a convenção  $V_\infty = 0$ , como vamos supor<sup>(\*)</sup>, pode dizer-se que o condutor electrizado em equilíbrio electrostático possui um potencial bem definido, que passa a designar-se por potencial do condutor.

Repare-se agora que as superfícies equipotenciais infinitamente próximas do condutor, no exterior, têm, pela continuidade da função potencial, quase a mesma forma que a superfície limítrofe, ela própria equipotencial. Nestas condições (e como será adiante confirmado), o campo em pontos infinitamente próximos do condutor, por ser  $\vec{E} = -\text{grad } V$ , dirige-se necessariamente segundo a normal à superfície limítrofe nesse local; as linhas de força do campo partem do condutor ou terminam no condutor, com direcção normal à superfície limítrofe. (Note-se que no interior do condutor não se definem linhas de força, por ser  $\vec{E} = 0$ ).

[<sup>(\*)</sup> Esta convenção só não pode adoptar-se quando a distribuição de cargas atinge regiões no infinito.]

### 8.3.3 — Campo num ponto exterior infinitamente vizinho de um condutor. Fórmula de Coulomb.

Porque a carga de um condutor se acha repartida, em distribuição contínua superficial, pela sua superfície limítrofe, o campo é descontínuo ao atravessar-se essa superfície (Ver § 7.4). Cumpre-se com efeito a relação (1.79) que neste caso assume a forma

$$\vec{E}_Q^{\text{ext}} - \vec{E}_Q^{\text{int}} = \frac{\sigma(Q)}{\epsilon_0} \vec{n}_Q$$

sendo:  $\vec{E}_Q^{\text{ext}}$  e  $\vec{E}_Q^{\text{int}}$

os limites do valor (vectorial) do campo quando se caminha para o ponto  $Q$  da superfície limítrofe, respectivamente, por fora e por dentro do condutor; e  $\vec{n}_Q$  o vector unitário da normal à superfície em  $Q$ , orientado de dentro para fora. Mas, pelo Princípio de Poisson,  $\vec{E}^{\text{int}} = 0$  e daí resulta

$$(1.83) \quad \vec{E}_Q^{\text{ext}} = \frac{\sigma(Q)}{\epsilon_0} \vec{n}_Q, \text{ ou: } \begin{cases} (E_n^{\text{ext}})_Q = \frac{\sigma(Q)}{\epsilon_0} \\ (E_t^{\text{ext}})_Q = 0 \end{cases}$$

o que significa que o campo num ponto exterior infinitamente vizinho do condutor ( $\vec{E}_Q^{\text{ext}} \equiv \vec{E}(Q^+)$ ) é normal à superfície limítrofe, orientado para fora ou para dentro do condutor consoante  $\sigma(Q) > 0$  ou  $\sigma(Q) < 0$  e tem uma intensidade dada em valor algebrico por  $1/\epsilon_0 \sigma(Q)$ . Este resultado confirma as conclusões do § precedente sobre as linhas de força e ainda permite avançar que: as linhas de força partem de pontos do condutor onde  $\sigma > 0$  ou terminam em pontos onde  $\sigma < 0$ . (\*)

Atendendo agora a que  $\vec{E} = -\text{grad} V$ , pode escrever-se, a partir

(\*) Deve porém observar-se que uma determinada linha de força não pode emanar de um ponto de um condutor para ir terminar em outro ponto do mesmo condutor, com um trajecto exclusivamente no espaço livre entre os dois pontos. O potencial teria então que passar por um mínimo nalgum ponto intermédio, onde não há cargas, o que é impossível (Ver § 8.5.2, pag. ).

de (1.83) :

$$(1.83') \quad \sigma(Q) = -\epsilon_0 \left( \frac{\partial V}{\partial n_Q} \right)_{\text{ext}}$$

que é a fórmula de Coulomb : permite achar  $\sigma$  em cada ponto da superfície limítrofe do condutor desde que se consiga, por algum método, obter a função potencial e seja exequível o cálculo da derivada dirigida  $\partial V / \partial n$ , suposta conhecida a forma geométrica da superfície limítrofe.

## 8.4 — Outras consequências importantes

Ocupemo-nos agora de outras consequências importantes do Princípio de Poisson, as quais constituem no seu conjunto uma primeira abordagem do tratamento dos conhecidos fenômenos de influência electrostática. Já se reportam com efeito a alguns aspectos da interacção entre condutores.

### 8.4.1 — Teorema dos elementos correspondentes

Consideremos dois condutores electrizados  $C_1$  e  $C_2$  em presença um do outro, em equilíbrio electrostático. Tomemos um tubo elementar de linhas de força partindo todas do condutor  $C_1$  e terminando todas no condutor  $C_2$ ; suponhamos que este tubo de linhas de força,  $T$ , delimita sobre  $C_1$  uma área elementar  $dS_1$ , sobre  $C_2$  uma área elementar  $dS_2$  (Ver Fig. 33); sejam  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  as densidades de carga sobre  $dS_1$  e  $dS_2$ , respectivamente.

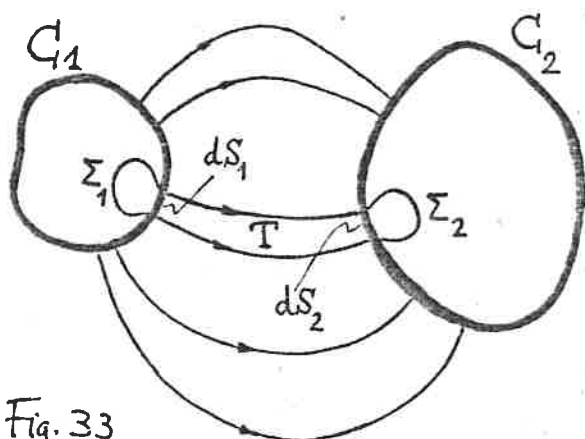


Fig. 33

Elementos de área assim delimitados em dois condutores por um mesmo tubo de linhas de força, tais como  $dS_1$  e  $dS_2$ , recobertos pelas cargas  $\sigma_1 dS_1$  e  $\sigma_2 dS_2$ , — designam-se por elementos correspondentes. Imaginemos

agora duas calotas  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  apoiadas respectivamente nos contornos de  $dS_1$  e  $dS_2$  e interiores aos respectivos condutores  $G_1$  e  $G_2$  (V. Fig. 33). Com estas duas calotas e o tubo de linhas de força  $\Gamma$ , completa-se uma superfície fechada  $\Gamma \equiv \Sigma_1 \cup \Gamma \cup \Sigma_2$ , à qual podemos aplicar o teorema de Gauss. Ora o fluxo do campo eléctrico através da superfície fechada  $\Gamma$  é nulo, porque, por um lado, sobre as calotas, interiores aos condutores, o campo é nulo (Princípio de Poisson) e, por outro lado, sobre o tubo  $\Gamma$  o campo é tangencial (pela definição de linhas de força). Então, nula é também (teorema de Gauss) a soma das cargas eléctricas contidas no interior dessa superfície fechada  $\Gamma$ , ou seja, das cargas  $\sigma_1 dS_1$  e  $\sigma_2 dS_2$ . Portanto:

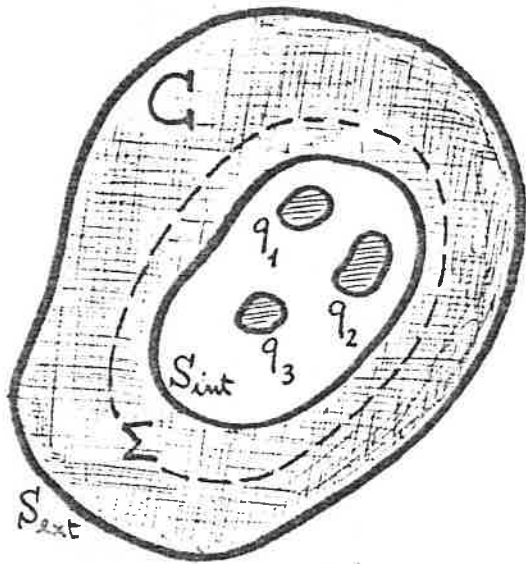
$$(1.84) \quad \sigma_1 dS_1 = -\sigma_2 dS_2 \quad ;$$

ou seja: as cargas que recobrem elementos correspondentes são iguais e de sinais contrários. É o teorema dos elementos correspondentes. Há assim uma interdependência bem precisa entre as distribuições de carga que recobrem os dois condutores  $G_1$  e  $G_2$  que se enfrentam mutuamente; tal interdependência constitui uma faceta quantitativa da interpretação teórica dos fenômenos de influência electrostática.

#### 8.4.2 — Condutor com cavidade

Consideremos agora um condutor  $G$  possuindo no seu interior uma cavidade (uma região ôca) dentro da qual se encontram outros condutores eletrizados, isolados de  $G$ , com cargas genericamente designadas por  $q_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ), estando o conjunto em equilíbrio electrostático. Sejam  $S_{int}$  e  $S_{ext}$  as duas folhas da superfície limítrofe do condutor  $G$  (Ver Fig. 34).  $S_{int}$  é a superfície que delimita a cavidade do condutor  $G$ . A carga total de  $G$ ,  $Q$ , encontra-se geralmente repartida sobre  $S_{int}$  (com um valor global  $Q_{int}$ )

e sobre  $S_{ext}$  (com um valor global  $Q_{ext}$ ), podendo eventualmente esta repartição ter um carácter algebrico: será sempre  $Q = Q_{int} + Q_{ext}$  mas as quantidades  $Q_{int}$  e  $Q_{ext}$  poderão ser de sinais contrários. Vamos mostrar que a carga que recobre  $S_{int}$  (ou distribuída sobre  $S_{int}$ ) é igual em módulo e de sinal contrário à soma das cargas situadas no interior da cavidade. Basta para isso aplicar o



teorema de Gauss a uma superfície fechada,  $\Sigma$ , toda ela no interior do condutor, envolvendo completamente a cavidade, sem tocar nem em  $S_{int}$  nem em  $S_{ext}$  (Ver Fig. 34). Ora, o fluxo através de  $\Sigma$  é nulo, porque em todo o ponto de  $\Sigma$ , interior ao condutor, o campo é nulo (Princípio de Poisson); nula é portanto também,

pelo teorema de Gauss, a soma das cargas contidas dentro de  $\Sigma$ , donde resulta

$$(1.85) \quad Q_{int} = - \sum_{k=1}^n q_k,$$

c.q.d. Repare-se que este resultado é absolutamente independente do valor de  $Q_{ext}$ , portanto da carga total do condutor  $C$ ,  $Q$ . Se se altera, por algum processo, a electrização de  $C$  e a sua carga total se modifica para  $Q' = Q + \Delta Q$ , então, deve modificar-se  $Q_{ext}$  da mesma quantidade  $\Delta Q$ , porque  $Q_{int}$  permanece invariante a fim de que se cumpra sempre (1.85) com cargas  $q_k$  que entretanto não sofreram qualquer alteração. A relação (1.85) constitui uma nova faceta quantitativa da interpretação teórica dos fenómenos de influência electrostática. Descreve a influência mútua entre a superfície que delimita a cavidade,  $S_{int}$ , e os condutores que

estão situados no interior da cavidade. Note-se enfim que este resultado e o do § precedente não são independentes; na verdade, pode mostrar-se que (1.85) mais não é que o efeito global da aplicação formalizada do teorema (1.84) ao condutor com cavidade.

### 8.4.3 — Exemplos simples de influência electrostática

Apresentam-se exemplos de situações de influência electrostática aos quais se aplicam os resultados precedentes.

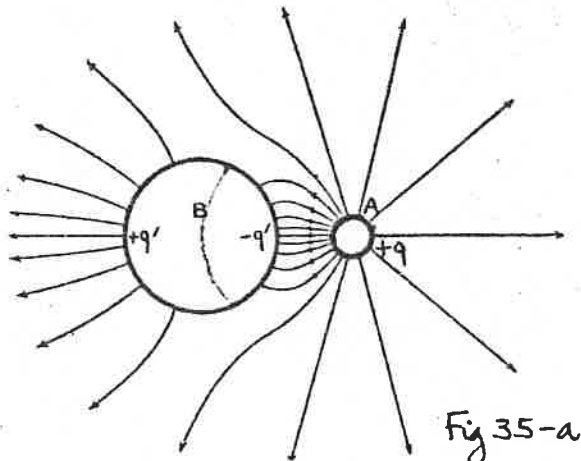


Fig 35-a

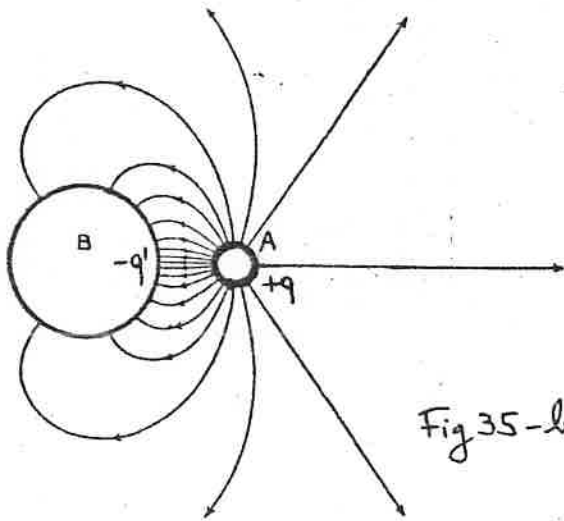


Fig 35-b

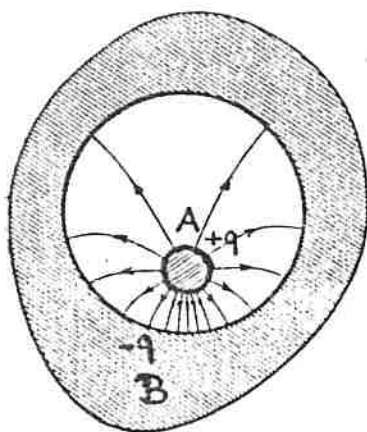


Fig 36

resulta que estas duas superfícies contêm cargas iguais e de sinais contrários,  $+q$  em A gera  $-q$  em B. É a situação descrita como de influência total, justificada por aplicação do teorema dos elementos correspondentes, ou do estudo do condutor com cavidade.

A Fig 35-a descreve a influência entre um condutor A com carga  $+q$  e um condutor B neutro, mantido isolado. A Fig 35-b descreve a influência entre os mesmos dois condutores, quando B passa a estar ligado ao solo (posto ao potencial zero).

Em ambos os casos, uma parte das linhas de força que partem do condutor A vai terminar ao condutor B em pontos que se recobrem de carga negativa, indo a parte restante perder-se no infinito. A zona da superfície de B carregada negativamente não corresponde senão a uma parte da superfície de A. Daqui resulta que a carga negativa global gerada sobre B ( $-q'$ ) por influência é inferior em valor absoluto à carga contida em A ( $+q$ ):  $q' < q$ .

Trata-se de uma aplicação do teorema dos elementos correspondentes. Seja agora o caso da Fig 36, em que um condutor A, carregado positivamente ( $+q$ ), é completamente envolvido por um condutor B, neutro: então, todas as linhas de força partindo de A terminam forçosamente em B; pode fazer-se corresponder elemento por elemento a superfície interior de B à superfície exterior de A, donde



## 8.5 — Problema fundamental da Electrostática

### 8.5.1 — Posição do problema

Consideremos, no vácuo, um sistema de  $N$  condutores eletrizados, isolados uns dos outros, em posições fixas no espaço e em equilíbrio electrostático. O sistema é suposto estar isolado no espaço, isto é, fora do alcance de qualquer acção produzida por fontes exteriores. Pelo Princípio de Poisson,  $\vec{E} = 0$  no interior de cada condutor e pode afirmar-se não só que cada condutor vai estar a um determinado potencial mas também que as cargas dos condutores se localizam nas suas superfícies limitrofes, de tal modo que estamos em presença de uma distribuição superficial de carga sobre uma superfície complexa (pelo menos a  $N$  folhas). Tal situação esquemática representa, de forma generalizada, os fenómenos de influência mútua entre condutores em equilíbrio electrostático (ou: influência electrostática).

Preende-se achar o campo  $\vec{E}(P)$  para todo o ponto exterior dos condutores (no espaço livre), na situação acima genericamente especificada. Adopta-se naturalmente a via de procurar uma função potencial  $V(P)$  que satisfaça, de modo geral, às propriedades que lhe podem ser atribuídas no caso de uma distribuição contínua em superfície (§§ 7.3 e 7.5) e ainda, de modo particular, às condições que deve respeitar no domínio dos condutores na Electrostática (§§ 8.3.2 e 8.3.3). Obtida a função  $V(P)$ , o campo virá dado pela operação  $-\text{grad} V$ .

Neste problema radica a resolução de muitos outros, importantes nas aplicações; alguns autores designam-no como Problema fundamental da Electrostática.

Procurando sistematizar, pode dizer-se que o problema consiste em encontrar, no espaço livre, a função  $V(P)$  (i) que seja solução da equação de Laplace (Cl. (1.81)) e

suas implicações imediatas, pag 72) :

$$(1.86) \quad \text{lap } V = 0 \quad ; \text{ e}$$

(ii) que satisfaça as seguintes condições suplementares :

a)  $V(P)$  deve ser função contínua, como potencial correspondente a uma distribuição contínua em superfície (Cf. § 7.3, pag 65) ; e em particular deve ter-se — condições cor limites —

$$(1.87) \quad \lim_{P \rightarrow P_\alpha} V(P) = V_\alpha \text{ (constante)} \quad (\alpha = 1, \dots, N)$$

sendo  $P_\alpha$  o ponto genérico do condutor  $\alpha$  e  $V_\alpha$  o potencial do condutor  $\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, N$ ).

b)  $V(P)$  deve ser regular no infinito com  $1/R$  e  $\text{grad}_P V$  deve ser regular no infinito com  $1/R^2$ , qñ  $R \rightarrow \infty$ , se for  $R$  a distância de um ponto arbitrariamente fixado do sistema de condutores, ao ponto potencializado  $P$ .

c)  $V(P)$  deve fornecer pela fórmula de Coulomb, (1.83'), a densidade superficial de carga  $\sigma(Q_\alpha)$  em cada ponto  $Q_\alpha$  da superfície limitrofe  $S_\alpha$  do condutor  $\alpha$  — ver condições de fronteira (agora em função de V) —

$$(1.88) \quad \sigma(Q_\alpha) = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n_{Q_\alpha}} \quad (\alpha = 1, \dots, N)$$

sendo  $n_{Q_\alpha}$  a coordenada da normal a  $S_\alpha$  no ponto  $Q_\alpha$ , orientada para o exterior. Em consequência disto, ter-se-á, se for  $Q_\alpha$  a carga total do condutor  $\alpha$  :

$$(1.89) \quad Q_\alpha = -\epsilon_0 \int_{S_\alpha} \frac{\partial V}{\partial n_{Q_\alpha}} dS_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, N)$$

(Note-se que as condições (1.88) são as de descontinuidade do campo sobre as superfícies dos condutores).

As condições (1.87) e (1.89) designam-se habitualmente por condições-fronteira : elas dizem respeito à fronteira entre o espaço livre e o sistema. Pode dizer-se que são estes dois conjuntos

de  $N$  condições cada, que acarretam para a resolução do problema grandezas ligadas à especificação concreta de uma situação electrostática no sistema dos  $N$  condutores: os seus potenciais  $V_\alpha$  e as suas cargas totais  $q_\alpha$ . [As condições (1.88) são a esse respeito uma alternativa, aliás mais complexa, às cond. (1.89); e as restantes condições, a que  $V(\mathbf{P})$  deve satisfazer, são independentes da especificação concreta da situação electrostática do sistema.]

### 8.5.2 — Unicidade da solução

A experiência revela que se estabelece no sistema atrás descrito um estado de equilíbrio electrostático bem definido: (a) sempre que se carregam os diversos condutores com dadas cargas; ou (b) sempre que os diversos condutores são mantidos a dados potenciais; ou ainda (c) sempre que se carregam com dadas cargas alguns dos condutores e se mantêm os restantes a dados potenciais. Pode provar-se teoricamente que em qualquer destas hipóteses de trabalho, (a), (b) ou (c), o problema fundamental da Electrostática, que atrás foi posto, tem efectivamente uma única solução.

Isso significa que, fixados (dados) os valores de  $N$  determinadas grandezas, escolhidas de entre os  $V_\alpha$  ( $\alpha=1, \dots, N$ ) e os  $q_\alpha$  ( $\alpha=1, \dots, N$ ) consoante a hipótese adoptada (a), (b) ou (c), — haverá uma única solução para  $V(\mathbf{P})$  e, em consequência, um único valor para o campo em cada ponto do espaço,  $\vec{E}(\mathbf{P})$ , e um valor bem determinado para cada uma das grandezas intervenientes no problema, como decorre do § 8.5.1. Assim, para cada um dos conjuntos ordenados dos valores dados das  $N$  grandezas escolhidas, vai haver um estado de equilíbrio electrostático bem definido.

Num mesmo sistema de  $N$  condutores, perfeitamente caracterizado do ponto de vista geométrico, basta mudar os valores dados das mesmas

referidas  $N$  grandezas para passar a outro estado de equilíbrio electrostático, em geral distinto, com uma outra solução única para  $V(\mathcal{P})$ .

### 8.5.3 — Princípio de sobreposição de estados de equilíbrio

Podem pois ser estabelecidos num sistema tantos estados de equilíbrio electrostáticos quantos se queira, em geral distintos uns dos outros, em correspondência com os diferentes conjuntos ordenados de valores dados das referidas  $N$  grandezas, que arbitrarmos.

Consideremos então dois desses estados de equilíbrio electrostáticos, supostos distintos; designemo-los por I e II, e seja  $V^{\text{I}}(\mathcal{P})$  [ seja  $V^{\text{II}}(\mathcal{P})$  ] a função potencial, única, válida para o estado I [ para o estado II ] ; o valor de qualquer outra grandeza interviniente no problema, para um certo estado de equilíbrio, obtém-se a partir da respectiva função potencial.

Imaginemos agora uma função  $V^{\text{III}}(\mathcal{P})$  construída mediante a composição linear

$$(1.93) \quad V^{\text{III}}(\mathcal{P}) = \lambda_{\text{I}} V^{\text{I}}(\mathcal{P}) + \lambda_{\text{II}} V^{\text{II}}(\mathcal{P})$$

(em que  $\lambda_{\text{I}}$  e  $\lambda_{\text{II}}$  são coeficientes constantes arbitrários), e construamos as grandezas  $V_{\alpha}^{\text{III}}$ ,  $e_{\alpha}^{\text{III}}$  e  $\sigma(Q_{\alpha})$  à custa das suas homólogas para os estados I e II e mediante composições lineares idênticas a (1.93) (portanto com os mesmos coeficientes  $\lambda_{\text{I}}$  e  $\lambda_{\text{II}}$ ). Podemos dizer que estamos a construir assim uma composição linear de dois estados de equilíbrio, ou, numa linguagem mais corrente, a realizar uma sobreposição de dois estados de equilíbrio.

Ora, tendo em conta o carácter linear da equação de Laplace (eq. diferencial (1.86)), tendo em conta também o carácter linear das operações de passagem ao limite, das operações de derivação e das operações de integração envolvidas nas

condições suplementares a), b) e c) (da pag 86), e tendo em conta ainda o carácter homogêneo de todas as relações matemáticas que intervêm no processo, em  $V(P)$ ,  $V_\alpha$ ,  $e_\alpha$  e  $\sigma(Q_\alpha)$  — pode afirmar-se que, para a mesma geometria do sistema, a função  $V^{III}(P)$  bem como as grandezas  $V_\alpha^{III}$ ,  $e_\alpha^{III}$  e  $\sigma^{III}(Q_\alpha)$ , todas definidas por composições idênticas, do prototipo (1.93), respeitam o complexo de condições do problema (contido na pag. 86) e caracterizam, em consequência, um novo estado de equilíbrio no mesmo sistema. Então: Fixada a geometria do sistema, a composição linear de dois estados de equilíbrio conduz a um novo de estado de equilíbrio. É o Princípio de sobreposição de estados de equilíbrio, que constitui uma ferramenta muito expedita e eficaz na investigação de soluções para o Problema fundamental da Electrostatica e seus derivados. Obviamente, este princípio é correntemente utilizado no sentido da decomposição do estado de equilíbrio em estudos noutros estados mais simples, de solução conhecida.

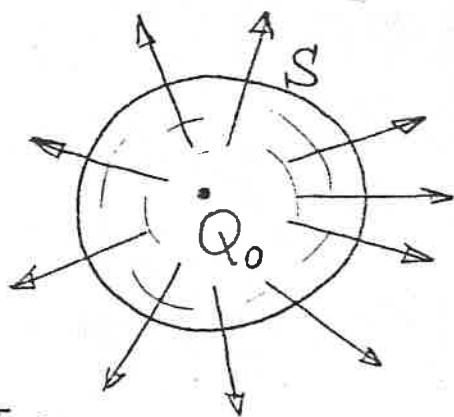
#### 8.5.4 — Importante propriedade da função $V(P)$

A função potencial no espaço livre de um sistema de condutores, da qual nos temos vindo a ocupar,  $V(P)$ , goza de uma importante propriedade, de que faremos uso nos parágrafos subsequentes. Convém estudá-la desde já. Essa propriedade pode apresentar-se sob a seguinte forma geral:

A função potencial do campo electrostatico não pode ter máximos nem mínimos numa região onde não há cargas eléctricas.

A demonstração baseia-se obviamente nas propriedades do campo; vamos fazê-la pelo método de redução ao absurdo. Supo-

nhamos, com efeito, que a função potencial era máxima num ponto  $Q_0$  da região em que não há cargas eléctricas. Então para todo o ponto  $Q$  numa vizinhança suficientemente pequena de  $Q_0$ , tem-se  $V(Q) < V(Q_0)$ : a função potencial decresce a partir de  $Q_0$ , qualquer que seja a direcção tomada pelo observador.



[Vectores do campo na vizinhança de  $Q_0$ ]

Figura 38

Daqui resulta que o campo nos pontos em torno de  $Q_0$  (ver Figura) se orienta sempre para fora (diverge a partir de  $Q_0$ ) — porque o campo se orienta sempre no sentido das equipotenciais decrescentes ( $\vec{E} = -\text{grad } V$ ). Em consequência, se considerarmos uma superfície fechada  $S$  suficientemente pequena, envolvendo  $Q_0$  no seu interior (ver Figura), o fluxo de  $\vec{E}$  para fora de  $S$  é essencialmente positivo por ser  $\vec{E} \cdot \vec{n} > 0$  em todos os pontos de  $S$ . Então, pelo teorema de Gauss deveria ser positiva a carga eléctrica interior a  $S$ , o que é manifestamente absurdo, por não haver cargas eléctricas na região. O absurdo resulta de ter-se suposto a existência de um máximo para  $V(P)$ . Analogamente para um mínimo.

## 8.6 — Relações entre as cargas e os potenciais de um sistema de condutores

### 8.6.1 — Linearidade das relações

Recapitulando os resultados da análise precedente do Problema fundamental da Electrostática (§§ 8.5.1, 8.5.2, 8.5.3) podemos afirmar que: (i) — dados os potenciais,  $V_\alpha$ , a função  $V(P)$  fica bem definida em todo o ponto do espaço — e é única — e as cargas,  $Q_\alpha$ , serão então univocamente determinadas por (1.89); e

(ii) - dadas as cargas,  $e_\alpha$ , a função  $V(P)$  fica bem definida em todo o ponto do espaço - e é única - e os potenciais,  $V_\alpha$ , serão então unívocamente determinados por (1.87). Assim, entre os potenciais dos condutores,  $V_\alpha$ , e as suas cargas totais,  $e_\alpha$ , têm que existir relações biunívocas bem definidas, as quais podem escrever-se na forma:

$$(1.96) \quad V_\alpha = f_\alpha(e_1, \dots, e_N) \quad (\alpha = 1, \dots, N)$$

ou na forma (absolutamente equivalente):

$$(1.97) \quad e_\alpha = g_\alpha(V_1, \dots, V_N) \quad (\alpha = 1, \dots, N)$$

sendo as  $N$  funções  $f_\alpha$  [as  $N$  funções  $g_\alpha$ ] (além de unívocas e bem definidas) sempre as mesmas para todo e qualquer estado de equilíbrio - ou seja: independentes dos estados de equilíbrio - . Esta última afirmação fundamenta-se em que, na análise acima referida, verifica-se ser sempre o mesmo o conjunto complexo de operações matemáticas que faz corresponder as cargas  $(e_1, \dots, e_N)$  aos potenciais  $(V_1, \dots, V_N)$  ou vice-versa, quaisquer que sejam os valores dos dados. Ora bem: E com base nesta independência dos estados de equilíbrio e como uma consequência do Princípio de sobreposição dos estados de equilíbrio (§ 8.5.3) que se pode ainda mostrar que as relações (1.96) e (1.97) são relações lineares e homogêneas. Elas podem pois escrever-se, respectivamente, sob a forma

$$(1.107) \quad V_\alpha = \sum_{\beta=1}^N C^{\alpha\beta} e_\beta \quad (\alpha = 1, \dots, N)$$

$$(1.108) \quad e_\alpha = \sum_{\beta=1}^N C_{\alpha\beta} V_\beta \quad (\alpha = 1, \dots, N)$$

com coeficientes  $C^{\alpha\beta}$  e  $C_{\alpha\beta}$  uns e outros independentes dos  $e_\alpha$  ou dos  $V_\alpha$ , quer dizer, independentes do estado de equilíbrio (diz-se por vezes: independentes do estado eléctrico do sistema de condutores). Estudaremos em seguida estes coeficientes.

Os coeficientes  $C^{\alpha\beta}$  são os coeficientes de potencial,  $C_{\alpha\beta}$  os coeficientes de capacidade (ou de influência) de  $N$  condutores dados ( $\alpha, \beta = 1, \dots, N$ ). Para os  $C_{\alpha\beta}$  é corrente fazer a distinção entre coeficientes de capacidade própria, para  $\alpha = \beta$ , e coeficientes de capacidade mútua, para  $\alpha \neq \beta$ . Como a cada dado grupo de valores  $(e_1, \dots, e_N)$  corresponde um e um só grupo de valores  $(V_1, \dots, V_N)$ , a matriz  $\{C^{\alpha\beta}\}$  é regular (não-singular,  $\det\{C^{\alpha\beta}\} \neq 0$ ) e  $\{C_{\alpha\beta}\}$  é a sua inversa:

$$(1.109) \quad \{C_{\alpha\beta}\} = \{C^{\alpha\beta}\}^{-1}$$

Atendendo a que os coeficientes  $C^{\alpha\beta}$  e  $C_{\alpha\beta}$  são independentes do estado de equilíbrio, podemos estudá-los através de uma expressão válida somente quando todos os  $e_\alpha$  sejam diferentes de zero, a qual vamos agora deduzir. Tomemos como potencial do condutor  $\underline{\alpha}$ ,  $V_\alpha$ , a expressão que dá, por cálculo directo, o potencial criado por todos os condutores numa fonte do condutor  $\alpha$ ,  $P_\alpha$ :

$$(1.110) \quad V_\alpha = k_0 \sum_{\beta=1}^N \int_{S_\beta} \frac{\sigma_\beta dS_\beta}{r_{\alpha\beta}} \quad (\alpha = 1, \dots, N)$$

em que  $r_{\alpha\beta}$  (abreviatura de  $r_{P_\alpha P_\beta}$ ) designa a distância do elemento potenciante  $\sigma_\beta dS_\beta$  (em que  $\sigma_\beta$  representa  $\sigma(P_\beta)$ ) ao ponto potenciado  $P_\alpha$  (Cf. 1.74-b, pag 54). Multipliquemos ambos os membros de (1.110) por  $\sigma_\alpha dS_\alpha$  ( $\sigma_\alpha \equiv \sigma(P_\alpha)$ ) e integremos em seguida sobre toda a superfície  $S_\alpha$  do condutor  $\underline{\alpha}$ . Temos:

$$V_\alpha e_\alpha = k_0 \sum_{\beta=1}^N \int_{S_\alpha} \int_{S_\beta} \frac{\sigma_\alpha \sigma_\beta dS_\alpha dS_\beta}{r_{\alpha\beta}}$$

ou ainda, se todos os  $e_\alpha$  forem diferentes de zero, como estamos a admitir,

$$(1.111) \quad V_\alpha = \sum_{\beta=1}^N e_\beta \left[ \frac{k_0}{e_\alpha e_\beta} \int_{S_\alpha} \int_{S_\beta} \frac{\sigma_\alpha \sigma_\beta dS_\alpha dS_\beta}{r_{\alpha\beta}} \right]$$



Donde se extrai, por identificaçães de (1.111) com (1.107):

$$(1.112) \quad C^{\alpha\beta} = \frac{\kappa_0}{\epsilon_\alpha \epsilon_\beta} \int_{S_\alpha} \int_{S_\beta} \frac{\sigma_\alpha \sigma_\beta dS_\alpha dS_\beta}{r_{\alpha\beta}}$$

A expressão (1.112) mostra que os coeficientes de potencial, e portanto também os coeficientes de capacidade, de um dado sistema de  $N$  condutores, dependem da forma, das dimensões e das posições relativas dos condutores, quer dizer, daquilo a que poderemos chamar globalmente configuração geométrica do sistema. (Note-se porém que os coeficientes de potencial próprio dependem apenas da forma e das dimensões do condutor em causa; mas isto já assim não acontece com os coeficientes de capacidade próprios.) A mesma expressão (1.112), insensível a uma troca de  $\alpha$  com  $\beta$ , revela ainda que  $C^{\alpha\beta} = C^{\beta\alpha}$  para  $\alpha \neq \beta$ , isto é, que as matrizes  $\{C^{\alpha\beta}\}$  e  $\{C_{\alpha\beta}\}$  são matrizes simétricas.

Outras propriedades destes coeficientes se extraem ainda aproveitando o facto de que eles não dependem do estado de equilíbrio e examinando certos estados de equilíbrio extremamente simples. Esse é o objecto dos próximos parágrafos.

### 8.6.3 — Propriedades específicas dos coeficientes de potencial, $C^{\alpha\beta}$

Consideremos o estado de equilíbrio simples caracterizado por  $e_\alpha = 1$ ;  $e_\beta = 0$  com  $\beta = 1, \dots, \alpha-1, \alpha+1, \dots, N$ .

As relações (1.107) dão neste caso:

$$(1.113) \quad V_\alpha = C^{\alpha\alpha}; \quad V_\beta = C^{\beta\alpha} \quad \text{com } \beta = 1, \dots, \alpha-1, \alpha+1, \dots, N.$$

Somos assim conduzidos a dizer que, de uma maneira geral,  $C^{\beta\alpha}$  mede o potencial a que fica o condutor  $\beta$  quando se carrega com uma unidade de carga eléctrica o condutor  $\alpha$ , tendo todos os outros condutores cargas totais nulas. É este o seu

significados físicos. Mas isso quer dizer que toda a informação que conseguirmos obter para os potenciais dos condutores neste estado de equilíbrio se traduz directamente numa informação sobre os coeficientes de potencial — e universalmente válida, porque os coeficientes não dependem dos estados de equilíbrio. Averiguemos então que relações podem ser estabelecidas entre os potenciais neste estado de equilíbrio.

Ora, por aplicações do teorema de Gauss a uma superfície fechada envolvendo completamente um condutor  $\beta$  ( $\beta = 1, \dots, \alpha-1, \alpha+1, \dots, N$ ), de carga total nula, deve haver perfeita compensação entre o fluxo dos tubos de linhas de força do campo eléctrico que partem deste condutor e o fluxo dos tubos de linhas de força que nele terminam. Mas as linhas de força de  $\vec{E}$  orientam-se de regiões onde o potencial é mais elevado para regiões onde o potencial é mais baixo. Então o potencial do condutor  $\beta$  estará compreendido entre os valores mais altos e os valores mais baixos do potencial. Por outro lado, não havendo máximos nem mínimos fora dos condutores, sendo nulo o potencial no infinito e certamente positivo o potencial a uma distância suficientemente grande da distribuição (que tem carga global  $+1$ ), resulta que  $V(P)$  é positivo por toda a parte com valor máximo no condutor  $\alpha$ , único carregado. Então, todo o  $V_\beta$  é positivo, mas nenhum é maior que  $V_\alpha$ . Em conclusão, por (1.113), podemos enunciar as seguintes propriedades dos coeficientes de potencial:

$$(1.114) \quad \begin{cases} C^{\alpha\beta} > 0 & (q.q^s \alpha \neq \beta) \\ C^{\alpha\beta} \leq C^{\alpha\alpha} & (\beta \neq \alpha) \end{cases}$$

, ou seja:

Todos os coeficientes de potencial são positivos, mas nenhum coeficiente mútuo é maior que qualquer dos próprios que lhe são correlativos (da mesma linha ou coluna na matriz)

### 8.6.4 — Propriedades específicas dos coeficientes de capacidade, $\hat{C}_{\alpha\beta}$

Consideremos o estado de equilíbrio simples caracterizado por

$$V_\alpha = 1; V_\beta = 0, \text{ com } \beta = 1, \dots, \alpha-1, \alpha+1, \dots, N.$$

As relações (1.108) dão neste caso:

$$(1.115) \quad e_\alpha = C_{\alpha\alpha}; \quad e_\beta = C_{\beta\alpha} \quad \text{com } \beta = 1, \dots, \alpha-1, \alpha+1, \dots, N.$$

Somos assim conduzidos a dizer que, de uma maneira geral,  $\frac{C_{\beta\alpha}}{C_{\alpha\alpha}}$  mede a carga total contida no condutor  $\beta$  quando se eleva ao potencial unidade o condutor  $\alpha$ , ficando todos os outros ao potencial zero. É este o seu significado físico. Mas isso quer dizer (semelhantemente ao caso do § 8.6.3) que toda a informação que conseguirmos obter para as cargas totais dos condutores neste estado de equilíbrio se traduz directamente numa informação sobre os coeficientes de capacidade — e universalmente válida porque os coeficientes não dependem dos estados de equilíbrio. Averiguemos então que relações podem ser estabelecidas entre as cargas neste estado de equilíbrio.

Em primeiro lugar, nenhuma linha de força pode partir de um condutor  $\beta$  ( $\beta = 1, \dots, \alpha-1, \alpha+1, \dots, N$ ), ao potencial zero; isso significaria, com efeito, haver um decréscimo de  $V(P)$  a partir do condutor  $\beta$  e acarretaria a existência de um mínimo fora dos condutores para que  $V(P)$  voltasse a atingir o valor zero no infinito ou sobre outro condutor

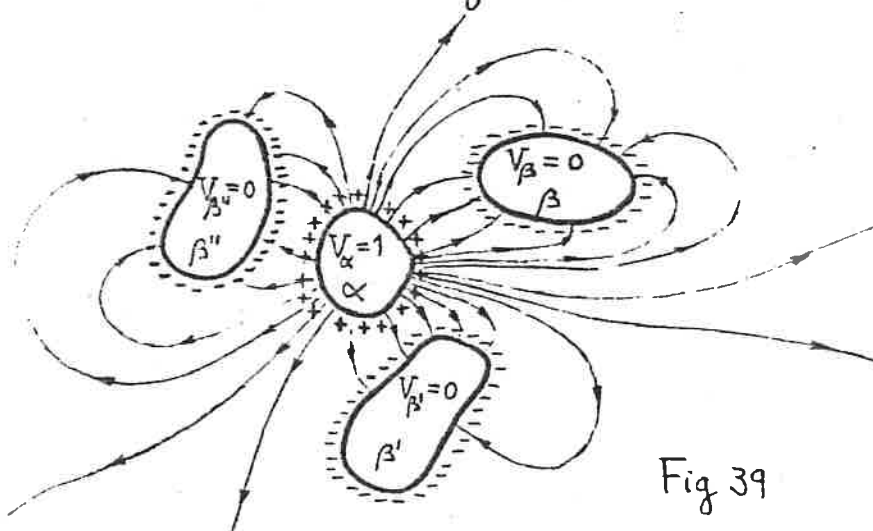


Fig 39

$\beta'$ , ou o valor 1 sobre o condutor  $\alpha$ . Então, as linhas de força do campo, que partem todas do condutor  $\alpha$ , único a potencial positivo, ou atingem os outros condutores, ou vão perder-se no  $\infty$  (Ver Fig 39).

Portanto, o condutor  $\alpha$  está carregado positivamente<sup>(\*)</sup> ( $q_\alpha > 0$ , que, por (1.115) conduz a  $C_{\alpha\alpha} > 0$ ) e os restantes estão carregados negativamente<sup>(\*)</sup> ( $q_\beta < 0$ , que por (1.115) conduz a  $C_{\beta\alpha} < 0$ , para  $\beta \neq \alpha$ ). Se lembrarmos agora o Teorema dos elementos correspondentes (§ 8.4.1), veremos que a soma das cargas negativas de todos os condutores  $\beta$  ( $\beta = 1, \dots, \alpha-1, \alpha+1, \dots, N$ ), que estão todos influenciados pelo condutor  $\alpha$  neste estado de equilíbrio, é menor do que a carga positiva do condutor  $\alpha$ , em valor absoluto. Esta diferença compreende-se pelo facto de existirem tubos de força que partem de  $\alpha$  e se vão perder no infinito, não atingindo qualquer condutor  $\beta$ . Mas no caso de um condutor envolver completamente outro (exemplo importante, a que voltaremos adiante) são iguais e de sinais contrários as cargas totais neles contidas, se o condutor envolvente está ao potencial zero (é o caso da influência total). Em suma teremos que as cargas cumprem a relação  $q_\alpha \geq - \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N q_\beta$ , no presente estado de equilíbrio. Relação que, por (1.115), se pode escrever para os coeficientes, mas então com validade geral.

Em conclusões podemos enunciar as seguintes propriedades dos coeficientes de capacidade: (\*)(\*)

$$(1.116) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{\alpha\alpha} > 0 \quad ; \quad C_{\alpha\beta} < 0 \quad (\beta \neq \alpha) \\ C_{\alpha\alpha} \geq - \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N C_{\beta\alpha} \quad \left( \begin{array}{l} \text{Sinal =, no caso} \\ \text{de influência total} \end{array} \right) \end{array} \right.$$

(\*)(\*) Entre as propriedades (1.116) e (1.114), existe evidentemente a interdependência que decorre do facto de serem as matrizes  $\{C_{\alpha\beta}\}$  e  $\{C^{\alpha\beta}\}$  inversas uma de outra. Prova-se facilmente a desigualdade da 2ª linha em (1.116), combinando (1.114) com a relação  $\{C_{\alpha\beta}\} \times \{C^{\alpha\beta}\} = \mathbb{1}$ .

(\*) Cf. § 8.3.3, pag 80.

## 8.7 — Condensadores

Consideremos um sistema de dois condutores, sendo um deles completamente envolvido pelo outro (v. Fig. 40). As relações (1.108) entre as cargas e os potenciais escrevem-se aqui como:

$$(1.117) \quad \begin{cases} e_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2 \\ e_2 = C_{21} V_1 + C_{22} V_2 \end{cases}$$

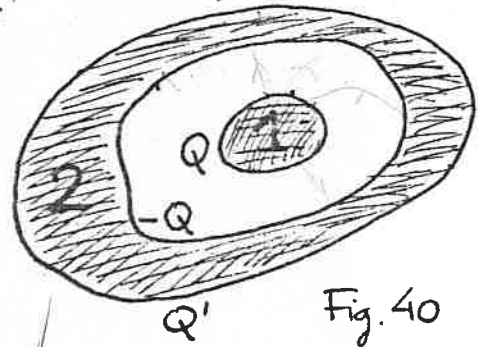


Fig. 40

Mas nós sabemos já que  $C_{12} = C_{21}$  (cf. § 8.6.2); e, por outro lado, por (1.116), vem  $C_{11} = -C_{12}$  (porque há influência total relativamente ao condutor 1, completamente envolvido) e  $C_{22} > -C_{21}$  (porque há influência total relativamente ao condutor 2).  
 Donde resulta que (1.117) passa a escrever-se:

$$(1.118) \quad \begin{cases} e_1 = C_{11} (V_1 - V_2) = Q \\ e_2 = -C_{11} (V_1 - V_2) + (C_{22} - C_{11}) V_2 = -Q + Q' \end{cases}$$

A 1ª eq. de (1.118) evidencia que há proporcionalidade directa entre  $Q$  e  $V_1 - V_2$ , grandezas do mesmo sinal ( $C_{11} > 0$ ). Na 2ª eq. põe-se em evidência a carga total  $Q'$  que recobre a superfície exterior do condutor 2, visto que, pelo teorema do condutor com cavidade, a superfície interior do condutor 2 se recobre sempre de uma carga total  $-Q$  (igual e de sinal contrário à carga total do condutor 1) — cf. 8.4.2. Tem-se portanto  $Q' = (C_{22} - C_{11}) V_2$ , o que evidencia haver proporcionalidade directa entre  $Q'$  e  $V_2$ , grandezas que são do mesmo sinal ( $C_{22} > C_{11} \Rightarrow C_{22} - C_{11} > 0$ ). Em

resumo:

(1.118')

$$\begin{cases} Q = C_{11} (V_1 - V_2) \\ Q' = (C_{22} - C_{11}) V_2 \end{cases}$$

$C_{22} > -C_{21}$   
 $C_{11} = -C_{12}$   
 $C_{22} - C_{11} > 0$

Pode considerar-se que são estas as equações que regem os estados eléctricos do sistema. Uma alteração qualquer de  $Q'$  produz uma alteração proporcional de  $V_2$ ; mas não pode alterar  $Q$ , carga total do condutor 1, isolado de 2;  $V_1$  alterar-se-á da mesma quantidade que  $V_2$ , de modo a que  $V_1 - V_2$  permaneça inalterado, como  $Q$ ; e inalterada fica também a carga total,  $-Q$ , da superfície interior do condutor 2, que continua a enfrentar a carga  $Q$  do condutor 1. [ Pode mesmo mostrar-se que as duas distribuições de carga, separadas pelo volume do condutor 2 — região de campo nulo —, são completamente independentes uma da outra. Igualmente independentes entre si são os campos nas duas regiões, interior e exterior, separadas pelo condutor 2. Uma alteração do campo exterior pode, quando muito, modificar uniformemente o potencial no interior, mas não o campo no interior — e não afecta, em particular, a diferença de potencial  $V_1 - V_2$ . O condutor 2 constitui um 'écran' eléctrico. ]

O sistema de dois condutores aqui considerado diz-se um condensador. A superfície do condutor 1 e a superfície interior do condutor 2, que se enfrentam mutuamente, chamam-se armaduras do condensador. Cargas totais  $Q$  e  $-Q$ , respectivamente na armadura interna e na armadura externa, enfrentam-se mutuamente em influência total sob uma diferença de potencial  $V_1 - V_2$  (d.d.p. entre as armaduras) proporcional e do mesmo sinal que  $Q$ . Diz-se que o condensador armazena a carga  $Q$ , ou que  $Q$  é a carga do condensador (ou: carga armazenada pelo condensador). A grandeza  $C = C_{11}$  chama-se capacidade do condensador (com a significação física de:

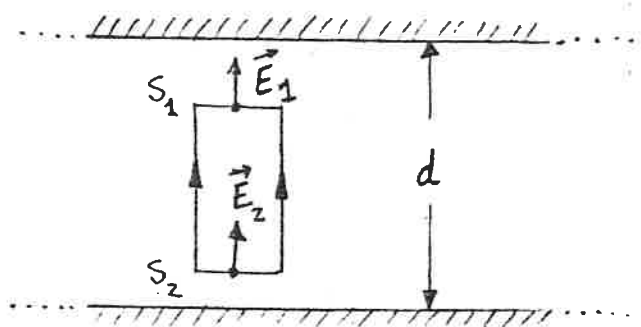
carga armazenada para uma d. d. p. entre as armaduras igual a uma unidade de potencial). Tem-se :

$$(1.119) \quad Q = C (V_1 - V_2) .$$

De uma maneira mais geral, mesmo se um dos corpos não envolve completamente o outro, pode ainda dizer-se que há influência total de um condutor (1) sobre um condutor (2), se todas as linhas de força do campo que partem do 1.º vão ter ao 2.º. Nesta situação mais geral, verifica-se ainda que as cargas globais das superfícies dos dois condutores, que se enfrentam mutuamente, são iguais e opostas,  $Q$  e  $-Q$ , e isto por força do teorema dos elementos correspondentes. Estes sistemas assim concebidos constituem também condensadores (o condensador plano é um típico exemplo disso). As considerações precedentes, as definições acima feitas e a fórmula (1.119) são ainda válidas e geralmente aplicáveis.

### 8.7.2. Condensador plano

As armaduras do condensador plano são limitadas por superfícies planas, paralelas, uma em face da outra, e a uma distância  $d$  muito menor que as suas dimen-



sões. Seja  $Q$  a carga do condensador; teremos, pois, numa das armaduras a carga  $+Q$  (armadura positiva) e na outra a carga  $-Q$  (armadura negativa).

Por razões de simetria o campo elétrico na região central do condensador é perpendicular às armaduras; então, se considerarmos o tubo de forças representado na figura, dado que as linhas de força do campo

são paralelas entre si (perpendiculares às armaduras), as áreas das secções,  $S_1$  e  $S_2$ , que limitam o tubo de força são iguais:  $S_1 = S_2 = S$ .

Se calcularmos o fluxo do campo eléctrico que sai da superfície  $\Sigma$  constituída pelo tubo de força e pelas secções consideradas teremos:

$$\phi = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds = E_1 S - E_2 S ;$$

o teorema de Gauss diz-nos que este fluxo é nulo, logo:

$$E_1 = E_2$$

isto é, o campo entre as armaduras é uniforme, pois as secções  $S_1$  e  $S_2$  são duas quaisquer secções (rectas), do tubo de força, do espaço entre as armaduras. Seja então,  $E$ , o valor do campo no espaço entre as armaduras; teremos

$$E = \sigma / \epsilon_0$$

( $\sigma$ , densidade superficial de carga eléctrica na armadura positiva do condensador), pois sabemos ser este o valor do campo eléctrico num ponto exterior, muito próximo, dum condutor em equilíbrio electrostático.

A diferença de potencial entre as armaduras do condensador,  $V$ , será dada por:

$$V = E \times d$$

$$V = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n} = -\epsilon_0 E$$

$$\begin{aligned} V &= -\int \epsilon_0 E \, du \\ &= -\epsilon_0 E \cdot \Delta u \\ &= -\epsilon_0 E d \end{aligned}$$



e a carga  $Q$  do condensador será igual a:

$$Q = \sigma A$$

$$Q = CV = \epsilon_0 \frac{A}{d} (V_1 - V_2)$$

onde  $A$  é a área das armaduras. A capacidade do condensador,  $C$ , será dada por:

$$(1.120) \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma A}{\sigma d / \epsilon_0} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

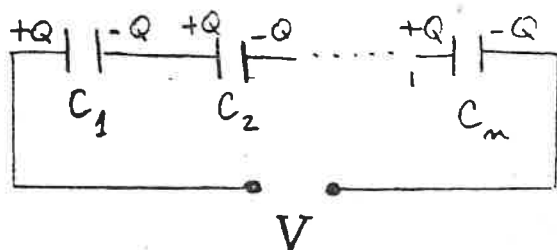
onde se vê, que a capacidade de um condensador plano é directamente proporcional à área das suas armaduras e inversamente proporcional à distância entre elas.

Nota: Ao efectuar estes cálculos desprezamos a perturbação do campo eléctrico (e portanto de  $\sigma$ ) nas extremidades das armaduras; dado que a distância entre estas,  $d$ , é muito menor que as suas dimensões lineares, este efeito é na verdade muito pequeno; foi calculado que a uma distância dos bordos, igual à distância entre as armaduras, o campo é apenas perturbado de ordem de  $10^{-4}$ .

### 8.7.3. Leis de associação de condensadores

#### a) Associação em série

Chama-se associação em série à associação representada na figura. Sejam  $C_1, C_2, \dots, C_n$  as capacidades dos  $n$  condensadores associados. Vamos calcular qual a capacidade,  $C$ , do condensador equiva-



lente,  $C$ , do condensador equiva-

lente a esta associação, isto é, do condensador que carregado com a mesma carga  $Q$ , fica submetido à mesma diferença de potencial  $V$  entre as suas armaduras; essa capacidade  $C$  satisfaz, portanto a

$$(1.121) \quad Q = C V$$

É evidente que se for  $+Q$  a carga fornecida à primeira armadura do condensador 1, na segunda armadura deste condensador aparecerá, por influência, a carga  $-Q$ , o que faz com que a primeira armadura do condensador 2 (que constitui com a segunda do condensador 1 um sistema isolado) fique carregada com a carga  $+Q$ ; entendendo este raciocínio em restantes condensadores é fácil concluir que todos eles ficam carregados com a mesma carga  $Q$ . Se for  $V_1$  a diferença de potencial entre as armaduras do condensador 1,  $V_2$  a d.d.p. entre as armaduras do condensador 2, etc., terá:

$$Q = C_1 V_1, \quad Q = C_2 V_2, \quad \dots \quad Q = C_n V_n$$

Teremos, por outro lado,

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n, \quad \text{ou seja}$$

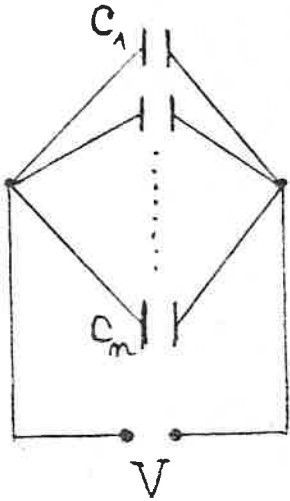
$$V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} = Q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

O que, comparando com a expressão (1.121) permite escrever:

$$(1.122) \quad \left| C = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \right|$$

## b) Associação em paralelo

Chama-se associação em paralelo à associação representada na figura. Como é evidente, a diferença de potencial entre as armaduras dos  $n$  condensadores tem o mesmo valor  $V$ ; será, então:



$$Q_1 = C_1 V, \quad Q_2 = C_2 V \dots \dots Q_n = C_n V.$$

Por outro lado, a carga  $Q$  fornecida ao sistema de condensadores vai distribuí-la entre eles, verificando-se necessariamente a relação:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n ;$$

teremos, pois:

$$Q = C_1 V + C_2 V + \dots + C_n V = \left( \sum_{i=1}^n C_i \right) V$$

expressão que comparada com (1.121) permite escrever:

$$(1.123) \quad \left| C = \sum_{i=1}^n C_i \right|$$

A capacidade  $C$  do conjunto dos  $n$  condensadores associados em paralelo é portanto igual à soma das capacidades dos  $n$  condensadores.

## 9. CAMPO ELECTROSTÁTICO NA PRESENÇA DE DIELÉCTRICOS

### 9.1 — Polarizações dos dieléctricos

Um corpo perfeitamente isolante e neutro não manifesta de per si qualquer acção eléctrica. Mas a experiência mostra que, quando se coloca um tal corpo na presença de corpos electrizados, aparecem modificadas as propriedades do campo electrostático pré-estabelecido por esses corpos electrizados. (As experiências esquematicamente representadas na Fig. 9-1 são disso exemplificativas.). Tais factos levam a pensar que o corpo isolante, neutro, se torna ele próprio fonte de uma acção eléctrica suplementar quando colocado sob a acção de corpos electrizados. E concluímos que devem verificar-se alterações na constituição eléctrica de um isolante quando ele é inserido num campo electrostático. Isso pode ser razoavelmente entendido quando se tem em conta a estrutura atómico-molecular da matéria.

Vimos já que num isolante ideal não há electrões livres; todos os electrões se comportam como electrões ligados, portanto, sem capacidade para constituírem suporte a um deslocamento efectivo de cargas à escala macroscópica. (Cf. § 8.1). Colocado um isolante num campo exterior, não é pois de esperar que as forças eléctricas, determinadas pelo campo sobre as cargas das partículas elementares constituintes do isolante, vão produzir qualquer deslocamento de cargas finito, à escala macroscópica. (Não é assim de esperar que os isolantes manifestem fenómenos de influência electrostática tão espectaculares como os dos condutores — as experiências esquematizadas nas Fig. 9-2, 3 ilustram isso.).

É no entanto de admitir que essas forças eléctricas, de

acção do campo sobre o isolante, provoquem uma modificação nos estados de movimento das partículas constituintes, conduzindo, naturalmente, a uma nova distribuição das suas posições médias, dentro de cada elemento de volume infinitamente pequeno (macroscópico). Na ausência de campo, um corpo isolante no estado neutro concebe-se como apresentando, em cada elemento de volume, uma distribuição das posições médias das suas partículas constituintes tal que se verifica, em geral, serem coincidentes os centros de cargas negativas e de cargas positivas; a distribuição tem assim, em cada elemento de volume, não só carga total nula, mas também um momento dipolar nulo (Cf. § 5A.3, pag 49<sup>VIII</sup>). Ora, a nova distribuição das posições efectivas (médias) das cargas dentro de cada elemento de volume  $dV$ , produzida quando o dieléctrico é imerso num campo exterior, implica em geral que deixem de coincidir os centros de cargas positivas e de cargas negativas para passarem a apresentar uma separação  $\vec{\delta}$ , infinitamente pequena, dentro de  $dV$ ; surge assim para a distribuição dentro de  $dV$ , que continua a ter carga total nula, um momento dipolar significativo, de valor  $e\vec{\delta}$ , se for  $e$  a carga positiva global dentro de  $dV$ . Em cada elemento de volume infinitamente pequeno do dieléctrico se gera assim, por acção do campo exterior, um dipolo de momento  $\vec{dp}$  ( $= e\vec{\delta}$ ) infinitamente pequeno com  $dV$ .

O dieléctrico revela-se pois como tendo adquirido, por acção do campo, em que está imerso, uma distribuição contínua de dipolos infinitamente pequenos. É o fenómeno de polarização de um dieléctrico. O dieléctrico diz-se polarizado.

## 9.2 — Experiências ilustrativas

### 9.2.1 — Placa dielétrica introduzida no espaço entre as armaduras de um condensador plano.

A experiência esquematizada na Fig 9-1 (I) permite pôr em evidência o facto de que a interposição de uma placa de

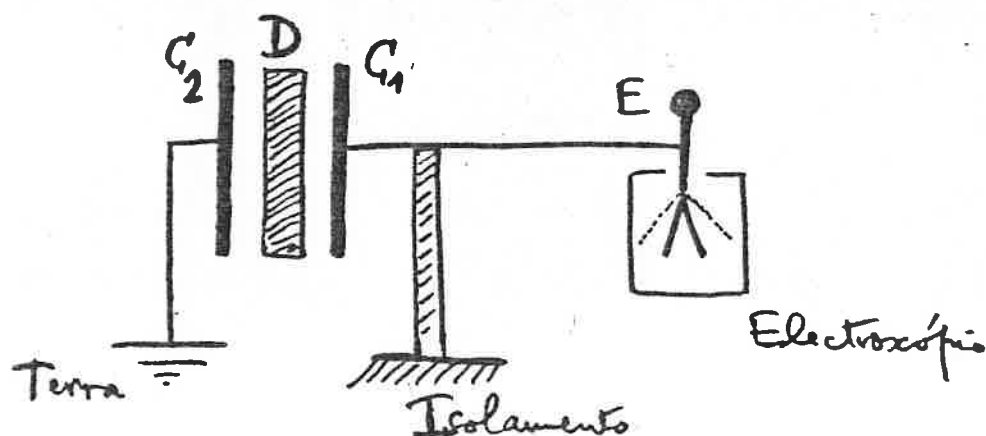


Fig. 9-1  
(I)

material isolante inicialmente neutra, entre as armaduras de um condensador, provoca a modificação das propriedades do campo aí pré-estabelecido. A inserção da placa  $D$  (sem mais) tem por efeito diminuir o potencial da armadura  $C_1$ , efeito este acusado pelo electoscópio  $E$  (ligado a  $C_1$  por um fio condutor). Estando  $C_2$  sempre ao potencial zero, esta diminuição do potencial de  $C_1$  comprova bem que a inserção da placa dielétrica provoca uma modificação do campo entre as armaduras do condensador. [ Como termo de comparação, é interessante considerar a experiência esquematizada na Fig 9-1 (II) em que o

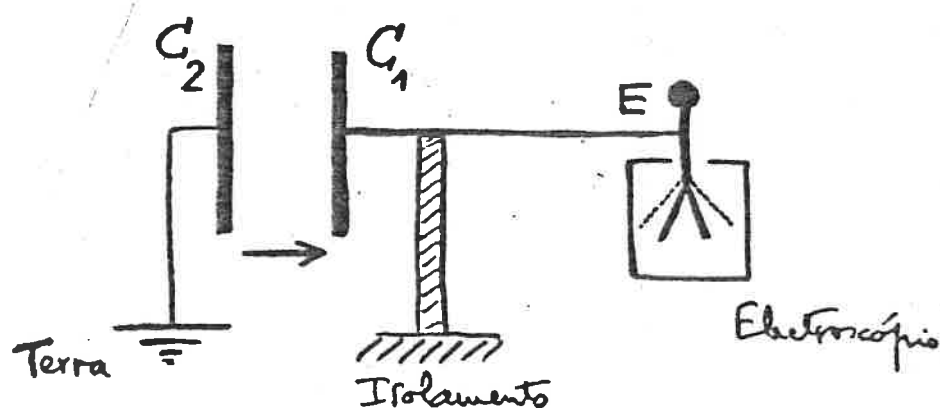


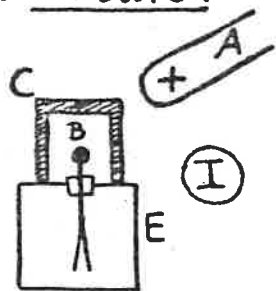
Fig. 9-1  
(II)

espaço entre as armaduras é simplesmente o vácuo. A redução da distância entre  $C_1$  e  $C_2$  provoca um efeito equiparável ao da inserção da placa D em (I). Sendo constante, em ambas as experiências, a carga contida no conjunto ( $C_1, E$ ), que se encontra isolado, e estando além disso  $C_2$  sempre ao potencial zero, a diminuição de potencial acusada pelo electrosópio E interpreta-se obviamente, em ambos os casos, como um aumento da capacidade do condensador.]

### 9.2.2 — Distinção entre os comportamentos de um condutor e de um dieléctrico, sob a acção de um campo.

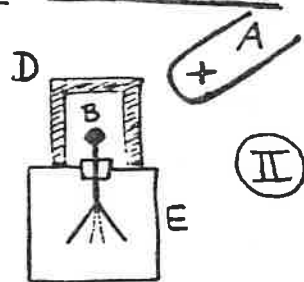
As experiências esquematizadas na Fig 9-2 (I e II) permitem pôr em evidência de modo flagrante que um condutor e um isolante se comportam de maneiras radicalmente diferentes sob a acção de um campo exterior. Em (I), a acção eléctrica produzida pelo corpo electrizado A, não se exerce sobre a pequena esfera B — o electrosópio E fica insensível — e isso é devido à interposição do copo C, de material condutor. Em (II), a acção eléctrica produzida pelo corpo electrizado A atinge a esfera B — o electrosópio acusa um potencial bem apreciável — apesar da interposição do copo D, de material dieléctrico. Assim, uma ca-

C: CONDUTOR



Campo nulo  
em B

D: DIELECTRICO



Campo não nulo  
em B

Figura 9-2

mada fechada de isolante envolvendo uma cavidade (experiência (II)) não produz efeito de écran eléctrico para os corpos dentro da cavidade — efeito esse bem conhecido para o caso de a camada fechada ser condutora (experiência (I)).

Sabe-se que na existência de um efeito de écran eléctrico desempenha um papel proeminente o facto de que a camada condutora fechada (experiência (I)) constitui uma região de campo nulo. E sabe-se também que, por seu turno, este facto se acha essencialmente ligado à grande mobilidade dos electrões livres, suporte de toda a distribuição de cargas num condutor.

Porque se não produz, no caso da experiência (II), efeito de écran eléctrico, é de esperar que a camada fechada isolante (cabo D) não constitua uma região de campo nulo. Mas isso comprova que, face a um corpo electrizado influenciante, a modificação da constituição eléctrica de um isolante polarizado é radicalmente distinta de que se produz num condutor. A alteração da repartição das posições médias das cargas constituintes de um dieléctrico (ao contrário do que se passa com um condutor) é estritamente local visto ser fundada nas modificações dos estados de movimento dos electrões ligados.

### 9.2.3 — Inseparabilidade das cargas induzidas num dieléctrico polarizado

Começamos por recordar a experiência esquematizada na Fig. 9-3 (I). Os dois condutores  $C_1$  e  $C_2$  inicialmente neutros

#### Influência electrostática em condutores

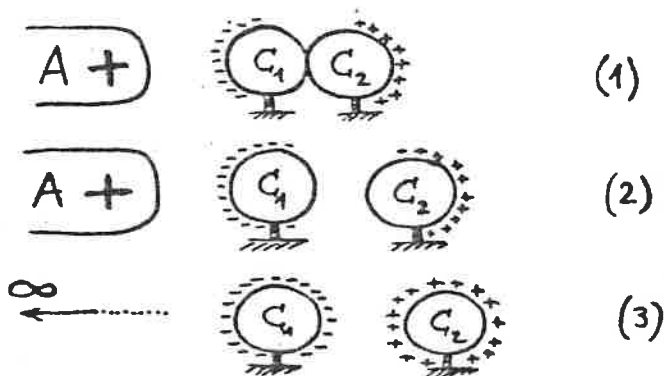


Figura 9-3 (I)

são postos em contacto um com o outro constituindo assim um conjunto-condutor que vai ser submetido à influência electrostática do corpo A, carregado positivamente. [Situação (I)-(1)] Surgem cargas negativas na região mais próxima de A (que pertence a  $C_1$ ) e cargas



positivas na região mais afastada de A (que pertence a  $C_2$ ). Separados em seguida os dois condutores  $C_1$  e  $C_2$  na presença do corpo influenciante A [situação (I) - (2)], e afastado depois o corpo A para muito longe (a distância infinita) [situação (I) - (3)], então os dois condutores manifestam-se carregados com cargas de sinais contrários ( $C_2$  com carga do mesmo sinal que A,  $C_1$  com carga de sinal contrário à de A) — como pode verificar-se pela sua acção sobre pêndulos eletrizados. Isto significa que os condutores  $C_1$  e  $C_2$ , aquando da sua separação em presença de A, levam consigo as cargas geradas por influência electrostática nas respectivas regiões do conjunto — condutor e conservam depois essas cargas quando a acção influenciante deixa de existir (quando o corpo A é afastado para muito longe). As cargas de influência, positivas e negativas, geradas num condutor são susceptíveis de se localizar em regiões muito afastadas, à escala macroscópica, dentro do condutor e podem em consequência ser separadas umas das outras mediante processos similares aos descritos acima. (Mais uma vez, é o gás de electrões livres o suporte desta movimentação).

Descrivamos agora a experiência esquematizada na Fig. 9-3 (II), em que se procura repetir, agora com um corpo dieléctrico em vez de um condutor, a experiência (I) atrás referida. Um bloco dieléctrico, (de parafina dura, por exemplo) inicialmente neutro, também se electriza sob a influência do corpo A, i. e., também vê modificada a sua constituição eléctrica (situação (II) - (1)). Um electroscópio que se aproxime,

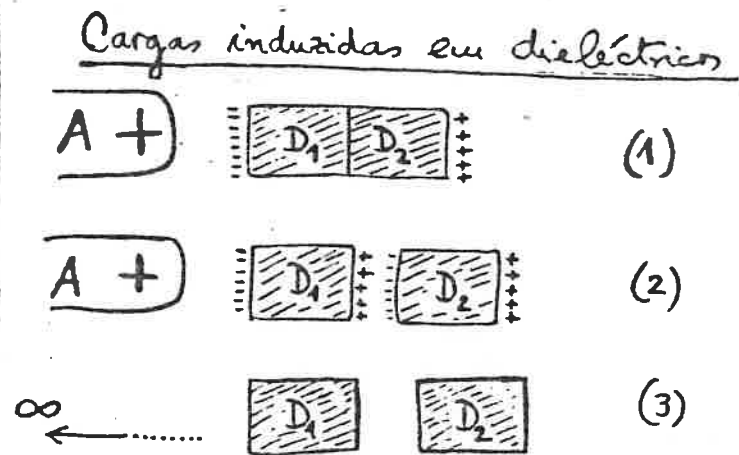


Figura 9-3 (II)

por ex., de  $D_2$ , acusa a existência de cargas induzidas no bloco dielétrico. Seccione-se agora o bloco em duas partes  $D_1$  e  $D_2$ , ainda na presença do corpo influenciante  $A$ : em ambas se continua a detectar a existência de cargas induzidas (situações (II)-(2)). No entanto, quando se afasta o corpo  $A$  para uma distância infinita (situações (II)-(3)), então cada um dos blocos  $D_1$  e  $D_2$  se volta a manifestar como corpo neutro. Isto é flagrantemente distinto do que se passa com os condutores, na experiência (I) — e não pode deixar de significar que se reduzem mutuamente (a zero) as cargas induzidas que surgiram em cada um dos blocos dielétricos. Verifica-se assim que as cargas induzidas cuja presença se manifesta num dielétrico polarizado, umas positivas outras negativas, são inseparáveis; e é fácil compreender que esta inseparabilidade esteja directamente relacionada com a incapacidade de tais cargas se deslocarem de modo a que as positivas se instanciem apreciavelmente das negativas — de harmonia com a conclusão do parágrafo precedente (§ 9.2.2).

### 9.3 — Mecanismos de polarização

O fenómeno de polarização de um dielétrico pode ser razoavelmente compreendido com base na teoria atômico-molecular da estrutura da matéria. Esquemmatizando, podem apresentar-se dois mecanismos de polarização essencialmente distintos:

- (1) por deformação das camadas electrónicas de cada molécula constituinte da substância;
- (2) por orientação dos dipolos permanentes das moléculas constituintes, dentro de cada elemento de volume do dielétrico.

### 9.3.1 — Deformação das camadas electrónicas

O campo eléctrico exterior actua sobre os electrões de cada átomo ou molécula constituinte do dieléctrico (electrões ligados, como deve supor-se) e a modificação naturalmente produzida por essa acção nos estados de movimento dos electrões provoca uma deformação das camadas electrónicas. Origina-se, em consequência, um dipolo induzido (Cf. § 5A.3, pag 49<sup>ix</sup>).

Este mecanismo é particularmente flagrante no caso em que as moléculas constituintes do dieléctrico não possuem momento dipolar permanente (moléculas não-polares), por ex. gases raros, hidrogénio, oxigénio, azoto, anidrido carbónico, ...

Mas de facto pode dizer-se que se trata de um efeito micro-físico fundamental que se processa ao nível intramolecular e ocorre em todos os sistemas atômico-moleculares, embora possa tornar-se menos relevante (ou mesmo ofuscar-se) diante de um outro efeito mais forte, no caso em que as moléculas possuem momento dipolar permanente (moléculas polares).

[ Apenas nos reportamos aqui a uma polarização electrónica; mas um mecanismo algo semelhante, de deformação molecular, pode ocorrer num cristal iónico, em que o campo exterior provoca um deslocamento dos iões (+) e (-), em sentidos contrários, falando-se então de polarização iónica. ]

### 9.3.2 — Orientação dos dipolos permanentes

O segundo mecanismo intervém quando as moléculas constituintes de um dieléctrico gasoso ou líquido são dotadas de momento dipolar permanente (moléculas polares), por exemplo  $\text{ClH}$ ,  $\text{CO}$ ,  $\text{OH}_2$ ,  $\text{NH}_3$ , ...

As miríades de moléculas contidas dentro de um elemento

de volume  $dv$  (infinitamente pequeno) acham-se aí em agitação térmica (caótica); e os seus momentos dipolares eléctricos, todos com o mesmo módulo, têm, na ausência de campo exterior, orientações distribuídas inteiramente ao acaso. É, assim, igualmente provável encontrar uma molécula com momento dipolar orientado segundo uma qualquer dada orientação. Nestas condições, é nulo (estatisticamente nulo) o momento dipolar globalmente resultante para cada elemento de volume  $dv$  (calculado pela média estatística sobre as miríades de moléculas presentes em  $dv$ ).

A actuação de um campo exterior,  $\vec{E}$ , tem por efeito exercer sobre cada dipolo molecular,  $\vec{p}_0$ , um binário, de momento  $\vec{\Gamma} = \vec{p}_0 \wedge \vec{E}$ , tendente a orientar o dipolo paralelamente ao campo (situação de equilíbrio estável no campo). Esta tendência é contrariada pelas colisões, de agitação térmica; ela vai, no entanto, determinar uma modificação da média estatística que conduz ao momento dipolar globalmente resultante para  $dv$ , tornando-o agora diferente de zero. Assim se origina um momento dipolar médio diferente de zero, em cada  $dv$ .

Trata-se portanto de um efeito estatístico, que se processa ao nível intermolecular (nas colisões, entram em jogo forças intermoleculares) e que depende essencialmente da temperatura (visto que a orientação dos dipolos permanentes é contrariada pela agitação térmica).

[ A dependência da temperatura caracteriza o efeito do segundo mecanismo em contraste com o que se passa no primeiro mecanismo, cujo efeito é obviamente independente da temperatura, dada a sua natureza puramente intramolecular. Este

diferente comportamento, relativamente à variação da temperatura, constitui uma base para a distinção e a separação experimentais dos dois efeitos, permitindo realizar medições diversas, conducentes, por um lado, a valores da polarizabilidade das moléculas individuais (que intervém no primeiro mecanismo) e, por outro lado, a valores do momento dipolar permanente molecular,  $\vec{p}_0$  (que intervém no segundo mecanismo). ]

## 9.4 — Accões de um dieléctrico polarizado em pontos exteriores

### 9.4.0 — Vector polarização

Um dieléctrico polarizado apresenta-se-nos, pois, como uma distribuição contínua de dipolos em volume (no volume  $v$  do dieléctrico). Em cada ponto  $Q$  do dieléctrico, tomando o elemento de volume  $dv$  que o cerca e o dipolo  $\vec{dp}$  gerado nesse  $dv$ , pode definir-se uma grandeza vectorial — dita vector polarização ou simplesmente polarização, e designada por  $\vec{P}$  — mediante a relação

$$(1.124) \quad \vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv}$$

A função de ponto  $\vec{P}(Q)$  caracteriza o estado do dieléctrico polarizado. A grandeza  $\vec{P}$  tem o significado de uma densidade volúmica: representa o momento dipolar gerado no volume  $dv$  circunvizinho de  $Q$ , por unidade de volume.

### 9.4.1 — Potencial e campos em pontos exteriores

No elemento de volume  $dv$  circunvizinho do ponto interior genérico,  $Q$ , do dieléctrico está contido um dipolo de momento  $d\vec{p} = \vec{P}(Q) dv$ , pela expressão (1.124).

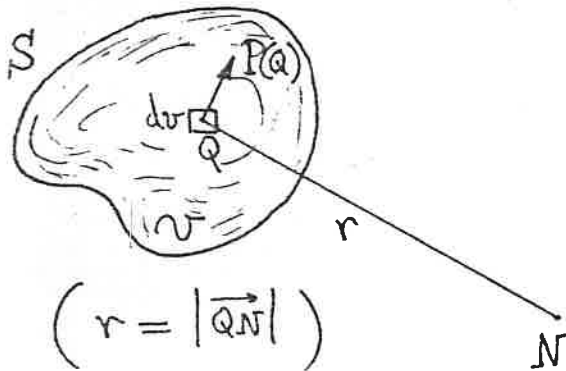
Para estudar a acção global do dieléctrico, pode pois recorrer-se à expressão do potencial produzido por um dipolo (V. § 5) e proceder em seguida por aditividade dos potenciais.

Suponhamos que o observador se encontra num ponto  $N$  exterior ao volume do dieléctrico (V. Figura). O potencial

produzido por  $(d\vec{p})_Q$  vale:

$$dV_N^{(d\vec{p})} = -k_0 d\vec{p} \cdot \text{grad}_N \frac{1}{r}$$

E não oferece qualquer dúvida escrever para o potencial produzido pelo dieléctrico polarizado,  $V_N$ ,



$$(r = |\vec{QN}|)$$

a expressar:

(1.125)

$$V_N = -k_0 \int_V \vec{P}(Q) \cdot \text{grad}_N \frac{1}{r} dv$$

ou seja:

(1.125')

$$V_N = k_0 \int_V \vec{P}(Q) \cdot \text{grad}_Q \frac{1}{r} dv$$

O campo virá imediatamente dado por  $\vec{E} = -\text{grad } V$ .

#### 9.4.2 — Distribuições fictícias equivalentes

Uma transformação matemática correntemente utilizada para integrações deste tipo, vai agora permitir obter uma outra expressão para  $V_N$ , susceptível de interessante interpretação física.

Para isso, lancemos mão da identidade diferencial

$$\text{div}_Q \left( \frac{\vec{P}}{r} \right) = \frac{1}{r} \text{div}_Q \vec{P} + \vec{P} \cdot \text{grad}_Q \frac{1}{r}$$

que, introduzida em (1.125'), conduz a

$$V_N = -k_0 \int_V \frac{1}{r} \text{div}_Q \vec{P} + k_0 \int_V \text{div} \left( \frac{\vec{P}}{r} \right) dv ;$$

e, tratando em seguida o 2º integral pelo teorema de fluxo-divergência, vem:

$$(1.126) \quad V_N = k_0 \int_v \frac{-\operatorname{div}_Q \vec{P}}{r_{QN}} dv + k_0 \int_S \frac{(\vec{P} \cdot \vec{n})_R}{r_{RN}} dS$$

sendo  $S$  a superfície limítrofe de  $v$ , i. e., a superfície limítrofe do dieléctrico; e  $\vec{n}$  o vector unitário da normal orientada para o exterior de  $v$  num ponto corrente ( $R$ ) pela superfície limítrofe  $S$ . Ora, os dois últimos integrais representam potenciações bem conhecidas. Assim, a expressão (1.126) de  $V_N$  mostra claramente que o potencial produzido por um dieléctrico polarizado — com polarização  $\vec{P}(Q)$  no ponto genérico  $Q$  do seu volume — é idêntico ao que seria produzido pela justaposição de duas distribuições contínuas de carga eléctrica: uma em volume, com densidade volumica  $\rho'(Q) = -\operatorname{div}_Q \vec{P}$ , ocupando o volume  $v$  do dieléctrico (v. o 1.º integral em (1.126)); outra em superfície, com densidade superficial  $\sigma'(R) = (\vec{P} \cdot \vec{n})_R$ , estabelecida sobre a superfície limítrofe do dieléctrico,  $S$  (v. o 2.º integral em (1.126)).

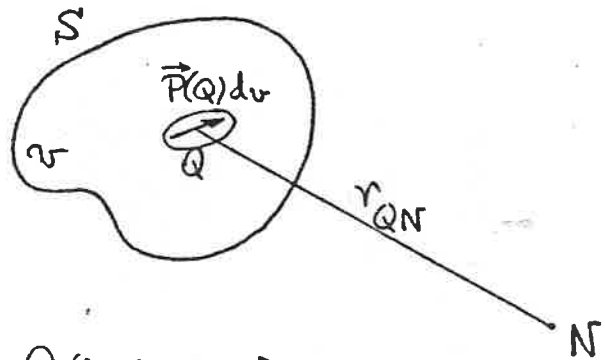
A distribuição contínua de dipolos que caracteriza o dieléctrico polarizado — a distribuição que temos por real — é assim equivalente à justaposição de duas distribuições contínuas (de monopolos) fictícias, uma em volume e a outra em superfície, com densidades, respectivamente:

$$(1.127) \quad \begin{cases} \rho'(Q) = -\operatorname{div}_Q \vec{P} \\ \sigma'(R) = (\vec{P} \cdot \vec{n})_R \end{cases} \quad \begin{array}{l} Q, \text{ ponto corrente do volume} \\ \quad \underline{v} \text{ do dieléctrico} \\ R, \text{ ponto corrente da superfície} \\ \quad \underline{S}, \text{ limítrofe do dieléctrico} \end{array}$$

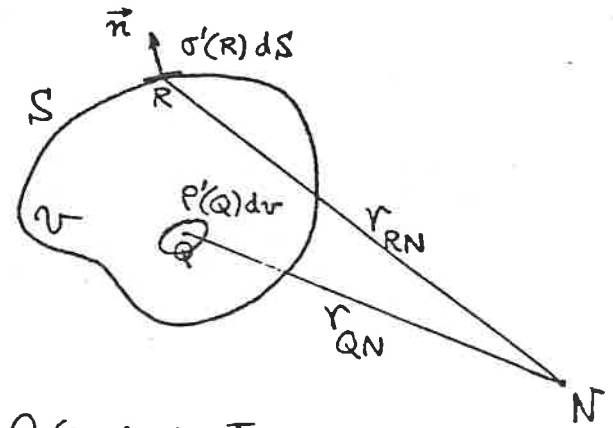
Pode portanto escrever-se

$$(1.128) \quad V_N = k_0 \int_v \frac{\rho'(Q)}{r_{QN}} dv + k_0 \int_S \frac{\sigma'(R)}{r_{RN}} dS$$

como expressão equivalente a (1.125). (V. Figura abaixo.)



Cálculo de  $V_N$  mediante a expressão (1.125)



Cálculo de  $V_N$  mediante a expressão (1.128)

As cargas fictícias  $\rho' dv$  e  $\sigma' dS$  dizem-se cargas de polarização. Facilmente se prova que é nula a carga total do conjunto das duas distribuições, i.e.:

$$(1.129) \quad \int_V \rho'(Q) dv + \int_S \sigma'(R) dS = 0$$

como era de esperar, dada a sua equivalência a uma distribuição de dipolos (que tem, obviamente, carga total nula).

### 9.4.3 — Cargas de polarização — Cargas induzidas no dieléctrico

Fomos levados a designar por fictícias as distribuições das cargas de polarização porque elas até aqui são meramente o resultado de uma transformação matemática da expressão de  $V_N$ . A verdade porém é que se torna possível compreendermos as densidades  $\rho'(Q)$  e  $\sigma'(R)$  na base de argumentos puramente físicos, o que permite atribuir-lhes significado real. Vejamos como.

Em primeiro lugar, tomemos o caso muito simples, esquematizado na Fig 9-5, de uma polarização  $\vec{P}(Q)$  com distribuição uniforme ou quase uniforme em toda a massa do dieléctrico (de tal modo que será nula ou quase nula a densidade  $\rho'(Q) = -\text{div}_Q \vec{P}$ , da qual não nos ocupamos agora).



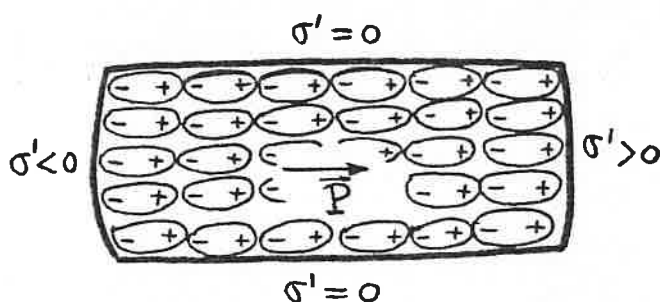


Fig 9-5  
(Representação esquemática de polarização uniforme)

Torna-se evidente pela Fig 9-5 que, nas secções da superfície limítrofe paralelas ao vector polarização, as cargas positivas e negativas deslocadas por efeito da polarização se compensam mutuamente (como acontece de modo geral no interior do corpo). Entretanto, nas secções da superfície limítrofe inclinadas sobre o vector polarização (em que  $\vec{P} \cdot \vec{n} \neq 0$ ), desenvolvem-se cargas não-compensadas, constituídas pelas extremidades (todas com o mesmo sinal) de dipolos elementares semelhantemente orientados. Isto permite compreender que, de maneira geral, exista uma carga induzida distribuída pela superfície limítrofe do dielétrico; e um cálculo simples mostra que a densidade superficial desta carga induzida vale, em cada ponto  $R$ ,  $(\vec{P} \cdot \vec{n})_R$  — identificando-se assim com a densidade superficial de cargas de polarização,  $\sigma'(R)$  (Cf eq. (1.127)).

Examinemos agora o que se passa no interior do dielétrico com uma qualquer distribuição do vector polarização  $\vec{P}(\mathcal{Q})$  (não uniforme, em geral). Consideremos a distribuição das posições médias das cargas positivas (os núcleos) e designemos por  $\rho^+(\mathcal{Q})$  a sua densidade volumica em observação macroscópica; consideremos a distribuição das posições médias das cargas negativas e seja análogamente  $\rho^-(\mathcal{Q})$  a densidade volumica correspondente. Na ausência de campo exterior, tem-se

$$(1.130) \quad \rho_0^+(\mathcal{Q}) + \rho_0^-(\mathcal{Q}) = 0$$

Na presença de um campo exterior, pelo fenómeno da polarização, produz-se em cada elemento de volume  $dv$  uma separação  $\vec{\delta}$  entre os centros de cargas positivas e negativas, ou seja, a carga  $\rho_0^+ dv$  sofre um deslocamento  $\vec{\delta}^+$  enquanto a carga  $\rho_0^- dv$  sofre um deslocamento  $\vec{\delta}^-$ , com  $\vec{\delta}^+ - \vec{\delta}^- = \vec{\delta}$ .

Seja então um bem determinado pequeno volume,  $\Delta v$ , do dieléctrico, limitado por uma superfície  $\Delta a$ . No pro-



cesso de polarização do dieléctrico, por efeito dos deslocamentos de cargas positivas e negativas dos diversos elementos de volume infinitamente pequenos que

compõem  $\Delta v$ , haverá cargas que extravazam de  $\Delta v$  ou que penetram em  $\Delta v$ , através de  $\Delta a$ ; e nós podemos fazer o cômputo global destas trocas de cargas, de  $\Delta v$  com os volumes seus circunvizinhos. Sendo  $\rho_0^+ \vec{\delta}^+ \cdot \vec{n} da$  (ver Figura) a carga que atravessa um elemento de área  $da$  da superfície limitrofe  $\Delta a$ , então o ganho em carga positiva para o volume  $\Delta v$  vale

$$- \int_{\Delta a} \rho_0^+ \vec{\delta}^+ \cdot \vec{n} da$$

e análogamente o ganho em carga negativa será

$$- \int_{\Delta a} \rho_0^- \vec{\delta}^- \cdot \vec{n} da$$

Donde resulta que o ganho efectivo de carga atingido no volume  $\Delta v$  (balanço entre os ganhos de carga positiva e de carga negativa) será, se já se utiliza (1.130):

$$- \int_{\Delta a} (\rho_0^+ \vec{\delta}^+ + \rho_0^- \vec{\delta}^-) \cdot \vec{n} da = - \int_{\Delta a} \rho_0^+ (\vec{\delta}^+ - \vec{\delta}^-) \cdot \vec{n} da$$

Como, na ausência de campo,  $\Delta v$  possuía carga global nula,

a última expressão traduz a carga actual induzida no volume  $\Delta v$ , por efeitos da polarização. Designemo-la por  $\Delta e'$ . Mas o cômputo acima feito é válido para qualquer volume  $\Delta v$ , por mais pequeno que seja. Pode dividir-se por  $\Delta v$  e passar ao limite quando  $\Delta v \rightarrow 0$ , cerrando-se sobre um ponto fixo  $Q$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta e'}{\Delta v} &= \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \left[ - \int_{\Delta a} \rho_0^+ (\vec{s}^+ - \vec{s}^-) \cdot \vec{n} da \right] \\ &\text{(densidade de carga)} \\ &\text{induzida} \\ &= - \operatorname{div}_Q \left[ \rho_0^+ (\vec{s}^+ - \vec{s}^-) \right] = - \operatorname{div}_Q \vec{P} \end{aligned}$$

(Fácilmente se verifica, com efeito, que  $\vec{P} = \rho_0^+ (\vec{s}^+ - \vec{s}^-)$ .)

Isto significa bem que a densidade de carga induzida se identifica com a densidade de carga de polarização, ambas por unidade de volume. (Cf. eq. (1.127)).

As cargas de polarização, previamente definidas como cargas fictícias que substituem a distribuição de dipolos no dieléctrico, manifestam-se assim identificáveis com cargas induzidas no dieléctrico pelo fenómeno de polarização. Deve fazer-se a observação importante de que estas cargas induzidas nos dieléctricos resultam sempre — como ressalta dos cálculos acima — de não-compensações bem localizadas de deslocamentos de cargas internos aos elementos de volume infinitamente pequenos e associados a comportamentos de electrões ligados face ao campo polarizante. Não são originadas por deslocamentos finitos, a grande escala, como acontece com as cargas de influência nos condutores, associadas à movimentação de electrões livres (Cf. §§ 9.2.2 e 9.2.3).

[NOTA: Não obstante a reflexão feita neste parágrafo, continuaremos a reservar a designação habitual de cargas verdadeiras para as cargas eléctricas dos corpos eletrizados, produzidas por atrito ou comunicadas por contacto, e para as cargas geradas nos condutores por influência electrostática.]

## 9.5 — Campo produzido por cargas verdadeiras na presença de dieléctricos

Estamos agora em condições de estudar, dentro de uma suficiente generalidade, o campo electrostático na presença de corpos dieléctricos. Depois de tratar da expressão do campo nas regiões exteriores aos dieléctricos (§ 9.5.1), partiremos daí para a definição do campo no interior de um dieléctrico e a discussão do seu significado físico (§ 9.5.2). Ocupar-nos-emos, em seguida, das propriedades gerais do campo assim obtido (§ 9.5.3).

### 9.5.1 — Campo nas regiões exteriores aos dieléctricos

Consideremos um conjunto de corpos materiais isolantes e idealizemos que uma distribuição geral de cargas verdadeiras em volume e/ou superfície é implantada em regiões exteriores e/ou interiores aos dieléctricos. Suponhamos que já foi atingido o equilíbrio electrostático resultante das influências mútuas entre as diferentes fontes de acções eléctricas (nas quais devemos incluir os próprios isolantes).

Sejam  $\rho(M)$  e/ou  $\sigma(S)$ , respectivamente, as densidades genéricas, volumina e/ou superficial, das cargas verdadeiras, actualmente definidas nos diferentes pontos do espaço. Seja, por outro lado,  $\vec{P}(Q)$  o vector polarização actualmente definido no ponto genérico dos espaços ocupados pelos dieléctricos.

Para calcular o campo global produzido por este sistema complexo de distribuições de fontes de acções eléctricas, nas regiões exteriores aos dieléctricos, vamos tirar partido do estudo feito no § 9.4 e designadamente da equivalência estabelecida no § 9.4.2 entre a distribuição contínua de

dipolos que caracteriza um dieléctrico polarizado e as distribuições de cargas de polarização que lhe correspondem. Tendo em atenção a expressão (1.128) de  $V_N$  para cada um dos dieléctricos e as conhecidas expressões dos potenciais devidos a distribuições de cargas verdadeiras em volume e/ou superfície (§§ 6.2 e 7.3) — as quais são formalmente idênticas a (1.128) — resulta que o potencial global será escrito como

$$(1.131) \quad V_N = k_0 \int_{\omega} \frac{\rho + \rho'}{r} dv + k_0 \int_{\Sigma} \frac{\sigma + \sigma'}{r} dS$$

sendo  $\omega$  a união dos volumes carregados e dos volumes dieléctricos e  $\Sigma$  a união das superfícies carregadas e das superfícies limitrofes dos dieléctricos (por carregado, entende-se aqui, com cargas verdadeiras). Em (1.131),  $r$  representa como habitualmente a distância genérica entre o ponto potenciado  $N$  e o ponto potenciante genérico em  $dv$  (no 1º integral) ou em  $dS$  (no 2º integral). As densidades  $\rho$  e  $\sigma$  são supostas dadas, acima; as densidades  $\rho'$  e  $\sigma'$  são, em cada ponto de cada dieléctrico, conhecidas mediante as expressões (1.127) em função do vector polarização  $\vec{P}(Q)$ , suposto dado. Note-se que a adopção da expressão (1.131) significa que estamos a tomar como fontes do campo, em pé de igualdade para este cálculo, quer as cargas verdadeiras, quer as cargas de polarização — como se ambos os tipos de distribuições estivessem a considerar-se "imersos" no vácuo. Este procedimento encontra-se legitimado pela equivalência do § 9.4.2 e ao mesmo tempo põe em foco a grande vantagem da sua utilização: todo o problema de Electrostatica com dieléctricos se reduz, neste domínio das regiões exteriores aos dieléctricos, a um problema de Electrostatica no vácuo.

O campo, obviamente, deriva-se a partir da expressão (1.131) de  $V_N$  pela operação  $-\text{grad}$  :

$$(1.132) \quad \vec{E}_N = -\text{grad}_N V \quad (V \equiv V(N)),$$

resultando :

$$(1.133) \quad \vec{E}_N = k_0 \int_{\omega} \frac{\rho + \rho'}{r^2} \text{grad}_N r \, dv + k_0 \int_{\Sigma} \frac{\sigma + \sigma'}{r^2} \text{grad}_N r \, dS \quad (*)$$

E podem transplantar-se para este domínio as propriedades do campo estabelecidas em Electrostática no vácuo.

Deve observar-se que o campo assim definido, para as regiões exteriores aos dieléctricos, tem exactamente o mesmo significado físico que lhe conhecíamos em Electrostática no vácuo: representa em cada ponto a força eléctrica que actua sobre uma partícula de prova colocada nesse ponto por unidade de carga da partícula. Do mesmo modo, o potencial definido por (1.131) tem o significado físico preciso de representar em cada ponto o trabalho realizado pelo campo no transporte de uma carga unitária positiva desde esse ponto até o infinito.

### 9.5.2 — Campo no interior de um dieléctrico

Retomando a última observação do parágrafo precedente, digamos que seria natural procurar-se definir, nas regiões interiores aos dieléctricos, um campo eléctrico com o mesmo significado físico.

Vemo-nos no entanto forçados a abandonar esta perspectiva por que se lhe depara uma dificuldade que não pode ser removida:

(\*) [ A única reserva que não pode deixar de fazer-se a esta expressão do campo é bem conhecida: o campo não é definido sobre as superfícies carregadas, tendo aí uma descontinuidade bem caracterizada (Cf. § 7.4) ]

com efeito, a força eléctrica que solicita uma partícula de prova no interior de um dieléctrico não é determinada de maneira unívoca, como adiante se revela.

Comecemos por fazer notar que as expressões (1.131) e (1.133) são válidas exclusivamente para pontos exteriores aos dieléctricos porque só aí está legitimada a introdução das distribuições fictícias  $\rho'$  e  $\sigma'$  a substituírem as distribuições dipolares dos dieléctricos. Nestas condições, qualquer extensão das referidas expressões (1.131) e (1.133) aos pontos interiores aos dieléctricos deve ser precedida de uma adequada análise de convergência. Com o fim de expor esta análise, consideremos um dieléctrico apenas e, para simplificar, suponhamos que as fontes de cargas verdadeiras se encontram fora do dieléctrico.

Seja o ponto  $Q$  interior ao dieléctrico; cavemos um alvéolo em torno de  $Q$ , com volume  $v'$  e limitado pela superfície  $S'$  (v. Fig. 9-7). Por  $Q$  se ter assim tomado um ponto exterior ao volume polarizado,  $v-v'$ , é válido aplicar as fórmulas (1.131) e (1.133) ao dieléctrico contanto

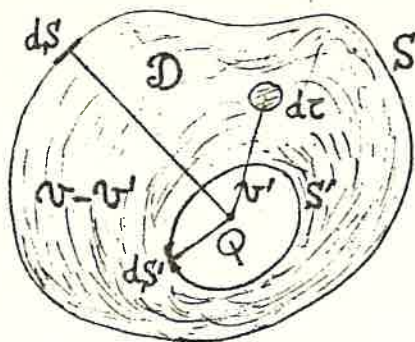


Figura 9-7

que o integral de superfície inclua no seu domínio de integração, além de  $S$ , também  $S'$ , e que o integral de volume seja tomado sobre  $v-v'$  (no tocante ao dieléctrico, sobre  $v-v'$ ). Passemos em seguida ao limite quando o alvéolo se contrai sobre  $Q$  (e o volume  $v'$  se reduz a zero), reconstituindo-se assim a situação em causa.

A condição de convergência é que o resultado deste processo seja finito e independente da forma do alvéolo. Ora acontece que a condição de convergência é satisfeita por (1.131) — para o potencial — mas não é satisfeita por (1.133) — para o campo —

visto que o integral ao longo de  $S'$  tende, neste caso, para um valor que depende da forma da classe de alvéolos tomada na passagem ao limite. Para dar apenas os três exemplos de classes com as quais o cálculo desse limite se realiza muito facilmente: (a) o limite é nulo quando o alvéolo tem a forma de um cilindro muito alongado (agulha) com geratrizes paralelas ao vector-polarização  $\vec{P}$  no ponto  $Q$ ; (b) o limite vale  $\frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}$  quando o alvéolo tem a forma de um cilindro muito achatado (disco) com geratrizes paralelas a  $\vec{P}(Q)$ ; e (c) o limite vale  $\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}$  se o alvéolo é esférico e centrado em  $Q$ . [ Cf., por ex., Durand, *Electrostatique*, Tome I ].

Repare-se agora que esta análise coincide ponto por ponto com a tentativa de encontrar a força eléctrica que actuará sobre uma partícula de prova no interior de um dieléctrico (\*). Esta força resulta, pois, não determinada de maneira unívoca, mas sim função das condições da experiência que permite medi-la, designadamente da forma e da orientação do "recinto" que encerra a partícula de prova utilizada na medição. A força eléctrica não pode assim servir para a definição do campo, como força por unidade de carga.

(\*) Em ordem à determinação da força que actua sobre uma carga idealizadamente colocada num ponto interior do dieléctrico, deve imaginar-se que se esvazia de matéria polarizada (de dieléctrico) um alvéolo cavado em torno da carga. A esta necessidade conceptual sobrepõe-se na prática uma exigência material: a introdução de uma partícula de prova dentro de um dieléctrico só é efectivamente praticável mediante a realização de uma cavidade (no caso dos dieléctricos sólidos) ou por deslocamento de massa fluida com criação de um alvéolo (no caso dos dieléctricos fluidos).



Entretanto revela-se útil adoptar, convencionalmente, noções de potencial e de campo eléctricos, no interior dos dieléctricos, como funções de ponto bem definidas e unívocas, cujo significado físico será ulteriormente esclarecido.

Para o potencial, baseamo-nos em que, na análise atrás exposta, a expressão (1.131) satisfaz a condição de convergência em qualquer ponto interior aos dieléctricos; pode mostrar-se além disso que a função finita, assim fornecida por (1.131), é contínua e diferenciável. Estes factos permitem aproveitar a expressão (1.131), adoptando-a, por convenção, como definição do potencial mesmo no interior dos dieléctricos. Reportando-nos já à situação mais geral admitida no início do § 9.5.1, tem-se

$$(1.131)' \quad V_Q = k_0 \int_{\omega} \frac{\rho + \rho'}{r} dv + k_0 \int_{\Sigma} \frac{\sigma + \sigma'}{r} dS$$

sendo  $Q$  o ponto genérico do interior de um q.q. dieléctrico do sistema.

Quanto ao campo eléctrico, convém obviamente que seja definido como

$$(1.132)' \quad \vec{E}_Q = -\text{grad}_Q V, \quad (V \equiv V(Q)),$$

a partir do potencial  $V_Q$  de (1.131)', função diferenciável como já se disse. Mas isto equivale exactamente a adoptar, por convenção, a própria expressão (1.133) como definição do campo mesmo no interior dos dieléctricos:

$$(1.133)' \quad \vec{E}_Q = k_0 \int_{\omega} \frac{\rho + \rho'}{r^2} \text{grad}_Q r dv + k_0 \int_{\Sigma} \frac{\sigma + \sigma'}{r^2} \text{grad}_Q r dS$$

referida também à situação mais geral admitida no início do § 9.5.1, e escrita para o ponto  $Q$  genérico acima indicado. (\*)

(\*) Deve fazer-se aqui a mesma reserva que é feita para  $\vec{E}_N$

Fixando a nossa atenção sobre o dieléctrico  $D$  a que pertence o ponto  $Q$  (como ponto interior) é importante sublinhar que, quer em (1.131)', quer em (1.133)', no integral de volume  $\int_{\omega} \dots$  intervém o volume completo  $v_D$  do dieléctrico, e no integral de superfície  $\int_{\Sigma} \dots$  intervém somente a superfície limítrofe  $S_D$  do dieléctrico — quer dizer: os cálculos realizam-se sem qualquer intervenção do volume  $v'$  ou da superfície limítrofe  $S'$  do alvéolo em torno de  $Q$  (v. Fig 9-7), que aqui já se não utiliza.

[ Que esta definição convencional (1.133)', para o campo, tem por si própria sentido — revela-o a análise de convergência atrás exposta: é este o limite obtido quando o alvéolo de Fig 9-7 se cerra sobre o ponto  $Q$ , através de uma classe de alvéolos em forma de cilindros alongados de geratrizes paralelas a  $\vec{P}(Q)$ . Com efeito, o limite do integral de superfície ao longo de  $S'$  (superfície limítrofe do alvéolo) tende para zero — é o exemplo (a) — e por outro lado  $\lim_{v' \rightarrow 0} \int_{v-v'} \dots = \int_v \dots$ ; de modo que, o limite global coincide com  $\vec{E}_Q$  de (1.133)'.

Em suma:  $\vec{E}_Q$  representa a força por unidade de carga quando o alvéolo infinitamente pequeno que envolve a carga tem a forma de um cilindro alongado segundo  $\vec{P}(Q)$ . ]

Diversos argumentos militam a favor da adopção da definição convencional do campo (e do potencial) que acabamos de apresentar; destacamos três deles.

na nota da pág. 120'', acrescentando-se que o campo  $\vec{E}_Q$ , de (1.133)', não será também definido, porque descontínuo, sobre as superfícies limítrofes dos dieléctricos, "carregadas" com cargas de polarização  $\sigma'$ .

(1) O campo assim definido no interior,  $\vec{E}_Q$ , é o prolongamento analítico do campo no exterior,  $\vec{E}_N$ , cuja definição já vinha de trás fisicamente bem fundamentada. Embora haja uma "ruptura" no significado físico, quando se passa do exterior para o interior, a verdade é que, com a convenção adoptada, passamos a dispor de uma expressão formalmente idêntica para o campo nas regiões exteriores e nas regiões interiores, com as vantagens daí resultantes para o tratamento matemático de vários problemas de Electrostatica com dieléctricos.

(2) Podemos mostrar-se que o campo, que assim se exprime por uma única função (1.133) - (1.133)' nos diferentes pontos do espaço em que é definido, conduz a um tratamento simples da energia armazenada num sistema de condutores e de isolantes — utilizando-se em consequência na determinação, decorrente desse tratamento, das forças generalizadas que actuam sobre os diversos elementos de um tal sistema de condutores e de isolantes.

(3) Imaginemos um dieléctrico perfeito, isotrópico e homogêneo (\*), preenchendo todo o espaço e uniformemente polarizado. Consideremos nele imersa uma esfera condutora muito pequena, carregada com uma carga (verdadeira)  $e$ . Mostra-se que se exerce sobre esta esfera uma força  $\vec{F}$  dada por  $\vec{F} = e \vec{E}_Q$ , sendo  $\vec{E}_Q$  o campo definido no dieléctrico. Assim, o campo convencionalmente definido no interior do dieléctrico assume, embora nestas circunstâncias muito especiais, o significado físico habitual de força por unidade de carga de uma partícula de prova.

(\*) Adiante se dará o significado destas especificações (v. § 9.6).

## 9.6 — Propriedades do campo electrostático na presença de dieléctricos

Pelo estudo feito nos parágrafos precedentes, o potencial e o campo na Electrostática com dieléctricos podem ser considerados como o potencial e o campo que seriam produzidos no vácuo pelas distribuições de densidades volúmicas  $\rho$  e  $\rho'$  e superficiais  $\sigma$  e  $\sigma'$ , isto é, pelas cargas verdadeiras que caracterizam a electrização das fontes, adicionadas das cargas de polarização que se podem definir sobre os diversos dieléctricos presentes. Daqui resulta que se torna muito simples deduzir as propriedades válidas para o campo da Electrostática com dieléctricos a partir das propriedades do campo estabelecidas para a Electrostática no vácuo. Tudo o que é necessário fazer é considerar, em todas estas últimas propriedades, a incidência simultânea das cargas verdadeiras e das cargas de polarização, tratadas em pé de igualdade como fontes do campo, — e como se ambas as distribuições estivessem imersas no vácuo.

É então legítimo escrever, como equações fundamentais do campo na presença de dieléctricos, as seguintes:

(1) em todo o ponto  $G$  interior a regiões de continuidade:

$$(1.134-a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot}_G \vec{E} = 0 \end{array} \right.$$

$$(1.134-b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div}_G \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_G + \rho'_G) \end{array} \right.$$

(2) em todo o ponto  $M$  sobre uma superfície  $S$  de descontinuidade (de entre as superfícies carregadas e/ou superfícies limítrofes dos dieléctricos):

$$(1.135-a) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\vec{E}_M^+ - \vec{E}_M^-) \cdot \vec{t}_M = 0 \end{array} \right.$$

$$(1.135-b) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\vec{E}_M^+ - \vec{E}_M^-) \cdot \vec{n}_M = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_M + \sigma'_M) \end{array} \right.$$

sendo  $\vec{n}_M$  e  $\vec{T}_M$ , respectivamente, o vector unitário da normal a  $S$  em  $M$  e o vector unitário de uma tangente arbitrária em  $M$ .

Mediante a substituição de  $\rho'_G$  e  $\sigma'_M$  pelas suas expressões (1.127) (pág. 115), podemos exprimir as propriedades acima, directamente, à custa do vector polarização  $\vec{P}$  definido nos diferentes pontos dos dieléctricos. Em particular, a eq. (1.134-b) transforma-se em

$$(1.134-b)' \quad \text{div}_G (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_G \quad ;$$

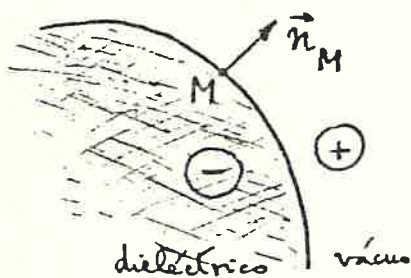
mas isto sugere a introdução de um novo vector,  $\vec{D}$ , que se define por

$$(1.136) \quad \boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}} \quad ||$$

e que permite re-escrever (1.134-b)' na forma:

$$(1.137) \quad \boxed{\text{div}_G \vec{D} = \rho_G}$$

Esta reformulação da eq. (1.134-b) traduz, como ela<sup>mesma</sup>, o teorema de Gauss, mas sem fazer referência directa às cargas de polarização. O vector  $\vec{D}$  chama-se deslocamento eléctrico, podendo designar-se também por indução eléctrica. Trata-se de um vector auxiliar na descrição da Electrostatica com dieléctricos, cuja introdução conduz a simplificações formais do tipo da realizada em (1.137). Passando à eq. (1.135-b), suponhamos que o ponto  $M$  pertence à superfície limítrofe de um dieléctrico face ao vácuo, sobre a qual existe também uma elec-



trização de carga verdadeira (de densidade  $\sigma_M$ ); entã, mediante a utilização de (1.127), pág. 115, essa equação transforma-se em:

$$\left[ \epsilon_0 \vec{E}_M^+ - (\epsilon_0 \vec{E}_M^- + \vec{P}_M^-) \right] \cdot \vec{n}_M = \sigma_M$$

(tendo em atenção que  $\sigma'_M = \vec{P}_M^- \cdot \vec{n}_M$ , v. Figura); e a introdução do vector  $\vec{D}$ , definido por (1.136), conduz a:

(1.138)

$$\left( \vec{D}_M^+ - \vec{D}_M^- \right) \cdot \vec{n}_M = \sigma_M$$

(deve notar-se que  $\vec{P}_M^+ = 0$ , por a região  $\oplus$  ser de vácuo). Esta reformulação da eq. (1.135-b) traduz, como ela, o teorema de Gauss sobre uma superfície de descontinuidade do campo, mas sem fazer referência directa às cargas de polarização.

É susceptível de uma reformulação semelhante a versão de (1.134-b) sob forma integral — que também se pode considerar a transcrição, para a Electrostatica com dieléctricos, do teorema de Gauss expresso por (1.57), § 6.3 — a saber:

$$(1.139) \quad \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} (e_{int} + e'_{int})$$

em que  $S$  é uma superfície fechada (regular);  $e_{int}$  representa a soma das cargas verdadeiras interiores a  $S$  e  $e'_{int}$  a soma das cargas de polarização interiores a  $S$ . (\*)

Mostra-se facilmente que, em todos os casos, se torna possível introduzir o vector  $\vec{D}$  (após utilização de (1.127)) para reformular a eq. (1.139) de modo a não fazer referência directa às cargas de polarização. Resulta:

$$(1.140) \quad \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} \, dS = e_{int}$$

Entretanto as equações (1.134-a) e (1.135-a) ficam obviamente incólumes à reformulação operada. O mesmo pode dizer-se da versão de (1.134-a) sob forma integral — transcrição, para a Electrostatica com dieléctricos, da propriedade

(\*) Note-se que a superfície  $S$  não deve conter qualquer região de área significativa em comum com distribuições superficiais de cargas verdadeiras nem com superfícies de descontinuidade da polarização (superfícies limítrofes de dieléctricos), porque sobre essas superfícies o campo é descontínuo.

fundamental expressa por (1.56), § 6.3 — a saber:

$$(1.141) \quad \oint_{[c]} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0,$$

ao longo de qualquer curva fechada  $[c]$ .

Conclui-se assim que em todo o formalismo das propriedades do campo na Electrostatica com dieléctricos, as cargas de polarização podem ser omitidas em troco da utilização do vector polarização  $\vec{P}$ , sendo este por sua vez incluído implicitamente em  $\vec{D}$ . A descrição da Electrostatica com dieléctricos exige necessariamente a utilização de duas grandezas vectoriais fundamentais: o campo  $\vec{E}$  e a polarização  $\vec{P}$ , que descreve o comportamento dos materiais isolantes.

Verifica-se todavia que a utilização do par de vectores  $(\vec{E}; \vec{D})$  em alternativa ao par de vectores  $(\vec{E}; \vec{P})$ , mediante a relação de substituição (1.136), conduz a um formalismo mais simples e mais cómodo.

Em resumo, com as simplificações formais (1.137) e (1.138), as propriedades locais do campo (1.134-a, b) e (1.135-a, b) re-escrevem-se como:

(1) nos pontos interiores às regiões de continuidade:

$$\begin{aligned} (1.142-a) & \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = 0 \\ \text{div } \vec{D} = \rho \end{array} \right. \\ (1.142-b) & \end{aligned}$$

(2) nos pontos sobre superfícies de descontinuidade:

$$\begin{aligned} (1.143-a) & \quad \left\{ \begin{array}{l} (\vec{E}^+ - \vec{E}^-) \cdot \vec{t} = 0 \\ (\vec{D}^+ - \vec{D}^-) \cdot \vec{n} = \sigma \end{array} \right. \\ (1.143-b) & \end{aligned}$$

Estas equações não podem deixar de ser acompanhadas da relação

$$(1.136) \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

que por isso aqui se recapitula — equações de ligação de  $\vec{D}$  a  $\vec{E}$  ou equações de ligação entre o campo e a indução (campo eléctrico, indução eléctrica). Também são de retomar neste resumo as versões sob forma integral das propriedades locais (1.142-a, b) — (1.141) e (1.140). Convém chamar a atenção para o facto de que a eq. (1.143-a) traduz a continuidade da componente tangencial de  $\vec{E}$  sobre qualquer superfície de descontinuidade; e a eq. (1.143-b) traduz a descontinuidade da componente normal de  $\vec{D}$  sobre as distribuições superficiais de carga verdadeira, sendo o valor desta descontinuidade justamente dado por  $\sigma$  (entretanto, a componente normal de  $\vec{D}$ , pela mesma eq. (1.143-b) é contínua nas superfícies de descontinuidade desprovidas de cargas verdadeiras).

As equações que acabamos de apresentar para as propriedades do campo da Electrostatica com dieléctricos — (1.142), (1.143), (1.141) e (1.140) — generalizam evidentemente as correspondentes equações da Electrostatica no vácuo — (1.68), (1.78), (1.56) e (1.57), respectivamente. Para passar das primeiras às segundas basta fazer  $\vec{P} = 0$  em todos os pontos, ou seja,  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ .

Confrontando os dois conjuntos de equações, facilmente nos damos conta de que, ao passar da Electrostatica no vácuo para a Electrostatica com dieléctricos, enquanto o campo  $\vec{E}$  mantém o seu carácter irrotacional, o deslocamento eléctrico  $\vec{D}$  surge, nas expressões do teorema de Gauss, a substituir o campo eléctrico  $\vec{E}$  (ou melhor: a substituir  $\epsilon_0 \vec{E}$ ), mantendo-se as expressões do referido teorema com uma forma idêntica, designadamente, com a intervenção pura e simples das cargas verdadeiras — como no vácuo. Isto,



porque o vector deslocamento eléctrico escamoteia as cargas de polarização nas equações que traduzem as propriedades do campo.

## 9.7 — Dieléctricos perfectos

A polarização de um dieléctrico inicialmente neutro resulta não só da acção eléctrica devida às fontes exteriores mas também da própria acção eléctrica produzida pelo dieléctrico polarizado. A situação de equilíbrio electrostático efectivamente estabelecida (\*) caracteriza-se por um vector-polarização  $\vec{P}(Q)$  em cada ponto do dieléctrico, que descreve o estado de polarização do dieléctrico, e por um campo  $\vec{E}(M)$  definido em cada ponto do espaço,  $M$ , que descreve a globalidade das acções eléctricas, em conformidade com o tratamento apresentado nos §§ 9.5.1 e 9.5.2.

Pondo de parte os meios que manifestam fenómenos de histerese dieléctrica, admitamos que deve existir entre aquelas duas grandezas  $\vec{P}$  e  $\vec{E}$ , em cada ponto do dieléctrico, uma relação de dependência, a ser encontrada por via experimental

$$(1.144) \quad \vec{P}_Q = f(\vec{E}_Q)$$

A polarização depende também das propriedades das moléculas constituintes do isolante e do seu estado de agregação, a nível microscópico (Cf. § 9.3); essas dependências, características de cada meio, reflectem-se naturalmente na forma da relação

---

(\*) Passa-se aqui algo de semelhante ao que ocorre no caso de um condutor sob influência de fontes eléctricas exteriores: o equilíbrio electrostático finalmente estabelecido é caracterizado por um campo global resultante da sobreposição da acção eléctrica das fontes exteriores com a acção eléctrica da distribuição das cargas de influência geradas no condutor.

(1.144), que rege o comportamento dieléctrico do meio material, numa perspectiva macroscópica.

Ora acontece que, para grande número de meios materiais isolantes, a experiência revela ser a relação (1.144) uma simples relação de linearidade, desde que o campo não atinja intensidades muito elevadas. Mais precisamente:

- (a) para meios isotrópicos, uma simples relação de linearidade entre  $\vec{P}_Q$  e  $\vec{E}_Q$ ;
- (b) para meios anisotrópicos, simples relações de composição linear entre as componentes de  $\vec{P}_Q$  e as de  $\vec{E}_Q$ .

Tais meios isolantes designam-se por dieléctricos perfectos; têm um comportamento dieléctrico linear e também se dizem dieléctricos lineares.

Para os dieléctricos perfectos e isotrópicos a relação (1.144) pode escrever-se:

(1.145)

$$\vec{P}_Q = \epsilon_0 \chi(Q) \vec{E}_Q$$

em que  $\chi(Q)$  é um escalar, positivo, independente de  $\vec{E}_Q$  que faz de (1.145) uma relação de proporcionalidade directa entre  $\vec{P}_Q$  e  $\vec{E}_Q$ . [ Com  $\epsilon_0$  em evidência na constante de proporcionalidade  $\epsilon_0 \chi(Q)$ , a grandeza  $\chi(Q)$  fica adimensional. ] (\*)

Para os dieléctricos perfectos e anisotrópicos a relação (1.144) pode escrever-se:

(\*) O facto de se verificar que grande número de meios isolantes podem ser considerados dieléctricos perfectos, sendo o seu comportamento regido por uma lei tão simples como (1.145) ou (1.146), entre  $\vec{P}_Q$  e  $\vec{E}_Q$ , constitui um outro argumento favorável à definição convencional adoptada para o campo no interior de um dieléctrico (§ 9.5.2, pag 120<sup>v</sup> - 120<sup>iii</sup>).

$$(1.146) \quad (\mathbf{P}_\alpha)_Q = \epsilon_0 \sum_\beta \chi^{\alpha\beta}(Q) (\mathbf{E}_\beta)_Q \quad (\alpha = x, y, z)$$

sendo  $\mathbf{P}_\alpha$  e  $\mathbf{E}_\beta$  ( $\alpha, \beta = x, y, z$ ) as componentes cartesianas dos vectores  $\vec{\mathbf{P}}$  e  $\vec{\mathbf{E}}$ , respectivamente e os coeficientes  $\chi^{\alpha\beta}(Q)$  são independentes de  $\vec{\mathbf{E}}$ : as componentes de  $\vec{\mathbf{P}}_Q$  são composições lineares das componentes de  $\vec{\mathbf{E}}$ . [Pode dar-se, de (1.146), a versão compacta:

$$(1.146') \quad \vec{\mathbf{P}}_Q = \epsilon_0 \{\chi\}_Q \vec{\mathbf{E}}_Q$$

em que  $\{\chi\}$  designa o tensor (de 2.<sup>a</sup> ordem) de que a matriz  $\{\chi^{\alpha\beta}\}$  ( $\alpha, \beta = x, y, z$ ) constitui a representação cartesiana].

A grandeza escalar  $\chi$ , que surge na relação (1.145) para um meio isotrópico, em geral com carácter local (i.e., podendo variar de ponto para ponto do dieléctrico) — encerra os efeitos, macroscopicamente resultantes, da dependência da polarização relativamente às propriedades das moléculas constituintes do isolante e ao seu estado de agregação, a nível microscópico. [O mesmo pode dizer-se da grandeza tensorial  $\{\chi\}$ , que surge na relação (1.146') para um meio anisotrópico.]

$\chi$  chama-se susceptibilidade eléctrica;  $\{\chi\}$  designa-se por tensor de susceptibilidade eléctrica.

Da relação de dependência entre  $\vec{\mathbf{P}}$  e  $\vec{\mathbf{E}}$  para dado dieléctrico, (1.144), segue-se, por (1.136), uma relação bem definida entre  $\vec{\mathbf{D}}$  e  $\vec{\mathbf{E}}$ , em cada ponto do dieléctrico:

$$(1.147) \quad \vec{\mathbf{D}} = g(\vec{\mathbf{E}})$$

Para os dieléctricos perfectos e isotrópicos, resulta, em particular

$$(1.148) \quad \vec{\mathbf{D}}_Q = \epsilon_0 [1 + \chi(Q)] \vec{\mathbf{E}}_Q$$

ou seja  $\vec{\mathbf{D}}_Q = \epsilon(Q) \vec{\mathbf{E}}_Q$ , com  $\epsilon(Q) = \epsilon_0 [1 + \chi(Q)]$ .

Então, neste meio,  $\vec{\mathbf{D}}_Q$  é directamente proporcional a  $\vec{\mathbf{E}}_Q$ ,

sendo  $\epsilon(Q)$  a constante de proporcionalidade, cujas características decorrem directamente das de  $\chi(Q)$ :  $\epsilon(Q)$  é uma grandeza escalar, função de ponto, independente de  $\vec{E}_Q$ , satisfazendo  $\epsilon(Q) > \epsilon_0$  (porque  $\chi(Q) > 0$ ).  $\underline{\epsilon}$ , da mesma natureza física que  $\epsilon_0$  (poder indutor específicos do vácuo) designa-se por poder indutor específicos do dieléctrico.<sup>(\*)</sup> Para um dieléctrico perfeito e isotrópico imerso no vácuo, justapondo a relação (1.148) à relação  $\vec{D}_N = \epsilon_0 \vec{E}_N$  que se verifica para todo o ponto fora do dieléctrico (no vácuo), pode escrever-se uma relação única estendida a todo o espaço:

$$(1.149) \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

com  $\epsilon \equiv \epsilon_0$  ( $\chi = 0$ ) no vácuo (ponto genérico  $N$ ) e  $\epsilon \equiv \epsilon(Q)$  no dieléctrico (ponto genérico  $Q$ ). É fácil ver que a relação (1.149) é generalizável a um sistema de isolantes desse mesmo tipo, ainda que na presença de condutores.

[Considerações semelhantes poderiam ser feitas para os meios dieléctricos perfectos e anisótropos, conduzindo à introdução de uma grandeza tensorial (tensor de 2<sup>ª</sup> ordem)  $\{\epsilon\}$ , função de ponto, independente de  $\vec{E}_Q$ , designada por tensor de permissividade (ou tensor de poder indutor específicos do dieléctrico).

A relação (1.149) é então substituída por

$$(1.150) \quad \vec{D} = \{\epsilon\} \vec{E}$$

com  $\{\epsilon\} \equiv \epsilon_0 \{\mathbb{1}\}$  no vácuo e  $\{\epsilon\} \equiv \{\epsilon\}_Q$  no dieléctrico].

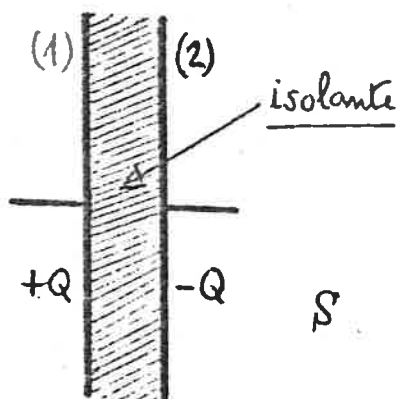
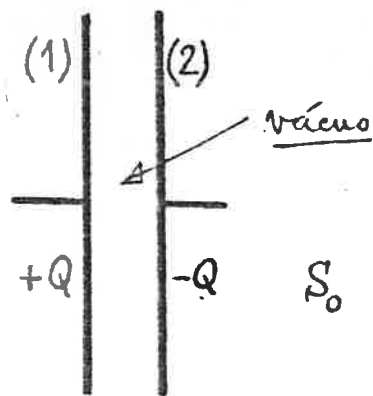
Se um dieléctrico perfeito isotrópico [anisótropo] for homogéneo, então  $\underline{\chi}$  e  $\underline{\epsilon}$  [ $\{\chi\}$  e  $\{\epsilon\}$ ] são uniformes (ou: constantes), i.e., não variam de ponto para ponto do dieléctrico. Nesse caso, torna-se muito adequada, para  $\underline{\epsilon}$ , a designação de

(\*) Também se designa por permissividade ou permissividade.

constante dielétrica do meio. [Adequada é entã também a designação de constantes dielétricas principais atribuída às componentes do tensor dielétrico  $\{\epsilon\}$  na sua forma diagonal, a que é sempre redutível por ser um tensor simétrico, como se pode mostrar.]

A constante dielétrica de um meio dielétrico perfeito isotrópico e homogêneo é susceptível de determinação experimental por um método muito simples cujo fundamento teórico vamos agora encarar como um exemplo de aplicações dos conhecimentos do presente Capítulo.

Utiliza-se um condensador plano (Cf. § 8.7.2) de dimensões fixas ( $A$ , área das armaduras;  $d$ , distância entre as armaduras; com  $d \ll$  q.q. dimensões lineares de  $A$ ). Procede-se à comparação entre a capacidade  $C$  do condensador quando o isolante sob ensaio preenche todo o espaço entre as armaduras (situação  $S$ ) e a capacidade  $C_0$  do mesmo condensador quando esse espaço é o vácuo (situação  $S_0$ ) (V. Figura 9-9).



Sabido já que  $C_0 = \epsilon_0 A/d$  (Cf. (1.120), § 8.7.2) procuremos agora relacionar  $C$  com  $\epsilon$ , constante dielétrica do isolante sob ensaio. Para isso, comecemos por admitir que na situação  $S$  se deve definir a capacidade do condensador por uma relação formalmente idêntica com (1.119), § 8.7.1, a saber, como

$$C = Q/(V_1 - V_2).$$

Ora, dadas as características dos dielétricos (linearidade, isotropia e homogeneidade), as considerações de

simetria que fundamentaram o cálculo de  $C_0$  no § 8.7.2 são ainda válidas na situação  $S$  e aplicam-se aqui quer ao campo vectorial  $\vec{E}$ , quer ao campo vectorial  $\vec{D}$ ; extrai-se daí a conclusão de que, com um elevado grau de aproximação (que leva a considerarem-se desprezáveis os efeitos nas extremidades das armaduras), ambos os campos são uniformes e perpendiculares às armaduras. Então:

(a)  $Q$  pode calcular-se mediante (1.140), dando:

$$Q = |\vec{D}| A \quad ;$$

(b)  $V_1 - V_2$  pode calcular-se mediante (1.132)',

como  $\int_{(1)}^{(2)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ , e isso dá:

$$V_1 - V_2 = |\vec{E}| d$$

Utilizemos por fim (1.148), escrevendo  $|\vec{D}| = \epsilon |\vec{E}|$ .

Resulta:

$$(1.151) \quad C = \epsilon A / d$$

A razão  $C/C_0$  fornece portanto  $\epsilon/\epsilon_0$  ( $\equiv \epsilon_r$ , constante dieléctrica relativa) ou seja uma medida de  $\epsilon$ , tomando como unidade  $\epsilon_0$ . Para determinar experimentalmente o valor de  $C/C_0$ , pode medir-se o valor de  $V_1 - V_2$ , primeiro na situação  $S_0$  e depois na situação  $S$ , sob a condição de que, ao passar de uma situação à outra, se mantenha isolada a armadura (1) para que a carga  $Q$  permaneça constante (de um modo semelhante ao da experiência esquematizada na Fig 9-1 (I)). Tem-se então:

$$\frac{C}{C_0} = \frac{(V_1 - V_2)_{S_0}}{(V_1 - V_2)_S}$$

# 10. ENERGIA DE UM SISTEMA ELECTROSTÁTICO

## 10.1 — Introdução

Em todos os ramos da Física, as relações energéticas constituem um precioso auxiliar na resolução de grande número de problemas ou para a compreensão e descrição de muitas situações. Vamos abordar aqui alguns aspectos do tratamento da energia na Electrostatica — porque são importantes em si mesmos e, também, porque preparam o estudo das questões energéticas no Electromagnetismo em geral.

Para realizar uma dada distribuição de cargas eléctricas, criando um campo eléctrico, é necessário dispendir trabalho. Mas a experiência mostra que, uma vez atingido o equilíbrio electrostático, se todas as cargas ficarem perfeitamente isoladas e se não se alterarem os condicionamentos existentes, o sistema vai manter-se nesse estado e a conservação do campo eléctrico criado não exige qualquer novo dispêndio de trabalho.

Suponhamos que a electrização é efectuada mediante um transporte de cargas que se realiza (i) na ausência de quaisquer forças dissipativas, portanto sem libertação de calor, e (ii) reversivelmente, i.e., com quase infinita lentidão, de modo a haver equilíbrio em cada instante. Então, o Princípio de conservação da energia leva-nos a afirmar que o trabalho dispendido na criação do campo, nestas condições conceptuais, se deve encontrar no sistema sob a forma de energia potencial, de natureza puramente eléctrica. Assim se chega à ideia de uma energia electrostática que se atribue ao sistema pelo seu estado de electrização e que nele permanece enquanto esse estado de electrização se mantiver.

Qualquer modificaco num dado estado de electrizao, idealizada sob as mesmas condioes conceptuais para o transporte das cargas, vai traduzir-se num balanço energético, a saber, entre o trabalho dispendido (ou recolhido) pelo observador e o aumento (ou diminuico, respectivamente) da energia electrostática contida no sistema. Quando se concebe, porém, nas mesmas condioes, um transporte de cargas cíclicos, i.e., tal que o sistema  reconduzido a uma situao final ponto por ponto idêntica  situao inicial — então, como já antecipamos no § 2.4, uma das propriedades fundamentais do campo na Electrostática ( $\text{rot } \vec{E} = 0$ ) assegura não haver, no cômputo global, nem dispendio nem recolha de trabalho, por parte do observador: a energia electrostática do sistema conserva-se quando  reassumida a situao electrostática inicial.

Este Princípio garante-nos que, ao estabelecer-se uma dada distribuico de cargas eléctricas, a energia armazenada pelo sistema não deve depender do processo ou dos percursos de electrizao. Podemos então idealizar sempre, for razo de simplicidade, o seguinte processo de electrizao: — Imaginamos que os diferentes elementos de carga eléctrica do sistema se encontram inicialmente todos no infinito e infinitamente afastados uns dos outros (estado inicial) — Transportamo-los então, desde o infinito, por um percurso qualquer, para as posioes que actualmente ocupam (estado actual). (Supomos obviamente que este transporte se submete às condioes conceptuais acima descritas). —

Notemos que, encontrando-se, no estado inicial, os diferentes elementos de carga infinitamente afastados uns dos outros, são nulas as interacoes electrostáticas neste estado,



e será por isso natural admitir como nula a energia electrostática do sistema nesse estado inicial do processo de electrização. Daí resulta que o trabalho dispendido na electrização iguala a energia electrostática do sistema no estado actual, desde que se siga o processo de electrização acima.

Para calcular o trabalho que é necessário dispendir no estabelecimento de uma dada distribuição de cargas, segundo o processo de electrização acima idealizado, vamos servir-nos do significado físico do potencial num ponto (cf. § 2.2). O potencial num ponto representa com efeito o trabalho a dispendir contra o campo eléctrico para transportar a unidade de carga eléctrica desde o infinito até o ponto considerado, por qualquer percurso. Assim, ao transportar desde o infinito para um ponto onde o potencial é  $V$  a carga  $\delta e$  teremos que dispendir o trabalho  $V \cdot \delta e$ .

## 10.2 — Energia potencial de uma distribuição discreta de cargas pontuais, no vácuo

Consideremos um sistema de  $N$  cargas pontuais,  $e_i$ , colocadas respectivamente nos pontos  $Q_i$  ( $i=1, \dots, N$ ), no vácuo. Procedamos ao cálculo da energia potencial desta distribuição segundo a via preconizada em 10.1.

O transporte da 1ª carga para a sua posição não exige dispendio de qualquer trabalho, obviamente (num campo nulo). De modo que a energia potencial electrostática das duas cargas  $e_1$  em  $Q_1$ ,  $e_2$  em  $Q_2$  encontra-se por qualquer uma das duas seguintes expressões

$$(10-1) \quad W_{12} = e_2 V^{(1)}(Q_2) = e_1 V^{(2)}(Q_1)$$

sendo  $V^{(1)}(Q_2)$  [ $V^{(2)}(Q_1)$ ] o potencial produzido pela carga  $e_1$

no ponto  $Q_2$  [ pela carga  $e_1$  no ponto  $Q_2$  ]; ou ainda pela evidente expressão alternativa

$$(10-2) \quad W_{12} = k_0 \frac{e_1 e_2}{r_{12}} \quad \left\{ \left( r_{12} = |\overrightarrow{Q_1 Q_2}| \right) \right.$$

Note-se que, a partir de (10-1), se pode dar a  $W_{12}$  uma outra forma simetrizada:

$$(10-3) \quad W_{12} = \frac{1}{2} \left[ e_1 V^{(2)}(Q_1) + e_2 V^{(1)}(Q_2) \right] \checkmark$$

Se se transporta agora a carga  $e_3$  desde o infinito até a sua posição  $Q_3$ , a energia potencial suplementar adquirida pelo sistema (a somar depois com  $W_{12}$ ) é dada por:

$$(10-4) \quad q_3 V^{(12)}(Q_3) = k_0 \frac{e_1 e_3}{r_{13}} + k_0 \frac{e_2 e_3}{r_{23}}$$

sendo  $V_{(q_3)}^{(12)} = V_{(q_3)}^{(1)} + V_{(q_3)}^{(2)}$ ,  $r_{13} = |\overrightarrow{Q_1 Q_3}|$  e  $r_{23} = |\overrightarrow{Q_2 Q_3}|$ .

A soma de (10-4) com (10-2) dá:

$$(10-5) \quad W_{123} = k_0 \frac{e_1 e_2}{r_{12}} + k_0 \frac{e_1 e_3}{r_{13}} + k_0 \frac{e_2 e_3}{r_{23}}$$

É fácil ver que (10-2), (10-5) admitem uma expressão generalizável à distribuições de  $N$  cargas para obter a energia potencial do sistema,  $W$ :

$$(10-6) \quad W = k_0 \sum_{j < k}^{1 \text{ a } N} \frac{e_j e_k}{r_{jk}} \quad \left( r_{jk} = |\overrightarrow{Q_j Q_k}| \right)$$

Por um processo de soma dupla e troca os membros últimos! } em que o duplo somatório sobre os índices  $j$  e  $k$  (de 1 a  $N$ ) tem a restrição  $j < k$ . Mas, olhando ao carácter simétrico do termo genérico, em  $j, k$ , pode dar-se a (10-6) uma forma diferente

$$(10-7) \quad W = \frac{1}{2} k_0 \sum_{i \neq k}^{1 \text{ a } N} \frac{e_i e_k}{r_{ik}} = \frac{1}{2} k_0 \sum_j^{1 \text{ a } N} e_j \sum_{k (\neq j)}^{1 \text{ a } N} \frac{e_k}{r_{jk}}$$

Ou seja:

(10-8)

$$W = \frac{1}{2} \sum_j^{1aN} e_j V_j'(Q_j)$$

sendo  $V_j'(Q_j)$  o potencial, no ponto  $Q_j$ , devido a todas as cargas excepção feita da carga  $e_j$ . Vê-se bem que o resultado (10-8) generaliza (10-3) e poderia obter-se directamente pelo prosseguimento da via que conduziu a (10-3).

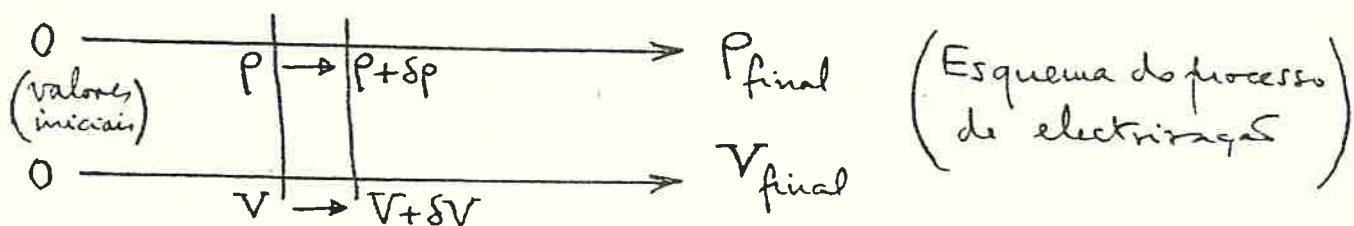
### 10.3 — Energia electrostática de uma distribuição contínua, no vácuo

Suponhamos agora que se trata de estabelecer, no vácuo, uma distribuição contínua de cargas eléctricas, em volume — para fixar ideias. O resultado será imediatamente extensível a uma distribuição contínua em superfície.

Idealizemos uma electrização que se processa de uma forma contínua, transportando desde o infinito cargas infinitamente pequenas que vão preenchendo progressivamente os diferentes elementos de volume, todos simultaneamente considerados, de modo a ir aumentando em cada um deles a sua carga até se atingir em cada ponto a densidade de carga  $\rho_f$  (valor final) que caracteriza nesse ponto a distribuição em causa. À medida que se processa esta electrização contínua, o potencial resultante da distribuição de cargas que se vai estabelecendo aumenta progressivamente, também de uma forma contínua até atingir em cada ponto o valor (final)  $V_f$  que caracteriza nesse ponto o estado eléctrico do sistema em causa.

Detenhamo-nos na análise de um estágio intermédio deste processo: uma parte das cargas ocupa já as posições actuais e a parte restante encontra-se ainda no infinito; i.e., efectuou-se

já uma electrizaçã parcial caracterizada pela densidade de carga  $\rho$  no elemento de volume genérico, e que determina no ponto do espaço genérico um potencial  $V$ . Vamos supor que prossequimos a electrizaçã passando para um estádio infinitamente próximo que se atinge mediante o transporte, desde o infinito, de cargas infinitamente pequenas que vão aumentar em cada ponto a densidade  $\rho$  para um valor  $\rho + \delta\rho$ , fazendo variar concomitantemente o potencial  $V$  no ponto genérico do espaço para  $V + \delta V$  (Ver esquema).



O trabalho dispendido no transporte da carga  $\delta\rho \cdot dv$ , que se vai acrescentar ao elemento de volume genérico  $dv$ , igual, a menos de um infinitamente pequeno de ordem superior, o valor  $V \cdot \delta\rho \cdot dv$ , de acordo com a última nota do § 10.1. Portanto, para todo o volume da distribuiçã de cargas,  $\underline{v}$ , o trabalho global dispendido nesta electrizaçã elementar ( $\rho \rightarrow \rho + \delta\rho$ ) será dado por:

$$(10-9) \quad \delta L = \int_v V \cdot \delta\rho \cdot dv \quad \}$$

Mas, porque entretanto  $V$  aumenta para  $V + \delta V$ , a energia potencial das cargas já existentes no sistema, aumenta, em consequência, da quantidade  $\delta V \cdot \rho \cdot dv$  em cada elemento de volume  $dv$ ; e portanto para todo o volume das cargas,  $\underline{v}$ , aumentará de

$$(10-10) \quad \delta U = \int_v \delta V \cdot \rho \cdot dv \quad \}$$

como um resultado global da mesma electrizaçã elementar. Ora, nas condições a que obedece o transporte das cargas (Cf.

§ 10.1), o trabalho dispendido deve igualar o aumento concomitante da energia potencial do sistema; então, a menos de infinitamente pequenos de ordem superior, cumpre-se

$$(10-11) \quad \delta L = \delta U$$

É este valor comum, que traduz o acréscimo da energia electrostática do sistema, e que designaremos por  $\delta W$ , pode obter-se por uma expressão simetrizada; com efeito

$$\delta W = \delta L = \delta U = \frac{1}{2} (\delta L + \delta U)$$

ou seja:

(10-12)

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_v (V \cdot \delta \rho + \delta V \cdot \rho) dv$$

Aproveita-se este artifício para levar por diante o cálculo:

(10-13)

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_v \delta (V \rho) dv = \delta \left[ \frac{1}{2} \int_v V \rho dv \right]$$

Isto permite passar imediatamente ao acréscimo total (para todo o processo de electrização, desde  $\rho=0$  a  $\rho=\rho_f$ ); com efeito, visto que  $\delta W$  é por (10-13) uma diferencial exacta da função (do estado genérico da electrização) dada por  $\frac{1}{2} \int_v V \rho dv$ , então:

(10-14)

$$W_f - W_0 = \frac{1}{2} \int_v V_f \rho_f dv,$$

visto que no estado inicial  $\rho=0$  e  $V=0$ . Como, porém, já convencionámos ser nula a energia do sistema na situação correspondente ao estado inicial da electrização, porque nessa situação as cargas se encontram todas infinitamente afastadas umas das outras, com interações nulas — resulta  $W_0=0$  e

$$W_f = \frac{1}{2} \int_v V_f \rho_f dv. \quad \text{Em resumo, a energia electro-}$$

stática de uma distribuição contínua, em volume, no vácuo, com uma densidade  $\rho(Q)$  em cada ponto  $Q$  do volume carregado,

sendo  $V(Q)$  o potencial no mesmo ponto genérico, escreve-se

$$(10-15) \quad \boxed{W = \frac{1}{2} \int_v \rho(Q) V(Q) dv}$$

Tratando-se de uma distribuição contínua em superfície, de densidade  $\sigma(Q)$  sobre uma superfície  $S$ , facilmente se conclui que toda a demonstração pode ser decalcada da que acabámos de fazer, vindo análogamente:

$$(10-16) \quad \boxed{W = \frac{1}{2} \int_S \sigma(Q) V(Q) dS}$$

Como expressões da energia electrostática  $W$  da distribuição.

A expressão (10-16) é imediatamente aplicável a um sistema de condutores em equilíbrio electrostático no vácuo (cf. § 8.6, para as notações). Trata-se de facto de uma distribuição superficial de cargas sobre uma superfície  $a$ , pelo menos,  $N$  folhas, podendo portanto escrever-se:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \int_{S_{\alpha}} \sigma_{\alpha}(Q_{\alpha}) V_{\alpha}(Q_{\alpha}) dS_{\alpha}$$

e porque  $V_{\alpha}(Q_{\alpha})$  é constante sobre toda a superfície  $S_{\alpha}$  do condutor  $\alpha$  e, por outro lado,  $\int_{S_{\alpha}} \sigma_{\alpha}(Q_{\alpha}) dS_{\alpha} = e_{\alpha}$ , carga total do condutor  $\alpha$ , resulta:

$$(10-17) \quad W = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N e_{\alpha} V_{\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N e_{\alpha} \sum_{\beta=1}^N c_{\alpha\beta} \varphi_{\beta} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N c_{\alpha\beta} \varphi_{\alpha} \varphi_{\beta}$$

( $V_{\alpha}$  é o potencial do condutor  $\alpha$ ). Quando se utilizam as relações entre as cargas e os potenciais (cf. § 8.6), a expressão (10-17) revela que a energia electrostática de um sistema de condutores em equilíbrio é uma função quadrática e homogênea dos potenciais (ou das cargas).

Note-se que as expressões (10-15) e (10-16) podem também inferir-se do resultado (10-8) do § 10.2.

As expressões (10-15) e (10-16) admitem ainda as seguintes versões imediatas, para as situações a que se referem:

$$(10-15)' \quad W = \frac{1}{2} \int_V \int_{V'} \frac{\rho(Q) \rho(Q')}{r_{QQ'}} dv' dv$$

$$(10-16)' \quad W = \frac{1}{2} \int_S \int_{S'} \frac{\sigma(Q) \sigma(Q')}{r_{QQ'}} dS' dS$$

com uma estrutura idêntica à da expressão (10-7).

#### 10.4 — Expressão da energia na concepção de Maxwell (para um sistema no vácuo)

Vejamus agora que a energia electrostática de um sistema de cargas, em distribuição contínua em volume, no vácuo, se pode exprimir exclusivamente à custa do campo  $\vec{E}(P)$  produzido pela distribuição de cargas (em todo o espaço); esse resultado pode estender-se a uma distribuição contínua em superfície e daí a um sistema de condutores, sem dificuldade. Note-se que se faz aqui a restrição, natural, de que a distribuição é confinada no espaço (não podendo haver cargas no infinito). Põem-se também de parte distribuições de cargas pontuais ou distribuições contínuas em linha, para as quais o campo apresenta singularidades infinitas.

Tomemos então uma distribuição contínua em volume no vácuo e partamos da expressão (10-15) para a energia deste sistema. Recordemos as propriedades do campo para esta situação (cf. § 6.4.4)

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = 0 & (\vec{E} = -\text{grad } V) \\ \text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \end{cases}$$

e utilizemo-las para transformar (10-15). Tem-se:

$$\rho V = \epsilon_0 V \operatorname{div} \vec{E} = \epsilon_0 [\operatorname{div}(V\vec{E}) - \vec{E} \cdot \operatorname{grad} V] =$$

$$= \epsilon_0 [\operatorname{div}(V\vec{E}) + \vec{E}^2]$$

Integramos em volume para todo o espaço (domínio  $\Omega$ ).

Para o 1º membro, resulta:

$$\int_{\Omega} \rho V \, dv = \int_V \rho V \, dv$$

porque a integranda só não é nula onde  $\rho \neq 0$ , i.e., no volume  $V$ .

Para a 1ª parcela do 2º membro, tem-se:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(V\vec{E}) \, dv \stackrel{\text{(Gauss-Divergenz)}}{=} \int_{\Sigma_{\infty}} V\vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

pelo teorema do fluxo-divergência e pelas conhecidas condições de regularidade no infinito de  $V$  e de  $\vec{E}$  (cf. § 6.2, pag 53), que se verificam quando não há cargas no infinito. A expressão (10-15) transforma-se portanto em

$$(10-18) \quad \left\| W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\Omega} \vec{E}^2 \, dv \right\|$$

Deve sublinhar-se que este integral se estende a todo o espaço — domínio  $\Omega$  — excluindo-se obviamente as regiões em que  $\vec{E}$  for nulo; no caso de um sistema de condutores, estende-se ao espaço livre (cf. § 8.5.1).

Esta expressão (10-18) sugere uma nova concepção para a localização e distribuição da energia, que é a concepção de Maxwell: a energia reparte-se pelo espaço onde exista o campo eléctrico  $\vec{E}$ ; em cada elemento de volume  $dv$  onde  $\vec{E}$  esteja definido com valor significativo, aí se localiza uma quantidade de energia, que é sempre

(\*) A expressão (10-15) sugeria que a energia se distribui pelo espaço volumétrico ou superficiais que são ocupados pelas cargas.



positiva,  $\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 dv$ . Há portanto uma distribuição contínua de energia, por todo o espaço "preenchido" pelo campo, com uma densidade volumétrica  $\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2$ . Tratando-se, em particular, de um sistema de condutores, a energia, segundo a concepção de Maxwell, não reside sobre os condutores — ela distribui-se por todo o espaço livre.

Esta concepção resulta apenas de uma leitura admissível da expressão (10-18); ela não constitui uma interpretação que se nos imponha necessariamente. Não pode com efeito asseverar-se fisicamente a existência de uma repartição espacial da energia electrostática: o que tem significado seguro é falar-se da energia global (em todo o espaço), definida como uma função da configuração do sistema. (Não podemos estar certos da exactidão da expressão de balanço energético  $SW = \int \left[ \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\Omega} \vec{E}^2 dv \right]$  senão quando estendida à totalidade do campo.)

No entanto, a localização da energia no espaço onde actua o campo, com considerável acumulação de energia nas regiões dos valores elevados do campo, parece intuitivamente razoável; e a ideia de uma densidade de energia com a expressão  $\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2$ , como sugere (10-18), estendida depois ao electromagnético em geral, veio a revelar-se de utilização muito conveniente, desempenhando um papel de grande importância em todos os desenvolvimentos da Teoria de Maxwell.

### 10.5 — Energia electrostática em dieléctricos

As expressões estabelecidas nos §§ precedentes para a energia electrostática de um sistema no vácuo não são, em geral, imediatamente extensíveis às situações de campo electrostático na presença de dieléctricos. Isso deve-se

as factos de que o processo de electrizaçãõ idealizado no § 10.1 e depois aplicado, mediante o transporte das cargas (que sãõ obviamente cargas verdadeiras) desde o infinito para as suas posições actuais, — se acompanha agora da polarizaçãõ dos dielétricos. Surge assim um outro deslocamento de cargas — o que leva, numa perspectiva macroscópica, à criação de um dipolo dentro de cada elemento de volume; a esse deslocamento de cargas corresponde um trabalho não contabilizável pelo mesmo método (porque a separaçãõ das cargas positivas e negativas se realiza dentro de cada elemento de volume a partir dos primitivos centros de cargas em coincidência). Este trabalho de criaçãõ dos dipolos nos próprios locais em que eles surgem traduz-se numa energia que fica contida nos dielétricos; pode calcular-se por um método adequado e deve tomar-se em consideraçãõ em todo o balanço energético, de uma maneira geral.

No entanto, se continuarmos a interessar-nos expressamente pela energia potencial das cargas verdadeiras no campo em que se encontram (agora não só o campo das interacções mútuas, mas também o resultante da polarizaçãõ dos dielétricos), nós poderemos prescindir do cálculo da energia que vai ficar contida nos dielétricos — a fim de atingir mais facilmente o nosso objectivo.

Suponhamos que se trata de estabelecer, na presença de um dado dielétrico, uma distribuiçãõ contínua de cargas eléctricas, em volume, para fixar ideias. Idealizemos uma electrizaçãõ contínua do mesmo tipo que a considerada no § 10.3 e decaiguemos para aqui a análise aí desenvolvida. O trabalho elementar, dependido no transporte das cargas  $Sp$  do que constitui a electrizaçãõ elementar  $p \rightarrow p + \delta p$ .

continua a ser dado por (10-9) e fornece, aqui como lá, o acréscimo  $\delta W$  da energia potencial do sistema de cargas transportadas, ou seja, no nosso caso, do sistema de cargas verdadeiras:

$$(10-9)' \quad \delta W = \int_{\Omega} V \delta \rho \, dv$$

Entretanto a energia  $\delta U$  fornecida por (10-10) não é mais, nas circunstâncias presentes, igual a  $\delta L$  (como em (10-11)); e o método seguido no § 10.3 tem que ser abandonado.

Mas pode prosseguir-se o cálculo, a partir de (10-9)', por uma outra via, utilizando desde já as propriedades do campo (cf. 1.142-a, b)

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = 0 & (\vec{E} = -\text{grad } V) \\ \text{div } \vec{D} = \rho \end{cases}$$

e elaborando um tratamento semelhante ao seguido no § 10.4 (para estabelecer (10-18) a partir de (10-15)).

Tem-se sucessivamente:

$$(1) \quad \delta \rho = \delta(\text{div } \vec{D}) \implies \delta \rho = \text{div}(\delta \vec{D})$$

$$(2) \quad \begin{aligned} V \text{div}(\delta \vec{D}) &= \text{div}(V \delta \vec{D}) - \text{grad } V \cdot \delta \vec{D} = \\ &= \text{div}(V \delta \vec{D}) + \vec{E} \cdot \delta \vec{D} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \int_{\Omega} V \delta \rho \, dv = \int_{\Omega} V \text{div}(\delta \vec{D}) \, dv = \int_{\Omega} \text{div}(V \delta \vec{D}) \, dv$$

$$(4) \quad \int_{\Omega} \text{div}(V \delta \vec{D}) \, dv = \int_{\Sigma_{\infty}} V \delta \vec{D} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

Com repetição das justificações dadas no § 10.4. A expressão (10-9)' transforma-se portanto em

$$(10-19) \quad \delta W = \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \delta \vec{D} \, dv$$

sendo este integral estendido a todo o espaço — domínio  $\Omega$  —.

Passando ao acréscimo total (i.e., para todo o processo de eletrização, desde o estado inicial com  $\rho=0$  até o estado final com  $\rho=\rho_f$ ), vem:

$$(10-20) \quad W = \int_0^f \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \delta \vec{D} \, dv$$

ou ainda:

(10-21)

$$W = \int_{\Omega} \left[ \int_0^{\vec{D}} \vec{E} \cdot \delta \vec{D} \right] dv$$

Esta é a expressão geral procurada para a energia de um sistema de cargas (verdadeiras) na presença de um dielétrico.

Se considerarmos agora, em particular, o caso de o (os) dielétrico(s) serem) perfeito(s) e isotrópico(s), então, num ponto genérico do espaço cumpre-se  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  (cf 1.149) e daí resulta sucessivamente: (1)  $\delta \vec{D} = \epsilon \delta \vec{E}$  ;

$$(2) \quad \vec{E} \cdot \delta \vec{D} = \epsilon \vec{E} \cdot \delta \vec{E} = \epsilon \delta \left( \frac{1}{2} \vec{E}^2 \right) = \delta \left( \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 \right) = \delta \left( \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \right);$$

$$(3) \quad \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \delta \vec{D} = \int_{\Omega} \delta \left( \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \right) = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$$

Então, na presença de dielétricos perfeitos e isotrópicos:

(10.22)

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{D} \, dv \quad ||$$

sendo este integral estendido a todo o espaço — domínio  $\Omega$  —. É a expressão da energia, na concepção de Maxwell, para um sistema electrostático na presença de dielétricos perfeitos.

Podem mostrar-se, por um tratamento semelhante ao que foi seguido no § 10.4 (para estabelecer (10-18) a partir de (10-15)), mas em sentido inverso, que (10.22) é transformável em

$$(10.23) \quad W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho V \, dv \quad \left( \begin{array}{l} \text{na presença de} \\ \text{dielétricos} \\ \text{perfeitos e isotrópicos} \end{array} \right)$$

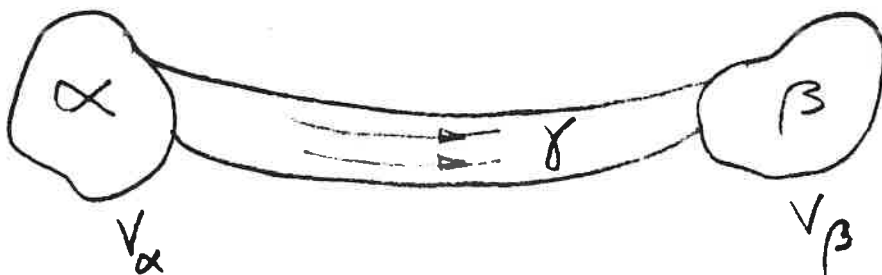
sendo  $\Omega$  o volume carregado (com cargas verdadeiras).

### III — CORRENTE ELECTRICA

#### III. 1 — Introdução

Tratámos até aqui das interacções entre cargas em repouso. Vamos agora ocupar-nos dos efeitos produzidos pelas cargas eléctricas em movimento. Ao passar assim da Electrostatica para um domínio mais geral do Electromagnetismo, o primeiro novo conceito que se nos impõe abordar é o de corrente eléctrica.

Suponhamos que dois condutores  $\alpha$  e  $\beta$ , a potenciais diferentes  $V_\alpha$  e  $V_\beta$ , em equilibrio electrostatico, são postos em contacto por intermédio de um terceiro condutor  $\gamma$ . No momento em que se estabelece uma tal ligação, o potencial não é, de certeza, constante, nos diferentes pontos deste ultimo condutor,  $\gamma$ , visto que tem os



os valores  $V_\alpha$  e  $V_\beta$  nos seus extremos ( $V_\alpha \neq V_\beta$ ). Surge, portanto um campo eléctrico dentro do condutor  $\gamma$ ; isto significa que deixam de se satisfazer as condições de equilibrio electrostatico, o qual se rompe. A experiência mostra que estes condutores são então atravessados por fluxos de cargas eléctricas (fluxos organizados, à escala macroscópica). Descrevemos este fenómeno dizendo que os condutores, especialmente o condutor  $\gamma$ , são percorridos por

corrente eléctrica. A tendência que se verifica é o estabelecimento de novo equilíbrio electrostático, atingido o qual a corrente eléctrica cessa. Por meios puramente electrostáticos dificilmente se consegue obter uma corrente longamente perdurável e não pode realizar-se um regime permanente; certos dispositivos experimentais o permitem porém: pilhas voltaicas, acumuladores, pares termo-eléctricos, por exemplo. Em todos os casos a corrente surge num condutor sempre que entre dois dos seus pontos se estabelece uma diferença de potencial do tipo figurado.

A corrente eléctrica está assim associada ao aparecimento de um campo eléctrico no seio dos condutores — campo electromotor — e produz dois efeitos observáveis experimentalmente:

- 1º) gera, à sua volta, um campo de acções magnéticas (detectáveis sobre pequenos ímãs);
- 2º) acompanha-se de uma libertação de calor em cada elemento de volume do condutor.

Ao campo eléctrico, em geral variável, que origina a corrente sobre põe-se, assim, um campo magnético, também em geral variável, e estes dois campos são profundamente indissociáveis: estamos em presença de um campo electromagnético. É, somente, no caso em que estes dois campos não variam com o tempo, que eles podem ser tratados independentemente porque, nesse caso, de facto, coexistem sem se interferir mutuamente. O campo electromagnético diz-se então estacionário, e a corrente eléctrica a que está associado diz-se corrente estacionária. Dada a independência de tratamento então realizável, pode falar-se de um campo eléctrico da corrente estacionária e de um campo magnético da corrente estacionária.

A libertação de calor, que acompanha a formação da corrente num condutor, revela a existência de trocas

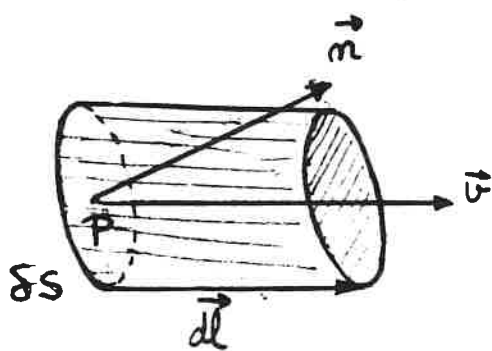
dissipativas de energia entre os diferentes elementos constituintes do sistema, que engloba, além do dito condutor, as fontes do campo electromotor da corrente. Constará, naturalmente ao que se passa no domínio da Electostática, aqui, o campo não é conservativo, o que permite, de já, avançar que a equação  $\text{rot } \vec{E} = 0$ , propriedade fundamental do campo electrostático, não subsiste, de um modo geral, no campo electromagnético.

### III.2 Densidade de corrente

Consideremos um condutor no qual se acha estabelecida uma corrente eléctrica variável.

Para descrever, de um ponto <sup>de dV</sup> macroscópico, esta corrente num ponto  $P(x, y, z)$  do interior do condutor e num instante  $t$ , fazemos apelo à densidade volumétrica da carga eléctrica que se move,  $\rho(x, y, z, t)$  e à velocidade  $\vec{v}(x, y, z, t)$  de que se acha animada a carga elementar  $\rho_m dV$ , que, nesse instante, passa no elemento de volume  $dV$  circunvizinho ao ponto  $P$ .

Seja  $\delta S$  um elemento de área em torno do ponto  $P$  e seja  $\vec{n}$  a semi-normal a  $\delta S$  com um dado sentido. Calculemos a quantidade de electricidade,  $\delta Q$ , que passa, no tempo  $dt$ , através de  $\delta S$ , no sentido de  $\vec{n}$ : esta carga distribue-se pelo elemento de volume, representado na figura,



$$d\vec{l} = \vec{v} dt$$

$$\delta Q = \delta S (d\vec{l} \cdot \vec{n}) = \delta S (\vec{v} \cdot \vec{n}) dt$$

do cilindro elementar de base  $\delta S$  e qualquer  $d\vec{l}$  (pontante de altura  $d\vec{l} \cdot \vec{n} = (\vec{v} \cdot \vec{n}) dt$ ).

$$\text{Então temos: } \delta Q = \rho_m \delta S = \rho_m \delta S \vec{v} \cdot \vec{n} dt.$$

chamamos intensidade elementar da corrente (através do elemento de área  $\delta S$ , com a orientação  $\vec{n}$ ) a quantidade  $\delta i$  dada por:

$$\delta i = \frac{\delta q}{dt} = \rho_m \vec{v} \cdot \vec{n} \delta S$$

Isto significa que o fluxo elementar do vector  $\vec{J}$  definido por:

$$(III-1) \quad \vec{J} = \rho_m \vec{v}$$

da' a intensidade elementar da corrente através de um qualquer elemento de área  $\delta S$ , em termos do ponto  $P$  e no instante  $t$ , com uma qualquer orientação  $\vec{n}$ :

$$(III-2) \quad \delta i = \vec{J} \cdot \vec{n} \delta S$$

$\vec{J}$  chama-se densidade de corrente; trata-se de um vector definido em cada ponto e a cada instante,  $\vec{J}(x, y, z, t)$ . Caracteriza, de modo analogo e completo, a corrente electrica no condutor. As linhas de forca do campo vectorial  $\vec{J}(x, y, z, t)$  num dado instante  $t$  chamam-se linhas de corrente.

Por integraçao da relaçao (III-2) obtemos a intensidade da corrente que passa num dado sentido através de uma area finita  $S$ :

$$(III-3) \quad i = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} \delta S$$

Se, em particular,  $S$  e' uma superficie fechada e  $\vec{n}$  a semi-normal exterior,  $i$  sera' a quantidade de electricidade que sai, globalmente, por unidade de tempo, através de  $S$  (ou seja que sai do volume encerrado em  $S$ ).



### III-3 Equações de conservação da carga eléctrica

Se admitirmos, como princípio, a conservação da carga eléctrica, deve existir uma relação bem precisa entre a corrente e a forma como varia, com o tempo, a distribuição das cargas eléctricas, de densidade volumétrica total  $\rho(x, y, z, t)$ , no condutor.

Com efeito, um tal princípio exige que a quantidade de electricidade que sai de (ou que entra para) um dado volume fixo no condutor, no intervalo de tempo  $dt$ , seja exactamente igual à diminuição (ou ao aumento) que, nesse intervalo de tempo, se observa para a carga eléctrica contida no mesmo dado volume. Então, se for  $S$  uma superfície fechada em torno de um ponto  $P$  no interior do condutor, vem por (III-3) e pelas considerações que acabamos de fazer

$$\int_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, \delta S = - \frac{d}{dt} \int_V \rho \, \delta v$$

em que  $v$  é o volume limitado pela superfície  $S$ . O integral do 1.º membro transforma-se pelo teorema do fluxo-divergência; no 2.º membro são permitidos os símbolos de cálculo  $\frac{d}{dt}$  e  $\int_V$  que dizem respeito a variáveis independentes, entre si. Resulta assim:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{J} \, \delta v = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, \delta v$$

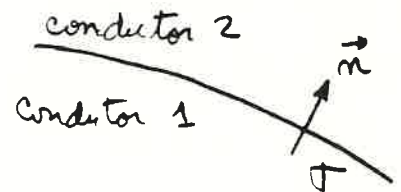
e como esta relação deve verificar-se para todo o volume  $V$  por menor que seja, temos:

$$(III-4) \quad \operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

equação, de carácter local, que traduz a conservação da carga eléctrica. Trata-se de uma equação fundamental em toda a teoria do Electromagnetismo.

Prova-se que a equação (III-4) degenera, para uma superfície de separação de dois meios condutores ① e ② — em que  $\rho$  e  $\vec{J}$  são descontínuas —, na seguinte equação

$$(III-5) \quad \vec{n} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$



em que  $\vec{n}$  é a semi-normal à superfície de descontinuidade de (dirigida de ① para ②), se admitirmos que sobre a superfície de separação existe uma densidade superficial  $\sigma(x, y, z, t)$ . Para um ponto da superfície limítrofe do condutor (separação condutor-isolante) tem-se em particular

$$(III-6) \quad \vec{n} \cdot \vec{J} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$



sendo  $\vec{J}$  a densidade de corrente à superfície do condutor ( $\vec{J} = 0$  para o isolante).

### III.4 — Lei de Ohm

Existe, forçosamente, uma relação bem definida entre o vector  $\vec{J}$ , caracterizando a corrente eléctrica, e o campo electromotor  $\vec{E}$  que lhe está associado. A experiência mostra que, em primeira aproximação, se tem uma relação de proporcionalidade directa

$$(III-7) \quad \left. \begin{array}{l} \vec{J} = \sigma^* \vec{E} \\ \sigma^* \text{ escalar } (> 0) \end{array} \right\}$$

em que  $\sigma^*$ , independente de  $\vec{E}$ , é a condutividade eléctrica do condutor (depende das condições físicas do condutor).

A relação (III-7) traduz a lei de Ohm tal como é válida para os condutores isotrópicos. No caso dos condutores anisotrópicos  $\vec{J}$  não é proporcional a  $\vec{E}$ , mas existem relações lineares e homogêneas entre os componentes dos dois vectores;  $\nabla^*$  deve em consequência substituir-se por um tensor cujos componentes são ainda independentes de  $\vec{E}$ .

A lei de Ohm foi estabelecida experimentalmente quer para correntes estacionárias, quer para corrente variável. A comparação das fórmulas (III-1) e (III-7) diz-nos que o campo electromotor  $\vec{E}$  é proporcional à velocidade  $\vec{v}$  das cargas eléctricas, e não à sua aceleração. Para explicar este facto, só aparentemente paradoxal, devemos admitir que as cargas sob a acção dum campo electromotor  $\vec{E}$  adquire, quase instantaneamente, em cada ponto, uma velocidade  $\vec{v}$  tal que o campo das forças resultantes, devidas ao movimento, contrabalança exactamente  $\vec{E}$ , pelo que cessa a aceleração.

Vejamos como se pode descrever este processo de estabelecimento da corrente, com base num modelo muito simples, para a estrutura microscópica dos condutores metálicos. Um condutor pode considerar-se como constituído por uma rede cristalina de iões positivos fixos, dentro da qual circulam os electrões livres (Cf. §8.1, pag. 75) num incessante movimento desordenado (caótico) de agitação térmica, essencialmente condicionada pelas colisões com os iões fixos. Na ausência de campo eléctrico exterior, em cada elemento de volume macroscópico  $dV$ , é nula a média (espaçial) das velocidades dos electrões livres, e não se produz nem mesmo transporte efectivo de carga no condutor.

Sob a acção de um campo eléctrico exterior  $\vec{E}$ , a força eléctrica que se exerce sobre cada um dos

electrões livres, a mesma força todos, provoca - lhes um movimento de arrastamento, a que corresponde uma velocidade média, diferente de zero, na direcção do campo; mas este arrastamento dos electrões livres é contrariado por uma resistência (do tipo "força de atrito") que tem a sua origem nas colisões que sofrem com as iões positivas da rede cristalina. Equivale, assim, um transporte efectivo de carga (negativa) no condutor, que é regido pelo balanço entre essas duas forças, forças eléctricas devido ao campo e forças de resistências. (\*)

Escrevamos, então, a equação do movimento para este transporte de carga, referido ao elemento de volume maciço  $d\Omega$  do condutor. O campo eléctrico actuará sobre a carga eléctrica móvel deste elemento de volume,  $P_m d\Omega$ , com uma força

$$d\vec{F}_{\text{elct.}} = P_m d\Omega \vec{E}$$

Admitindo que a força de atrito,  $d\vec{F}_{\text{resist.}}$ , actuará na direcção da velocidade  $\vec{v}$  de transporte de carga móvel, mas em sentido contrário, com um valor proporcional a  $|\vec{v}|$  e ao número de electrões livres presentes em  $d\Omega$  (por sua vez proporcional a  $d\Omega$ ), temos:

(\*)

Para uma interpretação da condução eléctrica nos metais do ponto de vista da teoria atómica da constituição da matéria, ver, por exemplo:

- R. PLONSEY & R. COLLIN

Principles of Electromagnetic Fields (1961)

Mc. Graw Hill, New York, pag. 165

- G. JOOS, Theoretical Physics, 2<sup>a</sup> edition (1951) pag. 444-5

$$d\vec{f}_{\text{resist.}} = -a \, d\Omega \vec{v} ;$$

portanto, se  $f_m$   $\mu$  a massa específica das cargas móveis, a equação do movimento será:

$$\mu \, d\Omega \frac{d\vec{v}}{dt} = f_m \, d\Omega \vec{E} - a \, d\Omega \vec{v}$$

ou

$$\mu \frac{d\vec{v}}{dt} + a \vec{v} = f_m \vec{E} ,$$

donde, por integração:

$$\vec{v} = \frac{f_m}{a} \vec{E} + C e^{-\frac{a}{\mu} t}$$

e como para  $t=0$ ,  $\vec{v}=0$

$$\vec{v} = \frac{f_m}{a} (1 - e^{-\frac{a}{\mu} t}) \vec{E} .$$

Esta expressão mostra-nos que a velocidade  $\vec{v}$  tende para um valor limite:

$$(III-8) \quad \vec{v} = \frac{f_m}{a} \vec{E}$$

que corresponde ao estabelecimento do equilíbrio entre a força eléctrica  $d\vec{f}_{\text{elct.}}$  e a força de resistência  $d\vec{f}_{\text{resist.}}$ :

$$d\vec{f}_{\text{elct.}} + d\vec{f}_{\text{resist.}} = 0 ;$$

$\vec{v}$  tende tanto mais rapidamente para esse valor limite, em que fica proporcional a  $\vec{E}$ , quanto maior for o coeficiente  $a/\mu$  que figura na exponencial. O decrescimento da exponencial é, na realidade, muito rápido, muito inferior ao tempo de qualquer medida, pelo que o valor

de  $\vec{v}$ , dado pela fórmula (III-8) pode considerar-se como atingido quase instantaneamente. Dito isto, como exemplo, que, no caso do cobre,  $\mu/a$  vale  $2 \times 10^{-14}$ .

### III. 5 - Lei de Joule

A lei de Joule rege a libertação de calor que é produzida pela passagem de corrente eléctrica. É uma lei experimental estabelecida, quer com corrente estacionária, quer com corrente variável. Pode enunciar-se assim:

A quantidade de calor  $\delta Q$  libertada no elemento de volume  $\delta v$ , circunvizinhos de um ponto P de um condutor homogêneo, a temperatura uniforme, durante o tempo  $dt$  é dada por

$$\text{[ (III-9) } \quad \delta Q = \frac{1}{\sigma^*} \vec{J}^2 \delta v dt \quad \text{]}$$

sendo  $\vec{J}$  a densidade de corrente e  $\sigma^*$  a condutividade no ponto P.

Pode também escrever-se quando se atende à lei de Ohm

$$\text{(III-9')} \quad \delta Q = (\vec{J} \cdot \vec{E}) \delta v dt = \sigma^* \vec{E}^2 \delta v dt$$

Deve notar-se que a hipótese atrás admitida de para interpretar a lei de Ohm, de que existe um campo de forças resistivas, no meio, equilibrando o campo electromotor, pode estender-se agora a uma interpretação consequente da lei de Joule. O calor libertado deve, nessa hipótese, resultar do trabalho (negativo) das forças resistivas, para o qual se tem:

$$\text{[ } \delta W = \vec{f}_{\text{resist.}} \cdot d\vec{l} = -\vec{f}_{\text{elect.}} \cdot \vec{v} dt = -\rho_m \delta v \vec{E} \cdot \vec{v} dt = -(\vec{J} \cdot \vec{E}) \delta v dt \quad \text{]}$$

num deslocamento elementar  $d\vec{l}$ , durante  $dt$ , com a velocidade  $\vec{v}$ , da carga móvel contida no elemento de volume  $\delta v$ . Ora, na realidade, verifica-se que  $\delta W = -\delta Q$ .

### III.6 - Lei de dispersão dos cargas num condutor homogêneo e isotrópico.

Um meio condutor permeado por correntes eléctricas, pode, como todo o meio material, manifestar também propriedades dieléctricas e o estabelecimento do campo electromotor  $\vec{E}$ , nesse condutor, pode, em consequência, originar, em cada ponto, uma polarização  $\vec{P}$ . Somos assim conduzidos a definir, como na Electrostática, um vector deslocamento eléctrico  $\vec{D}$  pela relação:

$$(III-10) \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

sendo  $\epsilon$  a constante dieléctrica do meio material. Na Electrostática estabeleceu-se a equação fundamental

$$(III-11) \quad \text{div } \vec{D} = \rho$$

relacionando o deslocamento eléctrico  $\vec{D}$  com a densidade volumica de carga  $\rho$ . Mantém-se esta equação (III-11) no campo electromagnético variável? Vimos já que uma das equações fundamentais do campo electrostático, a saber  $\text{rot } \vec{E} = 0$ , não pode manter-se no campo electromagnético, de um modo geral, por razões apontadas. Em contrapartida, admite-se que a equação (III-11) subsiste efectivamente como relação válida, a cada instante, entre as grandezas  $\vec{D}(x, y, z, t)$  e  $\rho(x, y, z, t)$ , densidade volumica da carga total. A equação (III-11) é, em efeito, uma das equações fundamentais da teoria de Maxwell, que constituem, no seu conjunto, os princípios do Electromagnetismo.

A equação (III-11) subsiste, portanto, como um princípio.

A lei de dispersão das cargas elétricas num condutor homogêneo e isotrópico, que vamos agora estabelecer, resulta da equação (III-11), tidas em conta a definição (III-10), da equação da conservação de carga elétrica (III-4) e da lei de Ohm (III-7). Porque o condutor é homogêneo, podemos, facilmente, eliminar entre as quatro relações:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} = \rho & \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} & \vec{J} = \sigma^* \vec{E} \end{cases}$$

as grandezas  $\vec{D}$ ,  $\vec{J}$  e  $\vec{E}$ . Isto conduz-nos à seguinte equação diferencial em  $\rho$  e  $t$ :

$$(III-12) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma^*}{\epsilon}$$

que fornece, por integrações:

$$(III-13) \quad \rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma^*}{\epsilon} t} = \rho_0 e^{-t/\tau_0}$$

sendo  $\rho_0 = \rho_0(x, y, z)$  a distribuição inicial no meio (condutor-isolante),

A densidade  $\rho$  em cada ponto decai exponencialmente para zero, no decorrer do tempo.

De um ponto de vista matemático, só para  $t = \infty$  é que  $\rho$  se torna nulo; mas, de um ponto de vista físico, dado o carácter exponencial do decaimento, podemos dizer que ao fim de um tempo, mais ou menos curto,  $\rho$  se torna tão pequeno que se pode ficar abaixo da sensibilidade dos aparelhos de medi-



da, portanto praticamente nulo.

A rapidez deste decrescimento para zero é medida pela grandeza

$$(III-14) \quad \theta = \frac{\epsilon}{\sigma^*}$$

que tem o carácter físico de um tempo - e se chama tempo de relaxação - representando, efectivamente, o tempo ao fim do qual  $\rho$  se reduz a  $\frac{1}{e}$  ( $\approx 1/2,7$ ) do seu valor inicial. A tabela seguinte dá os tempos de relaxação para alguns materiais comuns

<u>Material</u>	<u>Tempo de relaxação <math>\theta</math></u>
Prata	$1,3 \times 10^{-19}$ s
Cobre	$1,5 \times 10^{-19}$ s
Água do mar	$2 \times 10^{-10}$ s
Água destilada	$10^5$ s
Quartzo fundido	10 dias

Podemos notar que os bons condutores têm um tempo de relaxação extremamente curto e que os isolantes têm um tempo de relaxação relativamente grande. De facto, é o tempo de relaxação que verdadeiramente permite afirmar se se deve considerar um determinado meio material como condutor ou como isolante. Se  $\theta$  é muito menor que a duração de uma medida, o material comporta-se como condutor; se  $\theta$  é muito maior que a duração de uma medida como isolante.

Notemos, por fim, que, se num condutor homogéneo não subsiste praticamente nenhuma quantidade de electricidade distribuída em volume ( $\rho$  tende muito rapidamente para zero), em contrapartida, podem subsistir distribuições superficiais sobre superfícies de descontinuidade tais como a superfície limítrofe do condutor ou a superfície de separação,

da, portanto praticamente nulo.

A rapidez deste decréscimo para zero é medida pela grandeza

$$(III-14) \quad \theta = \frac{\epsilon}{\sigma^*}$$

que tem o carácter físico de um tempo - e se chama tempo de relaxação - representando, efectivamente, o tempo ao fim do qual  $\rho$  se reduz a  $\frac{1}{e}$  ( $\approx 1/2,7$ ) do seu valor inicial. A tabela seguinte dá os tempos de relaxação para alguns materiais comuns

<u>Materiais</u>	<u>Tempo de relaxação <math>\theta</math></u>
Prata	$1,3 \times 10^{-19}$ s
Cobre	$1,5 \times 10^{-19}$ s
Água do mar	$2 \times 10^{-10}$ s
Água destilada	$10^5$ s
Quartzo fundido	10 dias

Podemos notar que os bons condutores têm um tempo de relaxação extremamente curto e que os isolantes têm um tempo de relaxação extremamente grande. De facto, é o tempo de relaxação que verdadeiramente permite afirmar se se deve considerar um determinado meio material como condutor ou como isolante. Se  $\theta$  é muito menor que a duração de uma medida, o material comporta-se como condutor; se  $\theta$  é muito maior que a duração de uma medida como isolante.

Notemos, por fim, que, se num condutor homogêneo não subsiste praticamente nenhuma quantidade de electricidade distribuída em volume ( $\rho$  tende muito rapidamente para zero), em contrapartida, podem subsistir densidades locais superficiais sobre superfícies de descontinuidade das propriedades físicas da superfície limitadora do condutor ou a superfície de separação de dois materiais.

de dois condutores homogêneos. Solue uma tal superfície (se  
parando os meios ① e ②) a equação (III-11) degenera  
em:

$$(III-15) \quad \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma$$

e, por outro lado, a equação de conservação de carga eléctrica  
 (III-4) degenera em:

$$(III-16) \quad \vec{n} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = - \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

sendo  $\vec{n}$  a semi-normal dirigida de ① para ② e  $\sigma$  a  
 densidade superficial de carga eléctrica. Estas equações (III-15)  
 e (III-16), combinadas com a definição (III-10) e com a  
 lei de Ohm (III-7), regem a distribuição  $\sigma$  e a sua evolu-  
 ção no tempo. Vê-se bem que não é agora possível ex-  
 traír uma relação simples como (III-12), descrevendo a  
 evolução no tempo de  $\sigma(x, y, z, t)$ . Enquanto a distribuição  
 das cargas distribuídas em volume,  $\rho(x, y, z, t)$ , se procura  
 de uma forma independente do campo electromagnético  
 estabelecido (ver (III-13)), o mesmo não se faz com as  
 cargas distribuídas sobre as superfícies de descontinuidade  
 dos meios materiais.

### III.7 — Corrente estacionária

Vimos já que o campo electromagnético estacionário  
 se caracteriza por não variar, no decurso do tempo,  
 em cada ponto, os vectores campo eléctrico e campo magnético:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

Daqui resulta, necessariamente, que as distribu-  
 ções de carga também não variam com o tempo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

As equações de conservação de carga eléctrica (III-4),

(III-5) e (III-5) impõem, então, que para a corrente estacionária se tenha:

— em todo o ponto interior de um condutor

$$(III-18) \quad \text{div } \vec{J} = 0 \quad ;$$

— na superfície de separação de dois meios condutores

$$(III-19) \quad \vec{n} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = 0 \quad ;$$

— e na superfície fronteira de um condutor com um isolante

$$(III-20) \quad \vec{n} \cdot \vec{J} = 0$$

A equação (III-18) diz-nos que o campo dos vectores  $\vec{J}$  é solenoidal, em corrente estacionária.

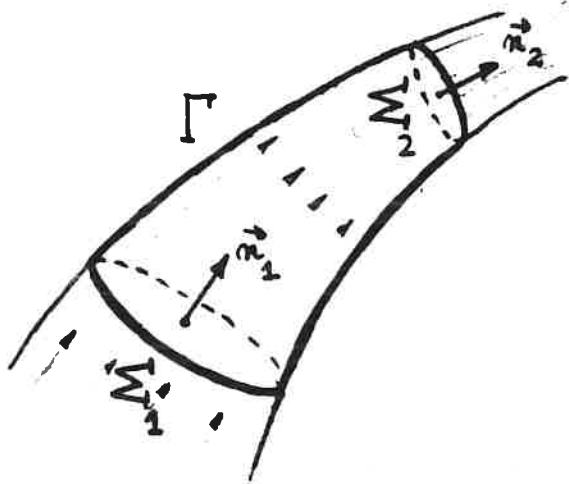
A relação (III-20) diz-nos que, na superfície limite de um condutor, percorrido por corrente estacionária,  $\vec{J}$  é perfeitamente tangencial; a superfície limite constitui, portanto, um tubo de linhas de força de  $\vec{J}$ .

Ainda por efeito de (III-18), o fluxo de  $\vec{J}$  que sai de uma superfície fechada qualquer, é nulo. Vejamos o que daqui resulta no que respecta ao fluxo de  $\vec{J}$  através de uma qualquer secção do condutor.

Consideremos um troço de um qualquer tubo de linhas de força de  $\vec{J}$  no condutor, limitado pelas  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , temos:

(III-21)

$$\int_{\Sigma_1} \vec{J}_1 \cdot \vec{n}_1 d\Sigma_1 = \int_{\Sigma_2} \vec{J}_2 \cdot \vec{n}_2 d\Sigma_2$$



Como é imposto pelo facto de ser nulo o fluxo que sai da superfície  $(\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Gamma)$ , em que  $\Gamma$  é o troço do tubo de linhas de força considerado e  $\vec{n}_1$  e  $\vec{n}_2$  são semi-

- normais em o sentido do momento das cargas. Isto significa que:

$$i_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS$$

(recorde-se (III-3)) tem o mesmo valor para qualquer secção  $\Sigma$  de um tubo de linhas de forças, e, em particular, para qualquer secção do condutor, visto que a sua superfície lateral é um tubo de linhas de forças.

Diz-se que o fluxo do momento das cargas eléctricas (ou o fluxo de  $\vec{J}$ ) em corrente estacionária é um fluxo conservativo.

### III.8 - Corrente estacionária em condutores homogêneos e isotrópicos

#### A. Propriedades do campo

A experiência mostra que no caso dos condutores homogêneos e isotrópicos, percorridos por correntes estacionárias, o campo eléctrico satisfaz ainda a equação:

$$(III-22) \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{rot } \vec{E} = 0}$$

o que equivale a afirmar que  $\vec{E}$  deriva de um potencial escalar  $V$ ,

$$(III-22') \quad \vec{E} = -\text{grad } V,$$

como na Electrostatica; mas, só em tais circunstâncias subsiste este carácter de campo electrostático; a equação (III-22) deixa de ser válida se a corrente não é estacionária ou se o condutor não é homogêneo.

Se se aplica a lei de Ohm (III-7) pode-se escrever:

$$(III-23) \quad \vec{J} = -\sigma^* \text{grad } V$$

e também se tem:

$$(III-23') \quad \text{rot } \vec{J} = 0$$

em que  $\sigma^*$  tem o mesmo valor em todos os pontos do condutor.

Por outro lado, nas mesmas circunstâncias, por força de (III-18) e da lei de Ohm (III-7), resulta que:

$$\text{div } \vec{J} = 0 \rightarrow \text{div } (\sigma^* \vec{J}) = 0$$

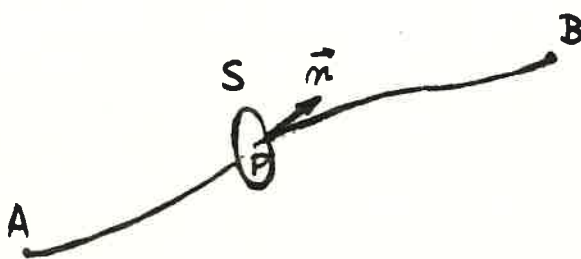
$$(III-24) \quad \text{div } \vec{E} = 0 \quad (\text{ou } \text{lap } V = 0)$$

o que quer dizer que a equação fundamental (III-11), de validade geral, se cumpre aqui com  $\rho = 0$  (porque  $\sigma^*$  tem o mesmo valor em todos os pontos do condutor). Podemos então afirmar que nos condutores homogêneos e isotrópicos percorridos por corrente estacionária, é constantemente nula a densidade volumétrica de carga total (compare esta conclusão com a lei de dispersão tratada no parágrafo III.6). As cargas elétricas responsáveis pelo potencial  $V$  só podem, portanto, achar-se distribuídas sobre as superfícies limitadoras dos condutores (com densidade  $\sigma(x, y, z)$  independente do tempo.)

## B. Formas integrais das leis de Ohm e de Joule

### 1) Condutores filiformes

Um condutor filiforme, com dimensões transversais muito pequenas em face da dimensão longitudinal, pode ser-se gerado por uma superfície plana muito pequena,  $S$ , que se desloca, produzindo em geral mudança de contorno e de área, mas mantendo-se constantemente normal a uma linha  $[s]$  (ver figura). O condutor confunde-se praticamente com esta linha; designa-se por condutor filiforme (ou fio condutor).



Se o condutor é homogêneo e isotrópico, e sendo a corrente estacionária, a intensidade  $i$  (com o mesmo valor em qualquer secção recta) vem dada por:

$$(III-25) \quad i = \int_{\vec{T}, \vec{n}} d\vec{l} \rightarrow \left[ i = -\sigma^* \int_S \vec{n} \cdot \text{grad } V \, dS \right]$$

que resulta de (II-3) e (III-23), expressões da lei de Ohm nas circunstâncias presentes; mas, nas condições de condutor filiforme, a quantidade  $\vec{n} \cdot \text{grad } V$  não varia sensivelmente de um ponto para outro da superfície  $S$  e pode tomar-se sempre com o valor que tem em  $P$ , sobre a linha  $[s]$ ; por outro lado, tem-se  $\vec{n} = \frac{d\vec{s}}{ds}$ , se  $d\vec{s}$  for o elemento de linha  $[s]$  no ponto  $P$  e  $ds = |d\vec{s}|$ . Então, (III-25) dá:

$$(III-26) \quad \left[ i = -\frac{\sigma^* S}{ds} d\vec{s} \cdot \text{grad } V = -\frac{\sigma^* S}{ds} dV \right]$$

A grandeza:

$$(III-27) \quad \left[ dr = \frac{ds}{\sigma^* S} \right]$$

designa-se por resistência eléctrica do elemento  $ds$  do condutor filiforme; (III-26) reescreve-se então:

$$(III-26') \quad i \, dr = -dV$$

e exprime a lei de Ohm para o elemento  $ds$  do fio. Se integramos entre as extremidades  $A$  e  $B$  do fio, vem:

$$(III-28) \quad r \, i = V_A - V_B \quad (i = \overline{di} = \text{const.})$$

em que:

$$(III-29) \quad \left[ r = \int_A^B dr = \int_A^B \frac{ds}{\sigma^* S} = \frac{1}{\sigma^*} \int_A^B \frac{ds}{S} \right]$$

é a resistência eléctrica do fio condutor de comprimento finito  $\overline{AB}$ .

A equação (III-28) traduz a lei de Ohm na sua

forma original, directamente ligada à experiência.

(iJs)

No tocante à lei de Joule, a equação (III-9) transcreve-se facilmente para um elemento de fio condutor, se tomarmos  $\vec{J}^2 = \left(\frac{i}{S}\right)^2$  em base nas mesmas considerações acima feitas e se tivermos em conta que  $dv = S ds$ . Se designarmos por  $dQ$  a quantidade de calor libertada por unidade de tempo no elemento  $ds$ , vem:

(III-30)

$$dQ = i^2 dr$$

$$\begin{aligned} dQ &= \frac{1}{\sigma} J^2 dv dt \\ &= \frac{1}{\sigma} \left(\frac{i}{S}\right)^2 S ds dt \\ &= \frac{1}{\sigma} \frac{i^2}{S^2} S ds dt \\ &= i^2 dx dt \end{aligned}$$

em  $dr$  dado por (III-27). A quantidade de calor libertada por unidade de tempo num fio condutor de comprimento finito  $\overline{AB}$  vem dada por

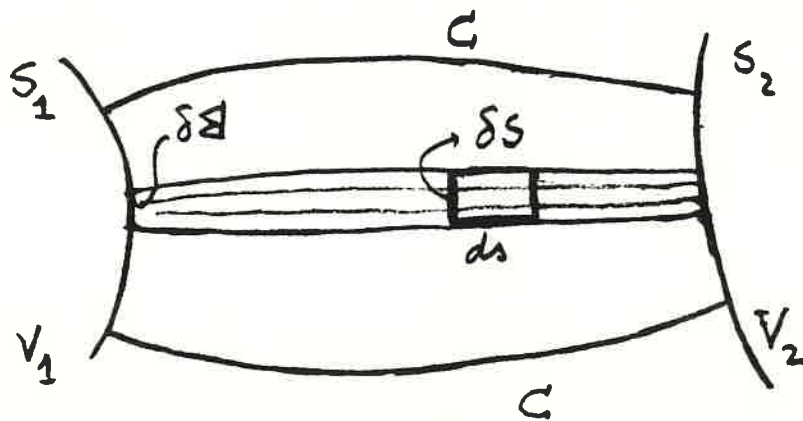
(III-31)

$$[Q = r i^2]$$

que é a lei de Joule sob a sua forma original.

## 2) Condutor extenso entido entre dois eléctrodos

Consideremos agora um condutor extenso entido entre dois eléctrodos equipotenciais,  $S_1$  e  $S_2$ , mantidos às potenciais (invariáveis no tempo)  $V_1$  e  $V_2$ , respectivamente, e limitada lateralmente por uma superfície  $C$  (ver figura).



Tomemos sobre  $S_1$  um elemento de área  $\delta S_1$  e o tubo filiforme das linhas de corrente que partem de  $\delta S_1$ . Assimilando este tubo de corrente a um condutor filiforme  $\overline{AB}$ , que decomponemos em elementos  $ds$  (ver figura) podemos



escreva por (III-28) e (III-29):

$$(III-32) \quad \delta i = \frac{V_A - V_B}{\int_A^B \frac{ds}{\sigma^* \delta S}} ;$$

mas  $\delta i$ , corrente que passa em qualquer  $\delta S$ , sempre a mesma, e' tambem a corrente que entra no condutor atraves da base do tubo de corrente considerado; portanto, o integral do 1° membro de (III-32), sobre a superficie  $\Sigma'$  de contacto do condutor com o electodo  $S_1$ , da'  $i$ , corrente global que entra no condutor. Por outro lado, para integrar o 2° membro sobre a mesma superficie  $\Sigma'$  deve atender-se à relaçao existente entre  $\delta S$  e  $\delta \Sigma'$  (variavel ao longo do filamento  $\overline{AB}$ ), operando a substituição

$$\int_A^B \frac{ds}{\sigma^* \delta S} = \int_A^B \frac{ds}{\sigma^* \frac{\delta S}{\delta \Sigma'} \delta \Sigma'} = \frac{1}{\delta \Sigma'} \int_A^B \frac{1}{\sigma^*} \frac{\delta \Sigma'}{\delta S} ds$$

Então, de (III-32) resulta:

$$i = \int_{\Sigma'} \frac{V_A - V_B}{\int_A^B \frac{1}{\sigma^*} \frac{\delta \Sigma'}{\delta S} ds} \delta \Sigma'$$

ou seja:

$$(III-33) \quad R i = V_A - V_B$$

com:

$$(III-34) \quad \frac{1}{R} = \int_A^B \frac{\delta \Sigma'}{\sigma^* \frac{\delta \Sigma'}{\delta S} ds}$$

ou :

$$(III-34') \quad \frac{1}{R} = \sigma^* \int_{\Sigma'} \frac{\delta \Sigma'}{\int_A^B \frac{\delta \Sigma'}{\delta s} ds}$$

no caso que nos ocupa (condutores homogêneos).

A equação (III-33) é a lei de Ohm sob forma integral para um condutor extenso contido entre dois eléctrodos; a sua analogia com a equação (III-28) leva-nos a atribuir à grandeza  $R$  definida por (III-34) o significado de resistência eléctrica de um tal condutor. Vê-se que  $R$  depende essencialmente da forma do condutor e da extensão, da forma, e da posição relativa dos eléctrodos que o confinam.

Passando à lei de Joule, e transcrevemos (III-34) para o tubo de corrente  $\overline{AB}$  aqui considerado e tendo em conta (III-28), então a quantidade de calor  $\delta Q$  libertada por unidade de tempo no elemento  $\overline{AB}$  de base  $\delta \Sigma'$  é

$$\delta Q = \delta i (V_A - V_B) \quad ;$$

integrando sobre toda a superfície  $\Sigma'$ , vem:

$$(III-35) \quad Q = i (V_A - V_B)$$

que combinada com (III-33) dá:

$$(III-35') \quad Q = R i^2$$

É a lei de Joule sob a forma integral para um condutor extenso contido entre dois eléctrodos.

### III.9 - Corrente estacionária em condutores isotrópicos não-homogêneos

#### A. Extensão da lei de Ohm

A experiência mostra que nos condutores heterogêneos

(com heterogeneidade material ou devida a um gradiente de temperatura) pode observar-se corrente estacionária em correlação com a existência de um campo electromotor não irrotacional.

Isso leva-nos a admitir que o campo pode consistir, além de um termo  $\vec{E}^e$  de carácter electrostático como ocorre no caso dos condutores homogêneos ( $\text{rot } \vec{E}^e = 0$ ), um novo termo  $\vec{E}^a$  — campo aplicado ou campo de heterogeneidade — que existe somente onde há heterogeneidades e que não é, em geral, irrotacional ( $\text{rot } \vec{E}^a \neq 0$ ).

Escreve-se em consequência:

$$(III-36) \quad \vec{E} = \vec{E}^e + \vec{E}^a = -\text{grad } V + \vec{E}^a$$

e, se nos limitarmos aos condutores isotrópicos, a lei de Ohm toma então a forma

$$(III-37) \quad \vec{J} = \sigma^* (-\text{grad } V + \vec{E}^a) = \sigma^* \vec{E}$$

que generaliza a equação (III-23) do parágrafo 8.A.

Note-se que a existência de heterogeneidades acarreta para a equação (III-37), não só o aparecimento de  $\vec{E}^a$ , mas, também, o facto de  $\sigma^*$  ser aí, agora, uma grandeza variável de ponto para ponto.

### B. Propriedades do campo

As propriedades do campo descritas no parágrafo 8.A. para os condutores homogêneos não subsistem, portanto, em geral. Tem-se:

$$(III-38) \quad \text{rot } (\vec{E} - \vec{E}^a) = 0$$

em vez de  $\text{rot } \vec{E} = 0$ , porque:

$$(III-39) \quad \text{rot } \vec{E} = \text{rot } \vec{E}^a \neq 0$$

Por outro lado, visto que a corrente é estacionária, contém-se a verificar-se:

$$(III-40) \quad \boxed{\operatorname{div} \vec{J} = 0} ;$$

mas isso implica agora

$$(III-41) \quad \operatorname{div} (\sigma^* \vec{E}) = 0$$

em vez de  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  (Cf. § III.8-A).

Emfim, não esqueçamos que a equação

$$(III-42) \quad \boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho}$$

se conserva aqui, como uma propriedade fundamental de todo o Electromagnetismo, e implica (por ser  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ):

$$(III-43) \quad \boxed{\operatorname{div} (\epsilon \vec{E}) = \rho}$$

As equações (III-38), (III-41) e (III-43) resumem as novas propriedades do campo.

O carácter não-irrotacional do campo [eq.(III-39)] faz da sua circulação uma função de linha (não dependente apenas do ponto de partida e do ponto de chegada, mas essencialmente dependente do percurso). Assume particular importância a sua circulação ao longo de uma curva fechada  $[C]$ , que se designa genericamente por força electromotriz,  $\mathcal{E}$ , ao longo de  $[C]$ :

$$(III-44) \quad \left[ \mathcal{E} = \oint_{[C]} \vec{E} \cdot d\vec{s} \right] \quad \text{(f.e.m.)}$$

Mas, tendo em conta (III-36), a definição aqui feita de  $\mathcal{E}$  conduz imediatamente a:

$$(III-45) \quad \mathcal{E} = \oint_{[C]} \vec{E}^a \cdot d\vec{s} ;$$

ou seja: a força electromotriz ao longo da curva fechada  $[C]$  é a circulação (fechada) do campo  $\vec{E}^a$  ao longo de  $[C]$ .

C. Electrizações de um condutor heterogéneo pela corrente estacionária

Enquanto nos condutores homogêneos percorridos por corrente estacionária a densidade volumétrica total das cargas eléctricas é nula ( $\rho = 0$ ) (Cf § III. 8-A), nos condutores heterogêneos, ao contrário, a corrente estacionária produz em geral uma electrização de que vamos determinar a densidade volumétrica.

Basta tomar o jogo das seguintes quatro equações:  
 $\text{div } \vec{D} = \rho$  ;  $\text{div } \vec{J} = 0$  ;  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  ; e  $\vec{J} = \sigma^* \vec{E}$  ;  
 e eliminar entre elas as grandezas  $\vec{D}$  e  $\vec{E}$  para deduzir a seguinte expressão de  $\rho$  :

$$(III-45) \quad \boxed{\rho = \vec{J} \cdot \text{grad } \theta} \quad //$$

sendo  $\theta = \epsilon / \sigma^*$  , o tempo de relaxação, de que vimos já o significado físico, a propósito da lei da dispersão das cargas eléctricas nos condutores homogêneos e isotropos. No caso presente,  $\theta$  varia em geral de ponto para ponto e existe portanto um  $\text{grad } \theta$  não-nulo.

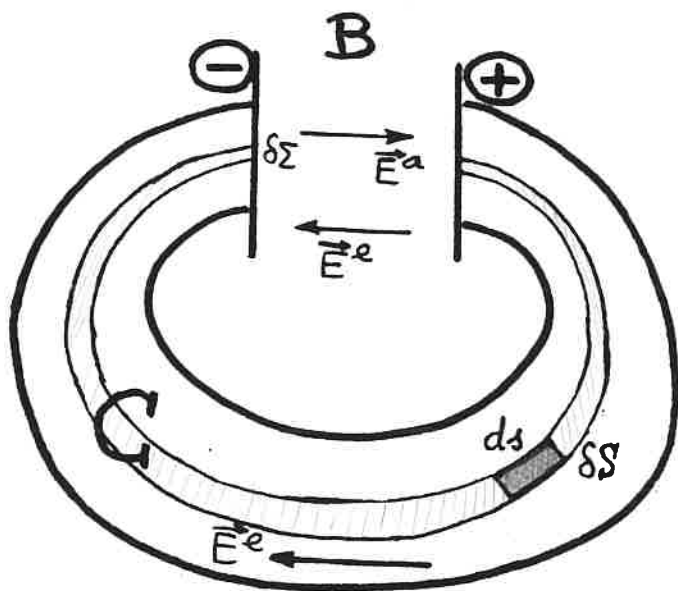
A eq. (III-45) mostra que se tem em geral  $\rho \neq 0$ , mas que, sob certas condições de heterogeneidade, poderá ocorrer  $\rho = 0$ . Vê-se ainda que a electrização se acha directamente relacionada com a corrente  $\vec{J}$  que a gera. Pode também concluir-se, a partir da eq. (III-45), que é globalmente nula a carga eléctrica correspondente à referida electrização (a qual se estende a todo o volume do condutor). Tem-se com efeito:

$$(III-47) \quad \int_V \rho \, dv = \int_V \vec{J} \cdot \text{grad } \theta \, dv = 0$$

em que  $V$  é o volume global do condutor. A eq. (III-47) resulta de ser  $\vec{J}$  um vector solenoidal ( $\text{div } \vec{J} = 0$ ) e  $\text{grad } \theta$  um vector irrotacional, cumprindo-se ainda na superfície limítrofe do condutor as seguintes condições:  $\vec{J} \cdot \vec{n} = 0$  e  $\theta$  finito ( $\theta = \epsilon / \sigma^*$ ).

## D. Circuito eléctrico. Fórmulas de Ohm.

Consideremos um circuito eléctrico em que se acham incluídos condutores heterogêneos apresentando no seu interior campos aplicados. Suponhamos que a localização destes campos se confina a uma dada região  $B$  — bateria — limitada por dois eléctrodos — polos, positivo e negativo, da bateria —. Designemos por  $C$  o condutor (homogêneo) que contacta pelo exterior os polos da bateria (V. Figura).



(III-48)

Estudemus em primeiro lugar a situação em que o condutor exterior  $C$  não existe, não havendo portanto corrente,  $\vec{J} = 0$ . É a situação de circuito aberto. Tem-se então um equilíbrio electrostático caracterizado no interior da bateria por

$$\vec{E} = -\text{grad } V + \vec{E}^a = 0;$$

e em todo o ponto exterior está definido um campo electrostático. Nestas condições, se tomarmos (III-45) ao longo de uma curva  $[c]$  fechada que passe pela bateria e se utilizarmos (III-48), resulta:

$$(III-49) \quad \mathcal{E} = \oint_{[c]} \vec{E}^a \cdot d\vec{s} = \int_{-}^{+} \vec{E}^a \cdot d\vec{s} = \int_{-}^{+} \text{grad } V \cdot d\vec{s} = \\ = V_{+} - V_{-} //$$

sendo este integral independente dos pontos tomados sobre os polos da bateria, que são dois eléctrodos equipotenciais, e, além disso, independente do percurso entre esses pontos. Assim, em circuito aberto, a f.e.m. aplicada iguala a diferença de

potencial entre os polos da bateria.

Estudemos em segundo lugar a situação em que se fecha efectivamente o circuito através do condutor  $G$ ; existe uma corrente regida pela lei de Ohm sob a forma (III-37). (É a situação de circuito fechado).

Calculemos a intensidade da corrente que entra, por exemplo, através do polo negativo. Para isso, dividamos este eléctrodo, de área  $\Sigma_1$ , em elementos  $\delta\Sigma_1$  e tomemos o filamento de corrente que nasce em  $\delta\Sigma_1$ , de intensidade  $\delta i$ . Resulta:

$$(III-50) \quad i = \int_{\Sigma_1} \delta i = \int_{\Sigma_1} \frac{\delta i}{\delta\Sigma_1} \delta\Sigma_1$$

Seja  $\delta S$  uma secção recta genérica do filamento considerado e  $\vec{j}$  a densidade de corrente em  $\delta S$ ; pode escrever-se:

$$\delta i = |\vec{j}| \delta S = \sigma^* |-\text{grad } V + \vec{E}^a| \delta S = \frac{\sigma^* \delta S}{ds} (-\text{grad } V + \vec{E}^a) \cdot d\vec{s}$$

ou seja:

$$(III-51) \quad \delta i \frac{ds}{\sigma^* \delta S} = (-\text{grad } V + \vec{E}^a) \cdot d\vec{s}$$

Integremos agora a equação (III-51) ao longo de um filamento:

- 1º) fechado no circuito global;
- 2º) aberto, no interior da bateria, vindo do polo (-) ao polo (+);
- 3º) aberto, através do condutor  $G$ , vindo do polo (+) ao polo (-).

Para o 1º caso vem:

$$\delta i \oint \frac{ds}{\sigma^* \delta S} = \oint (-\text{grad } V + \vec{E}^a) \cdot d\vec{s} = \int_{-}^{+} \vec{E}^a \cdot d\vec{s} = \mathcal{E}$$

ou seja:

$$\frac{\delta i}{\delta \mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E}}{\oint \frac{1}{\sigma^*} \frac{\delta \mathcal{E}'}{\delta s} ds}$$

e, entrando com esta expressão em (III-50), resulta, se se tem em conta a definição (III-34) do parágrafo 8.B.2):

$$(III-52) \quad i R = \mathcal{E} \quad (\text{relação a da bateria})$$

sendo  $R$  a resistência total do circuito. Este resultado constitui a 1ª fórmula de Ohm.

No 2º caso, vem:

$$\delta i \int \frac{ds}{\sigma^* \delta s} = \mathcal{E} - (V_+ - V_-)$$

e o mesmo mecanismo utilizado no 1º caso conduz a:

$$(III-53) \quad i R_B = \mathcal{E} - (V_+ - V_-)$$

em que  $R_B$  é a resistência da bateria. Note-se que se tem aqui, em circuito fechado, uma diferença de potencial  $V_+ - V_-$ , que, pelo confronto de (III-53) com (III-49), é menor que a diferença de potencial em circuito aberto,  $= \mathcal{E}$ , como a experiência ensina.

A equação (III-53) é a 2ª fórmula de Ohm.

Para o 3º caso temos:

$$\delta i \int \frac{ds}{\sigma^* \delta s} = V_+ - V_-$$

( $\vec{E}^a = 0$ , no interior do condutor  $G$ ) e análogamente aos dois primeiros casos:

$$(III-54) \quad i R_G = V_+ - V_-$$



em que  $R_c$  é a resistência do condutor  $G$ .

A equação (III-54) constitui a 3.ª fórmula de Ohm. Ela coincide, como era de esperar, com a equação (III-33), deduzida no estudo dos condutores homogêneos.

Se somarmos (III-54) com (III-53) obtemos (III-52), o que significa que as fórmulas de Ohm (regendo o circuito fechado em corrente estacionária) se reduzem efectivamente a duas independentes.

### E. Calor de Joule e actividade dos campos aplicados

Ao movimento das cargas num condutor heterogêneo está associado um trabalho desenvolvido pelos campos aplicados. Se tomarmos no interior do condutor um elemento  $ds$  de um tubo filiforme de linhas de força de  $\vec{J}$ , de secção recta  $\delta S$  e percorrido pela corrente  $\delta i$ , o trabalho realizado, no volume  $dV = \delta S ds$ , por unidade de tempo, vale:

$$\left[ \delta i \vec{E}^a \cdot d\vec{s} = |\vec{J}| \delta S \vec{E}^a \cdot d\vec{s} = \vec{J} \cdot \vec{E}^a dV. \right]$$

Se estudarmos este cálculo a todo o circuito onde flui uma corrente  $\vec{J}$  mantida pelos campos  $\vec{E}^a$ , obtemos:

$$(III-55) \quad \left| \mathcal{A} = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E}^a dV \right| \quad \left( \int_V \underbrace{\vec{J} \cdot \vec{E}^a}_{\vec{J} \cdot \vec{E}^a} dV \right)$$

sendo  $V$  o volume global do circuito.  $\mathcal{A}$  é a actividade dos campos aplicados, no circuito.

Consideremos, agora, o calor de Joule libertado na mesma unidade de tempo:

$$(III-56) \quad \left[ Q = \int_V \frac{\vec{J}^2}{\sigma^*} dV = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV \right]$$

Compararemos as duas energias (III-55) e (III-56).

A sua diferença exprime-se por:

$$(III-57) \quad Q - Q' = \int_V \vec{J} \cdot (\vec{E} - \vec{E}^a) dv$$

Se o circuito estacionário, tem-se  $Q - Q' = 0$ . Com efeito, o integral do 2º membro de (III-57) anula-se porque a função integranda é o produto interno de um vector solenoidal (div  $\vec{J} = 0$ ) por um vector irrotacional, equação (III-38), sendo, sobre a fronteira do volume  $V$ ,  $\vec{J} \cdot \vec{n} = 0$  e  $V$  função finita. A demonstração fez-se como segue:

$$\begin{aligned} \int_V \vec{J} \cdot (\vec{E} - \vec{E}^a) dv &= \int_V \vec{J} \cdot (-\text{grad } V) dv = \\ &= - \int_V V \text{div } \vec{J} dv - \int_S V \vec{J} \cdot \vec{n} dS = 0 \end{aligned}$$

Em conclusão, no regime estacionário, a actividade dos campos aplicados empurra, exactamente, a quantidade de calor libertado na unidade de tempo por efeito Joule no circuito global.

Esta afirmação traduz o principio de conservação de energia em regime estacionário.

### III.10 - Redes de condutores filiformes em regime estacionário

Um sistema de fios condutores ligados entre si pelas suas extremidades constitui uma rede de condutores filiformes. Os pontos de confluência de três ou mais fios designam-se por vértices ou nós; todo o fio ligando directamente dois vértices é um ramo; um grupo de ramos constituído um circuito fechado designa-se por malha.

Suponhamos que há  $n$  ramos e que cada ramo  $\alpha$

tem uma resistência  $r_\alpha$ ; designemos por  $\mathcal{E}_\alpha$  a f.e.m. (eventualmente nula) residindo no ramo  $\alpha$ . A experiência mostra que, se todos os  $\mathcal{E}_\alpha$  são constantes, a rede é percorrida por correntes estacionárias bem determinadas ( $i_\alpha$  no ramo  $\alpha$ , com  $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ).

O problema de uma rede nestas condições consiste, precisamente, em encontrar as relações bem definidas que devessem existir entre os  $\mathcal{E}_\alpha$ , os  $r_\alpha$  e os  $i_\alpha$ . Para resolvê-lo, utilizamos as leis de Kirchhoff, que vamos agora estabelecer.

### A. Leis de Kirchhoff

1) Seja  $A$  um vértice da rede; nele concorrem vários ramos. Consideremos uma superfície  $S$ , fechada em torno de  $A$  e cortando os diversos ramos em secções  $\Sigma'_1, \dots, \Sigma'_\beta, \dots$  (ver figura I). A corrente  $i_\beta$ , que sai do vértice  $A$  pelo ramo  $\beta$  (através de  $\Sigma'_\beta$ ) é dada por:

$$(III-58) \quad i_\beta = \int_{\Sigma'_\beta} \vec{J}_\beta \cdot \vec{n}_\beta \, d\Sigma'_\beta$$

sendo se negativa ou positiva consoante o sentido real da corrente é para dentro ou para fora da superfície fechada  $S$ .

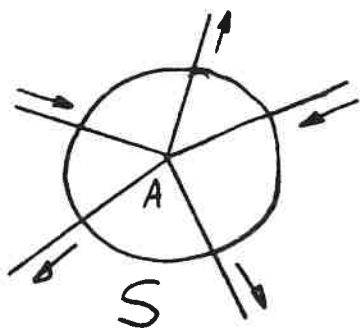


figura I-a

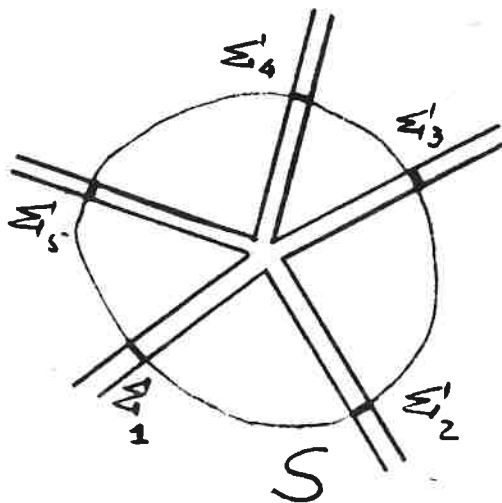


figura I-b

Por ser  $\text{div } \vec{J} = 0$  (regime estacionário) temos:

$$\int_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

e como só as seções  $\Sigma_\beta$  dos condutores contribuem para este fluxo, vem:

$$(III-59) \quad \sum_\beta \int_{\Sigma_\beta} \vec{J}_\beta \cdot \vec{n}_\beta \, d\Sigma_\beta = 0$$

De (III-58) e (III-59) resulta:

$$(III-60) \quad \sum_\beta i_\beta = 0$$

É a primeira lei de Kirchhoff: a soma algébrica dos correntes de todos os ramos, que concorrem num vértice é nula.

2) Seja agora a malha  $[ABCD]$  uma malha de rede, como a esquematizada na figura II. Utilizemos a lei de Ohm, equação (III-37), para calcular a circulação do campo ao longo de cada um dos ramos. Pode escrever-se, por exemplo para o ramo AB:

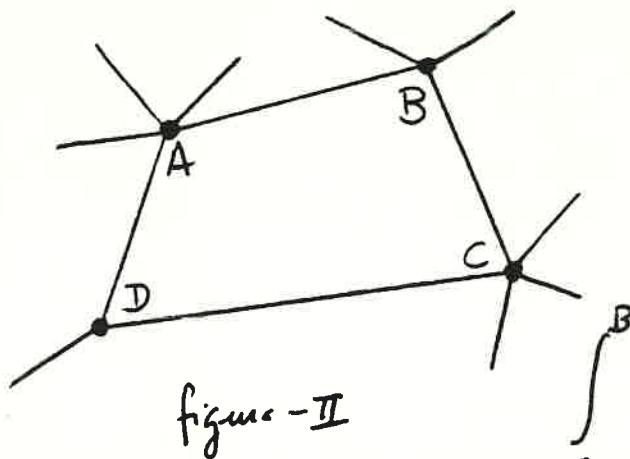


figura - II

$$\int_A^B \vec{E}^a \cdot d\vec{s} = \int_A^B \frac{1}{\sigma} \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \text{grad } V \cdot d\vec{s}$$

e é fácil verificar que:

$$a) \quad \int_A^B \vec{E}^a \cdot d\vec{s} = \mathcal{U}_{AB} \quad (\text{definição de f. e. m.})$$

$$b) \int_A^B \frac{1}{r^*} \vec{j} \cdot d\vec{s} = i_{AB} \int_A^B \frac{ds}{r^* S} = i_{AB} r_{AB}$$

(cf. estudo dos condutores filiformes, 8B-1)

$$c) \int_A^B \text{grad } V \cdot d\vec{s} = V_B - V_A$$

Donde resulta que, para o ramo  $\overline{AB}$ :

$$(III-61) \quad \mathcal{E}_{AB} - i_{AB} r_{AB} = V_B - V_A$$

e, análogamente para os outros ramos.

Ora, se tomarmos as relações (III-61) obtidas para todos os ramos da malha considerada, tomando sempre o mesmo sentido de circulação, vem

$$(III-62) \quad \sum_{\gamma} (\mathcal{E}_{\gamma} - r_{\gamma} i_{\gamma}) = 0$$

visto que os 2<sup>os</sup> membros se destroem mutuamente.

É a segunda lei de Kirchhoff: ao longo de uma malha, para um dado sentido de circulação, a soma algébrica dos f.e.m.s, inseridos nos diversos ramos, iguala a soma algébrica dos produtos das resistências dos ramos pelas respectivas intensidades de corrente.

### B. Intensidades independentes e malhas fundamentais

Importa agora discutir como se devem apresentar as equações resultantes de aplicação das duas leis de Kirchhoff aos diferentes nós e às diferentes malhas, respectivamente.

Continuemos a supor que há  $n$  ramos e seja  $\underline{k}$  o número de nós.

A 1<sup>a</sup> lei de Kirchhoff fornece  $\underline{k}$  equações do tipo (III-60), — uma para cada nó — mas essas equações não são todas

independentes. Com efeito, como cada ramo liga dois nós, cada intensidade de corrente acha-se representada, no conjunto das  $K$  equações, duas e só duas vezes, e com sinais contrários por que se a corrente concorre num vértice diverge do outro. Assim, a soma das  $K$  equações, membro a membro, origina a identidade  $0=0$ . Segue-se que o nº de equações independentes que é possível escrever, com base na 1ª lei de Kirchhoff é  $K-1$ .

Então, das  $n$  intensidades das correntes que percorrem os diferentes ramos, por estarem assim ligadas por  $K-1$  equações independentes, resultam  $n-K+1$  intensidades independentes.

Por outro lado, haverá tantas equações do tipo (III-62), quantas as malhas que pudermos considerar na rede, mas, estas equações estão longe de ser todas independentes. É fácil verificar, por exemplo, que no trecho de rede representado na figura III, a 2ª lei de Kirchhoff se traduz para

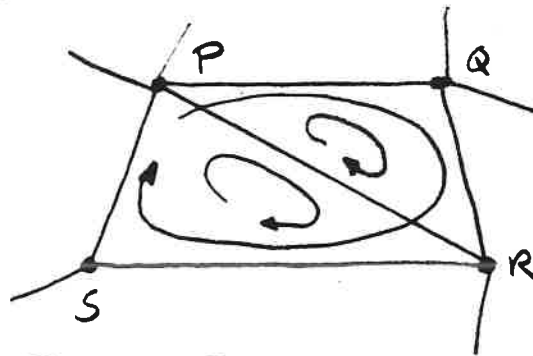


figura III

a malha [PQRS] nem a equação que é a soma, membro a membro, das equações giradas, pela mesma lei, para as duas malhas [PQR] e [PRS]: destas três malhas só duas são independentes.

Para as redes mais simples (fonte de Wheatstone, fonte dupla de Kelvin, por exemplo), é fácil encontrar, na prática, as malhas que fornecem as equações independentes — as malhas fundamentais. Para o caso geral, porém, a determinação, por via teórica, do número de malhas fundamentais, a partir do número de ramos e do número de nós da rede, é problema mais delicado, de carácter topológico, que

se pode assimilar ao problema da relação entre o número de faces, o número de vértices e o número de arestas de um poliedro. Demonstra-se que o número  $v$  de malhas fundamentais de uma rede com  $n$  ramos e  $k$  vértices é dado por:

$$(III-63) \quad \left[ v = n - k + 1 \right].$$

Pode assim concluir-se que, quando esgotada a aplicação das leis de Kirchhoff a uma rede, ficam a dispor de  $n-k+1$  equações independentes em  $n-k+1$  intensidades independentes. O sistema de equações lineares, desta maneira constituído, é determinado: admite uma e uma só solução.

### G. Princípio de superposição de estados estacionários.

#### Teorema de Thévenin

Porque as equações resultantes das leis de Kirchhoff são lineares em relação às intensidades e às f.e.m.s, nós podemos afirmar que toda a superposição de estados estacionários de uma rede é ainda um estado estacionário na mesma rede.

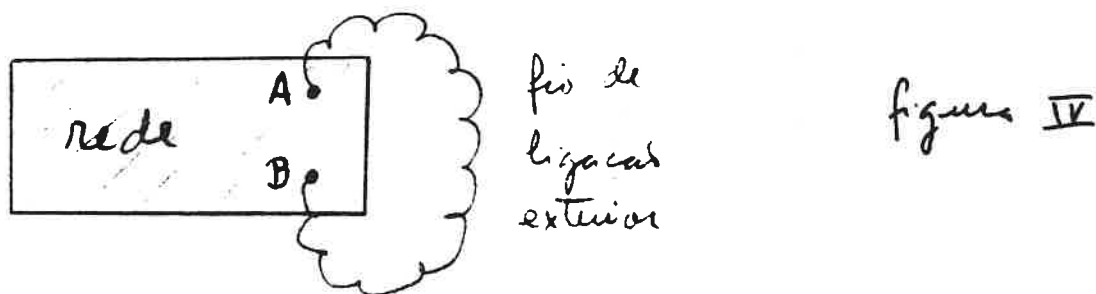
A superposição de estados estacionários acarreta que se somem, para cada ramo da rede, as intensidades e as f.e.m.s dos estados superpostos; em todo o ponto da rede o potencial resultante da superposição é também a soma dos potenciais dos estados superpostos. Ressalte-se todavia que, quando da introdução ou da supressão de uma f.e.m., se torna imprescindível referir, no valor que possuía antes, a resistência do ramo em causa.

Como uma consequência deste princípio de superposição, podemos afirmar, em particular, que, numa rede em que estão instaladas certas f.e.m.s, a intensidade em cada ramo é igual à soma das intensidades obtidas quando essas f.e.m.s se inserem individualmente.

Passemos ao importante teorema de Thévenin, que

se fundamenta ainda no princípio de conservação dos estados estacionários numa rede.

Sejam A e B dois pontos quaisquer de uma rede arbitrariamente complexa, onde os potenciais assumem actualmente os valores  $V_A$  e  $V_B$  respectivamente. Admitamos como conhecida a resistência  $R$  da rede  $\otimes$  medida entre os dois pontos A e B tomados como eléctrodos. Suponhamos agora que fizermos uma ligação, exterior à rede, entre os pontos A e B por um fio de resistência  $r$  (ver figura IV)



Nestas condições, o teorema de Thévenin afirma que a corrente  $i$  que percorre o fio vem dada por:

$$(III-64) \quad i = \frac{V_A - V_B}{R + r}$$

Como uma consequência, a diferença de potencial entre A e B, depois da ligação pelo fio, será:

$$V'_A - V'_B = ir$$

Para demonstrar este teorema, vamos considerar dois estados estacionários, de cuja sobreposição resulte o estado que se obtém após a ligação dos pontos A e B pelo fio.

Como primeiro estado estacionário, I, consideremos o que se estabelece quando os pontos A e B são ligados



Ver, no fim do parágrafo, a noção de resistência equivalente etc. ... entre dois pontos tomados como eléctrodos



pelo fio mas ao mesmo tempo inserimos no próprio fio uma f.e.m.

$\mathcal{E}_I = -(V_A - V_B)$  que empurra a diferença de potencial preexistente entre os pontos A e B. Nestas condições, a corrente no fio é nula e tudo se passa como se ele não existisse. O estado I é o estado primitivo da rede.

Como segundo estado estacionário, II, consideramos o que se estabelece quando suprimimos na rede todas as f.e.m.s e ao mesmo tempo criamos no fio uma f.e.m.  $\mathcal{E}_{II} = +(V_A - V_B)$ .

É claro que nestas condições a intensidade de corrente no fio será (1ª fórmula de Ohm em circuito fechado, parágrafo 9D):

$$i_{II} = \frac{\mathcal{E}_{II}}{R+r}.$$

É evidente que de tal forma os dois estados estacionários resulte a situação referida: as f.e.m.s na rede são as do estado I (no estado II não há f.e.m.s na rede) e a f.e.m. no fio é agora nula, pois  $\mathcal{E}_I + \mathcal{E}_{II} = 0$ . Como no fio é  $i_I = 0$  e  $i_{II} = \frac{\mathcal{E}_{II}}{R+r} = \frac{V_A - V_B}{R+r}$ , resulta:

$$i = i_I + i_{II} = \frac{V_A - V_B}{R+r},$$

como queríamos demonstrar.

Notemos que qualquer rede pode, assim, ser considerada como uma bateria de polos em 2 pontos arbitrários A e B, sendo a f.e.m. dessa bateria igual à diferença de potencial entre esses pontos,  $V_A - V_B$ , e a sua resistência interna a resistência equivalente da rede entre os mesmos pontos.

Analogia, já atrás referida,

$$(III-65) \quad V'_A - V'_B = i r$$

daí a diferença de potencial entre os polos de mesma bateria em circuito fechado.

Resistência equivalente entre dois pontos de uma rede, tomados como electrodos.

Consideremos uma rede de condutores, esquematicamente representada na figura V-1 pelo rectângulo tracejado, e sejam A e B dois dos seus pontos que tomaremos como electrodos. Suponhamos que estão suprimidos todos os f.e.m.

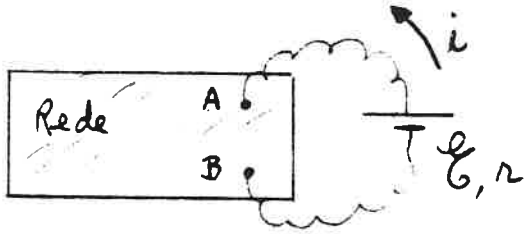


figura V-1

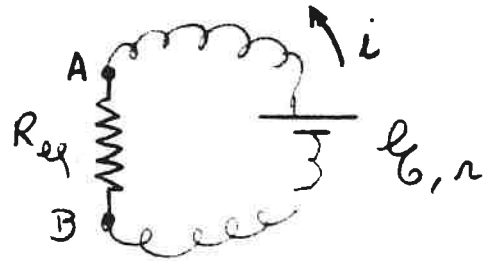


figura V-2

da rede nos seus diferentes ramos (encontrando-se, no entanto, refusa em cada ramo a sua resistência própria).

Ligemos os dois pontos A e B aos polos de uma bateria exterior à rede de f. e. m.  $E$ ; seja  $r$  a resistência interna da bateria. Suponhamos que nestas condições a bateria debita uma intensidade  $i$ .

Imaginemos, agora, que, em substituição da rede, consideráramos um condutor único cujos terminais A e B ligáramos aos polos da mesma bateria (figura V-2)

Resistência equivalente da rede entre os seus dois pontos A e B, tomados como electrodos,  $R_{eq}$ , é a resistência que deveria ter esse condutor único para que, neste segundo circuito, a bateria debita-se a mesma corrente  $i$  que no primeiro.

Tem-se, por aplicação da fórmula de Ohm ao segundo circuito:

$$i = \frac{E}{R_{eq} + r}$$

donde resulta que o valor de  $R_{eq}$  se pode achar a partir dos valores de  $\underline{E}$  e  $\underline{r}$ , supostos dados, e do valor de  $\underline{i}$  obtido mediante a realização do primeiro circuito (fig. V-1).

Pode verificar-se, com base na teoria das redes de condutores atrás exposta, que a definição acima, de  $R_{eq}$  em rede, para cada par de pontos A e B, tomadas na rede, a uma grandeza bem determinada, independente de  $\underline{E}$  e  $\underline{r}$  (que são arbitrários) e, portanto, função exclusiva das resistências dos ramos da rede.

## CAP. IV — CAMPO MAGNÉTICO

### 1ª Parte : CAMPO MAGNÉTICO DAS CORRENTES

#### IV. 1 — Leis de Biot-Savart e de Laplace

##### IV. 1.1 — Lei de Biot-Savart

Sabemos desde as experiências de Oersted (1820) que uma corrente eléctrica cria no espaço um campo magnético, o qual pode revelar-se pela acção exercida sobre pequenos corpos magnéticos (com propriedades previamente conhecidas, como se sabe). Rowland mostrou mais tarde (1875) que o mesmo efeito é produzido por uma carga eléctrica mecânicamente móvel. (\*)

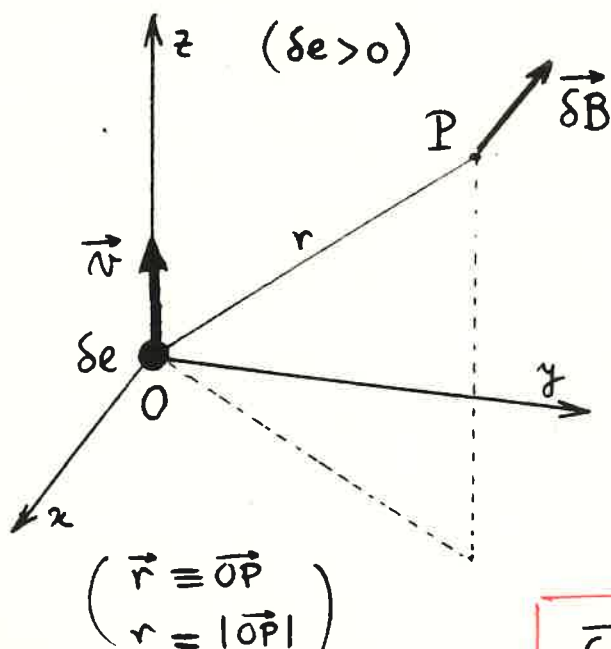
Assim, enquanto uma carga eléctrica em repouso relativamente ao observador cria no espaço um campo eléctrico, uma carga eléctrica que se mova em relação ao observador cria no espaço\* não só um campo eléctrico mas também um campo magnético. Este campo magnético é regido pela lei de Biot-Savart, elaborada a partir dos factos experimentais, e que passamos a enunciar.

(\* deste observador)

Suponhamos uma carga eléctrica elementar  $q$  que se acha animada da velocidade  $\vec{v}$ , no instante  $t$ , num dado referencial (por hipótese um referencial de inércia). Esta

---

(\*) Para estabelecer experimentalmente a equivalência entre uma carga mecânicamente móvel e uma corrente eléctrica, no tocante ao campo magnético produzido, H.A. Rowland imprimiu rotações de grande velocidade a uma placa metálica circular carregada e isolada e detectou os efeitos magnéticos desta corrente artificial resultante do movimento rotacional das cargas.



carga cria em todo o ponto P do referencial, à distância  $r$  da carga, suposta nesse instante no ponto O (v. Figura), um campo magnético que descreveremos mediante um vector indução magnética (elementar),  $\vec{\delta B}_P$ , dado pela relação

$$\vec{\delta B}_P = \frac{\mu_0}{4\pi c} q \frac{\vec{v} \wedge \vec{r}}{r^3},$$

para observações supostas realizadas no vácuo. Esta relação, em que  $\mu_0/4\pi c$  representa uma constante de proporcionalidade<sup>(\*)</sup>, traduz os seguintes factos experimentais:

(1) A indução magnética  $\vec{\delta B}_P$  é transversal à direcção de observação,  $\vec{r}$ , e normal à direcção da velocidade da carga; (2) Se  $q > 0$  o sentido de  $\vec{\delta B}_P$  é tal que os três vectores  $\vec{v}$ ,  $\vec{r} \equiv \vec{OP}$  e  $\vec{\delta B}_P$  formam um triédrico directo; (3) A indução magnética, em módulo, é proporcional ao valor da carga,  $q$ , e ao módulo da velocidade, sendo inversamente proporcional ao quadrado da distância do observador à carga móvel.

A lei de Biot-Savart é uma lei aproximada; na verdade só é válida para velocidades muito menores que

(\*)  $\mu_0$  e  $c$  são constantes positivas, cujo significado será ulteriormente esclarecido ( $\mu_0$ , permeabilidade magnética do vácuo;  $c$ , constante electromagnética universal); tomemos, por agora,  $\mu_0/4\pi c$ , em bloco, apenas como uma constante de proporcionalidade.

a velocidade da luz no vácuo:  $|\vec{v}| \ll c$ . Esta condição cumpre-se sempre que as cargas se acham organizadas em corrente eléctrica no interior de um condutor, e é nesse domínio que decorre o nosso estudo, por agora. Mas este carácter aproximado da lei de Biot-Savart não pode deixar de ter-se em conta em assuntos mais avançados.

A relação (IV-1) pode escrever-se sob a forma

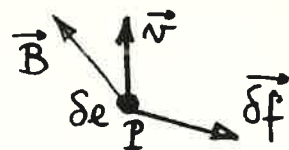
$$(IV-2) \quad \vec{\delta B}_P = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \operatorname{grad}_P \frac{1}{r} \wedge \vec{v},$$

adiante muito utilizada.

#### IV. 1. 2. — Lei de Laplace

Seja agora uma carga eléctrica elementar  $\delta e$ , em movimento relativamente ao observador (num dado referencial de inércia, por hipótese), com uma velocidade  $\vec{v}$  no instante  $t$ , e submetida à acção de um campo magnético exterior de indução  $\vec{B}(P)$ . A experiência revela que esta carga é actuada nesse instante  $t$  por uma força elementar  $\vec{\delta f}$  dada por

$$(IV-3) \quad \vec{\delta f} = \frac{1}{c} \delta e \vec{v} \wedge \vec{B}$$



se for  $\vec{B}$  a indução magnética no ponto actualmente ocupado pela carga móvel (i.e., no instante  $t$ ). Esta relação (IV-3) traduz a lei de Laplace. É uma lei experimental que se revela rigorosa, válida mesmo para velocidades muito grandes. Pela relação (IV-3), a força  $\vec{\delta f}$ , que se designa por força electrodinâmica, fica constantemente perpendicular a  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$ , vectores com os quais deve formar um triângulo directo no caso de ser  $\delta e > 0$  (v. Figura). É de notar desde logo, como facto muito importante, que a força electrodinâmica

única  $\vec{\delta f}$ , actuando sobre uma partícula eletrizada de carga  $q_e$  em movimento, não realiza trabalho nenhum, por ser constantemente normal à trajetória da partícula ( $\vec{\delta f}$  é  $\perp$  a  $\vec{v}$ ). Então, uma partícula eletrizada que penetra num campo magnético modifica a sua trajetória, sem perda nem ganho de energia.

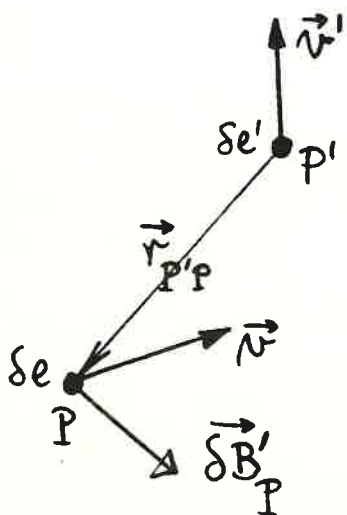
Se a carga  $q_e$  está simultaneamente submetida a um campo eléctrico  $\vec{E}$  e a um campo magnético de indução  $\vec{B}$ , então, a força electrodinâmica dada pela lei de Laplace vai adicionar-se uma força de carácter electrostático,  $q_e \vec{E}$ , e a força total que actua a carga vem dada por

$$(IV-4) \quad \vec{\delta f} = q_e \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

que se diz fórmula de Laplace - Lorentz. Esta relação (IV-4) põe em evidência que o vector  $\frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{B}$  pode ser assimilado a um campo eléctrico fictício, cujo significado é bem esclarecido na Teoria da Relatividade.

#### IV. 1.3 — Lei das acções electrodinâmicas (entre cargas em movimento)

Consideremos duas cargas elementares  $q_e$  e  $q_{e'}$ , em movimento, com velocidades respectivamente  $\vec{v}$  e  $\vec{v}'$  num dado referencial, e respectivas posições P e P' num dado instante (v. Figura). Podemos combinar as duas leis precedentes (lei de Biot-Savart e lei de Laplace) para encontramos a lei das acções electrodinâmicas entre as duas cargas em movimento. Com efeito, a carga  $q_{e'}$ , com velocidade  $\vec{v}'$ , produz, no ponto P em que actualmente se encontra a



carga  $\delta e$ , um campo magnético elementar de indução  $\vec{\delta B}'_P$  (representado na Figura) dado pela lei de Biot-Savart:

$$(IV-5) \quad \vec{\delta B}'_P = \frac{\mu_0}{4\pi c} \delta e' \frac{\vec{v}' \wedge \vec{r}}{r^3} \quad \left( \begin{array}{l} \vec{r} \equiv \overrightarrow{P'P} \\ r = |\vec{r}| \end{array} \right)$$

Mas este campo actua sobre a carga  $\delta e$ , com velocidade  $\vec{v}$ , produzindo-lhe uma força dada pela lei de Laplace

$$(IV-6) \quad \vec{\delta^2 f} = \frac{1}{c} \delta e \vec{v} \wedge \vec{\delta B}'_P$$

Combinando (IV-5) com (IV-6), obtém-se

$$(IV-7) \quad \vec{\delta^2 f} = \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \delta e \delta e' \vec{v} \wedge (\vec{v}' \wedge \vec{r})$$

Como a força com que a carga  $\delta e'$  actua sobre a carga  $\delta e$  (mediante o campo  $\vec{\delta B}'_P$  que  $\delta e'$  produz). Um procedimento idêntico é válido reciprocamente, de  $\delta e$  para  $\delta e'$ . Virá:

$$(IV-7') \quad \vec{\delta^2 f}' = \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \delta e \delta e' \vec{v}' \wedge (\vec{v} \wedge \vec{r}')$$

como a força com que a carga  $\delta e$  actua sobre a carga  $\delta e'$ ; note-se só que  $\vec{r}' \equiv \overrightarrow{PP'}$  ( $\vec{r}' = -\vec{r}$ ).

As relações (IV-7) e (IV-7') constituem a lei das acções electrodinâmicas (i.e. para cargas em movimento).

Deve salientar-se que, ao contrário do que se passa com a lei de Coulomb das interacções electrostáticas, a lei das acções electrodinâmicas afasta-se radicalmente de um Princípio de Acção e Reacção. Com efeito, as duas forças,  $\vec{\delta^2 f}$  aplicada em P (à carga  $\delta e$ ) e  $\vec{\delta^2 f}'$  aplicada em P' (à carga  $\delta e'$ ): (1) não se dirigem em geral segundo a linha de acção  $\overrightarrow{PP'}$ ; (2) não são em geral vectores simétricos (i.e.  $\vec{\delta^2 f}' \neq -\vec{\delta^2 f}$ ). [Por outras palavras,  $\vec{\delta^2 f}$  e  $\vec{\delta^2 f}'$  não são duas forças « iguais-e-directamente-opostas ».]



#### IV. 1. 4 — Aditividade dos campos magnéticos produzidos por fontes distintas

Comecemos por fazer agora um reparo importante sobre algo que está, obviamente, subentendido na expressão dada às leis de Biot-Savart e de Laplace. As acções magnéticas produzidas por cargas em movimento ou exercidas sobre cargas em movimento são compensadas por acções mecânicas e tornam-se, portanto, deste modo susceptíveis de serem medidas como forças, i. e., como grandezas da mesma espécie que as forças mecânicas com as quais entram em equilíbrio. Com efeito, a lei de Laplace descreve já a acção magnética directamente como uma força (o que não pode deixar de significar que na sua medida intervieram as forças mecânicas). No que respecta à lei de Biot-Savart, ela descreve a acção magnética mediante uma indução  $\vec{B}$ , a qual é porém obtida a partir do sistema de forças que se exerce sobre o corpo detector da dita acção magnética (brúlio sobre um pequeno íman, p. ex.).

Encontra-se assim bem fundamentada experimentalmente, em consequência, a aditividade das forças de natureza magnética, pela regra do paralelogramo — que é a regra de soma das forças mecânicas. Ora, da aditividade vectorial das forças magnéticas que se exercem por exemplo sobre uma carga em movimento, supostas produzidas por duas fontes distintas (correntes ou ímans), decorre a aditividade vectorial dos campos magnéticos representativos dessas fontes. Vejamos como.

Seja com efeito a carga  $q$  em movimento com uma velocidade  $\vec{v}$ , submetida à acção conjunta de duas fontes distintas, as quais produzem no ponto  $P$  em que se encontra a partícula os campos de indução  $\vec{B}_1$  e  $\vec{B}_2$ , respectivamente. Então, as forças  $\vec{df}_1$  e  $\vec{df}_2$  com que os dois campos, cada

um de per si, solicitam a carga  $\delta e$ , são aditivas vectorialmente: a força resultante

$$(IV-8) \quad \vec{\delta f} = \vec{\delta f}_1 + \vec{\delta f}_2$$

representa a accção global das duas fontes. Mas pela lei de Laplace tem-se, para cada um dos campos de per si:

$$(IV-9a) \quad \vec{\delta f}_1 = \frac{1}{c} \delta e \vec{v} \wedge \vec{B}_1$$

e

$$(IV-9b) \quad \vec{\delta f}_2 = \frac{1}{c} \delta e \vec{v} \wedge \vec{B}_2 \quad ;$$

e para o campo global  $\vec{B}$  deverá ter-se

$$(IV-3)' \quad \vec{\delta f} = \frac{1}{c} \delta e \vec{v} \wedge \vec{B}$$

sendo  $\vec{\delta f}$  a força global. Ora, de (IV-8), (IV-9a) e (IV-9b) resulta

$$(IV-10) \quad \vec{\delta f} = \frac{1}{c} \delta e \vec{v} \wedge (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \quad ;$$

e como as duas relações (IV-3)' e (IV-10) se devem verificar para qualquer velocidade  $\vec{v}$  da partícula, segue-se que se deve ter

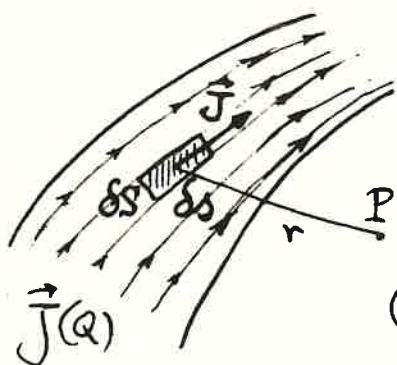
$$(IV-11) \quad \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad ||$$

São assim aditivos, pela regra do paralelogramo, os campos magnéticos produzidos, no mesmo ponto, por fontes distintas. Este princípio de sobreposição tem múltiplas aplicações; entre elas, a possibilidade de estender o cálculo da indução, pela lei de Biot-Savart, a correntes percorrendo condutores extensos (como se faz nos §§ seguintes).

#### IV.2 — Leis de Biot-Savart e de Laplace para corrente eléctrica distribuída em volume

Notando que um tubo elementar de corrente, no seio de um condutor (v. Figura) — tubo elementar de linhas de força de  $\vec{J}$  ocupando um volume  $\delta v = \delta s \cdot \delta s$  — pode ser

assimilado a uma carga em movimento — precisamente a carga móvel contida em  $\delta v$ ,  $\delta e = \rho_m \delta v$ , com a velocidade  $\vec{v}$  que possui na corrente — e notando ainda que nessas condições se cumpre a equivalência



$$(IV-12) \quad \vec{J} \delta v = \rho_m \vec{v} \delta v = \delta e \vec{v},$$

então, a lei de Biot-Savart (IV-2) escreve-se

$$(IV-13) \quad \delta \vec{B}_P = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \left( \vec{J} \wedge \text{grad}_P \frac{1}{r} \right) \delta v$$

para dar o campo produzido pelo tubo elementar de corrente. Fazendo jogar a aditividade dos campos elementares, virá para o campo produzido por todo um volume do condutor

$$(IV-14) \quad \vec{B}_P = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \int_v \left( \vec{J} \wedge \text{grad}_P \frac{1}{r} \right) dv$$

(Mostra-se que esta expressão é igualmente válida no caso de P ser interior ao volume v potenciante).

No que respecta à lei de Laplace para um condutor extenso, com corrente distribuída em volume, quando ele é imerso num campo magnético  $\vec{B}(P)$  — a mesma relação de equivalência já utilizada, (IV-12), permite escrever para a força actuante num tubo elementar de corrente, como o da Figura acima:

$$(IV-15) \quad \delta \vec{F} = \frac{1}{c} \vec{J} \wedge \vec{B} \delta v.$$

Há assim uma distribuição de forças por todo o volume do condutor e (IV-15) permite definir uma densidade de força electrodinâmica por unidade de volume,  $\vec{F}$ :

$$(IV-16) \quad \vec{F} = \frac{1}{c} \vec{J} \wedge \vec{B}$$

O sistema de forças produzidas pelo campo magnético sobre o condutor extenso estuda-se obviamente a partir de (IV-15).

## IV.3 — Propriedades do campo magnético da corrente estacionária

### IV.3.1 — Carácter solenoidal da indução magnética

Retornemos a eq. (IV-14) que exprime a indução magnética  $\vec{B}$  no caso geral de uma distribuição de correntes com densidade  $\vec{J}(\mathcal{Q})$  num condutor extenso:

$$(IV-14)' \quad \vec{B}_P = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \int_V (\vec{J} \wedge \text{grad}_P \frac{1}{r}) dv$$

sendo  $V$  o volume do condutor,  $r \equiv \overline{PQ}$ ,  $Q$  o ponto potencialmente genérico e  $P$  um ponto qualquer do espaço.

Demonstra-se que se pode dar a (IV-14)' a seguinte forma:

$$(IV-17) \quad \vec{B}_P = \text{rot}_P \left[ \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_V \frac{\vec{J}}{r} dv \right] \quad \left. \vphantom{\int_V} \right\}$$

(com  $P$  q.q. no espaço).

Para a demonstração, damos os seguintes elementos:

1. Recorre-se à identidade diferencial (\*)

$$\text{rot}_P \left( \frac{\vec{J}}{r} \right) = \frac{1}{r} \text{rot}_P \vec{J} - \vec{J} \wedge \text{grad}_P \frac{1}{r}$$

que permite transformar (IV-14)' em

$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0}{4\pi c} \left[ \int_V \text{rot}_P \left( \frac{\vec{J}}{r} \right) dv - \int_V \frac{1}{r} \text{rot}_P \vec{J} dv \right]$$

2. Esta nova expressão admite duas simplificações:

(a) O 2.º integral é nulo. Quando  $P$  é exterior ao volume  $V$ , porque temos então sempre  $\text{rot}_P \vec{J} = 0$  ( $\vec{J} \equiv \vec{J}(\mathcal{Q})$ ). Se  $P$  é interior ao volume  $V$ ,  $\text{rot}_P \vec{J}$  só poderá ser  $\neq 0$ , ~~mas~~ finito, no elemento de volume circunvizinho a  $P$ , onde precisamente  $1/r$  se vai tornar  $\infty$ ; acontece porém que  $dv$  é um infinitamente pequeno de ordem superior a  $r$  — o 2.º integral é ainda nulo.

(\*) A verificar pelas representações cartesianas dos operadores.

(b) No 1º integral, sendo  $\vec{J}$  função finita e contínua, pode mostrar-se que os símbolos operatoriais  $\int_V$  e  $\text{rot}_P$  comutam.

A nova expressão (IV-17) para  $\vec{B}_P$  equivale a dizer que a indução magnética  $\vec{B}$  deriva de um potencial-vector  $\vec{A}$  mediante a operação

$$(IV-18) \quad \vec{B}_P = \text{rot}_P \vec{A} \quad (\text{em q.q. } P \text{ do espaço})$$

sendo  $\vec{A}$  dado por

$$(IV-19) \quad \vec{A}_P = \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_V \frac{\vec{J}(Q)}{r_{PQ}} dv$$

Uma primeira consequência importante de (IV-17) é que esta expressão impõe que em todo o ponto do espaço se tenha

$$(IV-20) \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad (*)$$

(Um campo  $\vec{B}$  satisfazendo (IV-20) em todo o ponto do espaço diz-se solenoidal.) A indução magnética  $\vec{B}(P)$  é um campo solenoidal e importa desde já salientar as propriedades associadas a este carácter solenoidal do campo.

Recorde-se que (IV-20), sendo válida em todo o ponto do espaço,

(\*) Com efeito, sempre que  $\vec{Z} = \text{rot } \vec{X}$ , então  $\text{div } \vec{Z} = 0$ , porque  $\text{div rot } \vec{X} = 0$  é uma identidade (i.e. cumpre-se para um vector  $\vec{X}$  arbitrário), como facilmente se verifica utilizando as representações cartesianas dos operadores (p.ex.). Pode mostrar-se que, reciprocamente, se  $\text{div } \vec{Z} = 0$  em todo o ponto do espaço, então  $\vec{Z}$  exprime-se necessariamente como rotacional de um vector  $\vec{Y}$  a determinar, definindo alíás a menos do gradiente de um escalar  $\phi$  arbitrário:  $\vec{Z} = \text{rot } \vec{Y}$  ou  $\vec{Z} = \text{rot}(\vec{Y} + \text{grad } \phi)$ . Assim, as relações (IV-20) e (IV-18) podem tomar-se como equivalentes, se ao 2º membro de (IV-19) se acrescenta o gradiente de um escalar arbitrário ( $\text{grad } \phi$ ).

(div  $\vec{B} = 0$ )

é equivalente a ser nulo o fluxo de  $\vec{B}$  através de qualquer superfície fechada (regular) :

$$(IV-21) \quad \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \quad \left( \begin{array}{l} \text{para qualquer superfície} \\ \text{fechada } S \text{ (regular)} \end{array} \right)$$

— como assegura o teorema do fluxo-divergência —. E de (IV-21) resulta que  $\vec{B}(P)$  é um campo de fluxo conservativo (Cf. Cap. III, § III.7). Acrescenta-se que, sendo  $\vec{B}$  um campo de fluxo conservativo, então, as suas linhas de força fecham-se sobre si próprias.

[O carácter solenoidal da indução magnética  $\vec{B}$ , assim posto em evidência não é aqui mais que uma consequência da lei de Biot-Savart; mas deve a sua importância ao facto de que se revela, na verdade, uma propriedade fundamental que se estende a todos os domínios do campo electromagnético. A eq. (IV-20) tem já com efeito a forma exacta de uma das equações de Maxwell, que assumem como se sabe o papel de Princípios do Electromagnetismo.]

#### IV. 3.2 — Propriedades do potencial-vector $\vec{A}$

Já fizemos notar que ao potencial-vector  $\vec{A}$  dado por (IV-19) se pode sempre somar um vector irrotacional arbitrário, com o mesmo resultado para a operação (IV-18):  $\vec{A}$  é definido a menos do gradiente de um escalar arbitrário  $\phi$ . Isto significa que, enquanto  $\text{rot}_P \vec{A}$  é o vector bem determinado  $\vec{B}_P$  (eq. (IV-18)),  $\text{div}_P \vec{A}$  fica completamente arbitrária.

Demonstra-se no entanto que, se a corrente é estacionária, então a escolha particular que se faz, ao adoptar como vector  $\vec{A}$  aquele que é precisamente dado por (IV-19), conduz a ter-se em todo o ponto

$$(IV-22) \quad \text{div}_P \vec{A} = 0$$

Para a demonstração damos os seguintes elementos:

1. A aplicação do operador  $\text{div}_P$  a ambos os membros de (IV-19) conduz a

$$\text{div}_P \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_V \text{div}_P \left( \frac{\vec{J}}{r} \right) dv$$

porque, sendo  $\vec{J}$  finita e contínua os símbolos operatoriais  $\int_V$  e  $\text{div}_P$  comutam. Mas esta relação transforma-se em

$$\text{div}_P \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_V \left[ \frac{1}{r} \text{div}_P \vec{J} + \vec{J} \cdot \text{grad}_P \frac{1}{r} \right] dv$$

mediante uma identidade diferencial conhecida.

2. Supõe-se primeiro P exterior ao volume  $V$ . Tem-se sempre, nesse caso,  $\text{div}_P \vec{J} = 0$ . E sendo Q o ponto potenciante ( $r \equiv \overline{PQ}$ ) vem:

$$\text{div}_P \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \int_V \vec{J} \cdot \text{grad}_Q \frac{1}{r} dv \quad (\text{grad}_P = -\text{grad}_Q)$$

3. Utilizando agora para o ponto Q a mesma identidade diferencial usada acima para o ponto P, vem:

$$\text{div}_P \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \left[ \int_V \text{div}_Q \left( \frac{\vec{J}}{r} \right) dv - \int_V \frac{1}{r} \text{div}_Q \vec{J} dv \right]$$

ou ainda, por aplicação do teorema do fluxo-divergência ao 1º integral

$$\text{div}_P \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \left[ \int_S \frac{\vec{J} \cdot \vec{n}}{r} dS - \int_V \frac{1}{r} \text{div}_Q \vec{J} dv \right]$$

sendo S a superfície limítrofe do condutor.

4. Ora, com corrente estacionária, não só  $\text{div}_Q \vec{J} = 0$  em todo o ponto Q interior a  $V$ , mas também  $\vec{J} \cdot \vec{n} = 0$  sobre a superfície limítrofe S. Portanto,  $\text{div}_P \vec{A} = 0$ .

5. Considera-se depois P interior ao volume  $V$ . Neste caso, se se cara um alvéolo em torno do ponto P, é aplicável toda a argumentação precedente para a distribuição de corrente desprovida do volume do alvéolo. Passa-se depois ao limite desta situação quando o alvéolo se contrai sobre o ponto P. Basta então verificar que nessa passagem, vai ter

limite nulo o integral de  $\vec{J} \cdot \vec{u} / r$  ao longo da superfície limitrofe do alvéolo, integral este que se introduz em adição aos integrais já discutidos na última expressão escrita em 3. Em suma, a eq.  $\text{div}_{\vec{P}} \vec{A} = 0$  também se cumpre para  $\vec{P}$  interior a  $\underline{v}$ .

Vejamos agora que a definição (IV-19) adoptada para o potencial-vector  $\vec{A}$  permite ainda extrair muito facilmente o valor de  $\text{lap} \vec{A}$  (\*). Recorremos para isso à similitude formal entre a definição das componentes cartesianas do potencial-vector  $\vec{A}$ , a saber (por (IV-19)):

$$(IV-19)' \quad A_{\alpha} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_v \frac{J_{\alpha}}{r} dv \quad (\alpha = x, y, z)$$

e a definição do potencial-escalar  $V$  na Electrostatica

$$(IV-19)'' \quad V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_v \frac{\rho}{r} dv$$

Tendo em conta que as funções envolvidas num e noutro caso gozam das mesmas propriedades matemáticas gerais, deve concluir-se que assim como  $V$  definido por (IV-19)'' satisfaz a equação de Poisson  $\text{lap} V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$ , também cada uma das componentes  $A_{\alpha}$  deve satisfazer uma equação diferencial do mesmo tipo, por ser definida por (IV-19)' formalmente semelhante a (IV-19)''; ou seja:

$$\text{lap} A_{\alpha} = -\frac{\mu_0}{c} J_{\alpha} \quad (\alpha = x, y, z).$$

Podemos portanto escrever-se:

$$(IV-23) \quad \text{lap} \vec{A} = -\frac{\mu_0}{c} \vec{J}$$

(\*) Recorde-se que

$$\text{lap} \vec{X} \equiv \sum_{\alpha}^{x, y, z} (\text{lap} X_{\alpha}) \vec{e}_{\alpha}$$

sendo  $\vec{e}_{\alpha}$  ( $\alpha = x, y, z$ ) os vectores unitários dos eixos cartesianos e  $X_{\alpha}$  ( $\alpha = x, y, z$ ) as componentes cartesianas do vector  $\vec{X}$ .



### IV. 3.3 — Equações de Ampère

Com os resultados dos §§ precedentes, ficamos em condições de deduzir a expressão da segunda propriedade diferencial do campo da indução magnética  $\vec{B}(\mathcal{P})$ , a saber, o valor em cada ponto de  $\text{rot } \vec{B}$ . Tem-se com efeito, por (IV-18) :

$$\text{rot } \vec{B} = \text{rot rot } \vec{A} \quad ; \quad \text{e utilizando a identidade diferencial } (*) \quad [ (*) \text{ V. Nota da Pág 167 } ]$$

$$(IV-24) \quad \text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \text{lap } \vec{A} \quad \left[ \begin{array}{l} \text{lap de um} \\ \text{grandeza vectorial} \end{array} \right]$$

combinada com as propriedades (IV-22) e (IV-23) do potencial-vector  $\vec{A}$ , conclue-se que

$$(IV-25) \quad \text{rot } \vec{B} = \frac{\mu_0}{c} \vec{J} \quad \left. \begin{array}{l} \text{isto é verdade se } \text{div } \vec{A} = 0 \\ \text{e se } \vec{A} \text{ é estacionária} \end{array} \right\}$$

É a equação de Ampère. Vê-se, por esta propriedade do campo magnético da corrente estacionária, <sup>(\*\*)</sup> que o campo da indução magnética  $\vec{B}(\mathcal{P})$ , de carácter solenoidal por (IV-20), tem "fontes de vórtice" que se identificam com a distribuição da densidade de corrente  $\vec{J}$  no volume do condutor. Se se utiliza o vector campo magnético  $\vec{H}$ , em vez de  $\vec{B}$ , (os dois vectores acham-se relacionados, no vácuo, muito simplesmente por  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , podendo dizer-se que não têm aí significações físicas fundamentalmente diferentes), então

(\*\*) O facto de a eq. (IV-22) ser válida somente para corrente estacionária implica obviamente que a propriedade (IV-25) seja também válida apenas dentro do mesmo domínio. Pode dizer-se no entanto que a equação de Ampère denuncia em si mesma o domínio de validade que lhe é próprio. Com efeito, a aplicação do operador div em ambos os membros de (IV-25), por ser  $\text{div rot} \equiv 0$ , faz-nos cair em  $\text{div } \vec{J} = 0$ , condição essencial da corrente estacionária.

(IV-25) reescreve-se como

$$(IV-25)' \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \vec{J}$$

Esta substituição é, neste domínio do campo magnético das correntes, absolutamente irrelevante; mas tem a vantagem de preparar a extensão da equação de Ampère ao domínio do campo magnético dos ímãs. É com efeito sob esta forma (IV-25)', mas já com um conteúdo mais vasto, que a equação de Ampère se vai apresentar com maior frequência para traduzir uma lei generalizada do campo magnético estacionário (produzido por correntes estacionárias ou por ímãs). Usemo-la desde já.

Estabeleçamos agora a versão sob forma integral da equação de Ampère (equação diferencial traduzindo uma propriedade local). Tomando (IV-25)' e calculando o fluxo de ambos os membros através de uma superfície (aberta)  $S$ , diafragma de um contorno (fechado)  $[c]$ ,

$$\int_S \text{rot } \vec{H} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{c} \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS,$$

obtem-se, atendendo ao teorema de Stokes<sup>(\*)</sup> e à definição de intensidade de corrente (Cf. Cap. III, (III-3)) :

$$(IV-26) \quad \left\| \oint_{[c]} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{c} i_S \right\| \quad \begin{array}{l} \text{Teor. de} \\ \text{Ampère} \end{array}$$

(\*) Recorde-se que o teorema de Stokes estabelece que o fluxo do rotacional de um campo vectorial  $\vec{X}$  através de uma superfície  $S$  diafragma de um contorno (fechado)  $[c]$  iguala a circulação do campo  $\vec{X}$  ao longo do contorno  $[c]$ , sendo que o sentido do fluxo (o sentido das normais a  $S$ ) e o sentido de circulação ao longo de  $[c]$  se acham relacionados pela regra de Stokes. Escreve-se :

$$\int_S \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{n} \, dS = \oint_{[c]} \vec{X} \cdot d\vec{s}$$

sendo  $i_s$  a intensidade da corrente que passa através do diafragma  $S$  apoiado em  $[c]$ , no sentido relacionado pela regra de Stokes (\*) com o sentido de circulação ao longo de  $[c]$ . Note-se que, dado o carácter solenoidal de  $\text{rot } \vec{H}$ , ou de  $\vec{J}$ ,  $S$  pode ser qualquer diafragma (regular) apoiado sobre o contorno  $[c]$ . A relação (IV-26) traduz o teorema de Ampère.

Este teorema tem múltiplas aplicações. Pode ser utilizado designadamente para extrair o valor do campo  $\vec{H}$  produzido por uma distribuição de corrente com propriedades de simetria tais que permitam prever a existência de linhas de força de forma conhecida e ao longo das quais o módulo do campo seja constante. (Obviamente, para chegar a uma previsão deste tipo torna-se necessário combinar as considerações de simetria com a lei de Biot-Savart.)

#### IV.4 — Campo magnético produzido por corrente estacionária em condutores filiformes

Abordemos agora o caso especial de o campo magnético ser produzido por corrente estacionária em condutores filiformes (V. § III.8.B, Cap. III). A importância deste estudo especial reside não só na ocorrência de numerosas aplicações práticas, como é bem conhecido, mas também no facto de que o tratamento teórico de certos problemas respeitantes ao campo magnético produzido por condutores extensos se faz mediante a decomposição destes condutores nos sistemas de tubos filiformes de linhas de força do campo  $\vec{J}(\mathcal{Q})$ , que os integram.

##### IV.4.1 — Campo produzido por um circuito filiforme (com corrente estacionária)

(\*) V. Nota da Pág 57 (§ 6.4.2)

Notemos que um elemento de corrente num condutor filiforme pode ser assimilado a uma carga em movimento: a carga móvel que passa numa secção do condutor no tempo  $\delta t$ , ou seja,  $\delta e = i \delta t$ , animada da velocidade  $\vec{v}$  que possui na corrente, está momentaneamente contida no elemento de circuito  $\vec{\delta s} = \vec{v} \delta t$ . Cumpre-se nestas condições a equivalência

$$(IV-27) \quad i \vec{\delta s} = i \vec{v} \delta t = \delta e \vec{v}$$

que pode também exprimir-se por

$$(IV-27)' \quad i \vec{\delta s} = |\vec{J}| \delta s \vec{e}_s = \vec{J} \delta v$$

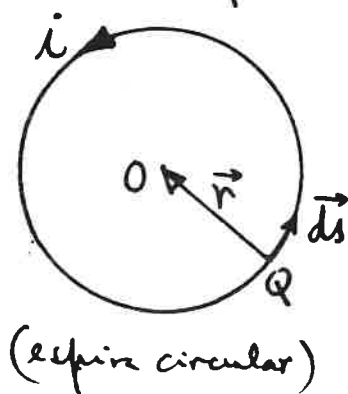
Então, a lei de Biot-Savart (IV-1) escreve-se para este elemento de circuito filiforme:

$$(IV-28) \quad \vec{\delta B}_P = \frac{\mu_0}{4\pi c} i \frac{\vec{\delta s} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad \left( \begin{array}{l} \vec{r} \equiv \vec{QP} \\ r = |\vec{r}| \end{array} \right)$$

sendo  $Q$  a localização do elemento de corrente  $i \vec{\delta s}$ . Para um circuito filiforme fechado <sup>[C]</sup>, em corrente estacionária ( $i$  constante ao longo do circuito) teremos portanto:

$$(IV-29) \quad \vec{B}_P = \frac{\mu_0}{4\pi c} i \oint_{[C]} \frac{\vec{\delta s} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad \left( \begin{array}{l} \vec{r} \equiv \vec{QP} \\ r = |\vec{r}| \end{array} \right)$$

como valor da indução magnética,  $\vec{B}_P$ , produzida no ponto  $P$  por todo o circuito. Exemplo: Calculemos, por (IV-29), a indução magnética produzida no centro de uma espira circular percorrida pela corrente estacionária  $i$  (v. Figura)



Notando que, ao longo de todo o circuito, é sempre  $\vec{ds} \perp \vec{r}$  e que estes dois vectores conservam a sua relação de sentido com uma semi-normal à espira — pode concluir-se, a partir de (IV-29) que a indução magnética no ponto  $O$ :

- a) é perpendicular ao plano da espira ;  
 b) tem o sentido dado pela regra de Stokes, relativamente ao sentido de circulação da corrente na espira ;  
 c) e tem por módulo,  $|\vec{B}_0|$  :

$$|\vec{B}_0| = \frac{\mu_0}{4\pi c} i \oint \frac{|\vec{ds}|}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{i}{r^2} \oint |\vec{ds}| = \frac{\mu_0}{2c} \frac{i}{r}$$

Se for  $\vec{n}$  o vector unitário da orientação normal ao plano da espira e apontando para o leitor, então  $\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{2c} \frac{i}{r} \vec{n}$

#### IV.4.2 — Ação de um campo magnético sobre um circuito filiforme (percorrido por corr. estacionária)

Para obter a forma assumida pela lei de Laplace para um elemento de circuito filiforme imerso num campo  $\vec{B}(\mathcal{P})$  basta utilizar a relação de equivalência (IV-27) e substituir, em (IV-3),  $\delta e \vec{v}$  por  $i \vec{ds}$ , vindo :

$$(IV-30) \quad \delta \vec{f} = \frac{i}{c} \vec{ds} \wedge \vec{B}$$

Esta relação permite estudar a acção de um campo magnético sobre um circuito filiforme, no caso geral, mediante o exame do sistema das forças (IV-30) com que o campo  $\vec{B}(\mathcal{P})$  actua sobre os diferentes elementos do circuito.

Assume particular interesse o caso de um circuito indeformável : o sistema de forças reduz-se então a uma resultante e um binário (com momento igual ao momento resultante do sistema)

Se o circuito é percorrido por corrente estacionária ( $i$  constante ao longo do circuito) a resultante,  $\vec{R}$ , vem dada por

$$(IV-31) \quad \vec{R} = \frac{i}{c} \oint_{[c]} \vec{ds} \wedge \vec{B}$$

e o momento resultante relativamente a um ponto  $O$  fixado,  $\vec{\Gamma}_O$ , vem dado por

$$(IV-32) \quad \vec{\Gamma}_O = \frac{i}{c} \oint_{[c]} \vec{OQ} \wedge (\vec{ds} \wedge \vec{B})$$

M.S. perdas:

pg. 177

$$\oint_{[c]} d\vec{l} \Rightarrow = \oint dx + dy + dz$$

$$\leftarrow + \rightarrow = 0!$$

o mesmo para as outras direções!

(IV 34)  $\vec{d}r \cdot \vec{x} = \text{dedo preso } \vec{j}$   $\vec{q} \vec{B} = \vec{e}_z$  (cpo uniforme)

então o momento resultante do sistema de forças não depende de  $O$ ,  
o pto em relação ao qual se calcula esse momento! -? -

$$(32) \quad \vec{T}_O = \frac{i}{c} \oint_{[c]} \vec{OQ} \wedge (\vec{S} \wedge \vec{B}) \stackrel{\text{verte}}{\cong} \frac{i}{c} (\oint \vec{OQ} \wedge \vec{S}) \wedge \vec{B}$$

seja outro pto  $O'$  então  $\vec{OQ} = \vec{O'O} + \vec{OP}$  vem:

$$\begin{aligned} & \oint (\vec{O'O} \wedge \vec{S} + \vec{OQ} \wedge \vec{S}) = \\ & = \oint \vec{O'O} \wedge \vec{S} + \oint \vec{OQ} \wedge \vec{S} \\ & = \vec{O'O} \wedge \oint \vec{S} + \oint \vec{OQ} \wedge \vec{S} \\ & \quad \parallel \\ & \quad 0 \\ & = \oint \vec{OQ} \wedge \vec{S} \end{aligned}$$

de pto us depende de  $O'$

contudo, então  $\vec{j}$  de posse  $\vec{B} \neq \vec{e}_z$ ?

→

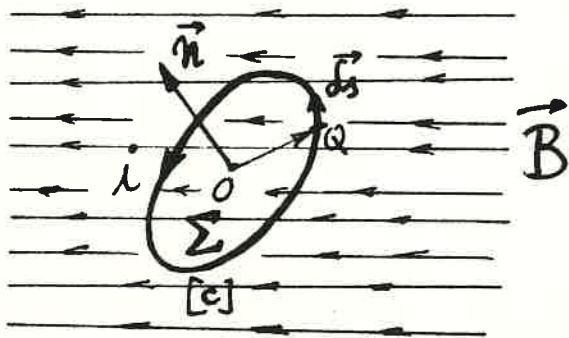
Se o campo  $\vec{B}(P)$  é uniforme, a resultante  $\vec{R}$  é nula ( $\oint_{[c]} \vec{d}s = 0$ )

$$(IV-33) \quad \vec{R} = \frac{i}{c} \left[ \oint_{[c]} \vec{d}s \right] \wedge \vec{B} = 0$$

e o sistema de forças sobre o circuito reduz-se então a um binário. Mostra-se que o momento deste binário (momento resultante do sistema de forças, neste caso independente do ponto O em relação ao qual se calcula) pode exprimir-se sob a forma

$$(IV-34) \quad \vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}, \quad \text{com } \vec{m} = \frac{i}{2c} \oint_{[c]} OQ \wedge \vec{d}s$$

em que  $\vec{m}$  é um vector (axial) apenas dependente das características geométricas do circuito e da corrente que o percorre (v. Fig.)



Conclui-se que o circuito sofre da parte do campo uma acção semelhante à que seria produzida pelo mesmo campo uniforme sobre um corpo magnetizado com um momento dipolar  $\vec{m}$  (permanente).

(espira num campo uniforme) momento dipolar magnético (equivalente) do circuito. Se o circuito é uma espira plana, vem, em particular,  $\vec{m} = \frac{i \Sigma \vec{n}}{c}$ , sendo  $\Sigma$  a área plana contida pela espira e  $\vec{n}$  o vector unitário da orientação normal ao plano da espira com o sentido relacionado com a circulação da corrente, pela regra de Stokes. (v. Figura).

#### IV.4.3 — Lei de Ampère para acções entre circuitos filiformes

A partir das relações (IV-7) e (IV-7') e fazendo fogar a relação de equivalência (IV-27) obtém-se facilmente as expressões das forças  $\vec{d}^2 f$  e  $\vec{d}^2 f'$  que se exercem entre elementos de circuitos filiformes,  $i \vec{d}s$  e  $i' \vec{d}s'$ ,  $\vec{d}^2 f$  aplicada em  $i \vec{d}s$ ,  $\vec{d}^2 f'$  aplicada em  $i' \vec{d}s'$ :

$$(IV-35) \quad \vec{\delta}^2 \vec{f} = -\frac{\mu_0}{4\pi c^2} i i' \vec{\delta} s \wedge (\vec{\delta} s' \wedge \text{grad}_{\frac{1}{r}}), \quad (r = |\overline{PP'}|)$$

e uma expressão análoga para  $\vec{\delta}^2 \vec{f}'$ .

Considerando os circuitos filiformes (fechados)  $[c]$  e  $[c']$  nos quais se inserem os elementos de corrente  $i \vec{\delta} s$  e  $i' \vec{\delta} s'$ , respectivamente, pode calcular-se a acção global do circuito  $[c']$  sobre o elemento  $i \vec{\delta} s$ , bem como a acção global de  $[c]$  sobre  $i' \vec{\delta} s'$ , com algumas importantes reduções de que são susceptíveis as integrações cíclicas que aí intervêm,  $\oint_{[c']}$  e  $\oint_{[c]}$ . É-se assim conduzido à lei de Ampère das acções electro-dinâmicas entre circuitos filiformes. [Nas nos ocuparemos aqui todavia do estudo pormenorizado deste assunto.]

Assume notável simplicidade o resultado que se obtém, em particular, para a resultante do sistema de forças exercidas por  $[c']$  sobre  $[c]$ , ou vice-versa, no caso de circuitos indeformáveis. Com efeito, tomando (IV-35) e desenvolvendo o duplo produto vectorial, vem:

$$(IV-36) \quad \vec{\delta}^2 \vec{f} = -\frac{\mu_0}{4\pi c^2} i i' \left[ \vec{\delta} s' (\vec{\delta} s \cdot \text{grad}_{\frac{1}{r}}) - (\vec{\delta} s \cdot \vec{\delta} s') \text{grad}_{\frac{1}{r}} \right].$$

Então, a resultante  $\vec{f}$ , sobre  $[c]$ , vale:  $(\vec{f} = \oint_{[c]} \oint_{[c']} \vec{\delta}^2 \vec{f})$

$$(IV-37) \quad \vec{f} = \frac{\mu_0}{4\pi c^2} i i' \oint_{[c]} \oint_{[c']} (\vec{\delta} s \cdot \vec{\delta} s') \text{grad}_{\frac{1}{r}}$$

(porque  $\oint_{[c]} \vec{\delta} s \cdot \text{grad}_{\frac{1}{r}} = 0$ ). É obviamente mais complicado o resultado que se obtém para o momento resultante.

#### IV. 4.4 — Algumas aplicações das propriedades gerais do campo magnético (produzido por corrente estacionária em circuitos filiformes)

##### A. Expressões do potencial-vector $\vec{A}$



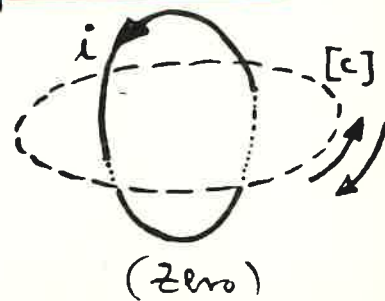
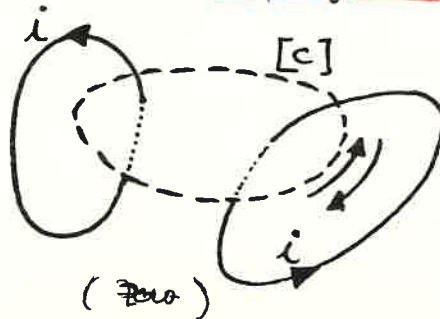
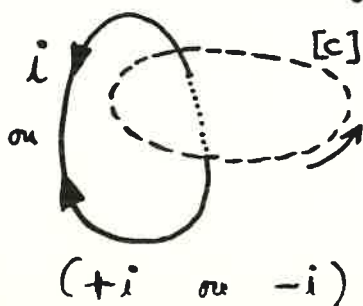
Fazendo jogar a relação de equivalência (IV-27)' (p. 175) sobre a definição (IV-19) (p. 168), obtém-se para o potencial-vector  $\vec{A}$  do campo magnético produzido por um circuito filiforme (fechado)  $[c]$  percorrido por corrente estacionária, de intensidade  $i$ , a expressão

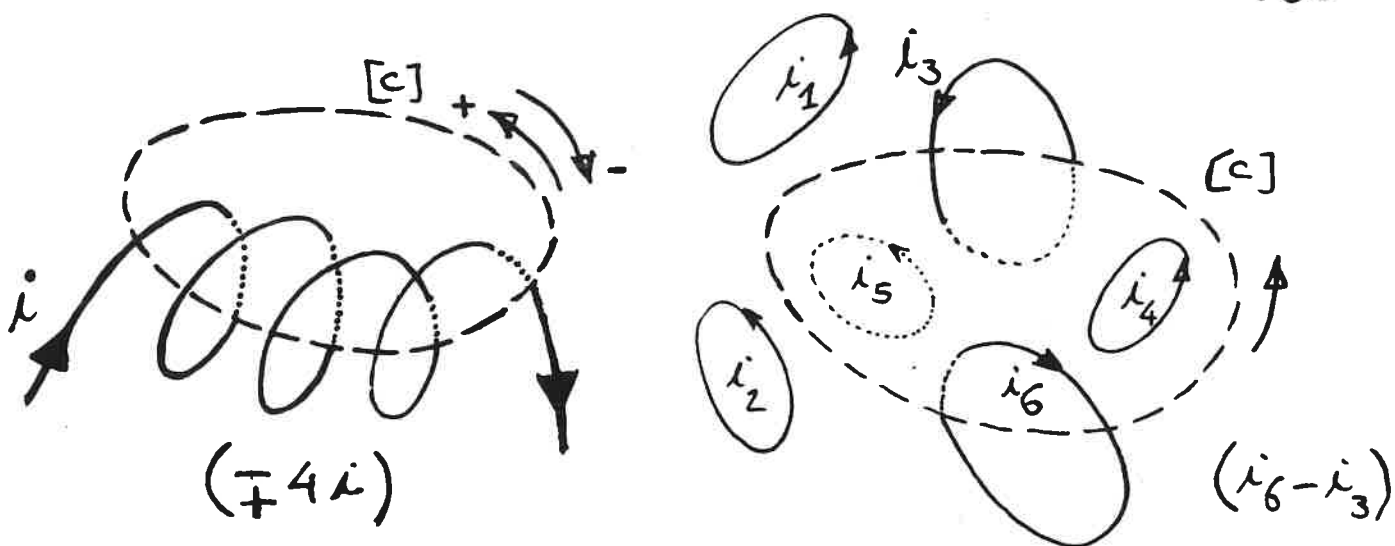
$$(IV-38) \quad \vec{A}_P = \frac{\mu_0}{4\pi c} i \oint_{[c]} \frac{d\vec{s}}{r_{PQ}}$$

sendo  $d\vec{s}$  o elemento de arco no ponto potencialmente genérico  $Q$ , sobre  $[c]$ , à distância  $r_{PQ}$  do ponto potencial  $P$ . Como decorre do § IV.3.1, a aplicação de  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  à expressão (IV-38) fornece (IV-29) (p. 175). Aproveitemos para pôr em realce que o potencial-vector  $\vec{A}$ , devido a um circuito filiforme, é directamente proporcional à intensidade da corrente que o percorre — como efeito directo do carácter estacionário da corrente. O campo  $\vec{B}$  goza portanto da mesma propriedade, como já poderia ter-se observado junto da expressão (IV-29).

### B. Exemplos de aplicações do teorema de Ampère

As figuras seguintes fornecem variados exemplos de aplicações do teorema de Ampère ao campo produzido por corrente estacionária em circuitos filiformes. Os valores dados nas legendas são os de  $i_S = c \oint_{[c]} \vec{H} \cdot d\vec{s}$  para os respectivos casos (cf. (IV-26), p. 173). O(s) circuito(s) é (são) sempre representado(s) a cheio, a curva fechada  $[c]$  figura-se a tracejado; deve sempre imaginar-se um diafragma  $S$  apoiado sobre  $[c]$ .





C. Linhas de força do campo da indução magnética produzido por um circuito filiforme, único no espaço (percorrido por corrente estacionária)

Referimos já que, sendo  $\vec{B}(P)$  um campo de fluxos conservativo, as suas linhas de força fecham-se sobre si próprias. (Cf. § IV.3.1). Isto é uma consequência da 1ª propriedade fundamental do campo,  $\text{div } \vec{B} = 0$ . Vejamos agora que a combinação desta mesma propriedade com a 2ª,  $\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \vec{J}$ , ou, mais directamente, com o Teorema de Ampère (IV-26), p.173 — conduz à seguinte afirmação:

As linhas de força do campo da indução magnética produzido pela corrente estacionária de um circuito filiforme único no espaço, (fechando-se sobre si próprias) passam todas necessariamente por dentro do circuito [ou: não todas necessariamente abraçar o circuito]

Para demonstrar esta afirmação, vamos pôr em evidência que, se ela se não cumpre, isso viola alguma propriedade fundamental (método de redução ao absurdo). Seja, pois, por hipótese, uma linha de força  $[\lambda]$  que se fecha sobre si própria sem passar por dentro do circuito [sem abraçar o circuito  $[c]$ ]. Então, por um lado, o campo  $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$  tem obviamente

sobre a linha de força, sempre a direcção da tangente; por outro lado, nunca o vector  $\vec{H}$  pode mudar de sentido para um observador que caminha segundo a linha de força (porque, se isso acontecesse, o fluxo deixava de ser conservativo ao longo da linha de força — encarada como tubo de linhas de força de secção infinitamente pequena —). Donde resulta que, se for  $d\vec{\lambda}$  o elemento de arco ao longo da linha de força num certo sentido de circulação, tem-se a circulação elementar  $\vec{H} \cdot d\vec{\lambda}$  sempre do mesmo sinal ao longo de  $[\lambda]$ ; e portanto, vem

$$\oint_{[\lambda]} \vec{H} \cdot d\vec{\lambda} \neq 0$$

Mas, pelo Teorema de Ampère, esta circulação deve igualar a corrente  $i_S$  que passa através de um qualquer diafragma  $S$  que se apoia sobre  $[\lambda]$ . Ora, nenhuma corrente atravessa efectivamente um diafragma apoiado sobre  $[\lambda]$ , porque, por hipótese, a linha de força  $[\lambda]$  não passa por dentro do circuito [não abraça o circuito  $[c]$ ] e o circuito  $[c]$  é o único no espaço a produzir campo magnético: então,  $i_S = 0$ , o que viola o Teorema de Ampère. Para levantar o absurdo, deve pois concluir-se que todas as linhas de força da indução magnética passam necessariamente por dentro do circuito  $[c]$ , único no espaço.

#### IV.4.5 — Coefficientes de indução num sistema de condutores filiformes (com corrente estacionária)

Na descrição e interpretação das acções entre circuitos, desempenham um papel preponderante as relações entre as correntes e os fluxos de indução magnética. Importa considerá-las desde já; e é conveniente começar por examiná-las no caso simples de um sistema de condutores filiformes percorridos por corrente estacionária, em que se é conduzido à primeira noção de coeficientes de indução.

Seja um sistema de  $n$  condutores filiformes fechados  $[c_\alpha]$ , em posições fixas no espaço, percorridos por correntes estacionárias  $i_\alpha$ , as quais produzem por todo o espaço um campo magnético global, de indução  $\vec{B}(\mathcal{P})$ . ( $\alpha = 1, \dots, n$ ).

Para cada circuito  $[c_\alpha]$  se pode definir um fluxo de  $\vec{B}$  através de um qualquer diafragma  $S_\alpha$  apoiado sobre  $[c_\alpha]$ . A parte o sinal, esse fluxo tem o mesmo valor para qualquer uma destas  $S_\alpha$ , dado o carácter solenoidal do campo  $\vec{B}$ . Designando-o por  $\Phi_\alpha$ , tem-se:

$$(IV-39) \quad \Phi_\alpha = \int_{S_\alpha} \vec{B} \cdot \vec{n}_\alpha \, dS_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, n)$$

Escolhamos um sentido de circulação ao longo de cada circuito  $[c_\alpha]$  e suponhamos que esta escolha (que era arbitrária) se fixa de uma vez para sempre. Adoptemos então, convencionalmente, para sentido do fluxo através de qualquer  $S_\alpha$ , apoiado em  $[c_\alpha]$ , aquele que se encontra interligado com o sentido de circulação em  $[c_\alpha]$  pela regra de Stokes. Nestas condições, correntes e fluxos passam a ter, neste sistema, carácter algébrico bem definido.

O fluxo  $\Phi_\alpha$ , definido por (IV-39), pode calcular-se também mediante

$$(IV-40) \quad \Phi_\alpha = \oint_{[c_\alpha]} \vec{A} \cdot \vec{ds}_\alpha$$

tendo em conta que  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  e em resultado da aplicação da aplicação do Teorema de Stokes a (IV-39).

Notemos que cada um dos circuitos  $[c_\beta]$  produz um campo  $\vec{B}_\beta(\mathcal{P})$ , o qual deriva de um potencial-vector  $\vec{A}_\beta(\mathcal{P})$  pela operação  $\vec{B}_\beta = \text{rot } \vec{A}_\beta$  ( $\beta = 1, \dots, n$ ). O campo global  $\vec{B}$  compõe-se a partir destes campos parcelares  $\vec{B}_\beta$  por aditividade (Cf. § IV.1.4); e, tendo em conta a linearidade do operador rot, também o potencial-vector global  $\vec{A}$  se vai

compor dos potenciais parcelares por aditividade. Tem-se:

$$(IV-41) \quad \vec{B} = \sum_{\beta=1}^n \vec{B}_{\beta} \quad ; \quad \vec{A} = \sum_{\beta=1}^n \vec{A}_{\beta} .$$

Ao campo parcelar  $\vec{B}_{\beta}$  corresponde um fluxo parcelar através de qualquer  $S_{\alpha}$  apoiado sobre  $[C_{\alpha}]$ , que designaremos por  $\Phi_{\alpha}^{(\beta)}$  e se escreve:

$$(IV-42) \quad \Phi_{\alpha}^{(\beta)} = \int_{S_{\alpha}} \vec{B}_{\beta} \cdot \vec{n}_{\alpha} dS_{\alpha} = \oint_{[C_{\alpha}]} \vec{A}_{\beta} \cdot d\vec{s}_{\alpha} .$$

Tendo em conta a linearidade das operações de integração e as relações (IV-41), também o fluxo global se compõe dos fluxos parcelares por aditividade:

$$(IV-43) \quad \Phi_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^n \Phi_{\alpha}^{(\beta)} \quad . \quad (\alpha=1, \dots, n)$$

Recordando agora que, pela lei de Biot-Savart, o campo parcelar  $\vec{B}_{\beta}$  é proporcional à corrente  $i_{\beta}$  que o produz (Cf. (IV-29) p. 175) (o mesmo se passando com  $\vec{A}_{\beta}$  (Cf. (IV-38) p. 179)) — segue-se de (IV-42) que o fluxo parcelar  $\Phi_{\alpha}^{(\beta)}$  é também proporcional a  $i_{\beta}$ , para qq.  $[C_{\alpha}]$ .

A fim de explicitar esta última relação de proporcionalidade, começemos por recordar a expressão de  $\vec{A}_{\beta}(P)$ :

$$(Cf. (IV-38)) \quad \vec{A}_{\beta}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi c} i_{\beta} \oint_{[C_{\beta}]} \frac{d\vec{s}_{\beta}}{r_{Q_{\beta}P}}$$

e introduzamo-la em (IV-42), com  $P \equiv P_{\alpha}$  ponto genérico do circuito  $[C_{\alpha}]$ . Vem:

$$(IV-44) \quad \Phi_{\alpha}^{(\beta)} = \left[ \frac{\mu_0}{4\pi c} \oint_{[C_{\alpha}]} \oint_{[C_{\beta}]} \frac{d\vec{s}_{\alpha} \cdot d\vec{s}_{\beta}}{r_{Q_{\beta}P_{\alpha}}} \right] i_{\beta}$$

O coeficiente de proporcionalidade, entre parêntesis, apresenta-se habitualmente dividido por  $c$ , constante electromagnética universal,

reescrevendo-se (IV-44) na forma

$$(IV-44)' \quad \frac{1}{c} \Phi_{\alpha}^{(3)} = L_{\alpha\beta} i_{\beta},$$

com  $L_{\alpha\beta}$  dado por (fórmulas de Neumann):

$$(IV-45) \quad L_{\alpha\beta} = \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \oint_{[C_{\alpha}]} \oint_{[C_{\beta}]} \frac{d\vec{s}_{\alpha} \cdot d\vec{s}_{\beta}}{r_{\alpha\beta}}$$

Se inserirmos agora (IV-44)' em (IV-43), virá:

$$(IV-46) \quad \frac{1}{c} \Phi_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^n L_{\alpha\beta} i_{\beta};$$

o que traduz serem os fluxos  $\Phi_{\alpha}$  através dos  $n$  circuitos composições lineares das correntes  $i_{\alpha}$  que os percorrem.

Os coeficientes destas relações lineares entre os fluxos e as correntes designam-se por coeficientes de indução. Podem representar-se pelos  $L_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, \dots, n$ ), obviamente.

O coeficiente  $L_{\alpha\alpha}$  designa-se por coeficiente de self-indução ou coeficiente de indução própria do circuito  $[C_{\alpha}]$ . O coeficiente  $L_{\alpha\beta}$  ( $\beta \neq \alpha$ ) designa-se por coeficiente de indução mútua entre os circuitos  $[C_{\alpha}]$  e  $[C_{\beta}]$ .

Quanto ao significado físico destes coeficientes, pode aproveitar-se a relação (IV-44)' para dizer que, à parte o factor  $c$ ,  $L_{\alpha\beta}$  representa o fluxo da indução  $\vec{B}$  que atravessa  $S_{\alpha}$  (q.q. diafragma apoiado sobre  $[C_{\alpha}]$ ) quando se supõem nulas todas as correntes, à excepção de  $i_{\beta}$  tomada igual à unidade de corrente.

Vejamus agora as propriedades que podem ser atribuídas aos coeficientes de indução de um sistema de  $n$  condutores filiformes, nas condições acima referidas.

A. Em primeiro lugar, as fórmulas de Neumann,

(IV-45), (além de confirmarem a independência dos coeficientes  $L_{\alpha\beta}$  a respeito das correntes  $i_\alpha$ ) mostram que, posto de parte o factor electromagnético constante  $\mu_0/c^2$ , os  $L_{\alpha\beta}$  são coeficientes que dependem essencialmente das características geométricas do sistema dos  $n$  circuitos, a saber: das suas dimensões, da sua forma, das suas posições relativas, em suma, da configuração geométrica do sistema.

B. As fórmulas de Neumann permitem ainda ver que nela nada se altera quando se realiza a troca de  $\alpha$  com  $\beta$ , donde resulta

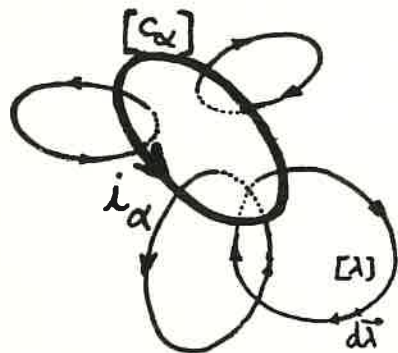
$$(IV-47) \quad L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha}$$

A matriz ( $n \times n$ ) dos coeficientes  $L_{\alpha\beta}$  é uma matriz simétrica.

C. Consideremos agora o estado estacionário em que só  $i_\alpha$  é diferente de zero e todas as outras correntes se supõem nulas. Então por (IV-44)', vem  $L_{\alpha\alpha} = \frac{1}{c} \frac{\Phi_\alpha^{(\alpha)}}{i_\alpha}$ . Porque se trata de uma situação de circuitos únicos no espaço, pode aplicar-se o estudo feito no § IV.4.4-C: todas as linhas de força do campo da indução vão necessariamente passar por dentro do circuito  $[C_\alpha]$ . Repararemos então que o sentido das linhas de força deve ser tal que para todas elas se cumpra

$$\oint_{[C_\alpha]} \vec{H} \cdot d\vec{\lambda} = \frac{1}{c} i_\alpha,$$

fecho que devem fazer todas a mesma interligação do sentido com o sentido da corrente  $i_\alpha$  em  $[C_\alpha]$ , sendo essa interligação regida pela regra de Stokes. Então o sinal algébrico de  $\Phi_\alpha^{(\alpha)}$  tem que ser o mesmo que o de  $i_\alpha$  donde resulta:  $L_{\alpha\alpha} > 0$ . Em conclusão:



(Linhas de força de  $\vec{B}$  no caso de circuito  $[C_\alpha]$  único no espaço)

Os coeficientes de indução própria,  $L_{\alpha\alpha}$  (q.q.  $\alpha$ ), são essencialmente positivos.

D. Continuando a considerar o mesmo estado estacionário, vejamos que o facto de todas as linhas de força passarem por dentro do contorno  $[c_\alpha]$  acarreta uma outra consequência importante: o fluxo através do contorno  $[c_\alpha]$ , por ser o fluxo através de uma secção transversal do tubo de linhas de força que comporta todas as linhas de força é o máximo fluxo que se pode atingir neste campo através de qualquer contorno. (em valor absoluto).

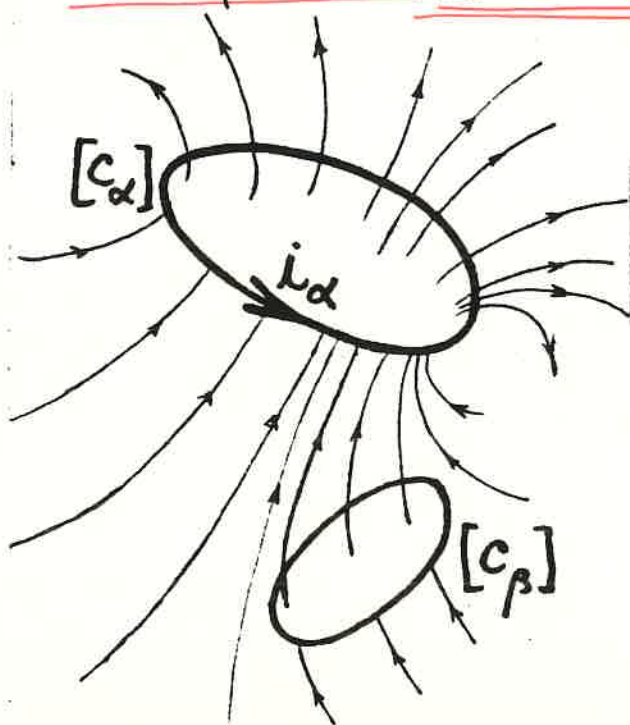
Donde resulta  $|\Phi_\beta^{(\alpha)}| \leq |\Phi_\alpha^{(\alpha)}|$ , com  $\beta \neq \alpha$ . Mas, por (IV-44)', tem-se  $\Phi_\beta^{(\alpha)} = c L_{\beta\alpha} i_\alpha$  e  $\Phi_\alpha^{(\alpha)} = c L_{\alpha\alpha} i_\alpha$ ; extrai-se, portanto, a seguinte propriedade:

$$(IV-48) \quad |L_{\alpha\beta}| \leq L_{\alpha\alpha} \quad (\beta \neq \alpha)$$

Como corolário de (IV-48), tem-se

$$(IV-49) \quad L_{\alpha\beta}^2 \leq L_{\alpha\alpha} L_{\beta\beta} \quad (\beta \neq \alpha)$$

[Esta última relação prende-se com o carácter essencialmente positivo da energia magnética de um sistema de condutores filiformes percorridos por correntes estacionárias, a qual é dada por  $W_m = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} i_\alpha i_\beta$ .]



(A Figura ilustra o caso de um contorno em que a condição  $|\Phi_\beta^{(\alpha)}| < |\Phi_\alpha^{(\alpha)}|$  se cumpre flagrantemente; e isso corresponde a uma situação corrente. A situação de igualdade dos fluxos verificar-se-ia para o caso de um contorno  $[c_\beta]$ , com a forma de  $[c_\alpha]$ , e quase em coincidência com o condutor  $[c_\alpha]$ .)



# ERRATA

Pag 190

$$(IV-51) \quad \vec{B}_p = -\text{grad}_p (\mu_0 V_m)$$

---

(\*)

$$k_0' = \frac{1}{4\pi}$$

Pag 198

$$(IV-62) \quad \vec{B}_p = -\text{grad}_p (\mu_0 V_m)$$

$$V_m = -\frac{1}{4\pi} \left( \vec{m} \cdot \text{grad}_p \frac{1}{r} \right)$$

Cap IV - 23 (+4) 23 (+4)

Cap V - 1<sup>a</sup> P - 12

2<sup>a</sup> P - 13

3<sup>a</sup> P - 28

M I - (+12)

M II - 5

58 (+12)

Cap VII -

35

Cap VIII -

21

TOTAL

137 (+16)

Índice Geral dos Elementos de Estudo — 3º TESTE

Capítulo IV — 2ª Parte : Campo magnético dos ímãs  
Pag : 187 a 209 [+ 210-213]

Capítulo V — 1ª Parte : Indução electromagnética  
Pag : V-1ª/1 a V-1ª/11 e 12

— 2ª Parte : Teoria de Maxwell do Electromagnetismo  
Pag : V-2ª/1 a V-2ª/13

— 3ª Parte : Ondas electromagnéticas  
§§ 1, 1' e 2

Pag : V-3ª/1 a V-3ª/17

§ 3

Pag : V-3ª/3-1 a V-3ª/3-11

— 4ª Parte : Circuitos RL e RLC em regime quasi-estacionário

Pag : V-4ª/1 a V-4ª/

— Apêndice I : Energia magnética no campo estacionário

Pag : V.Ap.I/1 a V.Ap.I/12

— Apêndice II : Integração das equações de Maxwell

Pag : V.Ap.II/1 a V.Ap.II/4 e 5

Capítulo VII : Óptica Geométrica - Pág: VII-1 a VII-35

Capítulo VIII : Interferências - Pág: VIII-1 a VIII-21

## CAP. IV — CAMPO MAGNÉTICO

### 2ª Parte : CAMPO MAGNÉTICO DOS ÍMANS

#### IV. 5 — Introdução

Os fenómenos magnéticos devidos aos ímãs e aos corpos magnetizados por influência são conhecidos desde a Antiguidade; o uso da bússola de orientação é muito recuado nos tempos. Todavia, e embora tivessem sido objecto de interessantes experiências no princípio do séc. XVII (\*), estes fenómenos só adquiriram verdadeiro significado quantitativo no último quartel do séc. XVIII, com os trabalhos de Coulomb (à volta de 1785).

Para explicar as propriedades dos corpos magnéticos, os físicos foram inicialmente levados a admitir a existência nesses corpos de cargas positivas e negativas, "sui generis", mas gozando de propriedades análogas às das cargas eléctricas no tocante às suas acções mútuas. Tais cargas foram designadas por cargas magnéticas; e Coulomb encontrou para as acções entre cargas magnéticas uma lei de todo idêntica à lei das acções entre cargas eléctricas em repouso (lei de Coulomb).

Os factores experimentais não permitiram contudo que se chegasse a precisar a noção de massas magnéticas livres, com existência como cargas verdadeiras, na medida em que não conduziram à possibilidade de separar e de isolar, num corpo magnético,

---

(\*) Um exemplo notável: Gilbert, à volta de 1600, concebeu que a Terra podia assimilar-se a um ímã gigante, ao qual se devia atribuir a existência do campo magnético terrestre; e, tendo magnetizado uma esfera de ferro, mostrou que o campo magnético em torno desta esfera era semelhante ao campo magnético em torno da Terra.

qualquer massa magnética efectiva, como superavit de carga positiva ou negativa. ( Recorde-se como uma semelhante separação é perfeitamente realizável com cargas eléctricas, em experiências com condutores sob influência electrostática, p.ex.).

Dois tipos de experiências simples, fundamentais, levaram em contrapartida a conceber os corpos magnéticos como meios di-polarizados, com carga magnética total nula.

(I). Um íman apresenta-se aparentemente como detentor de cargas magnéticas de sinais contrários, grosso modo concentradas em duas regiões disjuntas — o polo Norte e o polo Sul — e com uma região neutra de permeio. É natural que tenha surgido a ideia de tentar separar as cargas positivas das negativas por meio de um corte praticado na região neutra. Mas uma experimentação exhaustiva revela ser essa ideia absolutamente vã: por mais que se subdivida, a divisão de um íman origina sempre dois novos ímans, cada um dos quais de novo, aparentemente, com cargas magnéticas dos dois sinais concentradas nos dois polos. Em conclusão: Um íman é essencialmente um meio di-polarizado.

(II). Por outro lado, as observações sobre o comportamento de um qualquer íman (de não importa que dimensões), quando imerso num campo magnético uniforme, revelam a inexistência de qualquer accção efectivamente capaz de produzir um deslocamento translaccional do íman: a resultante das forças actuantes é nula e o íman fica sempre submetido somente a um binário que se traduz em rotações.

Sendo assim, tem que concluir-se: Um íman tem carga total nula.

Reunindo as conclusões destas experiências, podemos dizer que toda a ínfima fracção de um íman se revela no seu compor-

tamento como um dipolo magnético. Os dipolos magnéticos serão assim as entidades básicas na descrição dos fenômenos magnéticos. Na verdade somos levados a formular como um princípio de interpretação dos fenômenos magnéticos a não existência de cargas magnéticas verdadeiras.

É-se desta maneira conduzido a encarar cada corpo magnético, à escala macroscópica, como constituído por uma distribuição contínua de dipolos magnéticos, à semelhança do que se passa com os dieléctricos polarizados na Electrostática. Caracteriza-se, em consequência, o estado magnético do corpo por meio de um vector  $\vec{M}$ , dito magnetização, definido em cada ponto  $P$  (analogamente ao vector polarização de um dieléctrico) por:

(IV-50)

$$\vec{M} = \frac{\delta \vec{m}}{\delta v}$$

$$[\vec{M} \equiv \vec{M}(P)]$$

sendo  $\delta \vec{m}$  o momento<sup>(\*)</sup> (magnético) do dipolo magnético infinitamente pequeno que afecta o elemento de volume infinitamente pequeno,  $\delta v$ , circunvizinho ao ponto  $P$ . Trata-se de uma densidade volumica da distribuição de dipolos magnéticos que constitui o corpo magnetizado. Suponhamos que, em todos os casos, esta função de ponto  $\vec{M}(P)$  é finita, unívoca e contínua.

Com base na lei de Coulomb para as acções mútuas entre cargas magnéticas (que sempre podem ser idealizadas) — e porque esta lei é idêntica à lei de Coulomb da Electrostática — torna-se possível construir uma Magnetostática à semelhança da Electrostática, mais precisamente uma teoria do magnetismo dos ímãs formalmente análoga à teoria dos dieléctricos polarizados. Adiante recorreremos a esta analogia.

No quadro desta analogia formal convém desde já, em particular, pôr em realce as relações que exprimem o comporta-

(\*) (com definição análoga à do momento de um dipolo eléctrico na Electrostática)

mento da entidade básica — dipolo magnético. Por um lado, o campo magnético (representemo-lo pela indução  $\vec{B}_P$ ) produzido por um dipolo magnético de momento  $\vec{m}$  é susceptível de se escrever como (\*)

$$(IV-51) \quad \vec{B}_P = -\text{grad}_P V_m, \text{ com } V_m = -k'_0 \vec{m} \cdot \text{grad}_P \frac{1}{r}$$

(Cf. (1-49), p. 47). Por outro lado, um dipolo magnético de momento  $\vec{m}$ , imerso num campo magnético uniforme, de indução  $\vec{B}$ , fica submetido a um binário cujo momento resultante vale

$$(IV-52) \quad \vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

## IV.6 — Correntes moleculares de Ampère

### IV.6.1 — A concepção de Ampère

Apesar da analogia formal das explicações dos fenómenos eléctricos e magnéticos até então atingidas, o Magnetismo mantinha-se ainda no princípio do séc. XIX como um domínio da Física completamente independente da Electricidade.

As descobertas de Oersted (1820) revelando o campo magnético produzido pelas correntes puseram em flagrante evidência que um elo profundo liga o magnetismo à electricidade. Pela tendência natural para unificar as leis da Física, desde logo se desenvolveram tentativas no sentido de reunir os dois domínios do conhecimento numa concepção única. Admitida a não existência de cargas magnéticas verdadeiras, como a experiência fortemente sugeria, restava como única via conju-

---

(\*) Como habitualmente,  $r = |\vec{OP}|$ , sendo O a posição do dipolo  $\vec{m}$  e P o ponto potenciado. A constante  $k'_0$  revela-se depois igual a  $\mu_0/4\pi$ .

tível interpretar os fenómenos magnéticos com base nas leis que regem os fenómenos eléctricos (ou seja, reduzir o magnetismo à electricidade). É neste quadro que surge a concepção de Ampère.

Fundado nas descobertas de Oersted e guiado pelas suas próprias experiências sobre as interações das correntes, Ampère (em 1823) emitiu a hipótese especulativa de que as propriedades magnéticas dos ímãs poderiam explicar-se admitindo a existência de correntes eléctricas particulares associadas às moléculas constituintes desses corpos. Estas correntes particulares não desenvolveriam calor de Joule nem exigiriam qualquer força electromotriz para conservar o fluxo de cargas eléctricas, em circuitos fechados, a uma escala microscópica. Adviriam de movimentos de cargas eléctricas, inerentes à própria constituição do corpo, e como tal produziriam campo magnético.

Esta concepção de Ampère não tardou a ser aceite e revelou-se fecunda. Retomada por Weber e por Lord Kelvin, veio mais tarde a ser precisada e desenvolvida por Langevin (em 1905) e subsiste no quadro da teoria atómico-molecular da matéria. Dentro desta teoria, e numa imagem clássica, cada electrão que descreve uma órbita num edifício atómico ou molecular constitui, pelo seu próprio movimento, uma corrente particular com as características requeridas na concepção de Ampère<sup>(\*)</sup>, ou como passou a dizer-se, uma corrente molecular de Ampère. Ora, como vai provar-se no parágrafo

---

(\*) Note-se que a não libertação de calor de Joule pelas correntes particulares — que está de harmonia com os factos experimentais, pois um ímã não dimana calor — tem neste quadro uma justificação perfeitamente razoável: no seu movimento orbital o electrão não entra em colisões.



(IV.6.3), uma tal corrente molecular é equivalente a um dipolo magnético, quer do ponto de vista do campo magnético que produz quer do ponto de vista da acção que sofre quando colocada num campo magnético exterior.

Deve notar-se que o momento do dipolo magnético equivalente se acha directamente relacionado com o momento angular do electrão no seu movimento orbital; e esta observação permite entender que o spin do electrão — momento angular intrínseco, cuja descrição só é acessível no quadro da Mecânica Quântica — também possa assimular-se a uma corrente molecular de Ampère. [A consideração dos momentos magnéticos de spin é essencial na interpretação dos fortes efeitos que se manifestam com os materiais ferromagnéticos, por exemplo.]

As diversas correntes moleculares associadas aos electrões de um átomo, de um ião ou de uma molécula contrabalançam entre si os seus efeitos, produzindo-se um resultado global que se determina pela composição vectorial dos respectivos momentos dipolares magnéticos. Consoante a estrutura electrónica do sistema, da qual depende fortemente, o efeito resultante pode ser nulo, como se verifica em muitos casos, ou pode traduzir-se na existência de um momento dipolar magnético (total) do átomo, do ião, ou da molécula, como se verifica noutros casos. Note-se entretanto que a composição das correntes moleculares num sistema isolado pode ser significativamente alterada pela acção de um campo magnético exterior que modifica as características dos movimentos orbitais dos electrões — gerando-se assim um momento dipolar magnético induzido, proeminente nos casos em que o sistema não possui momento dipolar magnético permanente.

Dentro de cada elemento de volume de um corpo, haverá pois eventualmente miríades de dipolos magnéticos atómicos ou

moleculares que, no seu conjunto, originam um momento dipolar magnético, efectivo, para o elemento de volume, à escala macroscópica — cuyo valor deverá procurar-se por adequado tratamento estatístico. A concepção de Ampère permite assim explicar que os corpos magnetizados ou os ímãs possam ser descritos, para os diversos efeitos experimentais, como constituídos à escala macroscópica, por uma distribuição contínua de dipolos magnéticos, tal como se refere no § IV.5.

#### IV. 6. 2 — Assimilação de uma corrente molecular de Ampère a um circuito filiforme de corrente estacionária.

Imaginemos, numa perspectiva clássica, um electrão ligado que descreve uma órbita num edifício atómico-molecular com um período de revolução  $\tau$  (cuja ordem de grandeza pode estimar-se em  $10^{-15}$  segundos). Admitamos que um observador hipotético, localizado num ponto da órbita, pretende medir a quantidade de electricidade que passa nesse ponto por unidade de tempo; e analisemos o resultado que obtém.

O intervalo de tempo de observação não pode ser reduzido abaixo de um limiar  $\Delta t$  <sup>(cf. Heisenberg)</sup>, que, por muito pequeno que seja, é ainda muito maior que  $\tau$ . Suponhamos ser  $N$  o número de vezes, muito grande, que  $\tau$  cabe em  $\Delta t$ : teremos então  $\Delta t \approx N\tau$  com um erro relativo muito inferior à unidade.

Ora, durante o tempo  $\Delta t$  produzem-se  $N$  passagens do electrão e o observador detecta portanto a passagem de uma carga  $\Delta q = Ne$  e mede uma intensidade de corrente

$$(IV-53) \quad i = \frac{\Delta q}{\Delta t} \approx \frac{Ne}{N\tau} = \frac{e}{\tau}$$

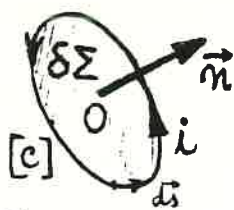
Mas, por idênticas considerações, a mesma intensidade mediria

o observador em qualquer outro intervalo de tempo de observação e em qualquer outro ponto da órbita. Tudo se passa como se o movimento orbital do electrão se traduzisse por uma corrente de intensidade constante no tempo e com o mesmo valor em todos os pontos da órbita.

A corrente molecular constituída pelo movimento orbital do electrão é pois assimilável a uma corrente estacionária num circuito filiforme. Com base nesta assimilação se desenvolve o § seg.

#### IV.6.3 — Equivalência de uma corrente molecular de Ampère a um dipolo magnético

Admitiremos que uma corrente molecular de Ampère é assimilável a um circuito filiforme (fechado),  $[c]$ , com dimensões infinitamente pequenas, percorrido por uma corrente estacionária  $i$ . (As dimensões são efectivamente microscópicas; o circuito pode supor-se plano). Seja  $\delta\Sigma$  a área do diafragma plano apoiado sobre  $[c]$ . O versor  $\vec{n}$  da semi-normal a

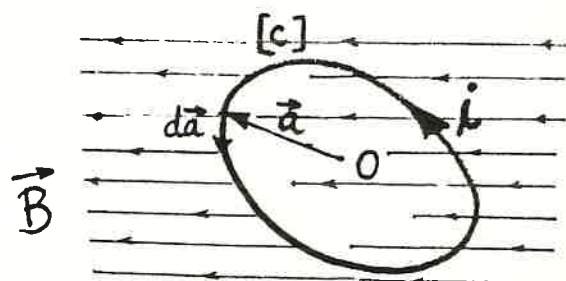


$\delta\Sigma$ , de sentido relacionado pela regra de Stokes com um sentido de circulação pré-fixado sobre  $[c]$ , descreverá a orientação da corrente molecular.

Designemos por  $\vec{a}$  o vector posição do elemento genérico  $i ds$  do circuito, referido a um ponto  $O$  fixo sobre  $\delta\Sigma$  ( $d\vec{s} \equiv d\vec{a}$ ).

#### IV.6.3.A — Accão de um campo magnético sobre uma corrente molecular de Ampère

Sufocamos a corrente molecular imersa num campo magnético uniforme, de indução  $\vec{B}$ ; e estudemos o sistema de forças a que fica submetida, tratando-a como se fosse



um circuito indeformável. Este problema foi já tratado no § IV.4.2, pag 176-177 e os resultados podem resumir-se nos seguintes termos: (a) a resultante  $\vec{R}$  do sistema de forças é nula e o sistema de forças reduz-se a um binário; (b) o momento deste binário, que pode calcular-se relativamente a qualquer ponto, vale

$$(IV-54) \quad \vec{\Gamma} = \left[ \frac{i}{2c} \oint_{[c]} \vec{a} \wedge d\vec{a} \right] \wedge \vec{B} \quad ;$$

(c)  $\vec{\Gamma}$  pode exprimir-se entã sob a forma

$$(IV-55) \quad \vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B} \quad , \quad \text{com:}$$

$$(IV-56) \quad \vec{m} = \frac{i}{2c} \oint_{[c]} \vec{a} \wedge d\vec{a} \quad ;$$

(d) conclui-se que o circuito [c] sofre da parte do campo uma acção semelhante à que seria produzida pelo mesmo campo uniforme sobre um dipolo magnético de momento  $\vec{m}$ , em conformidade com a expressão (IV-52); (e) no caso em estudo, o valor do  $\oint_{[c]} \vec{a} \wedge d\vec{a}$  é, como facilmente se reconhece,  $2 \delta \Sigma \vec{n}$ ; e

$$(IV-57) \quad \vec{m} = \frac{i \delta \Sigma \vec{n}}{c}$$

Para a demonstração do resultado (IV-54) podem adoptar-se os seguintes passos:

(1) O momento resultante  $\vec{\Gamma}$ , calculado relativamente ao ponto  $O$  tem por expressão:  $\vec{\Gamma} = \frac{i}{c} \oint_{[c]} \vec{a} \wedge (d\vec{a} \wedge \vec{B})$  (cf. (IV.32)).

(2) Sabe-se que  $\vec{a} \wedge (d\vec{a} \wedge \vec{B}) = d\vec{a} (\vec{a} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{a} \cdot d\vec{a})$

(3) O 2º termo do 2º membro é uma diferencial exacta:  $\vec{B} (\vec{a} \cdot d\vec{a}) = \vec{B} \wedge \left( \frac{1}{2} \vec{a}^2 \right) = d \left[ \left( \frac{1}{2} \vec{a}^2 \right) \vec{B} \right],$

com integral cíclico nulo.

(4) Para o 1.º termo, observe-se que é possível aproveitar as suas duas expressões alternativas, que seguem

$$(I) \quad d\vec{a} (\vec{a} \cdot \vec{B}) = (\vec{a} \wedge d\vec{a}) \wedge \vec{B} + \vec{a} (\vec{B} \cdot d\vec{a})$$

$$(II) \quad d\vec{a} (\vec{a} \cdot \vec{B}) = d[\vec{a}(\vec{a} \cdot \vec{B})] - \vec{a} (\vec{B} \cdot d\vec{a})$$

e calcular artificialmente esta quantidade pela semi-soma de

$$(I) \text{ com } (II) : \quad d\vec{a}(\vec{a} \cdot \vec{B}) = \frac{1}{2} \{ (\vec{a} \wedge d\vec{a}) \wedge \vec{B} + d[\vec{a}(\vec{a} \cdot \vec{B})] \}$$

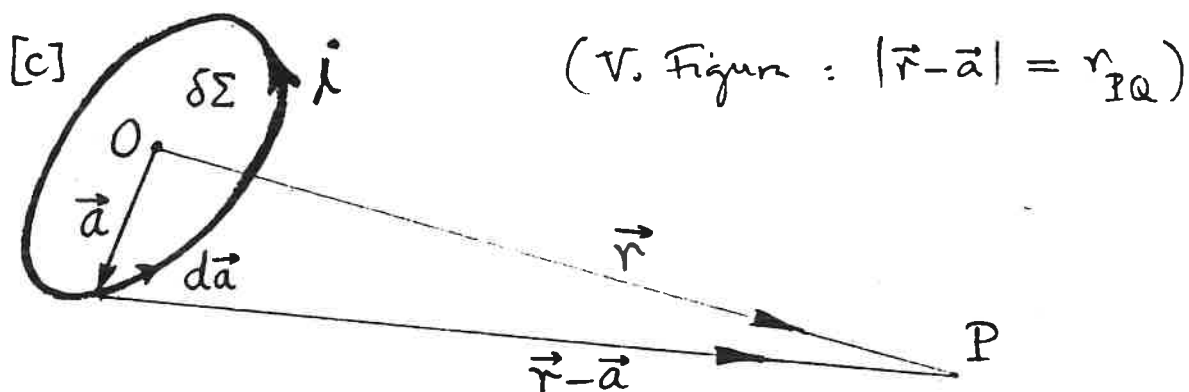
(5) A circulação fechada da diferencial exacta  $d[\vec{a}(\vec{a} \cdot \vec{B})]$  é nula. Donde resulta (IV-54).

Em suma, do ponto de vista da accção que sofre quando colocada num campo magnético uniforme, uma corrente molecular de Ampère, com características  $i$ ,  $\delta\Sigma$ ,  $\vec{n}$  (intensidade, área, orientação), revela-se equivalente a um dipolo magnético de momento  $\vec{m} = i \delta\Sigma \vec{n} / c$ . ((IV.57))

#### IV.6.3.B — Campo magnético produzido por uma corrente molecular de Ampère em pontos exteriores.

Seja P o ponto genérico do espaço, onde se localiza o observador. O potencial-vector produzido em P pelos circuitos [c] (de corrente estacionária) (Cf. (IV-38), pag 179) vem dado por:

$$(IV-58) \quad \left\{ \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi c} i \oint_{[c]} \frac{d\vec{a}}{|\vec{r} - \vec{a}|} \quad (\vec{r} = \vec{OP}) \right.$$



Demonstra-se que, nas condições específicas do circuito [c] ( $|\vec{a}| \ll |0\vec{P}|$ ), a expressão (IV-58) é susceptível do seguinte cálculo aproximado:

$$(IV-59) \quad \vec{A}(\vec{r}) \cong \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{i}{2c} \oint_{[c]} \vec{a} \wedge d\vec{a} \right] \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

A demonstração pode fazer-se com os seguintes passos:

$$(1) \quad |\vec{r}-\vec{a}|^{-1} = (r^2 + a^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{r})^{-1/2} = \\ = r^{-1} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} - 2 \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^2} \right)^{-1/2};$$

e, por ser  $|\vec{a}| \ll |\vec{r}|$  ( $|\vec{a}|$  é uma dimensão micro-física), desprezando o termo da ordem de grandeza  $(|\vec{a}|/|\vec{r}|)^n$  com  $n \geq 2$ , vem, dentro de uma muito boa aproximação:

$$|\vec{r}-\vec{a}|^{-1} \cong r^{-1} \left( 1 + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^2} \right).$$

(2) Substituindo em (IV-58), tem-se

$$\vec{A}(\vec{r}) \cong \frac{\mu_0}{4\pi} i \left[ \frac{1}{r} \oint_{[c]} d\vec{a} + \frac{1}{r^3} \oint_{[c]} (\vec{a} \cdot \vec{r}) d\vec{a} \right]$$

em que se deve desde logo notar que o 1.º termo é nulo.

(3) Para o 2.º termo, segue-se um caminho idêntico ao seguido em (4), pág. 196, mudando  $\vec{B}$  em  $\vec{r}$ ; vem:

$$\oint_{[c]} (\vec{a} \cdot \vec{r}) d\vec{a} = \frac{1}{2} \oint_{[c]} (\vec{a} \wedge d\vec{a}) \wedge \vec{r}$$

Obtém-se portanto (IV-59).

Recordando agora a definição (IV-56), vem para

$$(IV-59) \quad \text{a expressão} \quad \vec{A}(\vec{r}) \cong \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \text{ou seja:}$$

$$(IV-60) \quad \vec{A}(\vec{r}) \cong -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \wedge \text{grad}_{\vec{r}} \frac{1}{r}.$$

O campo  $\vec{B}$  calcula-se pela operação  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$  (Cf. § IV.3.1) e resulta

$$(IV-61) \quad \vec{B} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad}_P (\vec{m} \cdot \text{grad}_P \frac{1}{r})$$

Para efectuar esse cálculo, note-se que  $\text{rot}_P \vec{m} = 0$  ( $\vec{m}$  só depende das características do circuito [C]), o que permite escrever  $-\vec{m} \wedge \text{grad}_P \frac{1}{r} = \text{rot}_P \left( \frac{\vec{m}}{r} \right)$ , utilizando uma conhecida identidade diferencial. Então:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \text{rot} \left( \frac{\vec{m}}{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{m}}{r}) - \vec{\nabla}^2 \left( \frac{\vec{m}}{r} \right) \right)$$

Ora: (a)  $\vec{\nabla}^2 \left( \frac{\vec{m}}{r} \right) = \vec{m} \vec{\nabla}_P^2 \left( \frac{1}{r} \right) = 0$

(b)  $\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{m}}{r} \right) = \vec{m} \cdot \text{grad}_P \frac{1}{r}$ , porque  $\text{div}_P \vec{m} = 0$ .

Obtem-se portanto (IV-61).

Ao resultado (IV-61) pode dar-se a versão:

$$(IV-62) \quad B_P = -\text{grad}_P \overset{\leftarrow}{\psi} V_m, \quad V_m = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left( \vec{m} \cdot \text{grad}_P \frac{1}{r} \right)$$

Em conformidade com (IV-51), isto significa que:

Do ponto de vista do campo magnético que produz em pontos exteriores, uma corrente molecular de Ampère revela-se equivalente a um dipolo magnético de momento  $\vec{m}$  definido por (IV-56). Se as características da corrente molecular (intensidade, área, orientação) são  $i$ ,  $\delta\Sigma$ ,  $\vec{n}$  então  $\vec{m}$  vem dado por  $\vec{m} = i \delta\Sigma \vec{n} / c$  (Cf. (IV-57)).

Comprovada a equivalência de uma corrente molecular de Ampère a um dipolo magnético de momento  $\vec{m}$ , sob os dois fundamentais pontos de vista adoptados em IV.6.3A e IV.6.3B,

pode recorrer-se a esta concepção para o estudo do campo magnético dos ímãs ; este momento  $\vec{m}$ , dado por (IV-57), passa a designar-se por momento dipolar magnético da corrente molecular de Ampère.

#### IV.7 — Campo magnético produzido por um corpo magnetizado

Para o estudo do campo magnético produzido por um corpo magnetizado podem seguir-se duas vias distintas :

Via I : Encara-se o corpo magnetizado como análogo a um dieléctrico polarizado e adapta-se ao domínio do campo magnético dos ímãs o tratamento do campo eléctrico na Electrostática dos dieléctricos polarizados.

Via II : Adopta-se a concepção das correntes moleculares de Ampère para descrever a distribuição contínua de dipolos que constitui o corpo magnetizado e trata-se o campo dos ímãs como um campo magnético das correntes.

Em qualquer caso, considera-se um corpo magnetizado que se caracteriza por uma magnetização  $\vec{M}(Q)$ , suposta conhecida em cada ponto  $Q$  do volume  $V$  do corpo.

Na via II descreveremos o campo com a ajuda do vector indução magnética, que continuaremos a designar por  $\vec{B}$ . Na via I descreveremos o campo com a ajuda do vector  $\vec{H}$ , campo magnético, já referido no § IV.3.3.

Para pontos exteriores ao corpo magnetizado, os campos encontrados pelas duas vias são absolutamente idênticos, o que se traduz pela relação de proporcionalidade

$$(IV-63) \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$



entre a indução magnética  $\vec{B}$  (via II) e o campo magnético  $\vec{H}$  (via I), sendo  $\mu_0$  a permeabilidade magnética do vácuo. São bem conhecidas as propriedades e a significação física destes campos.

Entretanto, para os pontos interiores ao corpo magnetizado (interiores à magnetização), os dois campos diferem um do outro, essencialmente — e importa averiguar como se relacionam, que propriedades possuem, que significação física se lhes deve atribuir.

#### IV. 7. 1 — Recurso à analogia com a Electrostatica (via I)

Tratando o corpo magnetizado como uma distribuição de dipolos magnéticos em analogia com a distribuição contínua de dipolos eléctricos de um dieléctrico polarizado, o potencial escalar magnético produzido num ponto P virá dado pela expressão

$$(IV-64) \quad V_m(P) = k'_0 \int_v (\vec{M} \cdot \text{grad} \frac{1}{r}) dv \quad (r = |\vec{PQ}|)$$

que é inteiramente análoga a (1.125'), pag 114<sup>(\*)</sup>. O campo calcula-se pela operação (análoga à que dá  $\vec{E}$ , pag 114):

$$(IV-65) \quad \vec{H} = - \text{grad} V_m$$

Tal como na Electrostatica, (IV-64) e (IV-65) são extensíveis aos pontos interiores ao corpo magnetizado. Fica portanto sempre assegurado o carácter irrotacional de  $\vec{H}$ :

$$(IV-66) \quad \text{rot} \vec{H} = 0$$

Podemos transferir para este domínio as conclusões essenciais da discussão que foi feita sobre o campo eléctrico — de que  $\vec{H}$  é

(\*) Note-se que se tem todavia  $k'_0 = 1/4\pi$  e não  $k'_0 = 1/4\pi\mu_0$ ; isso deve-se à diferença entre as definições de cargas eléctricas e de 'massas magnéticas'. (Confronte as expressões das duas leis de Coulomb)

análogo — na Electrostatica dos dieléctricos polarizados. Faremos no entanto a reserva de que não se considera aqui a existência de cargas magnéticas verdadeiras, como já foi referido no § IV.5; a magnetização é devida à influência de campos magnéticos de correntes ou de outros meios, sendo ainda de considerar a magnetização eventualmente inerente ao próprio corpo magnetizado — que subsiste na ausência de campo magnético exterior.

#### IV.7.1.A — Distribuição equivalente de Poisson

Por um tratamento formalmente idêntico ao apresentado no § 9.4.2, pag 114-115, pode obter-se para  $V_m(P)$ , a partir de (IV-64), a seguinte nova forma de expressão:

$$(IV-67) \quad \left\{ \begin{aligned} V_m(P) &= \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{-\operatorname{div} \vec{M}}{r} dv + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\vec{n} \cdot \vec{M}}{r} dv \end{aligned} \right.$$

em que  $S$  é a superfície limitrofe do volume  $V$  do corpo magnetizado;  $k'_0$  foi já substituído por  $1/4\pi$ .

Esta expressão (IV-67) evidencia que, em ordem ao cálculo do potencial  $V_m(P)$ , a distribuição de magnetização,  $\vec{M}(Q) dv$ , i.e., a distribuição contínua de dipolos magnéticos que caracteriza o corpo magnetizado, é equivalente à justaposição de duas distribuições contínuas de "cargas magnéticas" fictícias, uma em volume outra em superfície, com densidades dadas respectivamente por:

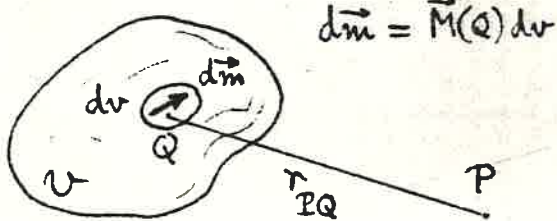
$$(IV-68) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho'_m &= -\operatorname{div}_Q \vec{M} & Q, \text{ ponto corrente do volume } V \\ & & \text{do corpo magnetizado} \\ \sigma'_m &= (\vec{n} \cdot \vec{M})_R & R, \text{ ponto corrente da superfície } \\ & & S \text{ limitrofe de } V. \end{aligned} \right.$$

Estas cargas magnéticas fictícias recebem também o nome de cargas de magnetização. (Trata-se de mais um aspecto da

analogia com a Electrostática dos dielétricos polarizados). A distribuição das cargas de magnetização, caracterizada por (IV-68) e actuante em (IV-67), é a distribuição equivalente de Poisson, adiante utilizada.

#### IV. 7. 2 — Recurso à concepção de Ampère (via II)

Parte-se da expressão do potencial-vector (IV-60), obtida para uma corrente molecular de Ampère. As correntes moleculares que se contêm no elemento de volume  $dv$  circunvizinho do ponto potenciante genérico  $Q$  não contribuem para o potencial-vector  $\vec{A}(P)$  num ponto  $P$ , mediante os respectivos dipolos magnéticos equivalentes; e todas elas o fazem segundo a mesma expressão (IV-60), com o mesmo valor para  $r \equiv |\vec{PQ}|$ .



Assim, sendo  $d\vec{m} = \vec{M} dv$  o momento dipolar magnético resultante das correntes moleculares contidas em  $dv$ , a contribuição global do elemento de volume  $dv$

para  $\vec{A}(P)$  escreve-se  $\frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{m} \wedge \text{grad}_Q \frac{1}{r}$ . Então para todo o volume  $v$  do corpo magnetizado vem

$$(IV-69) \quad \vec{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v (\vec{M} \wedge \text{grad}_Q \frac{1}{r}) dv \quad (r \equiv |\vec{QP}|)$$

O campo vem dado pela operação (habitual no campo magnético das correntes):

$$(IV-70) \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

Pode mostrar-se que o cálculo (IV-69) e a operação (IV-70) são ambos extensíveis ao caso de ser  $P$  interior ao domínio da magnetização. Fica portanto sempre assegurado o carácter solenoidal de  $\vec{B}$ :

$$(IV-71) \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

#### IV.7.2.A — Distribuições equivalente de Ampère

Por conveniente transformação de (IV-69) pode obter-se uma outra expressão para  $\vec{A}(\mathbf{P})$ , susceptível de interessante interpretação física: (\*)

$$(IV-72) \quad \vec{A}(\mathbf{P}) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_v \frac{c \operatorname{rot}_Q \vec{M}}{r} dv + \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_S \frac{-c \vec{n} \wedge \vec{M}}{r} dS$$

Recordando as expressões do potencial-vector do campo magnético produzido por distribuições contínuas de corrente (V. nota (\*) na página seguinte), reconhece-se em face de (IV-72) que, em ordem ao cálculo do potencial-vector  $\vec{A}(\mathbf{P})$ , a distribuição de magnetização  $\vec{M}(Q) dv$ , i. e., a distribuição contínua de dipolos magnéticos que caracteriza o corpo magnetizado, é equivalente à justaposição de duas distribuições contínuas de correntes (macroscópicas) fictícias, uma em volume, outra em superfície, com densidades dadas respectivamente por:

(\*) A demonstração faz-se pelos seguintes passos:

(1) Lançamos mão da conhecida identidade diferencial

$$\operatorname{rot}_Q \left( \frac{\vec{M}}{r} \right) = \frac{1}{r} \operatorname{rot}_Q \vec{M} - \vec{M} \wedge \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r}$$

que, introduzida em (IV-69) conduz a

$$\vec{A}(\mathbf{P}) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_v \frac{c \operatorname{rot}_Q \vec{M}}{r} dv - \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_v \operatorname{rot}_Q \left( \frac{\vec{M}}{r} \right) dv$$

(2) Utilizamos em seguida o seguinte teorema, relativo ao operador rotacional:  $\int_v \operatorname{rot} \vec{X} dv = \int_S \vec{n} \wedge \vec{X} dS$  sendo  $S$  a superfície limite de  $v$ . Isto permite modificar o 2º integral dando origem a (IV-72).

$$(IV-73) \quad \begin{cases} \vec{J}'(Q) = c \operatorname{rot}_Q \vec{M} \\ \vec{j}'(R) = -c(\vec{n} \wedge \vec{M})_R \end{cases} \quad \begin{array}{l} Q, \text{ ponto corrente do volume } \underline{v} \\ \text{do corpo magnetizado} \\ R, \text{ ponto corrente da superfície} \\ \underline{S} \text{ limite de } \underline{v}. \end{array}$$

Estas correntes fictícias recebem também o nome de correntes de magnetização. A distribuição das correntes de magnetização, caracterizada por (IV-73) e actuante em (IV-72), é a chamada distribuição equivalente de Ampère, adiante utilizada.

### IV. 7. 3 — Relação entre os campos $\vec{B}$ e $\vec{H}$

#### IV. 7. 3. A — Campo nos pontos exteriores ao domínio da magnetização

Da própria equivalência entre as acções magnéticas produzidas, individualmente, por uma corrente molecular de Ampère e por um dipolo magnético (cf. § IV. 6. 3. B) decorre a identidade, para os pontos exteriores, dos campos  $\vec{H}$  e  $\vec{B}$  calculados mediante as expressões dos §§ IV. 7. 1 e IV. 7. 2, respectivamente.

Com efeito, semelhantemente ao que sucede com a expressão (IV-69) de  $\vec{A}(P)$ , também a expressão (IV-64) de  $V_m(P)$  — conquanto tenha surgido de modo mais directo — pode ser olhada como resultante de se realizar, relativamente a cada elemento de volume,

(\*) Facilmente se concebe que, à semelhança da distribuição contínua de corrente em volume, com densidade  $\vec{J}$  e elemento de corrente  $\vec{J} dv \diamond \delta e \vec{v}$  (cf. (IV-12), pag 155), se possa também pensar numa distribuição contínua de corrente em superfície com uma densidade  $\vec{j}$  e elemento de corrente  $\vec{j} dS \diamond \delta e \vec{v}$  (movimento de cargas numa folha condutora). O potencial-vector do campo magnético produzido por esta distribuição teria a expressão evidente  $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_S \frac{\vec{j}}{r} dS$ , conforme a (IV-19).

uma soma das acções devidas a todos os dipolos magnéticos equivalentes às correntes moleculares de Ampère contidas em  $dv$ .

Teremos assim entendida a relação de identidade (IV-63), válida para pontos exteriores ao domínio de magnetização.

#### IV. 7.3.B — Campos $\vec{H}$ e $\vec{B}$ nos pontos interiores ao domínio de magnetização

Como já foi referido, mostra-se que ambos os formalismos de cálculo dos campos  $\vec{H}$  e  $\vec{B}$  (§§ IV.7.1 e IV.7.2) são extensíveis aos pontos interiores ao domínio de magnetização. Essa extensão permite definir o campo no interior de um corpo magnetizado de uma maneira convencional, devendo a sua significação física ser discutida e esclarecida por um método semelhante ao adoptado na Electrostatica dos dieléctricos polarizados (Cf. § 9.5, pag 120" a 120").

Podem ver-se desde logo que as expressões dos campos, que assim resultam generalizadas a todo o espaço, não podem conduzir a um campo idêntico em todo o espaço pela simples razão de que os dois campos  $\vec{H}$  e  $\vec{B}$  são estruturalmente distintos nas suas propriedades: um, solenoidal em toda a parte ( $\vec{B}$ ); outro, irrotacional em toda a parte ( $\vec{H}$ ). Com efeito, sabe-se da teoria geral dos campos de vectores, que não pode existir um campo simultaneamente solenoidal e irrotacional por toda a parte (reduzir-se-ia a um campo nulo).

Assim, sendo  $\vec{H}$  e  $\vec{B}$  idênticos entre si na região do espaço exterior ao corpo magnetizado, eles devem essencialmente diferir um do outro no domínio da magnetização (não podem aí identificar-se entre si para todos os pontos). Esta essencial diferença entre  $\vec{H}$  e  $\vec{B}$  vai ser esclarecida nos §§ seguintes.

### IV. 7.3.C — Introdução do "vector magnético de Hertz"

Com o objectivo de encontrar a relação geral entre  $\vec{H}$  e  $\vec{B}$ , revela-se cómodo introduzir um novo potencial-vector  $\vec{\Pi}_m$  dito "vector magnético de Hertz" e definido por

$$(IV-74) \quad \vec{\Pi}_m(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{M}(Q)}{r_{PQ}} dv$$

como uma função da distribuição da magnetização  $\vec{M}(Q)$ .

Olhando ao tipo de potenciação que caracteriza (IV-74), bem conhecida dos estudos anteriores, vê-se que se pode logo assegurar uma importante propriedade para  $\vec{\Pi}_m$ : satisfaz à seguinte equação de Poisson:

$$(IV-75) \quad \text{lap}_P \vec{\Pi}_m = -\mu_0 \vec{M}(P)$$

Podem por outro lado estabelecer-se, sem grande dificuldade, as relações que devem existir entre  $\vec{\Pi}_m$  e  $V_m$  e entre  $\vec{\Pi}_m$  e  $\vec{A}$ , dada a comum dependência de  $\vec{M}(Q)$ . Encontram-se os seguintes resultados:

$$(IV-76) \quad \text{div}_P \vec{\Pi}_m = -\mu_0 V_m(P)$$

$$(IV-77) \quad \text{rot}_P \vec{\Pi}_m = \vec{A}(P)$$

(As demonstrações são dadas na página seguinte.)

Mas isto significa que se podem derivar os dois campos  $\vec{H}$  e  $\vec{B}$  a partir do mesmo potencial-vector  $\vec{\Pi}_m$ . Com efeito, combinando (IV-65) com (IV-76), vem

$$(IV-78) \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{grad div } \vec{\Pi}_m \quad ;$$

e, combinando (IV-70) com (IV-77), vem

$$(IV-79) \quad \vec{B} = \text{rot rot } \vec{\Pi}_m$$

Para a demonstração de (IV-76) :

(1) Tome-se  $\text{div}_{\mathbf{P}}$  de ambos os membros de (IV-74) :

$$\text{div}_{\mathbf{P}} \vec{\Pi}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int_v \frac{\text{div}_{\mathbf{P}} \vec{M}}{r} dv + \int_v \left( \vec{M} \cdot \text{grad}_{\mathbf{P}} \frac{1}{r} \right) dv \right]$$

(os operadores  $\text{div}_{\mathbf{P}}$  e  $\int \dots dv$  comutam, admitindo que  $\vec{M}$  é finita e contínua ; e aplicou-se já o desenvolvimento de  $\text{div}_{\mathbf{P}} (\vec{M}/r)$ ).

(2) Notando que  $\text{div}_{\mathbf{P}} \vec{M}$  só não é nula (mas finita) para o elemento de volume de integração que fique eventualmente circunvizinho de  $\mathbf{P}$ , sendo todavia desprezível a contribuição correspondente, resulta :

$$\text{div}_{\mathbf{P}} \vec{\Pi}_m = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \left( \vec{M} \cdot \text{grad}_{\mathbf{Q}} \frac{1}{r} \right) dv$$

que, confrontando com (IV-64), dá (IV-76).

Para a demonstração de (IV-77) :

(1) Opere-se  $\text{rot}_{\mathbf{P}}$  em ambos os membros de (IV-74) :

$$\text{rot}_{\mathbf{P}} \vec{\Pi}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int_v \frac{\text{rot}_{\mathbf{P}} \vec{M}}{r} dv - \int_v \left( \vec{M} \wedge \text{grad}_{\mathbf{P}} \frac{1}{r} \right) dv \right]$$

(os operadores  $\text{rot}_{\mathbf{P}}$  e  $\int \dots dv$  comutam ; e operou-se  $\text{rot}_{\mathbf{P}} (\vec{M}/r)$ ).

(2) Considerações análogas às anteriormente feitas levam a anular o 1º integral, vindo

$$\text{rot}_{\mathbf{P}} \vec{\Pi}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \left( \vec{M} \wedge \text{grad}_{\mathbf{Q}} \frac{1}{r} \right) dv$$

que, confrontando com (IV-69), dá (IV-77).



### IV. 7.3.D — Relação geral entre $\vec{B}$ e $\vec{H}$

Torna-se agora muito simples estabelecer a relação geral entre  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$ . Introduzindo as expressões (IV-78) e (IV-79), de  $\vec{H}$  e  $\vec{B}$ , e a propriedade (IV-75), de  $\vec{\Pi}_m$ , na conhecida identidade diferencial

$$\text{rot rot } \vec{\Pi}_m = \text{grad div } \vec{\Pi}_m - \Delta \vec{\Pi}_m$$

vem imediatamente:

$$(IV-80) \quad \boxed{\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})} \quad //$$

Esta relação confirma a identidade dos campos  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$  nos pontos exteriores ao corpo magnetizado, em que  $\vec{M} = 0$ ; e exprime que, em todo o domínio da magnetização, a diferença entre  $\vec{B}/\mu_0$  e  $\vec{H}$  num ponto genérico  $Q$  iguala simplesmente o valor local da magnetização  $\vec{M}(Q)$ .

A partir desta relação se pode em seguida completar o conhecimento das propriedades do campo.

### IV. 7.4 — Propriedades do campo

(A) Recorrendo a  $\text{div } \vec{B} = 0$  (eq. (IV-71)) e utilizando (IV-80), obtém-se

$$(IV-81) \quad \text{div } \vec{H} = -\text{div } \vec{M} \quad ;$$

e recordando (IV-68), vem:

$$(IV-82) \quad \text{div } \vec{H} = \rho'_{\text{m}} \quad \}$$

Vê-se assim que o campo irrotacional  $\vec{H}$  ( $\text{rot } \vec{H} = 0$ ) tem como "fonte de divergência" precisamente  $-\text{div } \vec{M}$ ; e satisfaz a uma equação análoga à equação de Poisson do campo eléctrico nos dieléctricos polarizados, em harmonia

com as considerações anteriores referentes ao recurso à analogia com a Electrostática (via I).

(B) Recorrendo agora a  $\text{rot } \vec{H} = 0$  (eq. (IV-56)) e utilizando (IV-80), obtém-se

$$(IV-83) \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \text{rot } \vec{M} \quad ;$$

e recordando (IV-73), vem:

$$(IV-84) \quad \text{rot } \vec{B} = \frac{\mu_0}{c} \vec{J}'$$

Vê-se assim que o campo solenoidal  $\vec{B}$  ( $\text{div } \vec{B} = 0$ ) tem como "fonte de vórtice" precisamente  $\mu_0 \text{rot } \vec{M}$ ; e, se se utiliza a corrente fictícia de magnetização,  $\vec{J}' = c \text{rot } \vec{M}$ ,  $\vec{B}$  satisfaz a uma equação formalmente idêntica à equação de Ampère para o campo produzido por uma corrente estacionária verdadeira, de densidade  $\vec{J}$ , em harmonia com as considerações anteriores referentes ao recurso à concepção de Ampère (via II).

Temos, em resumo, para o campo magnético produzido por um corpo magnetizado, descrito com a ajuda do par de vectores  $(\vec{H}; \vec{B})$ , as seguintes propriedades:

$$\vec{H}: \begin{cases} \text{rot } \vec{H} = 0 \\ \text{div } \vec{H} = \rho'_m \end{cases} \quad \vec{B}: \begin{cases} \text{rot } \vec{B} = \frac{\mu_0}{c} \vec{J}' \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{cases}$$

em que  $\rho'_m = -\text{div } \vec{M}$  e  $\vec{J}' = c \text{rot } \vec{M}$  representam as "fontes" da distribuição de magnetização  $\vec{M}(\mathcal{Q})$  que produz o campo magnético assim descrito.

[A estas propriedades, válidas em pontos interiores a regiões de continuidade, devem juntar-se as degenerescências das mesmas sobre superfícies de descontinuidade, como é habitual fazer-se.]

## IV. 7.5 — Sobre o significado físico de $\text{div } \vec{B} = 0$

O carácter solenoidal do campo da indução,  $\vec{B}$ , é uma propriedade fundamental que subsiste em todo o campo electromagnético — sendo por isso a equação  $\text{div } \vec{B} = 0$  incorporada no sistema das equações de Maxwell, o qual, como já temos adiantado, consubstancia os princípios fundamentais do Electromagnetismo.

É por consequência de todo o interesse discutir a interpretação que se pode dar desta equação neste domínio do campo magnético dos ímans — e isso pode fazer-se facilmente com base nas propriedades estabelecidas nos §§ precedentes.

Sendo o campo  $\vec{H}$ , definido em IV. 7.1, o análogo do campo  $\vec{E}$  da Electrostatica, segue-se que a equação de Poisson da Electrostatica escrita na sua forma geral como

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho')$$

deveria corresponder numa equação de Poisson na Magnetostática, estritamente análoga (à parte a diferença irrelevante entre os coeficientes de proporcionalidade)

$$(IV-85) \quad \boxed{\text{div } \vec{H} = \rho_m + \rho'_m}$$

em que figuraria, além da densidade de carga, fictícia, de magnetização  $\rho'_m$ , também a densidade de carga magnética verdadeira hipoteticamente considerada, numa analogia completa. Entes, se tivéssemos em conta a eq. (IV-68) e a eq. (IV-80), a eq. (IV-85) re-escrever-se-ia sob a forma

$$(IV-85)' \quad \text{div } \vec{B} = \mu_0 P_m$$

Diremos, em consequência, que, nesta equação, o vector  $\vec{B}$  escamoteia as cargas de magnetização (fictícias) e fica directamente relacionado com a densidade de cargas magnéticas verdadeiras, hipoteticamente consideradas.

A eq. (IV-85)' seria assim a análoga directa de eq.  $\text{div } \vec{D} = \rho$  na Electrostatica, e, deste ponto de vista, a indução  $\vec{B}$  seria o análogo ao deslocamento  $\vec{D}$ .

É a não-existência de cargas magnéticas verdadeiras<sup>(\*)</sup>, tomada como um dos princípios de interpretação de todos os fenómenos no campo dos ímans, e depois a todos os fenómenos electromagnéticos, que vem modificar o aspecto formal das eq. (IV-85) e (IV-85)' para re-encontrarmos as propriedades já estabelecidas. Com efeito, se tomarmos

$$(IV-86) \quad P_m = 0$$

como afirmação de um princípio universal, vem imediatamente (IV-85) com o seu verdadeiro aspecto (IV-82) e (IV-85)' com o seu verdadeiro aspecto (IV-71). Pode dizer-se portanto que escrever  $P_m = 0$  é equivalente a escrever  $\text{div } \vec{B} = 0$ .

Assim, fica bem patente que a eq.  $\text{div } \vec{B} = 0$  traduz a não-existência de cargas magnéticas verdadeiras — esse é o seu significado físico, primeiro no domínio restrito do campo dos ímans, depois em todo o Electromagnetismo.

(\*) Cf. IV.5, pag 189

## IV. 8 — Campo magnético de correntes e de ímãs

A sobreposição das ações produzidas por uma corrente estacionária e por um ímã, no espaço que os cerca, é regida pela aditividade vectorial dos campos da indução  $\vec{B}$ , justificada com base na aditividade das forças de Laplace (cf. IV.1.4). As propriedades do campo magnético da corrente estacionária com substâncias magnéticas presentes decorrem por consequência deste princípio de aditividade.

Em primeiro lugar, sendo a equação  $\text{div } \vec{B} = 0$  propriedade comum aos dois tipos de campo, é evidente que ela se mantém na sobreposição.

Em segundo lugar, sabemos que, para o campo magnético da corrente estacionária <sup>com</sup> densidade de  $\vec{J}$ , se verifica a eq. de Ampère (IV-25):

$$(IV-25)' \quad \text{rot } \vec{B} = \frac{\mu_0}{c} \vec{J} \quad ;$$

e também sabemos que, para o campo de um ímã, se verifica uma equação formalmente idêntica à eq. de Ampère, a saber, (IV-84):

$$(IV-84)' \quad \text{rot } \vec{B} = \frac{\mu_0}{c} \vec{J}' \quad ,$$

se se utiliza a corrente fictícia de magnetização, de densidade  $\vec{J}' = c \text{ rot } \vec{M}$ .

Fazendo entã jogar o princípio de aditividade, teremos, para o campo de sobreposição:

$$(IV-87) \quad \boxed{\text{rot } \vec{B} = \frac{\mu_0}{c} (\vec{J} + \vec{J}')} \quad$$

em que  $\vec{B}$  representa já a indução magnética total. A eq. (IV-87) representa uma extensão, modificada, da eq. de Ampère — feita para abarcar os dois tipos de campos, das correntes e dos ímãs.

Mas pode dar-se a (IV-87) uma transformação interessante. Introduzindo a expressão de  $\vec{J}'$  ( $\vec{J}' = c \operatorname{rot} \vec{M}$ ) vem sucessivamente

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\mu_0}{c} \vec{J} + \mu_0 \operatorname{rot} \vec{M}$$

←

$$(IV-88) \quad \operatorname{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \frac{1}{c} \vec{J}$$

Então, enquanto a eq. (IV-87) significa que  $\operatorname{rot} \vec{B}$  deixa de ser, no domínio de sobreposição dos campos, proporcional a  $\vec{J}$  — a eq. (IV-88) significa que há no entanto um vector,  $\vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$ , cujo rotacional é ainda proporcional a  $\vec{J}$ .

Se, para a sobreposição dos dois tipos de campos, continuarmos a definir o vector  $\vec{H}$ , campo magnético por uma relação formalmente idêntica a (IV-80), a saber, mediante

$$(IV-84) \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

(mais geral que (IV-80) porque envolve os dois tipos de campos), então a eq. (IV-88) reescreve-se simplesmente:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \vec{J}$$

É a equação de Ampère, generalizada, no campo estacionário.

# CAPÍTULO V — CAMPO ELECTROMAGNÉTICO VARIÁVEL

## 1ª PARTE — INDUÇÃO ELECTROMAGNÉTICA

### V. 1. 1 — Introdução

A experiência mostra que as variações no tempo do fluxo da indução magnética, através de um circuito condutor fechado, são acompanhadas de fenómenos de indução electromagnética que se manifestam no circuito pelo aparecimento de correntes induzidas. As variações no tempo do fluxo magnético do campo, no qual o circuito está imerso, podem surgir em resultados: quer de deslocamentos de linhas relativamente ao circuito; quer de deslocamentos mútuos do circuito e circuitos vizinhos; quer ainda de simples variações das intensidades dos circuitos vizinhos ou do próprio circuito, encontrando-se todos os corpos em repouso. (\*)

As experiências sobre os fenómenos de indução electromagnética permitem concluir que: (i) fixadas as características do circuito, a indução electromagnética, que nele se gera, é essencialmente determinada em todas as circunstâncias pela taxa de variações do fluxo de indução através do circuito por unidade de tempo; (ii) mantendo

(\*) 1. A corrente induzida num circuito pelo simples facto de que varia no tempo a corrente que o percorre, e, por consequência, o campo magnético que ele próprio produz, designa-se por corrente de self-indução. São exemplos de correntes de self-indução as extra-correntes de estabelecimento e de ruptura que surgem quando num circuito se insere ou se retira uma f.e.m. estacionária.

2. As correntes induzidas geradas na massa de um condutor externo que se movimenta no seio de um campo magnético, designam-se especialmente por correntes de Foucault.

invariáveis os restantes parâmetros físicos, a intensidade da corrente induzida num circuito varia quando varia a resistência do circuito — e as medições revelam que a corrente induzida observada corresponde a uma força-electromotriz de indução ou f.e.m. induzida a qual se encontra, quantitativamente, em relação directa com a taxa de variação do fluxo por unidade de tempo; (iii) o sentido da corrente induzida num circuito acha-se ligado de uma maneira perfeitamente definida ao sinal da variação do fluxo através do circuito; (iv) se o circuito se encontra previamente percorrido por uma corrente estacionária quando nele se produz um fenómeno de indução electromagnética, a experiência revela também que as intensidades das duas correntes, a pré-existente e a induzida, se somam algebricamente.

Estas conclusões encontram-se convenientemente explicitadas e quantitativamente concretizadas nas leis experimentais que regem o fenómeno da indução electromagnética (\*) — ou nas reformulações subsequentes, como vamos ver nos §§ seguintes.

### V. 1. 2 — Leis da indução electromagnética

A lei de Faraday da indução electromagnética enuncia-se nestes termos: Sempre que o fluxo da indução magnética  $\vec{B}$  através de um circuito varia no decurso do tempo, gera-se no circuito uma força-electromotriz de indução,  $\mathcal{E}^{ind}$ , que é directamente proporcional à taxa de decréscimo desse fluxo,  $\Phi$ , no tempo (decréscimo de  $\Phi$  por unidade de tempo):

$$(V.-1) \quad \mathcal{E}^{ind} = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$$

(\*) Enunciadas pela primeira vez por Faraday sob forma qualitativa e completadas depois por Lenz.



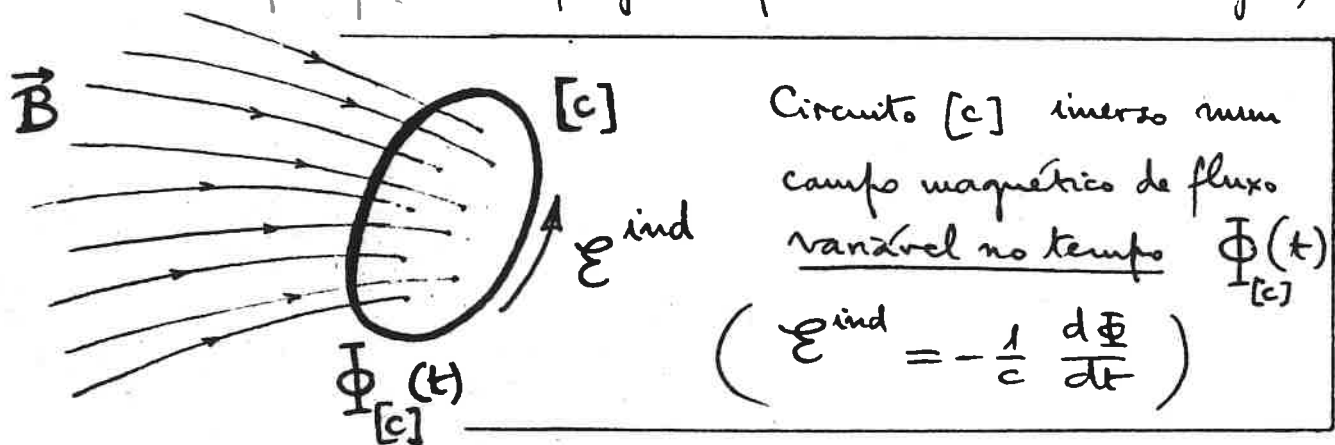
com uma constante de proporcionalidade dada por  $1/c$  em que  $c$  é a constante electromagnética universal, que já nos surgiu na lei de Laplace (Cf. § IV.1.2). Deve salientar-se que a lei de Faraday é uma lei experimental que se cumpre, sempre sob a mesma forma (V-1) quaisquer que sejam as circunstâncias determinantes da variação do fluxo de  $\vec{B}$  através do circuito (nomeadamente, deslocamentos relativos de circuitos ou de circuitos e ímans e/ou variações das intensidades dos circuitos).

Note-se que na expressão (V-1) da lei de Faraday se supõe existir, entre o sentido positivo do fluxo  $\Phi$  através do circuito e o sentido positivo da circulação no circuito, a interligação regida pela regra de Stokes (do saca-rolhas). É sob estas condições que a experiência conduz à "taxa de decréscimo do fluxo", i.e., ao sinal (-) no 2.º membro de (V-1). Assim, o sentido da f.e.m. induzida, ou o sentido da corrente induzida correspondente, fica perfeitamente determinado pelo sinal da variação do fluxo. E, quando se combina este aspecto da lei de Faraday com o efeito magnético de uma corrente, regido pela equação de Ampère, ou pelo teorema de Ampère (Cf. § IV.3.3), resulta que o sentido da corrente induzida (ou o sentido em que a f.e.m. induzida tende a produzir corrente) obedece à lei de Lenz que se enuncia nestes termos: A corrente induzida tem um sentido tal que o campo magnético que ela própria produz se opõe à variação de fluxo que lhe deu origem. Adiante se discutirá como a lei de Lenz pode ver-se com efeito, como decorrente do jogo de duas das equações de Maxwell, Princípios fundamentais do Electromagnetismo. Esta observação justifica que tenhamos aqui, por diante do capítulo, prioridade ao tratamento da lei de Faraday.

Observemos agora que a lei de Faraday se exprime sempre (em todas as circunstâncias, como usina a experiência) à custa do fluxo descrito meramente como fluxo através do circuito, portanto sem qualquer referência à superfície ao longo da qual deve ser calculado. Mas isto quer dizer que a lei de Faraday atesta implicitamente o facto de o fluxo  $\Phi_{[c]}$  poder ser calculado mediante

$$(V-2) \quad \Phi_{[c]} = \int_{S[c]} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS$$

sendo  $S[c]$  qualquer diáfana apoiada sobre  $[c]$  (V. Figura).



Ora esta possibilidade só existe para os campos solenoidais. Isto significa que na lei de Faraday (nesta lei experimental) está implícita a afirmação de que o campo  $\vec{B}$  — podendo aqui ser um campo essencialmente variável no tempo — é solenoidal, cumprindo

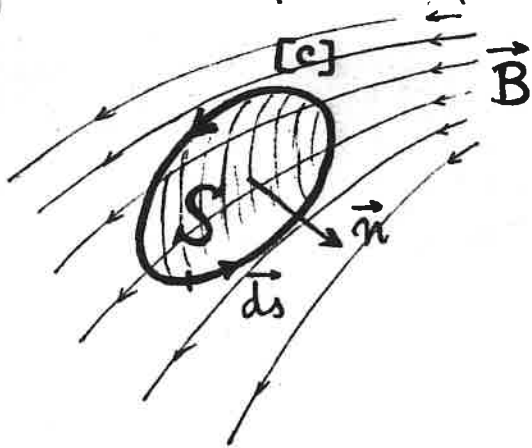
$$(V-3) \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

Portanto, a propriedade  $\text{div } \vec{B} = 0$ , que a indução magnética respeitava nos domínios do campo magnético da corrente e do campo magnético dos ímãs, continua a ser uma propriedade fundamental da indução magnética em geral no domínio do campo electromagnético variável — e isto é pura e simplesmente acarretado pela lei de Faraday, como acabámos de ver.

### V. 1.3. — Campos eléctricos induzidos

Apresentemos agora o tratamento generalizado da lei de Faraday, introduzido por Maxwell.

Consideremos uma curva fechada  $[c]$  imersa num campo magnético e seja  $S_{[c]}$  um diafragma qualquer apoiado sobre  $[c]$ ; suporhamos respeitada a regra de Stokes entre os sentidos positivos do fluxo através de  $S_{[c]}$  e da circulação ao longo de  $[c]$ . Pela lei de Faraday, sempre que um circuito condutor fechado coincida com esta curva  $[c]$  e se verifique uma variação de fluxo de indução magnética através de  $[c]$ , gera-se no circuito uma f.e.m. induzida detectável pela corrente induzida correspondente, e que satisfaz (V-1). Mas isso significa que se



pode conceber a existência de um campo eléctrico responsável pela corrente induzida — o campo eléctrico que solicita as cargas móveis ao seu movimento ao longo do circuito. Este campo eléctrico designa-se naturalmente por campo

eléctrico induzido,  $\vec{E}^{ind}$ , e a sua circulação ao longo de  $[c]$  deve igualar a f.e.m. induzida:

$$(V-4) \quad \mathcal{E}^{ind} = \oint_{[c]} \vec{E}^{ind} \cdot d\vec{s}$$

Ora, a generalização de Maxwell consiste em pensar-se que, mesmo não havendo nenhum condutor coincidente com a curva fechada  $[c]$ , se gera sempre um campo eléctrico induzido  $\vec{E}^{ind}$ , a que corresponde a f.e.m. dada pela circulação (V-4) e satisfazendo (V-1), desde que se verifique uma variação de fluxo através de  $[c]$ . Este campo eléctrico induzido, agora

detectável mediante uma corrente induzida, é no entanto, o mesmo que solitaria as cargas, móveis se acaso um condutor viesse coincidir com a curva fechada  $[c]$ . Como  $[c]$  é qualquer, uma tal generalização estende-se a todo o espaço e pode resumir-se neste outro enunciado da lei da indução electromagnética de Faraday: Toda a variação no tempo do fluxo de  $\vec{B}$  (indução magnética), em quaisquer circunstâncias, gera no espaço um campo eléctrico induzido,  $\vec{E}^{ind}$ , tal que a circulação de  $\vec{E}^{ind}$  ao longo de  $[c]$  (no sentido positivo) é proporcional à taxa de decréscimo no tempo do fluxo de  $\vec{B}$  através de qualquer diáfana  $S_{[c]}$  apoiada sobre  $[c]$ . (no sentido positivo):

$$(V-5) \quad \oint_{[c]} \vec{E}^{ind} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{S_{[c]}} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS.$$

Reportando-nos aos factos experimentais aludidos na conclusão (iv) do § V.1.1, vejamos que a soma algébrica das correntes, induzida e estacionária, num circuito condutor, vai implicar a soma algébrica das f.e.m.'s correspondentes e, por aí, implica a soma vectorial dos respectivos campos eléctricos, a saber, campo eléctrico induzido,  $\vec{E}^{ind}$ , e campo eléctrico da corrente estacionária,  $\vec{E}^e + \vec{E}^a$ , sendo  $\vec{E}^e = -\text{grad}V$  um campo de carácter electrostático e  $\vec{E}^a$  o campo aplicado. (cf. § III.9). Então para o campo total,  $\vec{E}$ , tem-se:

$$(V-6) \quad \vec{E} = \vec{E}^e + \vec{E}^a + \vec{E}^{ind} \quad (*)$$

É esta expressão é susceptível da mesma generalização a todo o espaço em que se produz um fenómeno de indução electromagnética, gerador de  $\vec{E}^{ind}$ , havendo na mesma região campos eléctricos pré-existentes  $\vec{E}^e$  ou  $\vec{E}^a$ .

(\*) Note-se que  $\text{rot}(\vec{E}^{ind}) = -\frac{1}{c} \frac{d\vec{B}}{dt}$  e  $\text{div}(\vec{E}^{ind}) = 0$ .

### V.1.4. Expressões local da lei de Faraday, no caso dos corpos em repouso

Começamos por calcular a taxa de variação do fluxo de  $\vec{B}$ , no caso dos corpos em repouso. Tem-se

$$(V-7) \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} \, dS$$

Com efeito, os símbolos operacionais  $\frac{d}{dt}$  e  $\int_S \dots \vec{n} \, dS$  são permutáveis visto que  $[C]$  e  $S$  não variam no tempo (corpos em repouso). Então, utilizando (V-5), vem

$$\oint_{[C]} \vec{E}^{\text{ind}} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} \, dS \quad ;$$

e transformando o 1.º integral pelo teorema de Stokes (como mesmo qualquer diafragma  $S$  apoiado sobre  $[C]$  e respeitando sempre a interligação de sentidos de fluxo e de circulação governada pela regra de Stokes) resulta:

$$\int_S \text{rot} \vec{E}^{\text{ind}} \cdot \vec{n} \, dS = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} \, dS$$

Ora, visto que esta igualdade se deve verificar para todo e qualquer diafragma  $S$  apoiado sobre  $[C]$  e sobre toda e qualquer curva  $[C]$ , segue-se que

$$(V-8) \quad \boxed{\text{rot} \vec{E}^{\text{ind}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Esta é a expressão local da lei de Faraday, no caso dos corpos em repouso. Ela traduz, explicitamente, que em toda a região do espaço em que há um campo magnético  $\vec{B}$  variável no tempo, aí se gera, pelo fenómeno da indução electromagnética, um campo eléctrico induzido cujo rotacional iguala em cada ponto  $1/c$  vezes a derivada parcial negativa em ordem ao tempo de  $\vec{B}(t)$  no mesmo ponto (taxa de diminuição de  $\vec{B}$  por unidade de tempo). Pode dar-se imediatamente uma versão

da propriedade local (V-8) exprimindo-a em funçoes do campo total  $\vec{E}$  dado por (V-6). Resulta:

$$(V-9) \quad \boxed{\text{rot}(\vec{E} - \vec{E}^a) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

pois  $\vec{E}^e$  é um campo de carácter electrostático ( $\text{rot} \vec{E}^e = 0$ ). A equação (V-9) é de importância capital; ela foi incorporada por Maxwell no sistema das equações fundamentais do Electromagnetismo, para corpos em repouso. Por conter a lei de Faraday sob forma local para os corpos em repouso, já no âmbito da generalização que lhe foi imprimida por Maxwell, esta equação recebe a designação de equação de Maxwell-Faraday.

Repare-se que esta equação encerra um conteúdo mais vasto: quando se supõe  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$  (campo estacionário) cai-se em  $\text{rot}(\vec{E} - \vec{E}^a) = 0$  que traduz uma importante propriedade do campo da corrente estacionária; quando além disso se faz  $\vec{E}^a = 0$ , cai-se em  $\text{rot} \vec{E} = 0$  que representa uma das propriedades fundamentais do campo electrostático. Adiante retomaremos esta discussão.

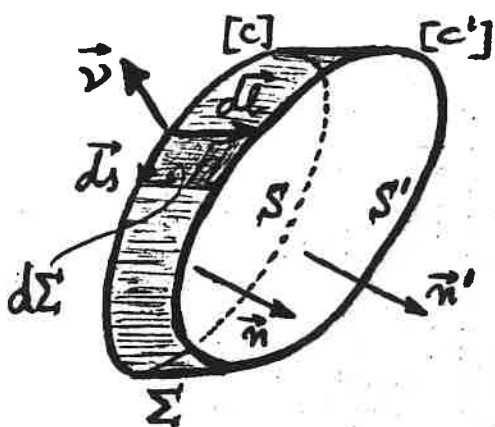
### V.1.5. — Taxa de variação do fluxo no caso dos corpos em movimento

Antes de passar à expressão local da lei de Faraday no caso dos corpos em movimento, detenhamo-nos no cálculo prévio da taxa de variação do fluxo que se apresenta neste caso bastante mais complicado.

No caso dos corpos em movimento, para calcular  $\frac{d\Phi}{dt}$ , é evidentemente a lei de variação, no tempo, do próprio  $\Phi$  (globalmente) que interessa considerar. Podemos no entanto começar por supor  $\vec{B}$  invariável no tempo e utilizar o teorema do correntes fluxo para um circuito que se desloca nesse campo.

### V.1.5. A — Teorema do corte do fluxo

Consideremos um circuito  $[c]$  inserido num campo de indução  $\vec{B}$  (invariável no tempo); tomemos um diáfagma  $q.q.$   $S$  apoiado em  $[c]$  e seja  $\Phi$  o fluxo de  $\vec{B}$  através de  $S$  no sentido relacionado pela regra de Stokes com um sentido pré-fixado como positivo para a circulação ao longo de  $[c]$  (tomando portanto no cálculo do fluxo  $\Phi$  as semi-normais  $\vec{n}$  indicadas na Figura, quando o sentido de circulação em  $[c]$  é o do elemento de arco genérico  $\vec{ds}$ ). Suponhamos que  $[c]$  executa um deslocamento



elementar acompanhado ou não de uma deformação, assumindo cada elemento  $\vec{ds}$  de  $[c]$  um deslocamento por si próprio,  $\vec{dl}$ . (v. Figuras) Designemos por  $[c']$  o circuito deslocado, tomemos um qualquer diáfagma  $S'$  apoiado sobre  $[c']$  e seja  $\Phi'$  o fluxo de  $\vec{B}$  através de  $S'$

com idêntica convenção de sentidos.

Procuramos relacionar a variação  $\Phi' - \Phi$ , ocorrida neste deslocamento elementar, com o conjunto dos  $\vec{dl}$  que o caracterizam. Isso tem interesse não só no tratamento das leis da indução electromagnética, mas também em vários outros problemas. Consideremos, para isso, a superfície  $\Sigma$  descrita por  $[c]$  no deslocamento elementar executado (v. Figuras). Tomemos a superfície fechada  $S \cup S' \cup \Sigma$  e seja  $\vec{v}$  a semi-normal exterior ao elemento genérico  $d\Sigma$  (v. Figuras). Reparemos que se tem

$$(V-10) \quad \vec{v} d\Sigma = \vec{ds} \wedge \vec{dl} \quad \checkmark$$

Ora, por ser  $\vec{B}$  um campo solenoidal ( $\text{div } \vec{B} = 0$ ) e pelo teorema do fluxo-divergência podemos escrever:

$$\int_{S'} \vec{B} \cdot \vec{n}' dS' - \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS + \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{\nu} d\Sigma = 0$$

tendo em conta os sentidos das semi-normais. Resulta pois:

$$(V-11) \quad \Phi' - \Phi = - \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{\nu} d\Sigma \quad ;$$

i.e. : a variação do fluxo através de [c], quando [c] executa um deslocamento elementar, iguala o fluxo que entra pela superfície  $\Sigma$  descrita por [c] no seu deslocamento.

O circuito [c], no seu deslocamento, corta as linhas de força do campo  $\vec{B}$ , corta um fluxo, justamente o fluxo através de  $\Sigma$ . Daí, dizer-se: «a variação do fluxo através de [c] iguala o fluxo cortado por [c] no seu deslocamento.»; e daí designar-se a conclusão (V-11) por teorema do corte do fluxo. Interessa desde já extrair as diferentes formas que pode assumir (V-11) quando se utiliza a relação (V-10):

$$(V-12) \quad \Phi' - \Phi = - \oint_{[c]} \vec{B} \cdot \vec{ds} \wedge \vec{dl}$$

ou:

$$(V-12') \quad \Phi' - \Phi = \oint_{[c]} \vec{B} \wedge \vec{dl} \cdot \vec{ds}$$

ou ainda:

$$(V-12'') \quad \Phi' - \Phi = \oint_{[c]} \vec{ds} \wedge \vec{B} \cdot \vec{dl}$$

### V.1.5.B — Taxa de variação do fluxo para um circuito que se desloca num campo

Comecemos por supor  $\vec{B}$  invariável no tempo e utilizemos o teorema do corte do fluxo para o deslocamento do circuito [c] no intervalo de tempo  $dt$ . Recorrendo precisamente (V-12') e notando que cada  $\vec{dl}$  está associado a uma velocidade  $\vec{v}$



$\vec{v}$ , sendo genericamente  $d\vec{l} = \vec{v} dt$ , com o mesmo  $dt$  para qualquer ponto de  $[c]$ , resulta:

$$d\Phi = dt \oint_{[c]} \vec{B} \wedge \vec{v} \cdot \vec{ds} ;$$

donde se tem:

$$(V-13) \quad \frac{d\Phi}{dt} = \oint_{[c]} \vec{B} \wedge \vec{v} \cdot \vec{ds} //$$

Para tratar o caso dos corpos em movimento com toda a generalidade, deve sempre considerar-se  $\vec{B}$  variável no tempo. Pode mostrar-se<sup>(\*)</sup>, atendendo ao carácter solenoidal de  $\vec{B}(t)$ , por (V-3), que a taxa de variação  $d\Phi/dt$  é então calculável simplesmente pela adição dos 2<sup>os</sup> membros de (V-7) e (V-13), vindo:

$$(V-14) \quad \left\| \frac{d\Phi}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS + \oint_{[c]} \vec{B} \wedge \vec{v} \cdot \vec{ds} \right.$$

### V.1.6 — Expressão local da lei de Faraday, no caso dos corpos em movimento

Admitindo, para simplificar,  $\vec{B}$  invariável no tempo e combinando (V-13) com (V-5), vem:

$$\oint_{[c]} \vec{E}^{ind} \cdot \vec{ds} = -\frac{1}{c} \oint_{[c]} \vec{B} \wedge \vec{v} \cdot \vec{ds}$$

e visto que esta igualdade se deve verificar para qualquer curva  $[c]$ , resulta:

$$(V-15) \quad \vec{E}^{ind} = \frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{B}$$

que é a expressão local procurada, da lei de Faraday, no caso dos corpos em movimento. Facilmente se reconhece na equação

(\*) Cf., por ex., Taniotzky and Phillips, Classical Electricity, and Magnetism, 2<sup>nd</sup> ed., 1972, pag 150 e seq.<sup>as</sup>.

(V-15) a lei de Laplace (Cf. § IV.1.2).

Consideremos, com efeito, um circuito móvel num campo de indução  $\vec{B}$  como exemplo típico de situação regida pela eq. (V-15); seja  $\vec{v}$  a velocidade de um dado ponto do circuito,  $Q$ . Ora, o campo induzido  $\vec{E}_{ind}$ , em  $Q$ , não é senão a força que solicita a unidade de carga (positiva) a mover-se no circuito (ao longo do circuito), contribuindo assim para uma corrente de indução. Mas essa força iguala justamente  $\frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{B}$ , como deve acontecer pela lei de Laplace, porque essa carga ( $q=1$ ) se está a mover com o circuito, com uma velocidade  $\vec{v}$ , no campo de indução  $\vec{B}$ .

Deve pois concluir-se que é a lei de Laplace que interpreta afinal esta faceta (ou modalidade) da lei da indução electromagnética de Faraday; ou, se quisermos: que a lei de Laplace não é senão um aspecto — o primeiro a ser conhecido — de uma lei experimental mais ampla, a lei da indução electromagnética. Em qualquer caso, esta observação vem tornar perfeitamente compreensível que a constante de proporcionalidade que surge na lei experimental da indução electromagnética não se tenha revelado como uma nova constante física mas precisamente como o factor  $\frac{1}{c}$  da lei de Laplace.

3

V.2.1 - Recapitulação dos resultados estabelecidos

V.2.1.A. Como já temos referido, as primeiras hipóteses que são feitas na Teoria de Maxwell do Electromagnetismo consistem em admitir que as equações

$$(I) \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$(II) \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

estabelecidas para os campos estáticos e da corrente estacionária, subsistem ainda formalmente no quadro do campo electromagnético variável.

No tocante à equação (I), começa por ser na Electrostatica uma consequência da lei de Coulomb e acaba por traduzir o teorema de Gauss sob a forma generalizada que vai abarcar o comportamento dos dieléctricos na presença de um campo eléctrico; o recurso ao campo  $\vec{D}$  nesta equação escamoteia as cargas de polarização. Admitir a eq. (I) no campo da corrente estacionária, depois no campo variável significa admitir que essas mesmas propriedades se generalizam formalmente a todo o Electromagnetismo. Tal equação afirma, como um principio, que a  $\operatorname{div} \vec{D}$  fornece em todas as circunstâncias a densidade volumica de carga eléctrica verdadeira, total.

Quanto à equação (II), ela generaliza a todo o Electromagnetismo uma propriedade fundamental do campo magnético da corrente estacionária e do campo magnético dos ímãs, subjacente à própria lei de Faraday da indução electromagnética: o fluxo da indução é, em todas as circunstâncias, conservativo,  $\vec{B}$  tem, em todas as circunstâncias, carácter solenoidal. Tal equação traduz, em particular,

a não existência de cargas magnéticas verdadeiras como um dos princípios de interpretação de todos os fenômenos electro-magnéticos (Cf. § IV.7.5).

V.2.1.B. Adopta-se em seguida, como um dos pilares mais importantes da estrutura teórica do Electromagnetismo, a equação de Maxwell-Faraday — expressão local da lei de Faraday da indução electromagnética sob a forma (V-9) que transcreveremos:

$$(III) \quad \text{rot}(\vec{E} - \vec{E}^a) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Repare-se que esta equação encerra no seu conteúdo algumas das propriedades que fomos registando ao longo do estudo dos vários domínios do Electromagnetismo. Ela não traduz somente a lei da indução electromagnética para os corpos em repouso — no tratamento generalizado que dela deu Maxwell.

Se supusermos que o campo é estacionário, tem-se  $\partial \vec{B} / \partial t = 0$  e a equação (III) particulariza-se em  $\text{rot}(\vec{E} - \vec{E}^a) = 0$ , uma das equações que regem o campo eléctrico da corrente estacionária, traduzindo aí o princípio de conservação da energia. Se supusermos que  $\vec{E}^a = 0$ , a eq. (III) particulariza-se, mais ainda, em  $\text{rot} \vec{E} = 0$ , que pode representar o campo eléctrico da corrente estacionária em meios homogêneos, ou, recuando um pouco, que traduz uma das propriedades fundamentais do campo electrostático.

Este processo de particularização, aparentemente simples, desenvolveu-se na verdade ao invés, como um processo de generalização, cujos passos fundamentais procuramos referir no nosso estudo. Nós passamos de  $\text{rot} \vec{E} = 0$

a  $\text{rot}(\vec{E} - \vec{E}^a) = 0$  e desta equação à eq. (III), na medida em que era necessário abandonar, num novo domínio de conhecimentos experimentais, a ideia interpretativa válida no domínio precedente, em favor de uma ideia essencialmente nova. Com efeito, é primeiro o princípio de conservação da energia electrostática (traduzido por  $\text{rot} \vec{E} = 0$ ) que não subsiste no domínio da corrente estacionária e tem de generalizar-se, com modificações essenciais (portanto com  $\text{rot} \vec{E} \neq 0$ ), para envolver também o calor de Joule libertado pela corrente. É depois a f.e.m. dos campos aplicados que deixa de ser a única responsável pela corrente num circuito (como é traduzido por  $\text{rot}(\vec{E} - \vec{E}^a) = 0$  em corrente estacionária), para dar lugar à indução electromagnética que leva ao estabelecimento da eq. (III).

Assim, enquanto as equações (I) e (II) puderam ser mantidas formalmente por não haver nenhum facto experimental a exigir modificações relevantes — pelo contrário, a equação (III) aparece-nos como a expressão final de um processo de generalizações sucessivas, com uma modificação essencial em cada etapa, de equações que se revelaram como não podendo subsistir de um dado domínio de conhecimentos para outro mais vasto, a ser regido por novas leis.

V.2.1. C. A teoria de Maxwell do Electromagnetismo vai ainda apoiar-se nas sugestões experimentais contidas na equação de Ampère dos campos magnéticos estacionários (Cf. § IV.8) que transcrevemos:

$$(V.2-1) \quad \text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \vec{J}$$

Recordemos que esta equação sintetiza propriedades de que goza, de um lado, o campo magnético da corrente estacionária e, do outro lado, o campo magnético dos ímãs. Ela reflecte as leis de Biot-Savart e de Laplace e traduz uma propriedade fundamental da magnetostática dos corpos magnetizados. Na sua incidência mais geral e mais significativa, a ela deve satisfazer, em todas as circunstâncias estacionárias, o campo magnético  $\vec{H}$  de correntes e ímãs.

No campo electromagnético variável, porém, é óbvio que a equação de Ampère não pode subsistir. Com efeito, por ser  $\text{div rot} \equiv 0$  (como se sabe), resulta que a equação (V.2-1) é incompatível com a equação de conservação da carga eléctrica que recordamos

$$(V.2-2) \quad \text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Como a seu tempo vimos, esta equação traduz uma propriedade essencial da corrente em regime variável ( $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ ). Digamos mesmo que esta equação traduz um princípio (o de conservação da carga eléctrica) que se revelou, experimentalmente, como devendo presidir a toda a interpretação dos fenómenos electromagnéticos. Este princípio deve ser englobado nos princípios fundamentais do Electromagnetismo, esta equação tem de ser incorporada no esquema de Maxwell.

V.2.1.D. Isto significa que a equação de Ampère deve ser essencialmente modificada para o regime variável: ela não representa senão um estágio de um processo de generalização que ainda não atingiu o seu termo.

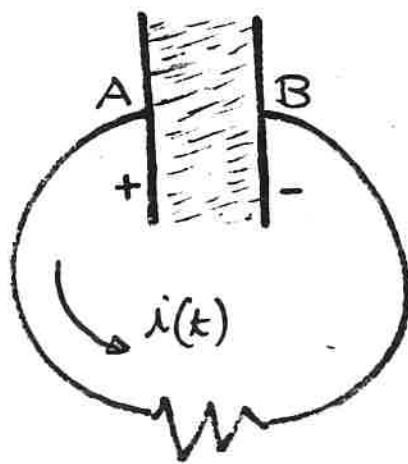
A questão que se põe é naturalmente a de descobrir a modificação essencial que deve operar-se na eq. (V.2-1) para fazer surgir uma nova equação capaz de contribuir para o sistema de princípios que deve reger o campo eletromagnético variável — e, ao mesmo tempo, susceptível de se reduzir à eq. (V.2-1) para o regime estacionário.

Para este problema crucial, que os físicos enfrentaram ao tempo de Maxwell, nenhum facto experimental conhecido trazia, no entanto, um princípio de solução ou qualquer sugestão fecunda. Coube a Maxwell resolvê-lo, elaborando uma hipótese verdadeiramente genial, de ordem puramente técnica — e que só veio a ter confirmação experimental à roda de vinte anos mais tarde.

### V.2.2. — Corrente de deslocamento

V.2.2.A. Maxwell começou por introduzir um novo conceito, o de corrente de deslocamento. Examinemos como surge este conceito no caso simples da descarga de um condensador a que se curto-circuitam as armaduras por um fio exterior (v. figura). O fio é percorrido por uma corrente variável (que cessa praticamente ao fim de um intervalo de tempo mais ou menos curto).

Esta corrente, entre A e B, pelo fio, é uma corrente de condução, fluxo organizado de cargas eléctricas, de densidade  $\vec{j}$  e satisfaz a eq. de conservação de carga eléctrica (V.2-2).



Quer dizer que, ao contrário do que acontece no campo estacionário, aqui, as linhas de força de  $\vec{J}(Q)$  não se fecham sobre si próprias ( $\text{div } \vec{J} \neq 0$ ): a corrente  $i(t)$  é na realidade aberta — ela interrompe-se entre as armaduras do condensador.

Maxwell tem então a ideia de procurar uma nova corrente, definida pelo menos entre as armaduras, capaz de completar a corrente de condução, fechando as linhas de força. Recorre, para isso, à própria eq. de conservação de carga (V.2-2), que é assim o ponto de partida, tomada já como equação a manter inquestionavelmente. Substitui nesta equação a grandeza  $\rho$  pelo seu valor  $\text{div } \vec{D}$  à face da eq. (I), que já tinha sido assumida como princípio fundamental em todo o Electromagnetismo. Resulta daí:

$$\text{div } \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{D}) = 0 ;$$

e, porque os operadores  $\frac{\partial}{\partial t}$  e  $\text{div}$  comutam:

$$(V.2-3) \quad \text{div} \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

Isto é o mesmo que pôr em evidência um novo vector (com carácter de densidade de corrente),  $\vec{C}$ , com divergência essencialmente nula:

$$(V.2.-4) \quad \vec{C} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} ; \text{div } \vec{C} = 0$$

Maxwell encontra assim uma nova densidade de corrente,  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ , que somada a  $\vec{J}$  dá uma densidade de corrente total  $\vec{C}$ , cujas linhas de



de força se fecham sobre si próprias. A nova densidade de corrente,  $\partial \vec{D} / \partial t$ , designa-se por corrente de deslocamento (é a taxa de variações no tempo do deslocamento eléctrico  $\vec{D}$ ). A corrente assim idealizada é uma pura construção teórica; de natureza física distinta da de uma corrente de condução, não representa de modo nenhum qualquer movimento de cargas à escala macroscópica. Tem entretanto existência entre as armaduras do condensador e realiza aí um prolongamento da corrente de condução — compreendendo-se assim que a corrente total  $\vec{C} = \vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t$  fecha as suas linhas de força, em harmonia com o seu carácter solenoidal.

V.2.2.B. Os dois termos doravante considerados na corrente total  $\vec{C}$  são, na maioria das aplicações, de ordem de grandeza muito diferente. Num isolante perfeito não existe senão corrente de deslocamento; num condutor perfeito só existe corrente de condução. Mas nos corpos reais há as duas correntes e a diferença de ordens de grandeza entre elas depende das características do meio material e das frequências do campo instalado. Admitindo tratar-se de um meio sem histerese, linear, isotrópico e homogéneo (supondo válidas as relações  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  e  $\vec{J} = \sigma^* \vec{E}$ , com  $\epsilon$  e  $\sigma^*$  escalares constantes) e considerando instalado um campo harmónico de frequência  $\omega$ , pode ver-se sem dificuldade que o quociente das ordens de grandeza vale

$$(V.2-5) \quad \left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| / |\vec{J}| \sim \omega \theta$$

sendo  $\theta$  o tempo de relaxação do meio material ( $\theta = \epsilon / \sigma^*$ ). A relação (V.2-5) permite concluir que só com frequências

excessivamente elevadas as duas correntes ficariam de ordens de grandeza comparáveis num condutor; de qualquer modo, só para frequências muito elevadas a corrente de deslocamento pode atingir, mesmo num isolante, valores comparáveis aos valores típicos de uma corrente de condução num condutor.

Isto explica que, ao tempo de Maxwell, não fosse viável detectar experimentalmente os possíveis efeitos da corrente de deslocamento nos fenómenos electromagnéticos, por não serem acessíveis frequências suficientemente elevadas.

### V. 2.3 — A hipótese de Maxwell. Equações de Maxwell - Ampère

Não sendo embora a corrente de deslocamento um fluxo organizado de cargas eléctricas, Maxwell conjectura que este conceito poderá desempenhar um papel preponderante na interpretação dos fenómenos electromagnéticos. Considerando a corrente total  $\vec{C}$  como a grandeza que generaliza para o regime variável o carácter solenoidal que  $\vec{J}$  possuía no regime estacionário, admite que  $\vec{C}$ , reduzindo-se a  $\vec{J}$  no regime estacionário ( $\partial \vec{D} / \partial t = 0$ ) deve, em geral, desempenhar no regime variável o papel que  $\vec{J}$  desempenhava no regime estacionário.

É com esta ideia que retorna o problema da equação de Ampère: admite que aí também a corrente  $\vec{J}$  deve ser substituída pela corrente total  $\vec{C}$  que generaliza  $\vec{J}$ , para passar de uma equação válida no regime estacionário à sua modificação adequada ao regime variável.

Maxwell concebe portanto, como um princípio físico, ainda que sem qualquer base experimental,

que a corrente de deslocamento,  $\partial \vec{D} / \partial t$ , produz os mesmos efeitos magnéticos que a corrente de condução,  $\vec{J}$ . (\*) Foi esta a chamada hipótese de Maxwell.

Em conformidade com um tal princípio, a equação de Ampère passa a escrever-se

$$(IV) \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

Designamo-la por equação de Maxwell - Ampère. Ela vai ser incorporada no sistema das equações de Maxwell para os corpos em repouso, conjuntamente com as equações (I), (II) e (III) que recapitulámos no § V.2.1.

Afirma-se tácitamente que o campo magnético produzido pela corrente de deslocamento, além de respeitar a equação (IV) no tocante ao seu rotacional, cumpre entretanto  $\text{div } \vec{B} = 0$ , como o campo magnético de qualquer corrente de condução — e portanto ainda em conformidade com a hipótese de Maxwell. Onde

(\*) Fica bem explicitado que a hipótese de Maxwell se reporta tão-só aos efeitos magnéticos, o que quer dizer que a corrente de deslocamento não produz calor de Joule, o outro efeito que sempre acompanha uma corrente de condução. Isto é perfeitamente coerente com o facto de que a corrente de deslocamento não se constitui de um fluxo organizado de cargas eléctricas, à escala macroscópica. Mostrou-se com efeito que o calor de Joule resulta do trabalho (negativo) realizado pelas forças resistentes, ao movimento efectivo de cargas eléctricas num meio condutor. (Cf III.5, pg 130).

resulta que a equação (II) permanece formalmente idêntica a si própria, como já se admitiu — e compatível com a hipótese de Maxwell.

Pela equação (V-8), pág. V-19/7 — lei de Faraday — pode afirmar-se que a variação no tempo de um campo magnético produz um campo eléctrico (campo eléctrico induzido). Agora, pela equação de Maxwell-Ampère — pelo seu termo adicional — poderá afirmar-se que a variação no tempo de um campo eléctrico produz um campo magnético. A hipótese de Maxwell aparece assim como uma espécie de contrapartida, com certa reciprocidade, à lei da indução electromagnética.

Deve observar-se que, não atingindo a corrente de deslocamento, mesmo nos dieléctricos, valores comparáveis com os de uma corrente de condução suas para frequências muito elevadas (no mínimo da ordem de grandeza de  $10^6$  a  $10^7$   $\text{seg}^{-1}$ ) não era possível, ao tempo de Maxwell, obter qualquer teste experimental de validade da equação de Maxwell-Ampère, ou seja, estabelecer a realidade física dos efeitos magnéticos da corrente de deslocamento. Só à volta de vinte anos mais tarde (1888) é que Hertz estabeleceu pela primeira vez, experimentalmente, a existência de ondas electromagnéticas — utilizando precisamente circuitos oscilantes na região das radio-frequências — e portanto provou indirectamente a realidade física da corrente de deslocamento e dos seus efeitos magnéticos, que até então estava vedada à evidência experimental.

É importante notar desde logo que a equação (IV)

assegura automaticamente  $\text{div } \vec{C} = 0$ , equaçaes que, combinada com (I), conduza à equaçaes de conservaçaes da carga eléctrica, (V.2-2), que assim se verifica ficar implicitamente incluída no sistema das equaçaes de Maxwell. Era de resto o que devíamos esperar, dada a intervençaes essencial de (V.2-2) na concepçaes de (IV).

### V.2.4 — Sistema das equaçaes de Maxwell para os corpos em repouso

Maxwell reuniu em sistema as equaçaes (I), (II), (III) e (IV) de que nos ocupámos nos parágrafos precedentes:

$$(V.2.-6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \text{div } \vec{D} = \rho \\ \text{(II)} \quad \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{(III)} \quad \text{rot}(\vec{E} - \vec{E}^a) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{(IV)} \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \end{array} \right.$$

É este sistema das equaçaes de Maxwell para os corpos em repouso que constitui a base de interpretaçaes de todos os fenómenos electromagnéticos à escala macroscópica. Neste sistema se encerram os Princípios fundamentais do Electromagnetismo.

No sistema das equaçaes de Maxwell, o campo electromagnético encontra-se representado por dois pares de vectores:  $(\vec{E}; \vec{D})$  para descrever o campo eléctrico; e  $(\vec{H}; \vec{B})$  para descrever o campo magnético. Entre estes

vectores, há no entanto relações que importa ter presentes: as chamadas equações de ligação dos campos às induções

$$(V.2-7) \quad \begin{cases} \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \end{cases}$$

não podem com efeito deixar de acompanhar o sistema de equações de Maxwell (V.2-6):

Para bem definir uma situação electromagnética concreta por meio do sistema de equações de Maxwell, combinadas com (V.2-7), devem ser perfeitamente conhecidas as diferentes grandezas físicas intervenientes no processo, a saber:

(a) as distribuições das cargas ( $\rho$ ), das correntes ( $\vec{j}$ ) e dos campos aplicados ( $\vec{E}^a$ ) em todo o ponto do espaço e a cada instante;

(b) as propriedades eléctricas e magnéticas dos meios materiais presentes, as quais são traduzidas pelas distribuições  $\vec{P}(Q, t)$  e  $\vec{M}(Q, t)$ .

Em geral porém, a maior parte destes dados do problema electromagnético dependem essencialmente dos próprios campos eléctrico e magnético — e é esse envolvimento que torna muito complexa a busca de soluções.

Em muitos casos, alguns dos dados devem ser substituídos pelo conhecimento das suas leis de dependência relativamente aos campos — leis que resultam de um conhecimento empírico. É o caso de  $\vec{P}$ ,  $\vec{M}$  e  $\vec{j}$  que se introduzem quase sempre no problema sob a forma de equações materiais:

$$(V.2-8) \quad \vec{P} = f(\vec{E}) ; \vec{M} = g(\vec{H}) ; \vec{J} = k(\vec{E})$$

Em numerosos casos, importantes na prática, estas equações são lineares, o que simplifica muito o problema.

Em princípio, as quatro equações de Maxwell, combinadas com (V.2-7), devem fornecer a divergência e o rotacional de dois dos campos ( $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , por exemplo); e, a partir daí, o teorema de Helmholtz garante o conhecimento dos próprios campos  $\vec{E}(P,t)$  e  $\vec{B}(P,t)$ .

Conhecidos os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , produzidos por certas fontes, mediante as equações de Maxwell, pode determinar-se a acção do campo electromagnético sobre uma partícula electrizada  $e$ , movendo-se com uma velocidade  $\vec{v}$ , pela fórmula de Laplace-Lorentz:

$$(V.2-9) \quad \vec{f} = e \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

Com o conhecimento desta força pode então estudar-se o movimento da partícula electrizada (de massa  $m$ ) no campo electromagnético, com o recurso à equação de Newton (em dinâmica pré-relativista).

Assim, as equações de Maxwell, combinadas com a força de Laplace-Lorentz e com as leis de Newton do movimento, podem conduzir a uma descrição completa da dinâmica clássica de partículas electrizadas em interacção com campos electromagnéticos.

}

CAPÍTULO V — CAMPO ELECTROMAGNÉTICO VARIÁVEL3ª PARTE — ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS§ 1. — Propagação do campo electromagnético. Ondas planasV.3.1.1 — A equação de onda

Consideremos uma região do espaço inteiramente preenchida por um meio não-condutor, sem histerese, linear, isótropo e homogéneo nas suas propriedades eléctricas e magnéticas. Suponhamos que nesta região se estabelece um campo electromagnético variável por acção de fontes completamente exteriores ao domínio de observação considerado.

Em cada ponto desta região, as relações materiais de ligação dos campos às induções são bem definidas (não há q.g. histerese) e escrevem-se simplesmente como relações lineares

$$(V.3-1) \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad ; \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

em que  $\epsilon$  e  $\mu$  são escalares (meio isótropo) e os mesmos para todos os pontos (meio homogéneo) — i.e., constantes que são características do meio. Por outro lado, em toda a região se verifica que

$$(V.3-2) \quad \vec{E}^a = 0 \quad ; \quad \vec{J} = 0 \quad ; \quad \rho = 0$$

porque as fontes são supostas completamente exteriores ao do domínio de observação considerado e não há sequer aí uma densidade de corrente  $\sigma \vec{E}$ , pois o meio é não-condutor.

Nestas condições, simplifica-se muito o sistema de equações que rege o campo electromagnético observável no zone considerado. Com efeito, das equações de Maxwellii se forma mais geral:



$$(V.3-3) \quad \begin{cases} \text{rot}(\vec{E} - \vec{E}^a) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & ; \quad \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) & ; \quad \text{div} \vec{D} = \rho \end{cases}$$

resulta, pela introdução de (V.3-1) e (V.3-2):

$$(V.3-4) \quad \begin{cases} \text{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} & ; \quad \text{div} \vec{H} = 0 \\ \text{rot} \vec{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & ; \quad \text{div} \vec{E} = 0 \end{cases}$$

ou seja, um sistema de equações em  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ , homogêneas do 1º grau nas primeiras derivadas de  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  em ordem a  $x, y, z, t$

O sistema (V.3-4) é ainda, sem dúvida, um sistema de equações simultâneas em  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ ; mas acontece que é possível dada a sua simplicidade, separar os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ , desde que nos resignemos a passar a um sistema de equações diferenciais de 2ª ordem. Vejamos como se processa essa separação.

- (1) Apliquemos o operador rot à 1ª equação (V.3-4).
- (2) Tenhamos presente a identidade  $\text{rot rot} \vec{G} = \text{grad div} \vec{G} - \text{lap} \vec{G}$ .
- (3) Reparemos que os operadores rot e  $\partial/\partial t$  comutam entre si; e façamos a substituição do rot  $\vec{H}$  pelo 2º membro da 3ª equação (V.3-4). (4) Recorramos à 4ª equação (V.3-4). — Resulta, enfim, uma equação só em  $\vec{E}$ :

$$(V.3-5) \quad \text{lap} \vec{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

E um tratamento análogo da 3ª equação, com recurso às 1ª e 2ª eqs, conduz a uma equação só em  $\vec{H}$ :

$$(V.3-6) \quad \text{lap} \vec{H} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  satisfazem assim a equações diferenciais de 2ª ordem perfeitamente idênticas. Se tivermos

agora em atenção que  $\text{lap } \vec{G} = \sum_{\alpha} (\text{lap } G_{\alpha}) \vec{e}_{\alpha}$  ( $\alpha = x, y, z$ ;  $\vec{e}_{\alpha}$ , vectores unitários cartesianos), torna-se claro que as equações (V.3-5) e (V.3-6) se projectam nos eixos cartesianos exactamente com uma forma idêntica para cada uma das componentes de  $\vec{E}$ , ou de  $\vec{H}$ . Então, podemos resumir as duas propriedades (V.3-5) e (V.3-6) dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ , respectivamente, numa única propriedade do campo electromagnético, afirmando que: — Nas condições de observação definidas para a situação acima descrita, qualquer componente cartesiana,  $\Psi$ , do campo electromagnético (representado pelo par de vectores  $(\vec{E}; \vec{H})$ ) satisfaz à equação diferencial

$$(V.3-7) \quad \text{lap } \Psi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

(em que  $\Psi$  representa indifereentemente  $E_x, E_y, E_z$  ou  $H_x, H_y, H_z$ )  
Introduziu-se em (V.3-7) a grandeza

$$(V.3-8) \quad a = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

constante característica do meio material, com as dimensões de  $LT^{-1}$ , i.e., de uma velocidade — que desempenha um papel de importante significado físico, adiante esclarecido.

A propriedade que acabámos de estabelecer é uma consequência do jogo das equações de Maxwell como sistema; e deve notar-se que para a simetria deste resultado concorre de modo essencial a presença do termo  $\epsilon \partial \vec{E} / \partial t$  — a corrente de deslocamento — na 3ª equação de (V.3-4). Vê-se assim que uma tal propriedade envolve globalmente o conjunto dos Princípios fundamentais do Electromagnetismo, achando-se, particularmente, em estreita conexão com a hipótese de Maxwell sobre os efeitos magnéticos da corrente de deslocamento.

Convém observar desde logo que as duas equações (V.3-5) e (V.3-6) — e também obviamente (V.3-7) — subsistem com a mesma forma, mudando apenas as constantes  $\underline{\epsilon}$  e  $\underline{\mu}$  em  $\underline{\epsilon}_0$  e  $\underline{\mu}_0$  —  $\underline{a}$  em  $a_0 = c/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  — quando imaginamos que a região de observação é toda ela, simplesmente, vácuo. A propriedade em vias de estudo é válida também para o vácuo.

Ora as equações (V.3-5 e 6), ou (V.3-7), significam que o campo electromagnético, nas condições de observação definidas para a situação acima descrita, se propaga por ondas, com a velocidade  $\underline{a}$ , dada por (V.3-8). Vamos ver nos §§ seguintes qual o sentido físico preciso desta afirmação.

A equação (V.3-7) recebe por isso a designação de equação de onda, sendo  $\Psi$  frequentemente nomeada função de onda.

### V.3.1.2 — Integração da equação de onda

Vamos procurar integrar a equação de onda num caso particularmente simples que, embora resulte de uma fonte restringida nas condições de observação, constitui ainda assim um exemplo largamente representativo de possíveis situações de campo electromagnético realmente observável. Queremos referir-nos ao caso em que supomos que as fontes, que já considerávamos exteriores, se afastam para uma distância indefinidamente grande da região de observação (para infinito), segundo uma orientação bem determinada. Acha-se tipicamente nestas condições o campo electromagnético que observamos proveniente de uma estrela.

Tomemos para eixo dos  $\underline{xx}$  a orientação segundo a qual as fontes se afastaram para infinito. Então é fácil concluir que os observadores de um mesmo plano perpendicular ao eixo dos  $\underline{xx}$

dentro da região de observação, detectam todos, em cada instante, um mesmo valor para o campo electromagnético (um mesmo valor para cada uma das suas componentes, quer de  $\vec{E}$ , quer de  $\vec{H}$ )  
 Por outras palavras,  $\Psi$ , em geral função de  $\underline{P}$  e de  $\underline{t}$ , fica, nesta situação particular, dependente exclusivamente de  $\underline{x}$  e de  $\underline{t}$  e a equação de onda (V.3-7), para uma função de onda  $\Psi(x, t)$ , simplifica-se na forma

$$(V.3-9) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

Para integrar esta equação pode adoptar-se o processo que se desenvolve pelos seguintes passos:

(1) Com  $at = \theta$ , a eq. (V.3-9) escreve-se

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = 0$$

admitindo o 1.º membro a "factorização",

$$(V.3-10) \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \Psi = 0$$

(2) Fazamos agora a mudança de variáveis  $(x, \theta) \rightarrow (u, v)$  definida por

$$\begin{cases} u = x - \theta \\ v = x + \theta \end{cases} \iff \begin{cases} x = (u+v)/2 \\ \theta = (v-u)/2 \end{cases}$$

Tem-se

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial u} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \Psi \\ \frac{\partial \Psi}{\partial v} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \Psi \end{cases}$$

o que nos conduz a mudar (V.3-10) em:

$$(V.3-11) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial v} = 0$$

(3) Ora, a eq. (V.3-11) integra-se facilmente; com efeito: a) numa primeira etapa,

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial u} \right) = 0 \implies \frac{\partial \Psi}{\partial u} = f(u)$$

(i.e.,  $\frac{\partial \Psi}{\partial u}$  deve ser uma constante em  $\underline{v}$ , portanto uma função exclusiva de  $\underline{u}$ , arbitrária, seja  $f(u)$ );

b) numa segunda etapa,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u} = f(u) \implies \Psi = F(u) + G(v)$$

(i.e.,  $\Psi$  deve igualar uma primitiva de  $f(u)$ , seja  $F(u)$ , mais uma constante em  $\underline{u}$ , portanto uma função exclusiva de  $\underline{v}$ , arbitrária, seja  $G(v)$ ).

Em conclusão, a solução geral da equação diferencial (V.3-9) apresenta-se sob a forma:

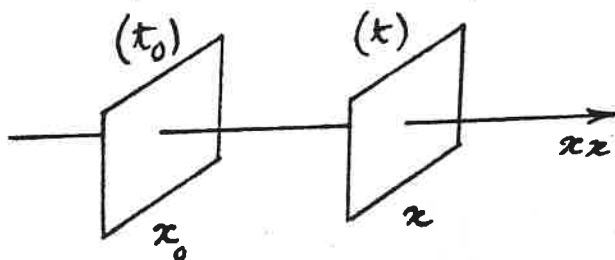
$$(V.3-12) \quad \Psi(x, t) = F(x-at) + G(x+at)$$

em que  $\underline{F}$  e  $\underline{G}$  são funções arbitrárias dos respectivos argumentos  $\underline{u} = x - at$  e  $\underline{v} = x + at$ . Como pode observar-se, a equação diferencial (V.3-9) impõe às suas soluções modos especiais de organização das variáveis  $\underline{x}$  e  $\underline{t}$  em ordem à dependência funcional  $\Psi(x, t)$ : a função  $\Psi$  deve depender de  $\underline{x}$  e de  $\underline{t}$  através de um argumento  $\underline{u} = x - at$  ou através de um argumento  $\underline{v} = x + at$ , e isto, mediante funções arbitrárias  $F(u)$  ou  $G(v)$ . São estes modos especiais de organização espaço-temporal que se encontram na base da interpretação física que pode dar-se às soluções da equação de onda, (V.3-12), como vai ser feito.

### V.3.1.3 — Propagação por ondas planas

Tomemos a solução  $F(x-at)$  e admitamos que  $F(u)$  é uma função unívoca de  $u$  como convém ao significado físico de qualquer  $\Psi$ . Consideremos a família dos planos perpendiculares ao eixo dos  $xx$ , dentro da região de observação.

Seja  $\Psi(x_0, t_0)$  o valor assumido por uma dada componente do campo electromagnético (diremos simplesmente: valor assumido pelo campo) sobre o plano de abscissa  $x_0$ , no instante  $t_0$  ( $x_0$  e  $t_0$  quaisquer). É fácil inferir que um idêntico valor do campo é assumido (vai ser ou já foi) sobre um qualquer outro plano, de abscissa  $x$ , nalgum instante  $t$



Com efeito, para que se cumpra

$$\Psi(x, t) = \Psi(x_0, t_0)$$

ou seja

$$F(x-at) = F(x_0-at_0)$$

basta que  $x$  e  $t$  satisfaçam a condição

$$(V.3-13) \quad x - at = x_0 - at_0$$

que constitui uma simples equação em  $t$ , sempre possível e de solução aceitável, fixado  $x \neq x_0$ . Isso significa que o campo representado pela função  $\Psi(x, t) = F(x-at)$  reassume, sem qualquer modificação, em todos os planos da família, dentro da região de observação, o valor que assume num dado instante  $t_0$  sobre o plano de abscissa  $x_0$ . Nós exprimimos esta propriedade dizendo que os valores do campo se propagam de um plano para outro ao longo da direcção do eixo dos  $xx$

Dizemos também que o campo se propaga como uma onda, falamos de propagação por ondas planas, para ter em conta a distribuição espacial dos valores do campo em cada instante.

Mas a condição (V.3-13), que constitui a lei que rege esta propagação, equivale a:

$$(V.3-14) \quad x - x_0 = a(t - t_0)$$

Então, o valor  $\Psi(x_0, t_0)$ , que o campo assume sobre o plano  $x_0$  no instante  $t_0$ , é reassumido sobre um plano genérico, de abscissa  $x$  num instante  $t$  tal que, por (V.3-14), se perfaça o intervalo de tempo  $t - t_0$  necessário para se vencer precisamente o espaço  $x - x_0$  (distância entre os dois planos), com movimento uniforme e rectilíneo ao longo e no sentido do eixo dos  $xx$ , de velocidade  $a$ . Isto leva-nos a atribuir à propagação um carácter de movimento abstracto, com as características do movimento uniforme e rectilíneo, ao longo e no sentido do eixo dos  $xx$  e de velocidade  $a$ .

Em suma, dizemos que  $F(x - at)$  representa uma onda plana que se propaga, sem deformação, na direcção e sentido positivo do eixo dos  $xx$ , com a velocidade  $a$ . Semelhantemente,  $G(x + at)$  representa uma onda plana que se propaga na direcção e no sentido negativo do eixo dos  $xx$ , com a mesma velocidade  $a$ . Entendemos que esta propagação se realiza sempre na perspectiva da cinemática do movimento uniforme e rectilíneo.

V.3.1.4 — Em conclusão, o campo electromagnético, observável nas condições pormenorizadamente descritas no § V.3.1.1, com a restrição que depois foi feita no início do § V.3.1.2, propaga-se por ondas planas com a velocidade  $a$ . A grandeza  $a = c/\sqrt{\epsilon\mu}$ , com as dimensões  $LT^{-1}$ , assume assim o carácter físico de uma velocidade, a velocidade de propagação das ondas electromagnéticas no meio considerado.

Um dos maiores sucessos da teoria de Maxwell foi prever a existência de ondas electromagnéticas cuja velocidade de propagação podia ser conhecida teoricamente e medida.

CAPÍTULO V — CAMPO ELECTROMAGNÉTICO VARIÁVEL

3ª PARTE — ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

§ 1'. — Radiamiento electromagnético.  
Vector de Poynting

V.3.1'.1 — Energia electromagnética total

Uma análise aprofundada do comportamento energético do campo electromagnético regido pelas equações de Maxwell sob a sua forma mais geral (\*), leva a admitir que, apesar do carácter simultâneo dessas equações, para efeito do cálculo da energia total há simplesmente sobreposição dos campos eléctrico e magnético. A energia electromagnética total compõe-se então, sem mais, da soma das energias eléctrica e magnética obtidas, na situação geral, mediante expressões formalmente idênticas às que eram válidas no campo electrostático e no campo magnetostático, respectivamente, na concepção de Maxwell (em termos dos campos).

Recordemos que a energia de um sistema electrostático, na presença de dieléctricos perfectos e isotropos (Cf. § 10.5, pag 14) se escreve

(V.3-16) 
$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{D} \, dv$$

A analogia entre o campo magnético dos ímans e a electrostática dos dieléctricos polarizados permite inferir que a energia de um sistema magnetostático para meios magnéticos lineares e isotropos deve ter uma expressão semelhante

(V.3-17) 
$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{H} \cdot \vec{B} \, dv$$

(\*) J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, Sec 6-8, for ex.



O problema da energia magnética para um sistema de correntes é objecto de um tratamento contido no Apêndice I ao Capítulo V.<sup>(\*)</sup> Aí se mostra que a expressão (V.3-17) é válida também no domínio do campo magnético das correntes.

A energia electromagnética total virá então dada pela reunião das duas expressões (V.3-16) e (V.3-17) quando nelas se introduzem os campos que descrevem a situação geral:

$$(V.3-18) \quad W_{em} = W_e + W_m$$

Nas expressões (V.3-16) e (V.3-17) os integrais estendem-se a todo o espaço  $\Omega$ . Mas justamente na concepção de Maxwell, somos levados a admitir a distribuição de energia por todo o espaço e a localização de uma parcela de energia em todo o elemento de volume em que os campos estejam definidos. Isso conduz-nos a adoptar como densidade volumica da energia electromagnética total,  $w_{em}$ , a expressão

$$(V.3-19) \quad w_{em} = w_e + w_m = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$$

### V.3.1'.2 — Equação de balanço energético

Suponhamos que a observação do campo electromagnético se realiza ainda nas condições definidas no § V.3.1.1 e procuremos agora averiguar o comportamento energético do campo nesta situação. Para isso, retomamos o sistema das equações de Maxwell, (V.3-4), sob a forma simplificada que obtivemos para este caso; e temos em atenção que (V.3-19) se escreve agora por introdução de (V.3-1):

$$(V.3-20) \quad w_{em} = w_e + w_m = \frac{1}{2} (\epsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2)$$

(\*) Recomendado para consulta; de leitura facultativa.

Ora, as equações de evolução do sistema (V.3-4) permitem encontrar as taxas de variação no tempo das densidades de energia magnética e eléctrica, respectivamente. Com efeito, internando a 1ª por  $\vec{H}$  e a 2ª por  $\vec{E}$ , resulta:

$$(V.3-21) \quad \begin{cases} \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{H} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mu \vec{H}^2 \right) = -\frac{1}{c} w_m \\ \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 \right) = \frac{1}{c} w_e \end{cases}$$

E para a taxa de variação no tempo da densidade de energia electromagnética total vem, por (V.3-20):

$$c (\vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \vec{H}^2 \right)$$

que, por utilização de uma conhecida identidade diferencial ( $\vec{Y} \cdot \text{rot} \vec{X} - \vec{X} \cdot \text{rot} \vec{Y} = \text{div} (\vec{X} \wedge \vec{Y})$ ), se simplifica para:

$$(V.3-22) \quad \text{div} (c \vec{E} \wedge \vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \vec{H}^2 \right)$$

Integrando (V.3-22) para um volume  $v$ , qualquer, dentro da região de observação considerada, vem

$$\int_v \text{div} (c \vec{E} \wedge \vec{H}) dv = -\int_v \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \vec{H}^2 \right) dv;$$

aplicando ao 1º membro o teorema do fluxo-divergência e permutando no 2º membro os símbolos  $\frac{\partial}{\partial t}$  e  $\int_v \dots dv$  — o que é lícito para corpos em repouso —, obtém-se

$$(V.3-23) \quad \int_S c \vec{E} \wedge \vec{H} \cdot \vec{n} dS = -\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \int_v (\epsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2) dv \right]$$

em que  $S$  é a superfície limitrofe do volume  $v$ .

Segundo a concepção de Maxwell da distribuição e localização da energia electromagnética, dentro dos parêntesis rectos do 2º membro da eq. (V.3-23) figura a energia electromagnética

localizada no volume  $\underline{v}$ , ou contida no volume  $\underline{v}$ . Adoptando esta concepção, a eq. (V.3-23) afirma que: a taxa de diminuição com o tempo da energia electromagnética contida no volume  $\underline{v}$ , iguala o fluxo do vector

$$(V.3-24) \quad \vec{\Sigma} = c \vec{E} \wedge \vec{H}$$

que sai através da superfície  $S$  limitrofe do volume  $\underline{v}$ . A grandeza definida por (V.3-24) diz-se vector de Poynting.

Não há na situação considerada, em qualquer volume  $\underline{v}$  dentro da região de observação, outras energias postas em jogo para além da energia electromagnética — e isto porque, por um lado, as fontes são completamente exteriores, e por outro lado, o meio é não-condutor e sem histerese. Então, se admitirmos o principio de conservação da energia, a energia electromagnética perdida, ou ganha, no volume  $\underline{v}$ , em dado intervalo de tempo, deve ser comunicada aos elementos de volume vizinhos, ou deles exaurida, no mesmo intervalo de tempo, e naturalmente, através da superfície limitrofe do volume  $\underline{v}$ . Ora, pela eq. (V.3-23), o fluxo do vector de Poynting  $\vec{\Sigma}$  é o instrumento adequado para traduzir o transporte dessa energia.

O fluxo do vector de Poynting interpreta-se pois como o fluxo de energia electromagnética que passa através de  $S$  (que sai), por unidade de tempo; e a equação de balanço energético, (V.3-23), traduz o principio de conservação da energia electromagnética no volume  $\underline{v}$ :

$$(V.3-23') \quad \int_S \vec{\Sigma} \cdot \vec{n} \, dS = - \frac{dW_{em}}{dt}$$

Utiliza-se também, frequentemente, a versão local deste principio que se retira de (V.3-22)

$$(V.3-22')$$

$$\operatorname{div} \vec{\Sigma} = - \frac{\partial w_{em}}{\partial t}$$

# CAPÍTULO V — CAMPO ELECTROMAGNÉTICO VARIÁVEL

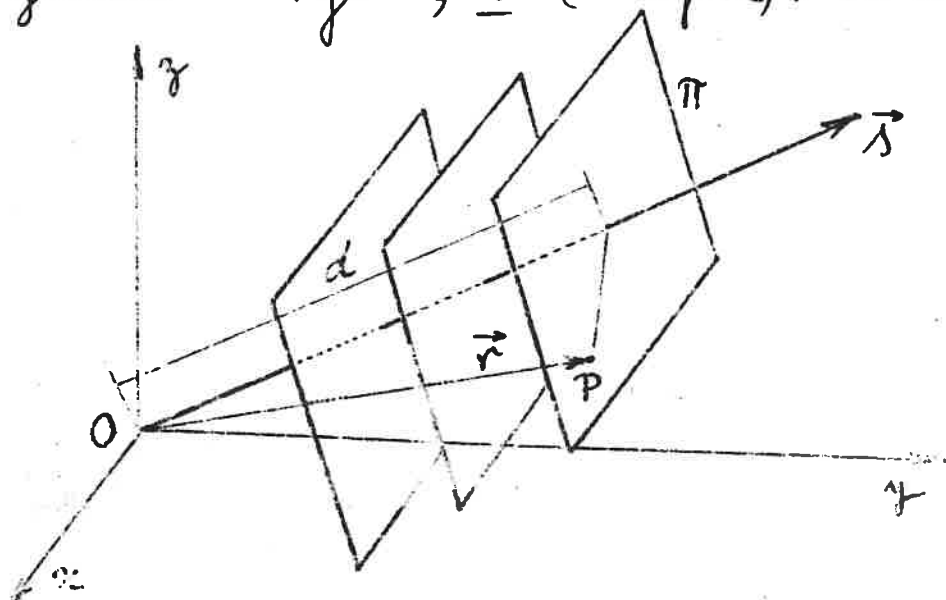
## 3ª PARTE — ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

### § 2. — Características gerais das ondas planas electromagnéticas

#### V.3.2.1 — Representação geral de uma onda plana

Continuamos a pensar num campo electromagnético observável nas condições descritas no § V.3.1.1, com a restrição que depois foi feita no início do § V.3.1.2. Trata-se assim de um campo electromagnético que se propaga por ondas planas, com a velocidade  $\underline{a}$ , ao longo da orientação segundo a qual as fontes se afastaram para infinito. Seja essa orientação representada agora, de uma maneira geral, pelo vector unitário  $\vec{s}$ .

Isto significa que, em cada instante, os observadores de cada plano da família de planos  $\pi$  perpendiculares à direcção de propagação  $\vec{s}$  detectam todos o mesmo valor do campo. Então, na representação analítica atrás adoptada para a função de onda,  $\Psi(x, t) = F(x - at)$ , a abscissa  $x$  deve ser substituída pela variável que lhe corresponde e a generaliza na nova representação, a saber, a distância do plano  $\pi$  genérico à origem,  $\underline{d}$ . (v. Figuras). Se nos reportarmos ao



observador genérico sobre o plano  $\pi$  ou seja, ao ponto  $P$ , então tem  $d = \vec{r} \cdot \vec{s}$  e esta expressão substitui  $x$  em  $\Psi(x, t)$ .

Com o mesmo significado que no § V.3.1.2, utiliza-se agora a variável intermediária

$$(V.3-25) \quad u = \vec{r} \cdot \vec{s} - at = x_1 x + y_1 y + z_1 z - at$$

A função de onda, num ponto  $\underline{P}$ , num instante  $\underline{t}$  escreve-se em consequência

$$(V.3-26) \quad \Psi(\underline{P}, t) = F(u) = F(\vec{r} \cdot \vec{s} - at)$$

Prova-se facilmente que a função (V.3-26) é solução da equação de onda na sua forma mais geral (V.3-7). É com base nesta representação geral de uma onda plana que vamos de seguida averiguar quais as condições impostas às ondas planas electromagnéticas pelas equações de Maxwell. Este regresso às equações de Maxwell impõe-se porquanto as propriedades que até agora conhecemos para as ondas electromagnéticas planas resultaram apenas da equação de onda — uma consequência das equações de Maxwell, não equivalente às equações de Maxwell. Desejando obter uma informação mais completa, deve procurar-se a fonte de informação máxima.

### V.3.2.2 — Condições impostas pelas equações de Maxwell às ondas planas electromagnéticas

Utilizaremos obviamente as equações de Maxwell sob a forma simplificada já obtida para a situação aqui considerada, a saber, o sistema (V.3-4). Tendo em atenção que todas as componentes dos campos respectam uma dependência espaço-temporal com a estrutura dada por (V.3-26), convém começar por averiguar quais as simplificações daí decorrentes para os operadores que figuram nas equações (V.3-4). Nesta ordem de ideias, é fácil reconhecer que:

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{d}{du} = -a \frac{d}{du}$$

$$(2) \quad \vec{\nabla} = \vec{\nabla} u \frac{d}{du} = \vec{\nabla}(\vec{r} \cdot \vec{s}) \frac{d}{du} = \vec{s} \frac{d}{du}$$

$$(3) \quad \text{rot } \vec{G} = \vec{\nabla} \wedge \vec{G} = \vec{s} \wedge \frac{d\vec{G}}{du} = \frac{d}{du}(\vec{s} \wedge \vec{G})$$

$$(4) \quad \text{div } \vec{G} = \vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \vec{s} \cdot \frac{d\vec{G}}{du} = \frac{d}{du}(\vec{s} \cdot \vec{G})$$

Utilizando estas relações, as eq. (V.3-4) transformam-se em

$$(V.3-27) \quad \begin{cases} \frac{d}{du}(\vec{s} \wedge \vec{E}) = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{d\vec{H}}{du} & ; \quad \frac{d}{du}(\vec{E} \cdot \vec{s}) = 0 \\ \frac{d}{du}(\vec{s} \wedge \vec{H}) = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{d\vec{E}}{du} & ; \quad \frac{d}{du}(\vec{H} \cdot \vec{s}) = 0 \end{cases}$$

sendo  $u$ , a variável intermediária dada por (V.3-25). Estas equações (V.3-27) são, evidentemente, de integração imediata na variável  $u$  de que dependem exclusivamente todas as funções intervenientes. Tem-se, a menos de constantes aditivas arbitrárias (constantes como funções de  $u$ ):

$$(V.3-28) \quad \begin{cases} \vec{s} \wedge \vec{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \vec{H} & ; \quad \vec{E} \cdot \vec{s} = 0 \\ \vec{s} \wedge \vec{H} = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{E} & ; \quad \vec{H} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases}$$

As constantes de integração omitidas em (V.3-28) devem, de facto, tomar-se como nulas, uma vez que, constantes em  $u$  só poderão representar campos estáticos e uniformes — os quais se não propagam, constituindo assim soluções estranhas ao problema físico de que nos ocupamos.

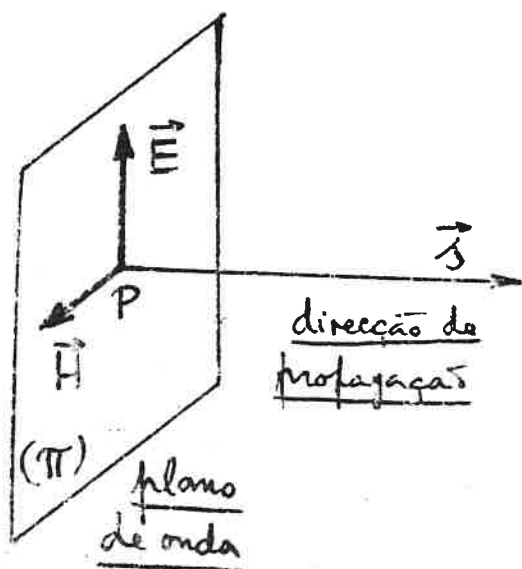
As soluções físicas aceitáveis como campo electromagnético (variável) organizado em onda plana propagando-se

segundo a orientação  $\vec{s}$ , obedecerão portanto às equações (V.3-28) que constituem as pretendidas condições impostas pelas eq. de Maxwell às ondas planas electromagnéticas. É de notar que as eq. (V.3-28) se reduzem efectivamente às duas primeiras, visto que destas se podem extrair directamente as duas últimas, as quais atestam entã apenas a consistência das soluções obtidas.

### V.3.2.3 — Características gerais das ondas planas electromagnéticas

As características gerais das ondas planas electromagnéticas consubstanciam-se obviamente nas eq. (V.3-28) que acabámos de estabelecer. Convém no entanto extrair desde já algumas dessas características gerais, muito simples e da maior importância em todas as aplicações.

Em primeiro lugar, vê-se pelas eq. (V.3-28) que os vectores  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  são perpendiculares entre si e ambos perpendiculares à direcção de propagação  $\vec{s}$ ; os três vectores  $\vec{s}$ ,  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ , por esta ordem, constituem um triedro triortogonal directo. Como a figura indica,  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ , vectores-campo definidos num ponto genérico P, assentam no plano de onda que passa por P, ( $\Pi$ ), em todo o instante. Assim, as ondas planas electromagnéticas são essencialmente transversais.



Em segundo lugar, as eq. (V.3-28) permitem encontrar a relação

existente entre os módulos de  $\vec{E}$  e de  $\vec{H}$ . Tem-se, com efeito, a partir de qualquer das primeiras duas eq. (V.3-28) :

$$(V.3-29) \quad \underline{\sqrt{\epsilon} |\vec{E}| = \sqrt{\mu} |\vec{H}|}$$

É uma relação extremamente importante, que se reflecte, muito directamente, a nível energético, na versão que dela se pode obter quadrando ambos os membros e dividindo por 2:

$$(V.3-30) \quad \underline{\frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 = \frac{1}{2} \mu \vec{H}^2} \quad ;$$

ou seja: as densidades volumicas de energia eléctrica e de energia magnética associadas a uma onda plana electro-magnética são em cada ponto, em cada instante, iguais entre si. (  $\underline{w_e = w_m}$ , Cf. § V.3.1' )

Em terceiro lugar, podem utilizar-se as eq. (V.3-28) para obter uma expressão, que é bastante simples e de interpretação física muito interessante, para o vector de Poynting de uma onda plana electromagnética. Essa expressão vem de resto como uma consequência das características gerais que já foram extraídas. Com efeito, basta usar o facto de que  $\vec{s}$ ,  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  constituem um triedro triortogonal directo, mais as relações (V.3-29) e (V.3-30) para justificar que:

$$\vec{\Sigma} = c \vec{E} \wedge \vec{H} = c |\vec{E}| |\vec{H}| \vec{s} = 2 w_e a \vec{s}$$

(recorrendo a (V.3-24) e a (V.3-8)). Ou seja:

$$(V.3-31) \quad \underline{\vec{\Sigma} = w_{em} a \vec{s}}$$

Então, o vector de Poynting numa onda plana electromagnética tem a orientação (direcção e sentido) da propagação,  $\vec{s}$  e módulo igual ao produto da velocidade de propagação pela densidade volumica da energia electromagnética,  $w_{em}$ .



2ª PARTE — ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

§ 3 — Ondas planas monocromáticas.  
Polarização das ondas pl. monocromáticas

V. 3.1 — De todas as formas que podem assumir as funções  $\Psi(u)$  representativas de uma onda plana propagando-se segundo uma dada orientação  $\vec{s}$  ( $u = \vec{r} \cdot \vec{s} - at$ ), destacam-se com particular interesse as funções periódicas harmónicas. Podemos dar-lhes a expressão

$$(1) \quad \Psi(u) = A \sin(ku - \delta)$$

sendo  $k$  e  $A$  constantes positivas, com toda a generalidade.  $A$  é o valor máximo da componente do campo eléctrico ou magnético que  $\Psi(u)$  representa;  $k$  é uma grandeza tal que o produto  $ku$  se assimila a um ângulo; e  $\delta$  é um ângulo constante. Toda a função da forma (1) representa uma onda plana monocromática, de amplitude  $A$  e fase  $ku - \delta$ ;  $-\delta$ , fase inicial, na origem do triedro de referência (para  $t=0$  e  $\vec{r}=0$ ), é o valor da fase sempre que seja  $u=0$ .

Dada a dependência espaço-temporal da grandeza  $u$ , a periodicidade de  $\Psi(u)$  resulta em cada ponto fixo numa periodicidade temporal, caracterizada por um período,  $T$ , e para cada determinado instante numa periodicidade espacial, caracterizada pelo chamado comprimento de onda,  $\lambda$ . Os dois períodos, espacial e temporal, relacionam-se de maneira extremamente simples.

Com efeito, a variação da fase da onda,  $k\Delta u$ , para um período ( $\Delta t = T \Rightarrow \Delta u = aT$ ) ou para um comprimento de onda marcado ao longo da direcção de propagação ( $\Delta(\vec{r} \cdot \vec{s}) = \lambda \Rightarrow \Delta u = \lambda$ ) deve igualar o mesmo valor  $2\pi$ , que é o período da função seno. Teremos assim

$$(2a) \quad \begin{cases} kaT = 2\pi \\ k\lambda = 2\pi \end{cases}$$

Donde resulta:

$$(3) \quad \boxed{\lambda = aT} \quad \leftrightarrow \quad \boxed{\lambda\nu = a}$$

Os inversos dos períodos são também muito utilizados. Define-se frequência (ou frequência temporal),  $\nu$ , como o número de períodos (temporais) contidos na unidade de tempo

$$(4) \quad \nu = \frac{1}{T}$$

e define-se número de ondas (ou frequência espacial),  $n$ , como o número de comprimentos de onda (períodos espaciais) contidos na unidade de comprimento

$$(5) \quad n = \frac{1}{\lambda}$$

Tem-se evidentemente

$$(6) \quad \nu = na$$

como uma versão de (3).

Também se usam ainda as noções de frequência angular temporal,

$$(7) \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

e de frequência angular espacial, como o produto análogo de  $n$  por  $2\pi$  :  $2\pi n$  que (2b) e (5) permitem identificar com  $k$ :

$$(8) \quad k = 2\pi n = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Fica assim esclarecido o significado físico da constante  $k$ , introduzida em (1).

Tem-se evidentemente

$$(9) \quad \omega = ka$$

como uma outra versão de (3).

A parte variável da fase de  $\psi(u)$  em (1)  $\varphi = ku$  pode pôr-se agora sob as diferentes formas

$$(10a) \quad \varphi = 2\pi \left( \frac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

$$(10b) \quad \varphi = \omega \left( \frac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{a} - t \right)$$

$$(10c) \quad \varphi = k \vec{r} \cdot \vec{s} - \omega t$$

As grandezas  $k$ , escalar positivo, e  $\vec{s}$  orientação da propagação associam-se habitualmente na grandeza

$$(11) \quad \vec{k} = k\vec{s}$$

que se chama vector de onda ; isso dá a (10c) a nova forma

$$(10d) \quad \varphi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$$

que é talvez a maneira mais frequente de representar a parte variável (espacio-temporal) da fase de uma onda de frequência (angular temporal)  $\omega$  e vector de onda  $\vec{k}$ .

**V.3.2** - Vamos agora averiguar o comportamento do campo electro-magnético monocromático, organizado em onda plana, num dado plano de onda.

Tomemos a direcção e sentido de propagação para eixo dos  $zz$ ; com isso, em razão da transversalidade da onda plana os campos só têm componentes segundo os eixos dos  $xx$  e dos  $yy$  e, por exemplo para o campo eléctrico  $\vec{E}$ , teremos

$$(12) \quad \begin{cases} E_x = A_x \sin(\varphi - \delta_x) \\ E_y = A_y \sin(\varphi - \delta_y) \end{cases} \quad (E_z = 0)$$

Aqui,  $\varphi = ku = kz - \omega t$  é o mesmo nas duas componentes,  $E_x$  e  $E_y$ , ambas monocromáticas da mesma frequência. Mas as amplitudes  $A_x$  e  $A_y$  e as fases iniciais  $\delta_x$  e  $\delta_y$  são em geral diferentes e independentes entre si.

Nestas condições, sobre um qualquer plano de onda, a extremidade do vector campo eléctrico descreve ao longo do tempo uma curva necessariamente fechada, em razão da periodicidade, e sem pontos impróprios, por serem limitadas as componentes do campo. Essa curva é o lugar geométrico dos pontos do plano de onda com coordenadas  $E_x$  e  $E_y$  (nos eixos respectivos), dadas por (12) para o valor de  $z$  correspondente a esse plano de onda.

Um tal lugar geométrico obter-se-á eliminando o tempo nas equações (12); mas a eliminação do tempo consegue-se pela eliminação de  $\varphi$ , uma vez que  $z$  é fixo. Desenvolvendo (12), vem

$$(13) \quad \begin{cases} E_x/A_x = \sin \varphi \cos \delta_x - \cos \varphi \sin \delta_x \\ E_y/A_y = \sin \varphi \cos \delta_y - \cos \varphi \sin \delta_y \end{cases}$$

e extraíndo  $\sin \varphi$  e  $\cos \varphi$  destas equações, obtém-se

$$(14) \quad \begin{cases} \sin \varphi \sin(\delta_y - \delta_x) = -\frac{E_x}{A_x} \sin \delta_y + \frac{E_y}{A_y} \sin \delta_x \\ \cos \varphi \sin(\delta_y - \delta_x) = -\frac{E_x}{A_x} \cos \delta_y + \frac{E_y}{A_y} \cos \delta_x \end{cases}$$

Quadrando e somando, resulta finalmente:

$$(15) \quad \frac{E_x^2}{A_x^2} + \frac{E_y^2}{A_y^2} - 2 \frac{E_x E_y}{A_x A_y} \cos \Theta = \sin^2 \Theta$$

com  $\theta = \sigma_y - \sigma_x$ . O lugar geométrico procurado é portanto uma cônica que, por ter discriminante não nulo

$$\left( \frac{1}{A_x^2 A_y^2} (1 - \cos^2 \theta) \geq 0 \right),$$

é especificamente uma elipse, o que está de acordo com as previsões atrás feitas (curva fechada, sem pontos impróprios).

Trata-se de uma elipse inscrita num rectângulo cujos lados são paralelos aos eixos dos  $xx$  e dos  $yy$  medindo respectivamente  $2A_x$  e  $2A_y$ ; a elipse é tangente a este rectângulo nos pontos  $(\pm A_x, \pm A_y \cos \theta)$  e  $(\pm A_x \cos \theta, \pm A_y)$

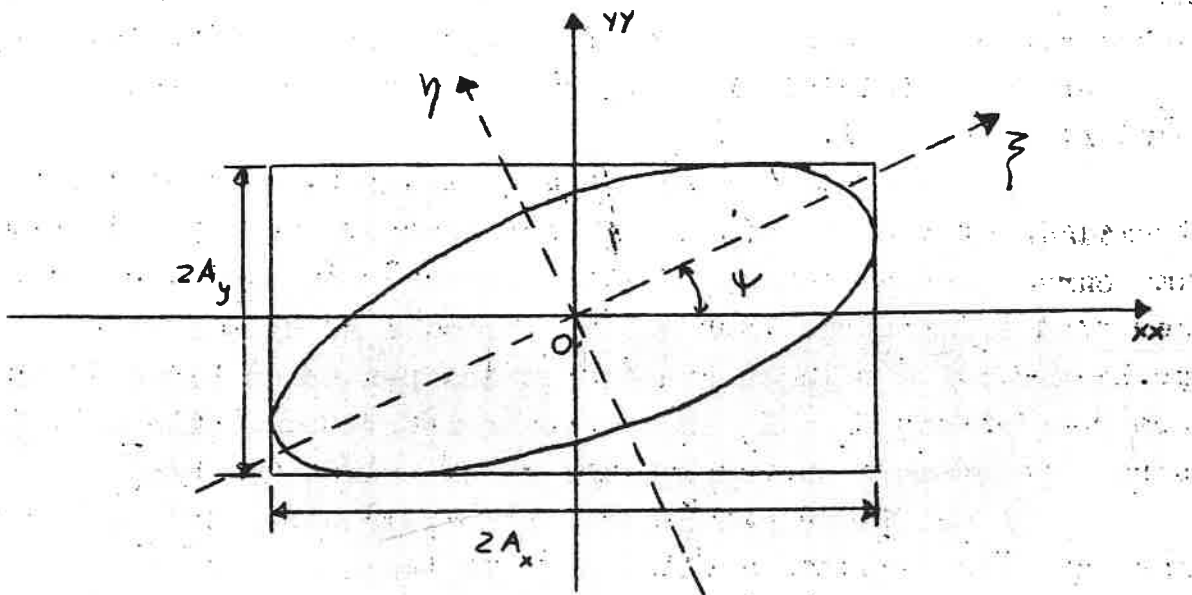


Figura 1

Em geral, os eixos principais da elipse  $O\zeta$  e  $O\eta$  não são paralelos aos eixos de referência (v. figura 1), fazendo o eixo maior  $O\zeta$  um ângulo  $\psi$  com o eixo dos  $xx$ , dado por

$$(16) \quad \operatorname{tg} 2\psi = \frac{2A_x A_y}{A_x^2 - A_y^2} \cos \theta$$

É claro que a excentricidade da elipse também dependerá de  $A_x$ ,  $A_y$  e  $\theta$ .

Todos estes resultados podem ser obtidos a partir de cálculos simples de geometria analítica. Nomeadamente a obtenção do ângulo  $\psi$  faz-se mediante uma rotação dos eixos que leva o sistema de referência a coincidir com os eixos principais da elipse vindo para a equação (15) a forma reduzida

$$(17) \quad \frac{\zeta^2}{A^2} + \frac{\eta^2}{B^2} = 1$$

sendo A e B as medidas dos semi-eixos maior e menor, que do mesmo passo se calculam.

Considerando agora o campo magnético, é fácil concluir que a extremidade do vector  $\vec{H}$  descreve uma curva do mesmo tipo que a descrita por  $\vec{E}$  visto que a partir das relações (12) e da relação  $\vec{H} = \sqrt{\epsilon/\mu} \vec{s} \wedge \vec{E}$  (Cf. o estudo das ondas planas), resulta:

$$(18) \quad \begin{cases} H_x = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_y = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} A_y \sin(\varphi - \delta_y) \\ H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_x = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} A_x \sin(\varphi - \delta_x) \end{cases}$$

Trata-se de uma elipse cujas características se achariam semelhantemente.

São estas conclusões que levam a dizer que a onda plana monocromática é, de uma maneira geral, polarizada elípticamente. O conhecimento da elipse descrita por  $\vec{E}$  (ou por  $\vec{H}$ ) constitui a definição do estado de polarização da onda. Os diferentes tipos especiais de estados de polarização, estão associados com certos valores bem definidos de  $\Theta$  e de  $A_x/A_y$ .

**V.3.3** — Há dois casos de particular interesse:

a) Se  $\Theta = m\pi$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) e com qualquer relação  $A_x/A_y$ , então  $\sin \Theta = 0$  e  $\cos \Theta = (-1)^m$  e a elipse reduz-se a um segmento de recta:

$$(19) \quad E_y = (-1)^m \frac{A_y}{A_x} E_x$$

que coincide com uma diagonal do rectângulo  $[2A_x, 2A_y]$ , a dos quadrantes ímpares ( $m$  par) ou a dos quadrantes pares ( $m$  ímpar) — ver fig. 2a e b, respectivamente.

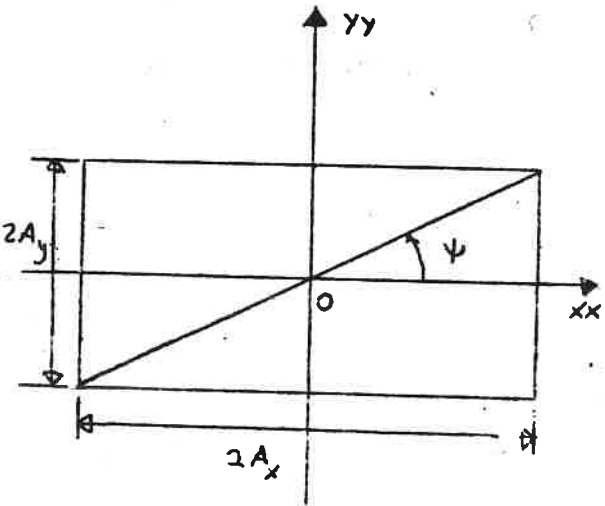


fig 2a

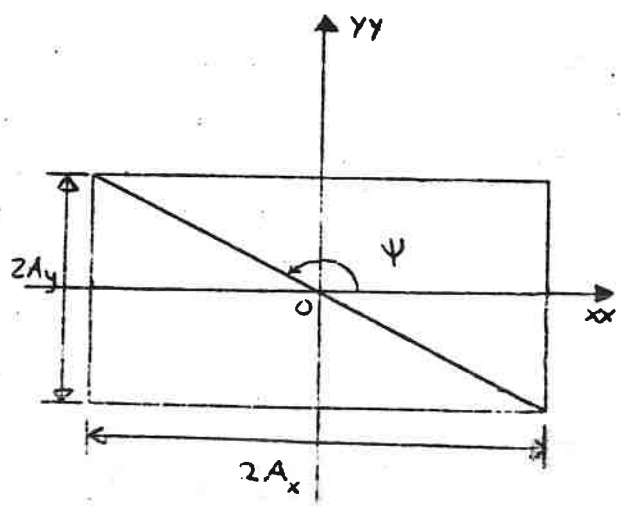


fig 2b

É a degenerescência de uma elipse que se reduz ao seu eixo maior (pode ver-se a partir de (16) que se tem neste caso  $\text{tg } \psi = (-1)^m A_y/A_x$ ) ; a medida do respectivo semi-eixo é  $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ .

Diz-se que a onda é polarizada linearmente ou que apresenta polarização linear. O vector  $\vec{E}$  (e também o vector  $\vec{H}$ ) vibra (com uma amplitude  $A$ ) numa direcção bem definida (inclinada de  $\psi$  sobre o eixo dos  $xx$ ) e pode falar-se de uma completa polarização se quisermos atender ao significado etimológico deste termo.

b) Se  $\Theta = (2k+1) \pi/2$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) e se  $A_x = A_y = A$ , então, com  $\cos \Theta = 0$  e  $\sin \Theta = 1$ , a elipse reduz-se a uma circunferência de raio  $A$  (figura 3). O módulo de  $\vec{E}$  (ou de  $\vec{H}$ ) conserva-se constante no decurso do tempo e roda no plano de onda com velocidade angular  $\omega$ .

Diz-se que a onda é polarizada circularmente ou que apresenta polarização circular.

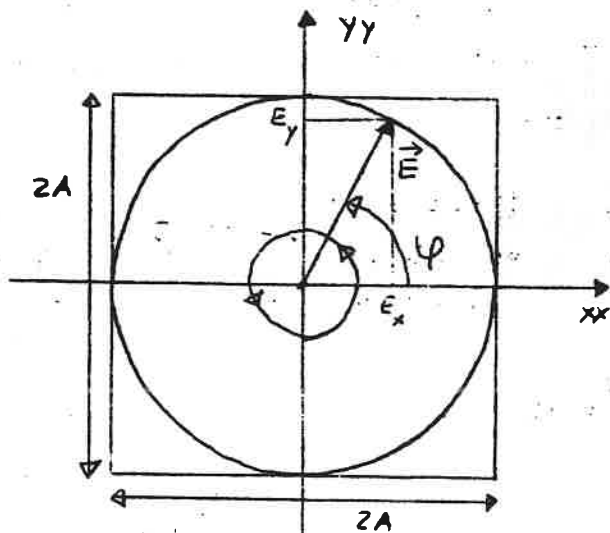


Figura 3

Uma escolha adequada da origem dos tempos permitiria escrever, neste caso, as eq. (12) sob a forma

$$(20) \quad \begin{cases} E_x = A \cos \psi \\ E_y = A \cos(\psi - \delta) \end{cases}$$

com  $\delta = \pm \pi/2$ , uma vez que a fase é definida a menos de um número inteiro de  $2\pi$ . (Na fig.3 é  $\delta = +\pi/2$ ).

**V.3.4** — Para polarização elíptica ou circular, tem em certos casos interesse o sentido em que o vector  $\vec{E}$  descreve a elipse ou a circunferência, que define o estado de polarização da onda, relativamente a um observador colocado em face do plano de onda de modo a receber a onda na sua propagação. Convencionalmente, a polarização diz-se esquerda se a curva é descrita, para esse observador, no sentido directo e diz-se direita no caso contrário. Mostra-se que o vector  $\vec{H}$  descreve a sua própria elipse de polarização no mesmo sentido que o vector  $\vec{E}$  (basta considerar a relação  $\vec{H} = \sqrt{\epsilon/\mu} \vec{s} \wedge \vec{E}$ ).

Com base nas eq. (12) pode ver-se que o sentido de polarização depende essencialmente do valor de  $\theta$ ; se  $\theta$  cai no 1º ou 2º quadrante — polarização esquerda; se  $\theta$  cai no 3º ou 4º quadrante — polarização direita. Para o caso particular da polarização circular, isso comprova-se facilmente sobre a figura 3, com a ajuda das equações (20): circular esquerda, se  $\delta = +\pi/2$ ; circular direita, se  $\delta = -\pi/2$ .

**V. 3.5** — Vejamos agora as relações existentes entre os diferentes tipos de polarização.

Em primeiro lugar, como ressalta do próprio tratamento do assunto atrás desenvolvido, é válida a seguinte afirmação: Sobrepondo duas ondas planas monocromáticas (da mesma frequência) polarizadas linearmente em ângulo recto, podemos obter qualquer um dos tipos de polarização indicados, desde que essas duas ondas tenham amplitudes e diferença de fases convenientes. Nas eq. (12), com efeito, cada uma das componentes  $E_x$  ou  $E_y$  se pode considerar uma onda polarizada linearmente e é da sua sobreposição que surgem os diferentes tipos de estados de polarização.

E é válida também, evidentemente, a afirmação inversa: Toda a onda plana monocromática, com qualquer estado de polarização, se pode decompor em duas ondas planas monocromáticas da mesma frequência e polarizadas linearmente em ângulo recto.

Isto significa que a polarização linear deve tomar-se como básica pois a ela se reduz qualquer tipo de polarização. Mas a polarização circular é igualmente um tipo básico de polarização. Pode, com efeito, mostrar-se que:

Toda a onda plana monocromática, com qualquer estado de polarização, se pode decompor em duas ondas planas monocromáticas da mesma frequência e polarizadas circularmente uma esquerda e outra direita.

**V. 3.6** — Para chegar a este resultado vai-nos ser útil adoptar a representação complexa da função harmónica (1),  $\tilde{\psi} = A e^{i(\varphi - \delta)}$  ( $\varphi = ku$ ), introduzida pela relação

$$(21) \quad \psi = A \cos(\varphi - \delta) = R \left[ A e^{i(\varphi - \delta)} \right] = R(\tilde{\psi})$$

Isto conduz a substituir as eq. (12) por

$$(22) \quad \begin{cases} \tilde{E}_x = A_x e^{i(\varphi - \delta_x)} \\ \tilde{E}_y = A_y e^{i(\varphi - \delta_y)} \end{cases} \quad (\varphi = ku)$$

Vejamos antes de mais que nesta representação complexa, e tendo em atenção as eq. (20), uma onda polarizada circularmente descreve-se por meio de:

$$(23) \quad \begin{cases} \tilde{E}_x = A e^{i\varphi} \\ \tilde{E}_y = A e^{i(\varphi - \delta)} \end{cases} \quad (\text{com } \delta = \pm \pi/2)$$

Donde resulta que as componentes (complexas) de uma tal onda satisfazem a:

$$(24a) \quad \tilde{E}_x - e^{i\delta} \tilde{E}_y = 0$$

ao mesmo tempo que verificam

$$(24b) \quad \tilde{E}_x + e^{i\delta} \tilde{E}_y \neq 0$$

com  $\delta = \pm \pi/2$ . Então a polarização circular caracterizar-se-á por

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_x - i\tilde{E}_y = 0 \\ \tilde{E}_x + i\tilde{E}_y \neq 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{quando seja } \underline{\text{circular}} \\ \underline{\text{esquerda}} \quad (\delta = +\pi/2) \end{array}$$

e por

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_x + i\tilde{E}_y = 0 \\ \tilde{E}_x - i\tilde{E}_y \neq 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{quando seja } \underline{\text{circular}} \\ \underline{\text{direita}} \quad (\delta = -\pi/2) \end{array}$$

**V. 3.7.** Posto isto, consideremos uma onda plana  $\vec{E}$  monocromática com um qualquer estado de polarização, (propagando-se segundo o eixo dos  $z$ , como temos vindo a considerar) e sejam  $\tilde{E}_x$  e  $\tilde{E}_y$  as suas componentes dadas de uma maneira geral por (22) em representação complexa. Para simplificar a escrita omitiremos porém, sistematicamente, o símbolo "til" ( $\sim$ ) sobre as grandezas complexas  $\tilde{E}_x, \tilde{E}_y$ , a partir daqui.

Ponhamos

$$(27) \quad E_1 = \frac{E_x + iE_y}{2} \quad ; \quad E_2 = \frac{E_x - iE_y}{2}$$

e "construamos" duas ondas que designaremos por  $\vec{E}^{(e)}$  e  $\vec{E}^{(d)}$  com as seguintes componentes

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_x^{(e)} = E_1 \\ E_y^{(e)} = -iE_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} E_x^{(d)} = E_2 \\ E_y^{(d)} = iE_2 \end{array} \right.$$



Verifiquemos em primeiro lugar que as duas ondas assim construídas reconstituem, quando sobrepostas, a onda inicialmente dada:

$$(29) \quad \vec{E} = \vec{E}^{(e)} + \vec{E}^{(d)}$$

Com efeito, de (28) e (27) resulta:

$$\begin{cases} E_x^{(e)} + E_x^{(d)} = E_1 + E_2 = E_x \\ E_y^{(e)} + E_y^{(d)} = -iE_1 + iE_2 = E_y \end{cases}$$

Verifiquemos em segundo lugar que a onda  $\vec{E}^{(e)}$  é circular esquerda, de harmonia com (25), enquanto  $\vec{E}^{(d)}$  é circular direita, de harmonia com (26). De facto, de (28) resulta

$$(30) \quad \begin{cases} E_x^{(e)} - iE_y^{(e)} = 0 \\ E_x^{(e)} + iE_y^{(e)} \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} E_x^{(d)} + iE_y^{(d)} = 0 \\ E_x^{(d)} - iE_y^{(d)} \neq 0 \end{cases}$$

devendo notar-se que as condições da 2ª linha só não se cumprem quando a onda inicialmente dada fôr já polarizada circularmente direita ou esquerda, respectivamente (recorra a (27)).

E as verificações (29) e (30) provam o teorema a que queríamos chegar. Deve observar-se que as amplitudes das duas ondas circulares em que  $\vec{E}$  se decompõe são em geral diferentes.

[ Tratamento alternativo dos assuntos dos §§ V.3.6 - 7 ]

Consideremos uma onda plana monocromática, propagando-se numa dada orientação  $\vec{s}$  (com um certo vector de onda  $\vec{k}$ ). As direcções dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  situam-se obviamente sobre planos perpendiculares a  $\vec{s}$  (ou a  $\vec{k}$ ), de modo que se pode adoptar uma base de dois vectores unitários  $\vec{\xi}_j$  ( $j=1,2$ ) perpendiculares entre si ( $\vec{\xi}_1 \cdot \vec{\xi}_2 = 0$ ) e a  $\vec{k}$  ( $\vec{\xi}_j \cdot \vec{k} = 0$ ), para a representação dos campos. Para o campo eléctrico, por exemplo, a composição mais geral, representando uma onda monocromática nas referidas condições, e utilizando representação complexa, é a seguinte

$$(A) \quad \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad , \quad \text{com} \quad \begin{cases} \vec{E}_1 = \vec{\xi}_1 E_1 e^{i\varphi} \\ \vec{E}_2 = \vec{\xi}_2 E_2 e^{i\varphi} \end{cases}$$

em que  $\varphi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$  e  $E_1$  e  $E_2$  são amplitudes complexas (do tipo  $A_x e^{-i\delta_x}$  ,  $A_y e^{-i\delta_y}$  ). Pode ainda escrever-se

$$(B) \quad \vec{E} = (\vec{\xi}_1 E_1 + \vec{\xi}_2 E_2) e^{i\varphi}$$

Nesta representação caracterizam-se os diferentes tipos de polarização da seguinte maneira:

- (1)  $E_1$  e  $E_2$  com fases não iguais nem opostas, ou com módulos diferentes quando as fases difiram de  $\pi/2$  — polarização elíptica.
- (2)  $E_1$  e  $E_2$  com a mesma fase ou em oposição de fase — polarização linear.
- (3)  $E_1$  e  $E_2$  com o mesmo módulo e diferença de fase de  $\pi/2$  — polarização circular.

Neste último caso pode dar-se a (B) um aspecto diferente:

$$( |E_1| = |E_2| = E_0 \quad ; \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \pm \pi/2 )$$

$$(C) \quad \vec{E} = E_0 ( \vec{\xi}_1 \pm i \vec{\xi}_2 ) e^{i\varphi}$$

e tem-se a seguinte correspondência

$$(D) \quad \begin{cases} \vec{\xi}_1 + i \vec{\xi}_2 & \text{circular esquerda} \\ \vec{\xi}_1 - i \vec{\xi}_2 & \text{circular direita} \end{cases}$$



Para um observador que recebe a onda.

Estas duas ondas polarizadas circularmente formam por sua vez uma base igualmente aceitável para a descrição do estado geral de polarização.

Introduzamos, com efeito, em vez da base  $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2$ , esta outra base de dois vectores complexos.

$$(E) \quad \vec{\xi}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} ( \vec{\xi}_1 \pm i \vec{\xi}_2 )$$

com as seguintes propriedades evidentes:

$$(F) \quad \begin{cases} \vec{\xi}_{+}^* \cdot \vec{\xi}_{+} = 1 \\ \vec{\xi}_{+}^* \cdot \vec{\xi}_{-} = 0 \\ \vec{\xi}_{-}^* \cdot \vec{k} = 0 \end{cases}$$

Então, a representação (B) no caso geral assume a forma

$$(G) \quad \vec{E} = ( E_{+} \vec{\xi}_{+} + E_{-} \vec{\xi}_{-} ) e^{i\varphi}$$

com

$$E_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} ( E_1 \mp i E_2 )$$

Pode agora sugerir-se, como exercício, a busca das condições que devem satisfazer  $E_{+}$  e  $E_{-}$  para uma polarização elíptica de cara-

cterísticas pré-fixadas, ou mais simplesmente, para uma polarização linear, de dada direcção. ]

V. 3.8 — Em princípio, uma onda plana monocromática (propagando-se num meio homogéneo indefinido, como se exige no âmbito desse conceito-limite) mantém inalterável o estado de polarização que a caracteriza. Em face porém de descontinuidades do meio em que se propaga, em face de obstáculos, ou nas diversas interacções do campo electromagnético com a matéria, são de esperar comportamentos diferentes das diferentes componentes do campo no plano de onda, dada a distribuição em geral assimétrica de tais causas de acidentes na propagação da onda.

Assim, a modificação do estado de polarização de uma onda plana monocromática constitue um aspecto muito relevante na interpretação dos fenómenos de reflexão-refracção, de difracção, de difusão da luz e bem assim dos processos semelhantes ocorrendo na propagação de quaisquer outras perturbações electromagnéticas.

Mas não fica por aqui a importância do estudo da polarização das ondas.

A birrefringência da luz observada nos cristais e, de um modo geral, os processos ligados à propagação dos campos electromagnéticos nos meios anisótropos revelam também efeitos de polarização proeminentes, com múltiplas aplicações técnicas.

Não se deve ainda deixar de referir que certos meios macroscopicamente homogéneos e isótropos, possuindo todavia determinadas propriedades especiais de anisotropia à escala microscópica (justificadas por típicas constituições moleculares), produzem espontâneamente uma importante modificação do estado de polarização das ondas que neles progridem (rotação do plano de polarização pelos meios "òpticamente activos").

Uma rotação do plano de polarização pode observar-se de resto em certos meios tão-sòmente pela influência de um campo magnético estático (efeito Faraday) e, de uma maneira mais geral, modificações essenciais do estado de polarização acompanham a acção de um campo magnético sobre as ondas dimanadas dos sistemas atómicos (efeito de Zeeman).

E diversos outros exemplos podem citar-se.

# CAPÍTULO V — CAMPO ELECTROMAGNÉTICO VARIÁVEL

## APÊNDICE II — INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL

### § 1. PRIMEIRA ETAPA DE INTEGRAÇÃO

A primeira etapa de integração consiste em encontrar funções potenciais das quais possamos derivar os campos. Este procedimento é-nos sugerido pela existência de um potencial-escalar e de um potencial-vector nos campos estáticos e estacionários a partir dos quais se calculam os vectores  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ .

Partimos das equações de Maxwell, na sua forma mais geral

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} (\vec{E} - \vec{E}^a) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \quad \text{div } \vec{D} = \rho \end{array} \right. \quad (1)$$

que fazemos como sempre acompanhar das equações materiais de ligação dos campos às induções:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (2)$$

Considerando a equação  $\text{div } \vec{B} = 0$ , podemos imediatamente admitir que  $\vec{B}$  deve ser o rotacional de um campo vectorial,  $\vec{A}(x, y, z, t)$ , a determinar:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (3)$$

Introduzindo então (3) na 1ª eq. de (1) e tendo em conta que os operadores rot e  $\partial/\partial t$  comutam entre si, vem:

$$\text{rot} \left( \vec{E} - \vec{E}^a + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad ;$$

e esta equação impõe que o vector operando do rot se identifique com o gradiente de um escalar,  $-V(x, y, z, t)$ , a determinar:

$$\vec{E} - \vec{E}^a + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } V \quad ;$$

ou seja:

$$\vec{E} = \vec{E}^a - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } V \quad (4)$$

$\vec{A}$  e  $V$  são os potenciais electromagnéticos — os potenciais de que derivam os vectores  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  do campo electromagnético pelas operações (4) e (3).

(4) —  $\vec{A}$  é o potencial-vector e  $V$  (ou  $\phi$ ) é o potencial-escalar

Os potenciais electromagnéticos não são únicos; na realidade há uma infinidade de pares <sup>de</sup> potenciais  $(\vec{A}; V)$  capazes de fornecer os vectores do campo. Mostra-se facilmente, por substituição em (3) - (4), que, se o par de potenciais  $(\vec{A}; V)$  constitui uma solução, então também é solução qualquer par  $(\vec{A}^{\dagger}; V^{\dagger})$  definido por:

$$\begin{cases} \vec{A}^{\dagger} = \vec{A} - \text{grad } \Phi \\ V^{\dagger} = V + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{cases} \quad (5)$$

em que  $\Phi(x, y, z, t)$  é uma função escalar arbitrária do espaço e do tempo.

As relações (5) chamam-se relações de invariância electromagnética, porque ao transformarmos os potenciais de  $(\vec{A}; V)$  para  $(\vec{A}^{\dagger}; V^{\dagger})$  segundo (5), os campos ficam invariantes.

Note-se desde já que, do campo vectorial  $\vec{A}(x, y, z, t)$ , só está fixado o seu rotacional que deve igualar  $\vec{B}$ , por (3); entretanto a sua divergência fica ainda inteiramente livre. (Recorde-se o teorema de Helmholtz).

## § 2. SEGUNDA ETAPE DE INTEGRAÇÃO

A segunda etape de integração consiste em encontrar os potenciais  $\vec{A}$  e  $V$  que satisfaçam, mediante (3) e (4), às equações de Maxwell. Visto que, por (3) e (4), os potenciais  $\vec{A}$  e  $V$  satisfazem já por hipótese às equações (1) da 1ª linha, basta agora utilizar as equações (1) da 2ª linha, acompanhadas das equações de ligação (2). Combinando umas e outras, obtém-se justamente

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{B} - \frac{\epsilon_0 \mu_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} - \vec{E}^a) = \frac{\mu_0}{c} \left( \vec{J} + c \text{ rot } \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}^a}{\partial t} \right) \\ \text{div} (\vec{E} - \vec{E}^a) = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho - \text{div } \vec{P} - \epsilon_0 \text{div } \vec{E}^a) \end{cases} \quad (6)$$

com certos artifícios de cálculo evidentes. Pondo

$$\begin{cases} \vec{J}^* = \vec{J} + c \text{ rot } \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}^a}{\partial t} \\ \rho^* = \rho - \text{div } \vec{P} - \epsilon_0 \text{div } \vec{E}^a \end{cases} \quad (7)$$

o sistema (6) escreve-se:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{B} - \frac{\epsilon_0 \mu_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} - \vec{E}^a) = \frac{\mu_0}{c} \vec{J}^* \\ \text{div} (\vec{E} - \vec{E}^a) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho^* \end{cases} \quad (6')$$

Introduzindo em (6') as expressões (3) e (4) — ditas “relações de Maxwell” — obtêm-se, depois de alguma manipulação, o seguinte sistema de equações diferenciais de 2ª ordem em  $\vec{A}$  e  $V$

$$(8) \quad \begin{cases} \text{lap } V + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho^* \\ \text{lap } \vec{A} - \frac{\epsilon_0 \mu_0}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \left( \text{div } \vec{A} + \frac{\epsilon_0 \mu_0}{c} \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\frac{\mu_0}{c} \vec{J}^* \end{cases}$$

A integração deste sistema de equações diferenciais permitirá levar a cabo o problema de achar os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  que satisfazem as equações de Maxwell em dada situação electromagnética.

É esta evidentemente a altura de aproveitar o grau de liberdade que consiste em fixar o valor de  $\text{div } \vec{A}$  que, com efeito, é completamente arbitrário — a fim de simplificar o sistema (8) e na medida do possível encontrar soluções.

Uma das mais correntes escolhas do valor de  $\text{div } \vec{A}$  é a que se traduz pela chamada condição de Lorentz

$$(9) \quad \text{div } \vec{A} + \frac{\epsilon_0 \mu_0}{c} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

conduzindo aos potenciais electromagnéticos de Lorentz, de que nos vamos ocupar especialmente, pelo seu grande interesse.

### § 3. POTENCIAIS RETARDADOS DE LORENTZ

Mediante a adopção da condição de Lorentz, (9), o sistema (8) transforma-se em

$$(10) \quad \begin{cases} \text{lap } V - \frac{\epsilon_0 \mu_0}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho^* \\ \text{lap } \vec{A} - \frac{\epsilon_0 \mu_0}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mu_0}{c} \vec{J}^* \end{cases}$$

São de realçar duas características evidentes no sistema (10), as quais conferem uma especial importância ao acerto da escolha (9): (1<sup>a</sup>) - Temos equações separadas, uma em  $V$ , outra em  $\vec{A}$ , ou melhor: uma em  $V$ , e uma em cada uma das componentes cartesianas,  $A_x, A_y, A_z$ , de  $\vec{A}$ . (2<sup>a</sup>) - Essas quatro equações são todas formalmente idênticas. Está portanto muito facilitada a integração do sistema (10). Ele pode resumir-se, escrevendo:

$$(10') \quad \square_0 \left\{ \begin{array}{c} V \\ \vec{A} \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{\epsilon_0} \rho^* \\ \mu_0/c \vec{J}^* \end{array} \right\}$$

em que  $\square_0$  representa o operador de d'Alembert ou d'Alembertiano, referido ao vácuo:

$$(11) \quad \square_0 \equiv \text{lap} - \frac{\epsilon_0 \mu_0}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \text{lap} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

sendo  $a_0 = c/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas no vácuo.

Pode mostrar-se que o sistema (10) admite como solução as funções

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} V(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho^*(Q, t - \frac{r_{PQ}}{a_0})}{r_{PQ}} dv \\ \vec{A}(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_V \frac{\vec{J}^*(Q, t - \frac{r_{PQ}}{a_0})}{r_{PQ}} dv \end{array} \right.$$

que constituem os potenciais retardados de Lorentz. Ve-se, com efeito, que, para o cálculo dos potenciais  $\vec{A}$  e  $V$  num ponto  $P$  e no instante  $t$ , os elementos potenciadores  $\rho^* dv$  e  $\vec{J}^* dv$  localizados no ponto  $Q$ , à distância  $r_{PQ}$ , contribuem (segundo uma lei de potenciação, simples em  $1/r_{PQ}$ ) com os seus valores no próprio instante  $t$ , mas sim como se os valores, no instante anterior  $\bar{t} = t - r_{PQ}/a_0$ ; quer dizer

contribuem não instantaneamente mas sim retardadamente e, de um modo preciso, com um atraso  $r_{PQ}/a_0$ .

Tudo se passa como se as acções electromagnéticas, que são produzidas no ponto P pelas cargas e correntes (totais) localizadas em Q, demorassem o tempo  $r_{PQ}/a_0$  a transmitir-se desde Q (ponto potenciante) até P (ponto potenciado), i. e., o tempo necessário para ser percorrida a distância que separa P de Q,  $r_{PQ}$ , em movimento rectilíneo e uniforme, com a velocidade  $a_0$ .

Existe assim uma forte sugestão para que seja atribuído a estes potenciais um significado físico conforme à ideia de propagação das acções a distância, não-instantâneas mas sim com uma velocidade finita, precisamente a velocidade de propagação das ondas electromagnéticas no vácuo.

Não devemos no entanto esquecer que os potenciais electromagnéticos, no quadro da teoria de Maxwell, não são grandezas físicas, mas apenas instrumentos matemáticos úteis no cálculo dos campos; e há, como vimos, a possibilidade de escolhê-los de entre muitas soluções todas igualmente aceitáveis (dando o mesmo campo electromagnético), sem a necessidade de impôr a essa escolha qualquer critério físico.

Notemos que, sob a mesma condição de Lorentz, (9), se pode obter uma outra solução, os potenciais avançados, mudando em (12)  $a_0$  para  $-a_0$  (as equações (10) não dependem senão de  $a_0^2$ ). Na mesma perspectiva de uma conformidade à ideia de propagação não-instantâneas das acções a distância, estes potenciais violariam o princípio da causalidade (com um efeito anterior à causa), o que temos por fisicamente inaceitável — embora tais potenciais não deixem de fornecer o campo correcto.



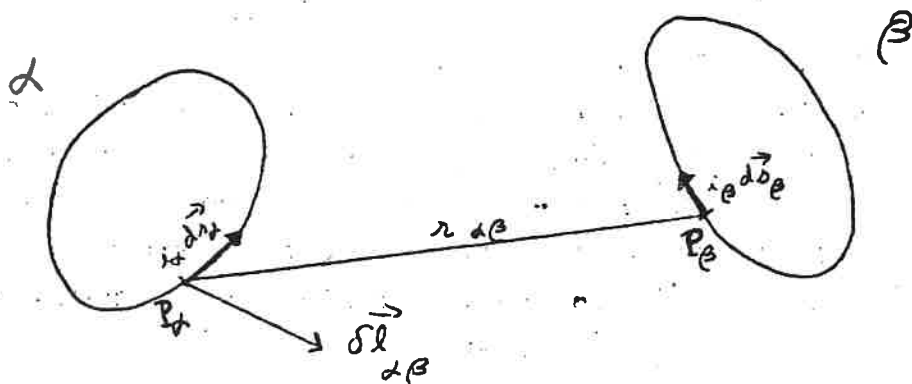
ENERGIA MAGNÉTICA NO CAMPO ESTACIONÁRIOA. Trabalho das forças electrodinâmicas no deslocamento virtual de um sistema de condutores lineares

Seja um sistema de  $n$  condutores lineares, em posições fixas e percorridos por correntes estacionárias  $i_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, n$ ). Imaginemos uma modificação virtual do sistema, com deslocamentos infinitesimais arbitrários dos  $n$  condutores, mas admitindo, como hipótese conceptual, que as intensidades dos  $n$  condutores permanecem constantes. Para simplificar consideremos apenas deslocamentos em que os condutores não se deformam.

Vamos calcular nestas condições o trabalho global das forças electrodinâmicas em jogo no sistema, ao longo de uma tal modificação virtual.

Começaremos por fazer notar que em qualquer deslocamento do sistema como um todo — translação ou rotação — as forças interiores, globalmente, não realizam trabalho. Assim, já se nos ocuparemos dos deslocamentos dos condutores nos campos uns dos outros.

Tomemos dois dos condutores,  $\alpha$  e  $\beta$ , e sejam  $i_\alpha d\vec{s}_\alpha$  e  $i_\beta d\vec{s}_\beta$  dois quaisquer elementos de corrente, respectivamente (v. figura). Designemos por  $\delta \vec{l}_{\alpha\beta}$  o deslocamento infinitesimal



relativo dos elementos de corrente  $i_\alpha d\vec{s}_\alpha$  e  $i_\beta d\vec{s}_\beta$ . Se fôr  $d\vec{B}_\beta$  a indução elementar produzida em  $P_\alpha$  pelo elemento de circuito  $i_\beta d\vec{s}_\beta$ , então a força elementar  $d\vec{F}_\alpha^{(\beta)}$  com que esse campo actua sobre  $i_\alpha d\vec{s}_\alpha$  é dada por

$$\vec{d}^2 f_{\alpha}^{(\beta)} = \frac{i_{\alpha}}{c} \vec{ds}_{\alpha} \wedge \vec{dB}_{\beta}$$

e, em consequência, o trabalho virtual realizado no deslocamento infinitesimal relativo  $\vec{\delta l}_{\alpha\beta}$  (pela força  $\vec{d}^2 f_{\alpha}^{(\beta)}$ ) pode escrever-se:

$$\frac{i_{\alpha}}{c} \vec{ds}_{\alpha} \wedge \vec{dB}_{\beta} \cdot \vec{\delta l}_{\alpha\beta}$$

A partir desta expressão passaremos, em duas etapas, ao trabalho  $\delta \tau_{\alpha\beta}$  realizado no deslocamento relativo dos dois circuitos, supondo que se considera sempre fixo o circuito  $\beta$ . Numa primeira etapa, integramos sobre todo o circuito  $\alpha$ , o que dá

$$\frac{i_{\alpha}}{c} \oint_{(\alpha)} \vec{ds}_{\alpha} \wedge \vec{dB}_{\beta} \cdot \vec{\delta l}_{\alpha\beta} = \frac{i_{\alpha}}{c} \delta \Phi_{\alpha}^{(\beta)}$$

(V-12")

se recorrermos à expressão ~~de~~ do teorema de corte do fluxo e representarmos por  $\Phi_{\alpha}^{(\beta)}$  o fluxo, através do circuito  $\alpha$ , da indução produzida pelo elemento de circuito  $i_{\beta} \vec{ds}_{\beta}$  ( $\vec{dB}_{\beta}$ ). Em segunda etapa, somamos para todo o circuito  $\beta$ , vindo

$$(A.1) \quad \delta \tau_{\alpha\beta} = \frac{i_{\alpha}}{c} \delta \Phi_{\alpha}^{(\beta)}$$

em que  $\Phi_{\alpha}^{(\beta)}$  é o fluxo, através de  $\alpha$ , da indução  $\vec{B}_{\beta}$  produzida por todo o circuito  $\beta$ .

A expressão (A.1) representa pois o trabalho de deslocamento do circuito  $\alpha$ , supondo que se fixa o circuito  $\beta$ ; como se trata de examinar apenas o efeito do deslocamento relativo, nós podemos indiferentemente supor fixado o circuito  $\alpha$  e procurar a expressão que um cálculo análogo daria para o trabalho de deslocamento do circuito  $\beta$ ; é evidente que obteríamos

$$(A.1') \quad \delta \tau_{\beta\alpha} = \frac{i_{\beta}}{c} \delta \Phi_{\beta}^{(\alpha)}$$

sendo agora  $\Phi_{\beta}^{(\alpha)}$  o fluxo, através de  $\beta$ , da indução  $\vec{B}_{\alpha}$  produzida por todo o circuito  $\alpha$ . As expressões (A.1) e (A.1') traduzem porém o mesmo trabalho realizado no deslocamento relativo dos dois circuitos, que se pode em consequência escrever sob a seguinte

forma simétrica:

$$(A.2) \quad \delta Z_{\alpha\beta} = \delta Z_{\beta\alpha} = \frac{1}{2c} (i_{\alpha} \delta \Phi_{\alpha}^{(\beta)} + i_{\beta} \delta \Phi_{\beta}^{(\alpha)})$$

Para obter em seguida o trabalho virtual  $\delta Z$ , no deslocamento relativo dos  $n$  circuitos, temos de somar, a partir de (A.2), para todos os pares  $(\alpha, \beta)$ , mas com  $\alpha < \beta$ , para evitar repetições. Vem

$$(A.3) \quad \delta Z = \frac{1}{2c} \sum_{\alpha < \beta}^{\alpha, \beta} (i_{\alpha} \delta \Phi_{\alpha}^{(\beta)} + i_{\beta} \delta \Phi_{\beta}^{(\alpha)})$$

expressão esta que é equivalente a

$$(A.3') \quad \delta Z = \frac{1}{2c} \sum_{\alpha \neq \beta}^{\alpha, \beta} i_{\alpha} \delta \Phi_{\alpha}^{(\beta)}$$

que por sua vez admite a transformação

$$(A.4) \quad \delta Z = \frac{1}{2c} \sum_{\alpha=1}^m i_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha}^{\alpha, \beta} \delta \Phi_{\alpha}^{(\beta)} = \\ = \frac{1}{2c} \sum_{\alpha=1}^m i_{\alpha} \delta \Phi_{\alpha}'$$

em que  $\Phi_{\alpha}'$  é o fluxo, através do condutor  $\alpha$ , da indução produzida por todos os condutores, com excepção do próprio condutor  $\alpha$ . Porém, se repararmos que qualquer fluxo próprio, como  $\Phi_{\alpha}^{(\alpha)}$ , não varia na modificação virtual que estamos a imaginar (conservando-se as intensidades constantes) resulta que  $\delta \Phi_{\alpha}' = \delta \Phi_{\alpha}$  (sendo  $\Phi_{\alpha} = \Phi_{\alpha}' + \Phi_{\alpha}^{(\alpha)}$  o fluxo total através do condutor  $\alpha$ ); e (A.4) pode portanto escrever-se

$$(A.5) \quad \delta Z = \frac{1}{2c} \sum_{\alpha=1}^m i_{\alpha} \delta \Phi_{\alpha}$$

Recorrendo de novo à hipótese conceptual de se conservarem constantes as intensidades, obtém-se finalmente, a partir de (A.5) o importante resultado:

$$(A.6) \quad \delta Z = \delta \left( \frac{1}{2c} \sum_{\alpha=1}^m i_{\alpha} \Phi_{\alpha} \right)$$

Assim, numa modificação virtual do sistema de condutores, processando-se por hipótese a intensidades constantes, o trabalho virtual global das forças electrodinâmicas em jogo iguala a variação (diferencial total) de uma função das correntes e dos fluxos, entre o 'estado' inicial e o 'estado' final do sistema. (Uma vez que estão fixadas as correntes, o 'estado' do sistema é determinado pela sua configuração geométrica, da qual dependem os fluxos).

B. Potencial electrodinâmico de um sistema de condutores lineares

O resultado precedente sugere a definição de um potencial electrodinâmico (Neumann)

$$(B.1) \quad \Psi = - \frac{1}{2c} \sum_{\alpha=1}^n i_{\alpha} \Phi_{\alpha}$$

a partir do qual se podem calcular as forças generalizadas de interacção entre os circuitos do sistema, como gradientes negativos de  $\Psi$ . (A.6) reescreve-se sob a forma

$$(B.2) \quad \delta Z + \delta_i \Psi = 0$$

em que  $\delta_i$  representa variação a intensidades constantes.

Poderia pensar-se que  $\Psi$  representa a energia magnética do sistema, em conformidade com o princípio de conservação da energia que (B.2) parece traduzir. Nessa ordem de ideias, deveria atribuir-se à energia magnética o carácter de uma energia potencial, à semelhança do que se passa na Electrostática.

Na realidade porém não é assim. Com efeito,  $\Psi$  não pode traduzir o trabalho total que deveria dispender-se no transporte dos diferentes circuitos a partir de posições infinitamente afastadas (situação a que seria natural fazer corresponder energia magnética nula) até às suas posições actuais no sistema. E a razão disto reside em que uma tal operação, sendo embora idealizada, deve no entanto ser viável fisicamente. Ora, o transporte de um circuito no campo de outros circuitos é necessariamente acompanhado de variações de fluxo (corte das linhas de força do campo) e isso provoca, como se sabe, fenómenos de indução electromagnética. As correntes induzidas que assim se geram nos dife-

rentes circuitos fazem que o transporte não decorra naturalmente a intensidades constantes; e este facto impede que uma modificação real do sistema, por si só, se possa processar nos moldes da modificação virtual imaginada no parágrafo A. Não é lícito então utilizar (A.6) ou (B.1,2) por não se manterem constantes as intensidades das correntes, como se supôs no estabelecimento destas relações. É pois de abandonar a ideia de que  $\Psi$  representa a energia magnética de um sistema de condutores lineares.

C. Energia magnética de um sistema de condutores lineares

Podemos no entanto idealizar uma modificação real do sistema, acompanhada de um processo artificial de lhe manter as intensidades constantes. Basta para isso imaginar os circuitos ligados a fontes exteriores expressamente destinadas a compensar instantâneamente as forças electromotrices de indução que se geram pelos deslocamentos dos condutores nos campos uns dos outros. Entram assim em jogo no balanço energético as fontes exteriores, e (B.2) não pode por isso representar, de modo nenhum, o princípio de conservação da energia. Mas, porque se reestabeleceu deste modo a condição de intensidades constantes, pode aplicar-se (A.6) para o cálculo do trabalho das forças electrodinâmicas no sistema de circuitos.

Suponhamos que a modificação do sistema assim idealizada se processa no intervalo de tempo  $dt$  e designemos por  $d\Phi_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, n$ ) as variações de fluxo da indução magnética nos diferentes circuitos. Pela lei de Faraday, geram-se nos circuitos forças electromotrices induzidas, que designaremos por  $\Delta \varepsilon_\alpha^{\text{ind}}$  ( $\alpha = 1, \dots, n$ ) e que valem:

$$(C.1) \quad \Delta \varepsilon_\alpha^{\text{ind}} = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi_\alpha}{dt}$$

Para manter as intensidades constantes, como se pretende, devem as fontes exteriores idealizadas ser capazes de criar artificialmente, a cada instante, nos respectivos circuitos, forças electromotrices aplicadas  $\Delta \varepsilon_\alpha^{\text{apl}}$  satisfazendo ao requisito

$$(C.2) \quad \Delta \varepsilon_\alpha^{\text{apl}} = - \Delta \varepsilon_\alpha^{\text{ind}}$$

de modo a serem instantâneamente eliminadas as correntes induzidas que surgem a cada instante. As forças electromotrices resultantes são, com efeito, constantemente iguais às respectivas forças electromotrices prè-existentes:

$$(C.3) \quad \varepsilon_{\alpha} + \Delta \varepsilon_{\alpha}^{\text{ind}} + \Delta \varepsilon_{\alpha}^{\text{apl}} \equiv \varepsilon_{\alpha}$$

e, em consequência, as intensidades resultantes são iguais às intensidades prè-existentes, constantemente.

Nestas condições, o sistema recebe das fontes exteriores, no intervalo de tempo  $dt$ , a energia correspondente ao trabalho dos campos aplicados responsáveis pela referida compensação, a saber

$$(C.4) \quad dZ^{\text{apl}} = dt \sum_{\alpha=1}^m i_{\alpha} \Delta \varepsilon_{\alpha}^{\text{apl}}$$

que, se utilizarmos (C.1) e (C.2), se transforma em

$$(C.5) \quad dZ^{\text{apl}} = \frac{1}{c} \sum_{\alpha=1}^m i_{\alpha} d\Phi_{\alpha} ;$$

e, por se tratar de um processo efectivamente a correntes constantes, pode ter-se por fim

$$(C.6) \quad dZ^{\text{apl}} = d_1 \left( \frac{1}{c} \sum_{\alpha=1}^m i_{\alpha} \Phi_{\alpha} \right) ,$$

em que  $d_1$  indica diferenciação a intensidades constantes.

Ora, a esta energia recebida pelo sistema das fontes exteriores compensadoras deve subtrair-se o trabalho entretanto realizado pelas forças electrodinâmicas, que constitui uma energia recolhida no exterior; como resultado desta subtracção obtém-se a energia efectivamente armazenada no sistema.

Deve notar-se que o trabalho dos campos aplicados responsáveis pelas forças electromotrices prè-existentes (e que se mantêm constantes, v. (C.3)), bem como o calor de Joule libertado no sistema, são energias que podem pôr-se à margem do balanço energético, na medida em que se compensam mutuamente. Com

efeito, no regime estacionário artificialmente recriado pela imposição conseguida de permanecerem constantes as intensidades, cumpre-se como é sabido que o dispêndio de energia sob a forma de calor de Joule é exactamente coberto pelo trabalho dos campos aplicados (cf. Corrente eléctrica, Cap. III, § 9E.)

O trabalho realizado pelas forças electrodinâmicas no sistema vale, por (A.6) :

$$(C.7) \quad d\tau^{\text{elect.}} = d_i \left( \frac{1}{2c} \sum_{\alpha=1}^n i_{\alpha} \Phi_{\alpha} \right)$$

A energia armazenada no sistema no decurso da modificação real processada nas referidas condições obtém-se então subtraindo (C.7) de (C.6) :

$$dW = d\tau^{\text{apl}} - d\tau^{\text{elect.}}$$

ou seja:

$$(C.8) \quad dW = d_i \left( \frac{1}{2c} \sum_{\alpha=1}^n i_{\alpha} \Phi_{\alpha} \right)$$

Mas a energia armazenada no sistema de circuitos deve interpretar-se como a variação da energia magnética do sistema ocorrida durante o referido processo. E o resultado (C.8) leva-nos então a admitir que se possa definir a energia magnética de um sistema de condutores lineares, que designaremos por  $W_m$ , pela expressão

$$(C.9) \quad W_m = \frac{1}{2c} \sum_{\alpha=1}^n i_{\alpha} \Phi_{\alpha}$$

Esta expressão, tal como decorre de (C.8), só seria válida a menos de uma constante aditiva; mas é natural supor-se desde logo nula a energia magnética de um sistema na situação especial em que são nulas todas as correntes dos circuitos, não havendo portanto qualquer interacção magnética entre eles. Esta convenção elimina a constante aditiva, que já não figura em (C.9).

D. Energia magnética de uma distribuição volúmica de correntes estacionárias.

Comecemos por observar que é possível estender a definição (C.9), do caso de condutores lineares ao caso de condutores extensos. Um condutor extenso pode, com efeito, encarar-se como constituído por uma distribuição contínua de filamentos de corrente assimiláveis a circuitos lineares; considerando uma secção  $\Sigma$  do condutor extenso normal em todos os seus pontos às linhas de corrente que por eles passam e supondo  $\delta\Sigma$  um elemento de decomposição contínua da secção normal  $\Sigma$ , o filamento de corrente de secção recta  $\delta\Sigma$  é assimilável a um condutor linear, com intensidade de corrente  $\delta i = |\vec{J}| \delta\Sigma$ , e o conjunto de tais filamentos integra o condutor extenso. Se designarmos por  $\Phi(\delta\Sigma)$  o fluxo da indução magnética total através de um diafragma apoiado no filamento cuja secção recta é  $\delta\Sigma$ , então (C.9) escreve-se sob a forma

$$(D.1) \quad W_m = \frac{1}{2c} \int_{\Sigma} \Phi(\delta\Sigma) \delta i$$

em que a integração ao longo da secção normal  $\Sigma$  substitui o somatório para o conjunto dos filamentos de corrente.

Se designarmos agora por  $[c]_{\delta\Sigma}$  o circuito do filamento cuja secção recta em  $\Sigma$  é  $\delta\Sigma$ , o fluxo  $\Phi(\delta\Sigma)$  pode exprimir-se como é sabido por

$$(D.2) \quad \Phi(\delta\Sigma) = \oint_{[c]_{\delta\Sigma}} \vec{A} \cdot \delta\vec{s}$$

se fôr  $\delta\vec{s}$  o elemento de arco ao longo de  $[c]_{\delta\Sigma}$  e  $\vec{A}$  o potencial-vector da indução magnética total, nesse elemento de arco. Introduzindo (D.2) em (D.1) e tendo em conta que  $\delta i = |\vec{J}| \delta\Sigma$ , vem:

$$W_m = \frac{1}{2c} \int_{\Sigma} |\vec{J}| \delta\Sigma \oint_{[c]_{\delta\Sigma}} \vec{A} \cdot \delta\vec{s} ;$$



mas, porque  $\vec{\delta s}$  tem a orientação de  $\vec{J}$ , pode pôr-se

$$W_m = \frac{1}{2c} \int_{\Sigma} \oint_{[c]} \vec{A} \cdot \vec{J} \delta \Sigma \delta s$$

em que  $\delta s = |\vec{\delta s}|$ . Mas  $\delta \Sigma \cdot \delta s$  é um elemento de volume do condutor e o último resultado equivale a

$$(D.3) \quad W_m = \frac{1}{2c} \int_v \vec{A} \cdot \vec{J} \delta v$$

estendendo-se o integral a todo o volume do condutor. Uma tal expressão da energia magnética generaliza-se imediatamente a qualquer número de condutores extensos.

Como o potencial-vector se pode exprimir em função da densidade de corrente  $\vec{J}$  mediante

$$(D.4) \quad \vec{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_v \frac{\vec{J}(Q)}{r_{PQ}} dv$$

pode dar-se a (D.3) uma outra expressão

$$(D.5) \quad W_m = \frac{\mu_0}{8\pi c^2} \int_v \int_{v'} \frac{\vec{J}(Q) \cdot \vec{J}(Q')}{r_{QQ'}} dv \delta v'$$

em que a energia magnética correspondente a uma certa distribuição contínua de correntes estacionárias nos aparece em termos da distribuição  $\vec{J}(Q)$  da densidade de corrente no volume  $v$  do condutor.

### E. Expressão da energia magnética na concepção de Maxwell

Vamos mostrar agora que é possível exprimir a energia magnética directamente em função dos vectores do campo magnético  $\vec{H}; \vec{B}$  de modo formalmente idêntico ao da expressão da energia electrostática na concepção de Maxwell que aqui se recorda:

$$(E.1) \quad W_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{D} \, dv$$

em que  $\Omega$  é o volume de todo o espaço.

Recorremos para isso à expressão (D.3) da energia magnética. Em primeiro lugar, deve notar-se que o domínio de integração em (D.3) pode indiferentemente incluir ou não o volume exterior aos condutores porque aí é  $\vec{J} = 0$ ; isso permite-nos supor já que o domínio de integração é o volume de todo o espaço,  $\Omega$ . Fazemos em seguida intervir a equação de Ampère do regime estacionário sob a sua forma diferencial,  $\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \vec{J}$ , vindo

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{H} \, dv$$

Agora, a identidade diferencial

$$\text{div} (\vec{A} \wedge \vec{H}) = \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{H}$$

permite escrever

$$W_m = \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{A} \, dv - \int_{\Omega} \text{div} (\vec{A} \wedge \vec{H}) \, dv \right]$$

mas o segundo integral trata-se pelo teorema do fluxo-divergência transformando-se em

$$\int_{S_{\infty}} \vec{A} \wedge \vec{H} \cdot \vec{n} \, dS = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S(R)} \vec{A} \wedge \vec{H} \cdot \vec{n} \, dS$$

e revela-se nulo porque  $\vec{A}$  tende para zero com  $1/R$  e  $\vec{H}$  tende para zero com  $1/R^2$  enquanto  $dS$  cresce com  $R^2$ . Resta o 1º integral; e com  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ , vem:

$$(E.2) \quad W_m = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{H} \cdot \vec{B} \, dv$$

sendo  $\Omega$  o volume de todo o espaço.

Assim, na concepção de Maxwell, em todo o ponto onde se encontra definido o campo magnético pelo par de vectores  $\vec{H}; \vec{B}$ , se pode falar de uma densidade volúmica de energia magnética, dada por

$$(E.3) \quad w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$$

#### F. Energia magnética e coeficientes de indução

Notemos, em primeiro lugar, que, se combinarmos (C.9) com as expressões dos fluxos  $\Phi_\alpha$  como composições lineares das intensidades

$$\frac{1}{c} \Phi_\alpha = \sum_{\beta=1}^n L_{\alpha\beta} i_\beta \quad (\alpha=1, \dots, n)$$

(cf. Campo magnético das correntes, Cap. IV - 1ª Parte, (IV-46)), resulta:

$$(F.1) \quad W_m = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta}^{1 \dots n} L_{\alpha\beta} i_\alpha i_\beta$$

Assim, a energia magnética de um sistema de condutores lineares exprime-se como uma função quadrática homogênea das intensidades das correntes, na qual intervêm como coeficientes constantes precisamente os coeficientes de indução,  $L_{\alpha\beta}$ . Visto que as correntes representam movimentos macroscópicos de cargas, achando-se as intensidades ligadas directamente às velocidades dessas cargas ( $\vec{J} = \rho_m \vec{v}$ ), a expressão (F.1) de  $W_m$  aproxima a energia magnética de uma energia cinética na Mecânica, a qual é função quadrática das velocidades das partículas, com coeficientes de massa, como se sabe.

No caso particular de um condutor linear único, (F.1) escreve-se simplesmente

$$(F.2) \quad W_m = \frac{1}{2} L i^2$$

sendo  $L$  o coeficiente de self-indução desse condutor, que se

define como a constante de proporcionalidade entre a intensidade  $i$  do circuito e o fluxo  $\Phi$  que o atravessa (multiplicado por  $l/c$ ):

$$(F.3) \quad \frac{l}{c} \Phi = L i$$

Passando agora ao caso de um condutor extenso, porque não pode definir-se o fluxo  $\Phi$  (a não ser como uma média), não pode também definir-se o coeficiente de self-indução através de uma expressão do tipo (F.3). Todavia, se se verifica, como acontece em certos exemplos, que a densidade de corrente  $\vec{J}(Q)$  revela ser proporcional à intensidade global da corrente no condutor,  $i$ , então a fórmula (D.5) permite afirmar que a energia magnética é proporcional ao quadrado de  $i$ , como em (F.2). Este facto leva-nos a definir o coeficiente de indução do condutor extenso mediante a expressão (imagem de (F.2))

$$(F.4) \quad L = \frac{2W_m}{i^2} = \frac{1}{c i^2} \int_v \vec{A} \cdot \vec{J} \, dv$$

utilizando (D.3); ou

$$(F.5) \quad L = \frac{2W_m}{i^2} = \frac{\mu_0}{4 \pi c^2 i^2} \int_v \int_{v'} \frac{\vec{J}(Q) \cdot \vec{J}(Q')}{r_{QQ'}} \, dv \, dv'$$

utilizando (D.5).



VII.1 - Introdução

A Óptica geométrica baseia-se numa das características mais evidentes da luz — propagação retilínea num meio homogêneo — não sendo feitas hipóteses sobre a sua natureza. Introduce-se o conceito de raios luminosos, sendo estes, num meio homogêneo, linhas rectas que correspondem à direcção de propagação da luz. A partir do embasamento do comportamento dos raios luminosos na superfície de separação de meios ópticos, pode traçar-se o seu percurso através dos sistemas ópticos e obter-se imagens de objectos.

É, no entanto, infelizmente, ter consciência das limitações da Óptica geométrica, e da necessidade, para explicar muitos tipos de fenómenos (interferência, difracção, ...) da utilização da chamada Óptica física em que a natureza ondulatória da luz já tem que ser considerada. Os comprimentos de onda das radiações visíveis situam-se, aproximadamente, entre os limites  $4 \times 10^{-5}$  cm (violeta) e  $7.5 \times 10^{-5}$  cm (vermelho). O pequeno valor deste comprimento de onda justifica, que, em muitas circunstâncias, se possa considerar a propagação da luz como retilínea; mas se a luz incidir em obstáculos de pequenas dimensões, tão pequenas que o c.d.o. da luz incidente já não pode considerar-se insignificante em face delas, começam a ser observados certos tipos de fenómenos que já não são compatíveis com a hipótese de propagação retilínea; assim, esta hipótese não é válida na medida em que os objectos usados no sistema a estudar sejam de dimensões macroscópicas em face do c.d.o. da luz.

Para ilustrar o que está dito atrás, suponha-mos que temos uma fonte luminosa  $S$  (fig. VII.1) de tão pequenas dimensões que podemos considerá-la pontual.

Se colocarmos, em frente de  $S$ , um ecrã opaco,  $H$ , com um orifício de grandes dimensões, e, mais adiante, um ecrã de obser-

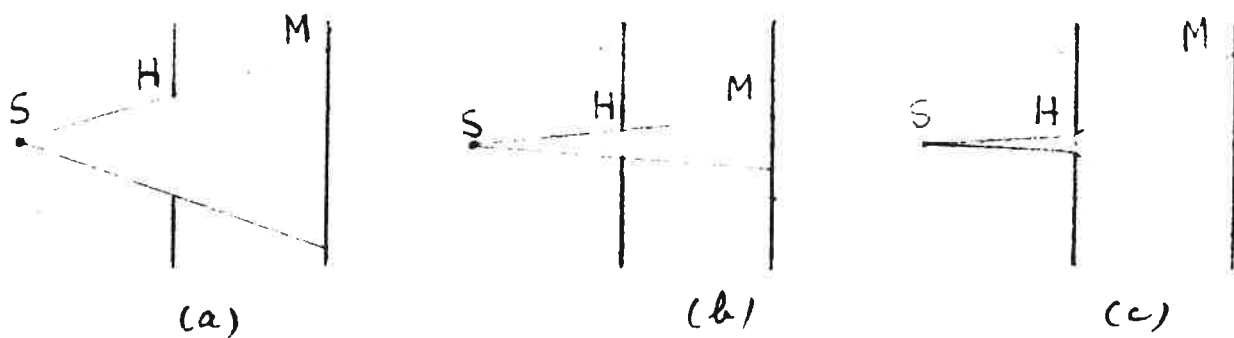


fig. VII.1

vação  $M$ , só a região deste último compreendida entre as linhas rectas traçadas, a partir de  $S$ , tangentes ao orifício de  $H$ , será iluminada; esta observação justifica a hipótese de que a luz se propaga segundo linhas rectas, os chamados raios luminosos. Se o orifício de  $H$  é tornado mais pequeno, como na fig. VII.1(b) a região iluminada de  $M$  diminui de maneira correspondente, de modo que pode pensar-se que continuando este processo seria possível, no limite, isolar um raio luminoso. A experiência mostra, porém, que a partir de uma certa dimensão do orifício de  $H$  (alguns décimos de mm) a região luminosa em  $M$  começa a alargar-se e sobre a iluminação recai de muito fraca intensidade. Não é pois possível isolar o raio luminoso e isso está associado ao novo tipo de fenómeno, que começa a intervir quando as dimensões do orifício começaram a ser excessivamente pequenas, que é o fenómeno chamado de difracção, o qual é uma consequência do carácter ondulatório da luz.

## VII.2 - Reflexão e refacção em superfícies planas

Quando um feixe de luz incide na superfície de separação de dois meios ópticos os raios luminosos podem ser reflectidos para o meio que a luz vinha atravessando ou reflectidos para o segundo meio. Em geral, os dois processos ocorrem simultaneamente, sendo as proporções relativas de um e outro

dependentes de diferentes factores tais como o poder reflector da superfície de separação e o ângulo de incidência.

Os processos de reflexão e refração têm lugar segundo leis encontradas experimentalmente, e posteriormente justificadas por diferentes vias, que vamos apresentar de seguida.

Seja  $S$  a superfície de separação de dois meios na qual incide, no ponto  $A$ , o raio luminoso  $OA$  que se re-

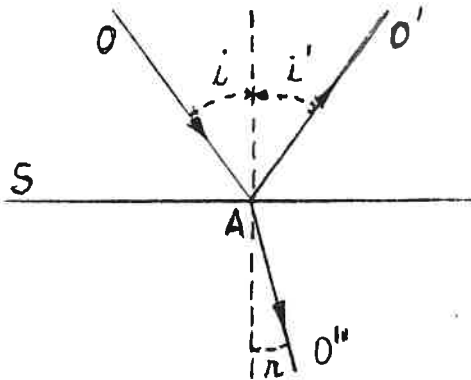


fig. VII.2

flexão segundo  $AO'$  e refracta  $AO''$ ; sejam  $i$ ,  $i'$  e  $r$  os ângulos com a normal à superfície de separação dos raios incidente, reflectido e refractado, respectivamente.

### A. leis da reflexão

- 1) O raio reflectido existe no plano de incidência que é o plano definido pela normal e pelo raio incidente.
- 2) Os ângulos de incidência e reflexão são iguais, ficando o raio reflectido para o outro lado da normal em relação ao raio incidente.

### B. leis da refração

- 1) O raio refractado existe no plano de incidência.
- 2) O ângulo de refração  $r$ , depende do ângulo de incidência de tal modo que  $\frac{\sin i}{\sin r}$  é constante. O valor desta constante depende dos dois meios envolvidos e do e.d.o. da luz.

A experiência mostra que esta razão constante dos senos é igual à razão das velocidades da luz nos dois meios.

$$(VII-1) \quad \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}$$

$v_1$  - velocidade da luz no 1º meio

$v_2$  - velocidade da luz no 2º meio

O índice de refração de um meio, que representaremos por  $n$  é dado pelo quociente entre a velocidade da luz no vácuo e a velocidade da luz no meio

$$n = \frac{\text{velocidade da luz no vácuo}}{\text{velocidade da luz no meio}} ;$$

desta definição resulta que se tivermos dois meios 1 e 2 será:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\text{velocidade da luz no meio 2}}{\text{velocidade da luz no meio 1}}$$

o que tendo em conta (VII-1) dá:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin r}{\sin i} , \text{ ou seja}$$

(VII-2)

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

A grandeza  $n$  atrás definida chama-se índice de refração absoluto; a grandeza  $\frac{n_1}{n_2}$  chama-se índice de refração do meio 1 em relação ao meio 2; o índice de refração absoluto é pois o índice de refração relativo ao vácuo. Dado que o índice de refração do ar vale, nas condições normais de pressão e temperatura 1,0003, podemos, frequentemente, fazer a aproximação de tomar como índice de refração absoluto o índice de refração relativo ao ar, pois o erro cometido é da ordem de 0,03%.

### VII.3 - Formação de imagens em superfícies planas

#### I - Reflexão

A figura VII-2' mostra um feixe de luz com origem



num ponto objecto B reflectido numa superfície plana. Depois

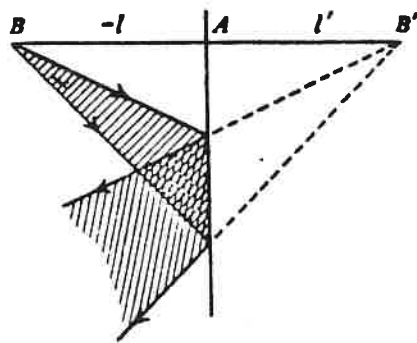


fig. VII. 2'

da reflexão o feixe parece provir do ponto imagem B', que se chama imagem virtual porque, efectivamente, os raios luminosos não passam por ele. As leis da reflexão levam facilmente à conclusão de que B' se situa no prolongamento da normal BA, a uma distância l' de A igual à distância l entre B e A.

## II - Refracção

A fig. VII. 3 mostra como se comportam 4 raios luminosos em origem no ponto objecto B antes e depois de refracção na superfície AS. No caso geral, como o que aqui

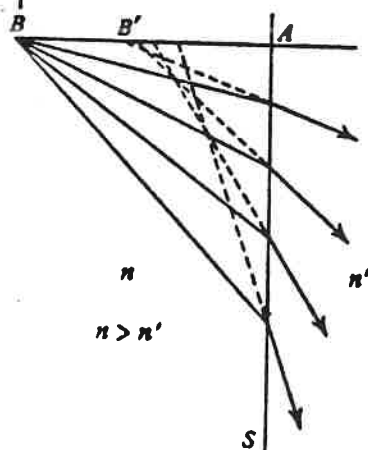


fig. VII. 3

é representado, o feixe não emerge de um ponto imagem; este é um dos mais simples exemplos de aberração produzida por um sistema óptico, ligada à sua incapacidade de fazer corresponder um ponto imagem a um ponto objecto.

Se, no entanto, apenas nos interessarmos com os raios de incidência quase normal, raios paraxiais, este efeito de aberração desaparece, como vamos ver.

Consideremos a fig. VII.4 (note os ângulos  $i$  e  $i'$  estas exagerados para que ele fique mais clara) que repre-

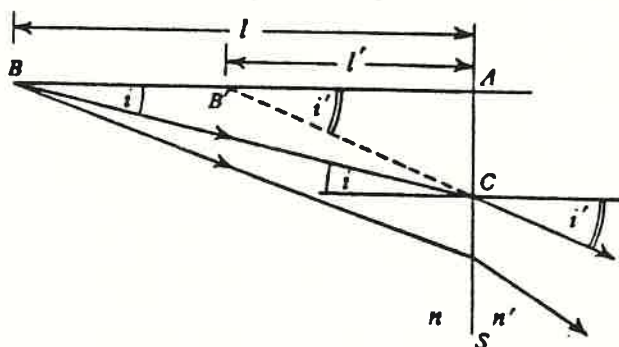


fig. VII.4

sentar um feixe de raios paraxiais, com origem em  $B$ , divergindo de  $B'$  (imagem virtual de  $B$ ) depois da refração; temos:

$$\text{sen } i \approx i \approx \text{tg } i$$

e de

$$\frac{n'}{n} = \frac{\text{sen } i}{\text{sen } i'} \approx \frac{AC/AB}{AC/AB'} = \frac{l'}{l}$$

concluímos que a cada  $l$  corresponde um valor de  $l'$  independente da posição de  $C$ .

### III - Reflexão total

Quando a luz é refratada na superfície de separação de dois meios, tais que  $n$ , índice de refração do meio em que se faz a incidência e' maior que  $n'$ , índice de refração do 2º meio, o ângulo  $r$  e' maior que  $i$  e a partir de um certo valor de  $i$  (chamado ângulo crítico) deixa de haver refração passando a haver apenas reflexão. A superfície de separação passa a actuar como um espelho e diz-se que há reflexão total.

Se designarmos por  $c$  o ângulo crítico, verificamos:

$$(VII-3) \quad \frac{n'}{n} = \sin c.$$

## VII. 4 — Formação de imagens em superfícies esféricas

Vamos agora estudar sistemas em que as superfícies separando os vários meios ópticos são esféricas. Se os centros de curvatura de todas as superfícies de separação são colineares, tal sistema chama-se sistema centrado. A linha recta que contém os centros de curvatura chama-se eixo principal, que, frequentemente, será designado apenas por eixo.

### I - Refracção numa superfície esférica simples

A fig. VII.5 representa uma superfície esférica simples que separa dois meios de índices de refração  $n$  e  $n'$ , sendo  $C$  o centro de curvatura da superfície. Qualquer linha que passe por  $C$  pode ser escolhida como eixo; o ponto de

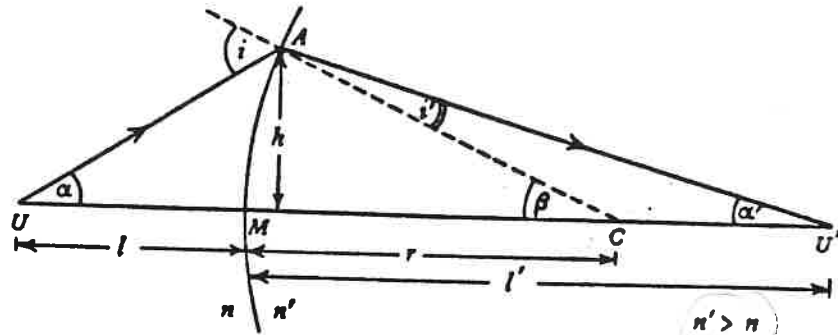


fig. VII.5

intersecção,  $M$ , do eixo com a superfície chama-se polo. Considere-se o raio  $UA$  de um ponto objecto sobre o eixo,  $U$ , incidindo na superfície em  $A$ , a uma distância  $h$  do eixo. Suponhamos que este raio depois de refractado corta o eixo em  $U'$ . Da figura tira-se que:

$$i = \alpha + \beta, \quad i' = \beta - \alpha'$$

Vamos limitar-nos ao estudo de raios paraxiais, isto é, raios que fazem pequenos ângulos com o eixo; em tais  $\alpha$ ,  $\alpha'$  e  $\beta$  são pequenos e, conseqüentemente,  $i$  e  $i'$  também o são. Da lei de refração temos, então:

$$n' i' = n i$$

ou

$$n' (\beta - \alpha') = n (\alpha + \beta)$$

dividindo:

$$n' \alpha' + n \alpha = (n' - n) \beta \quad ;$$

tendo, mais uma vez, em conta que  $\alpha, \alpha' + \beta$  são pequenos

$$\alpha' = \frac{h}{l'} \quad , \quad \alpha = \frac{h}{l} \quad , \quad \beta = \frac{h}{r} \quad , \quad \text{vindo pois:}$$

$$n' \frac{h}{l'} + n \frac{h}{l} = (n' - n) \frac{h}{r}$$

ou:

(VII-4)

$$\frac{n'}{l'} + \frac{n}{l} = \frac{n' - n}{r}$$

Repare-se que no resultado obtido não figura  $h$ , o que significa que a posição de  $U'$  é independente do raio incidente (partindo de  $U$ ) considerado, desde que nos mantivermos na aproximação de Gauss (paraxial); isto significa que, nestas condições,  $U'$  é o ponto imagem correspondente ao ponto objecto  $U$ . Se imaginarmos que se inverte o sentido dos raios vê-se que um ponto objecto colocado em  $U'$  dá uma imagem em  $U$ . Diz-se que  $U$  e  $U'$  são pontos conjugados.

Consideremos, agora, a situação representada na fig. VII. 6; ao ponto imagem  $U$  corresponde uma imagem virtual  $U'$ , na qual parece ter origem todos os raios reflectados.

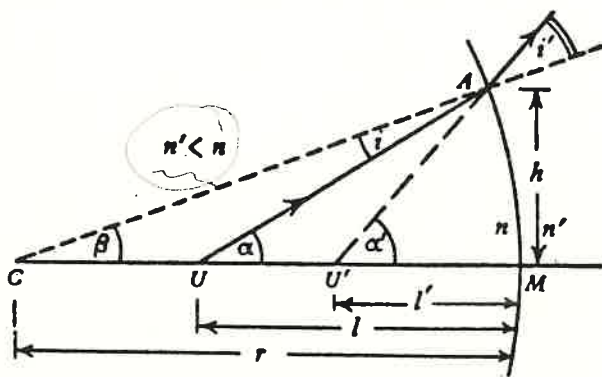


fig. VII. 6

Teremos as seguintes relações:

$$i = \alpha - \beta$$

$$i' = \alpha' - \beta$$

$$n'(\alpha' - \beta) = n(\alpha - \beta), \text{ donde: } n'\alpha' - n\alpha = (n' - n)\beta$$

e, finalmente:

$$(VII-5) \quad \frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n' - n}{r}$$

A equação (VII-5) é semelhante à equação (VII-4), mas não idêntica; se considerarmos outros tipos de situações de refração numa superfície esférica, obteríamos, em cada caso, equações semelhantes às anteriores mas não idênticas. Será possível reduzi-las todas à mesma expressão? É-o desde que se faça uma conveniente convenção de sinais. Há várias convenções possíveis; de entre elas escolhemos a seguinte.

### Convenção para as distâncias

(a) Distâncias longitudinais: são distâncias medidas ao longo do eixo a partir dum ponto (ou pontos) escolhido no sistema. São consideradas positivas se têm o sentido da luz incidente e negativas no caso contrário.

(b) Distâncias transversais: são distâncias em ângulo recto com o eixo, tais como alturas de objectos ou imagens; são consideradas positivas quando acima do eixo e negativas quando abaixo.

Sempre que possível, representaremos a luz incidente propagando-se da esquerda para a direita, e, nestas condições distâncias positivas são as medidas da esquerda para a direita e negativas as medidas em sentido contrário.

### Convenção para os ângulos

Ângulos agudos entre raios e normais a superfícies ou entre raios e o eixo do sistema, são considerados positivos quando a rotação que levava os raios até à normal ou até ao eixo, através desses ângulos, teria o sentido contrário ao do movimento das ponteiros dum relógio.

Se usarmos estas convenções nos sistemas estudados an-

teriormente vemos que na fig. VII.5  $\underline{l}'$  e  $\underline{r}$  são positivos e  $\underline{l}$  e' negativo. A fórmula (VII-4) virá, então, ficando  $\underline{-l}$  no lugar de  $\underline{l}$ :

$$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n' - n}{r}$$

Na fig. VII.6 as três distâncias vêm negativas o que mantém a forma de (VII-5). Aqui, com a convenção de sinais indicada a expressão:

$$(VII-6) \quad \boxed{\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n' - n}{r}}$$

e' válida em todas as situações; análogamente, e tendo presente a convenção para os ângulos, será em qualquer caso:

$$(VII-7) \quad \boxed{n' \alpha' - n \alpha = (n' - n) \beta = (n' - n) \frac{h}{r}}$$

### Focos e distâncias focais

O ponto objecto do eixo ao qual corresponde uma imagem infinitamente distante (raios emergentes paralelos ao eixo) chama-se primeiro foco (foco-objecto) do sistema e será representado por  $\underline{F}$ ; a sua distância ao polo da superfície é a primeira distância focal, representando-se por  $\underline{f}$ , e corresponde ao valor de  $\underline{l}$  para  $l' = \infty$ , vindo, por substituição na equação (VII-6)

$$(VII-8) \quad \boxed{f = - \frac{n r}{n' - n}}$$

O ponto imagem correspondente a um feixe incidente paralelo ao eixo é o segundo foco (foco-imagem),  $\underline{F}'$ ; está a uma distância,  $\underline{f}'$ , do polo da superfície, chamada segunda distância focal e dada por:

$$(VII-9) \quad \boxed{f' = \frac{n' r}{n' - n}}$$

Escrevendo a equação (VII-6) sob a forma:

$$\frac{n'}{l'} \cdot \frac{r}{n'-n} - \frac{n}{l} \cdot \frac{r}{n'-n} = 1$$

e tendo em conta (VII-8) e (VII-9), vem:

$$(VII-10) \quad \boxed{\frac{f'}{l'} + \frac{f}{l} = 1} \quad \}$$

De (VII-8) e (VII-9) vem ainda:

$$(VII-11) \quad \frac{f'}{f} = - \frac{n'}{n}$$

Podemos ainda obter a relação:

$$(VII-12) \quad \boxed{\frac{n'}{f'} = - \frac{n}{f} = \frac{n'-n}{r} = P}$$

A grandeza  $P$  assim definida chama-se potência da superfície.

## II - Refracção numa lente delgada

Designa-se por lente um corpo transparente limitado por duas superfícies esféricas; lente delgada é aquela cuja espessura é desprezável em face dos raios das superfícies que a limitam e das distâncias objecto e imagem medidas a partir delas.

Consideremos a lente biconvexa representada na fig. VII.7 e sejam  $r_1$  e  $r_2$  os raios das duas superfícies. Sejam  $n$ ,  $n'$  e  $n''$  os índices de refração dos três meios envolvidos, tal como representado; sendo  $U$  o ponto objecto axial à distância  $l$  da primeira face, a sua imagem  $U'$  à distância  $l'$  da 1ª face será formada por refração nesta face;

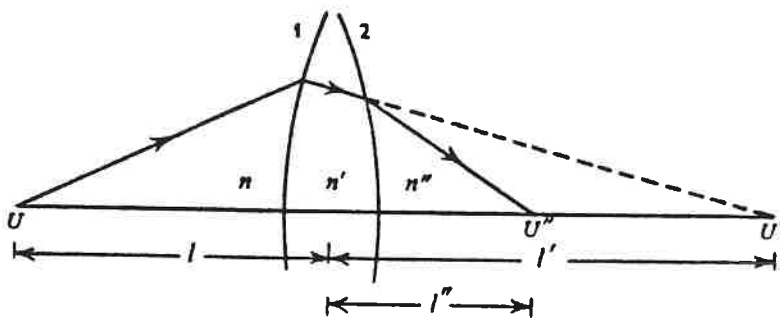


fig. VII. 7

podemos escrever-se:

$$(VII-13) \quad \frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n' - n}{r_1} ;$$

$U'$  vai ser, agora, o ponto objecto em relação à 2ª face e dada a pequena espessura da lente podemos considerá-lo também à distância  $l'$  da 2ª face; se for  $U''$ , à distância  $l''$  da 2ª face, o ponto imagem relativo à 2ª refração teremos:

$$(VII-14) \quad \frac{n''}{l''} - \frac{n'}{l'} = \frac{n'' - n'}{r_2} ,$$

e, por adição de (VII-13) e (VII-14),

$$(VII-15) \quad \frac{n''}{l''} - \frac{n}{l} = \frac{n' - n}{r_1} + \frac{n'' - n'}{r_2} .$$

Se os meios à esquerda e à direita da lente são o mesmo:  $n = n''$ , teremos:

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \frac{1}{l''} - \frac{1}{l} = \left( \frac{n'}{n} - 1 \right) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

ou, usando símbolos com uma única face para o espaço imagem e  $\mu = \frac{n'}{n}$  (índice de refração do material da lente relativo ao meio exterior).



$$(VII-16) \quad \frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = (\mu - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad ||$$

Analogamente ao que se faz para uma superfície simples  $f$  e  $f'$  são obtidos sendo, respectivamente,  $l'$  e  $l$  iguais a infinito. Vem:

$$(VII-17) \quad \boxed{\frac{1}{f'} = -\frac{1}{f} = (\mu - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \quad \}$$

$$(VII-18) \quad \boxed{\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}} \quad ||$$

$$(VII-19) \quad \boxed{\frac{f'}{l'} + \frac{f}{l} = 1} \quad ||$$

### Associação de lentes delgadas

Considerem-se as duas lentes delgadas representadas na fig. VII-8 separadas pela distância  $d$ . O raio, paralelo ao eixo

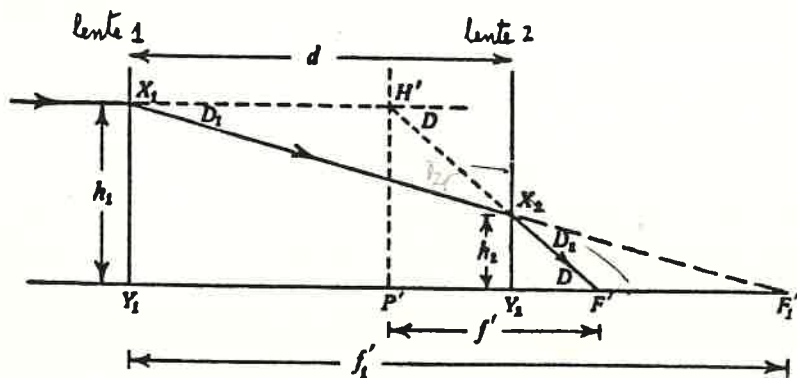


fig. VII.8

do sistema, que incide na lente 1 e é refratada na direção do 2º ponto focal  $F'_1$ , sofrendo um desvio na sua direção medido pelo ângulo  $D_1 = \frac{h_1}{f'_1}$ ; ao incidir na 2ª lente o raio lumi-

? [ - o que se torna efetivo neste raciocínio é que parece como se existisse um ] VII-1.  
 novo, saíram as novas refrações, em um dos raios  $D_2$ , que, dentro de  
aproximação, que continuamente a admitir, de pequenos ângulos  
de incidência, é o mesmo para qualquer incidência e será dado por  
 $D_2 = \frac{h_2}{f'_2}$ . O desvio total  $D$  é a soma de  $D_1$  e  $D_2$  e parece ocorrer  
 no ponto  $H'$  de interseção dos raios final e inicial. Ve-se  
fácilmente, observando a figura, que o efeito produzido, no raio in-  
cidente, pela associação das duas lentes é o mesmo que seria pro-  
duzido por uma lente simples, de segunda distância focal  $P'F'$   
e colocada em  $P'H'$ ;  $P'F'$  chama-se distância focal equivalente  
da associação; referir-se em relação com as distâncias fo-  
cais das lentes associadas.

De  $D = D_1 + D_2$

vem: 
$$\frac{h_2}{f'} = \frac{h_1}{f'_1} + \frac{h_2}{f'_2}$$

Dos triângulos semelhantes  $X_1 Y_1 F'_1$  e  $X_2 Y_2 F'_2$  sai:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{f'_2 - d}{f'_1} \quad \text{ou seja:} \quad h_2 = h_1 \left( 1 - \frac{d}{f'_1} \right)$$

e, por substituição na expressão anterior:

$$\frac{h_2}{f'} = \frac{h_2}{f'_1} + \frac{h_2}{f'_2} - \frac{h_2 d}{f'_1 f'_2}$$

m:  
 (VII-20)

$$\boxed{\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{d}{f'_1 f'_2}}$$

isto permite determinar  
 a distância  
 focal equivalente;  
 usar como referência  
 este  $P'$ ?

Desta expressão obtém-se imediatamente a relação válida  
 para o caso de lentes delgadas colocadas

(VII-21)

$$\boxed{\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}}$$

( $d=0$ )

O inverso da segunda distância focal de um sistema em ar nos seus duas extremidades chama-se potência do sistema e representa-se por  $P$ ; exprime-se em dioptrias quando a distância focal se exprime em metros.

A equação (VII-20) pode então escrever-se:

$$(VII-20') \quad \boxed{P = P_1 + P_2 - d P_1 P_2} \quad \}$$

e a equação (VII-21):

$$(VII-21') \quad \boxed{P = P_1 + P_2}$$

onde  $P$  é a potência da associação de lentes e  $P_1$  e  $P_2$  as potências das lentes 1 e 2, respectivamente.

Retornemos a equação (VII-17) reescrita sob a forma:

$$\frac{1}{f'} = \frac{\mu-1}{r_1} - \frac{\mu-1}{r_2} ;$$

se supozermos o sistema imerso no ar podemos tomar  $\mu=n$  com boa aproximação; vira':

$$\frac{1}{f'} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{1-n}{r_2}$$

Os termos do 2º membro da equação anterior representam [eq. (VII-12)] as potências das superfícies que limitam a lente; então, a potência da lente,  $P$ , é dada por:

$$(VII-22) \quad \boxed{P = P_{S_1} + P_{S_2}}$$

A potência da lente delgada é a soma das potências das superfícies que a limitam.

## Imagens de objectos extensos

Para abordar este problema estudemos o efeito, na posição da imagem, dum deslocamento longitudinal e dum deslocamento transversal do objecto.

### Deslocamento longitudinal do ponto objecto

Consideremos a relação (VII-10,19) que relaciona, entre si, as distâncias, ao sistema, do objecto e de sua imagem:

$$\frac{f'}{l'} + \frac{f}{l} = 1$$

A diferenciação desta expressão dá:

$$\frac{f' dl'}{l'^2} + \frac{f dl}{l^2} = 0, \quad \text{donde:}$$

$$\frac{dl'}{dl} = - \frac{f}{f'} \cdot \frac{l'^2}{l^2}$$

Para uma superfície simples:  $\frac{f'}{f} = - \frac{n'}{n}$  e

(VII-23)

$$\boxed{\frac{dl'}{dl} = \frac{n}{n'} \frac{l'^2}{l^2}}$$

Para uma lente delgada:  $f' = -f$ , e

(VII-24)

$$\boxed{\frac{dl'}{dl} = \frac{l'^2}{l^2}}$$

Note-se que no caso da imagem formada por refração  $\frac{dl'}{dl}$  é sempre positivo, o que implica que a mesma frequência de variações da posição do objecto ao longo do eixo correspond

uma pequena variação da posição da imagem do mesmo sinal,  $m$  refa no mesmo sentido ao longo do eixo.

No caso de reflexões (que corresponde a  $n' = -n$ ), teremos:

$$\frac{dl'}{dl} = - \frac{l'^2}{l^2}$$

e portanto negativo.

### Deslocamento transversal do ponto objecto

A fig. (VII.9) representa uma superfície esférica de separação de dois meios;  $C$  é o centro de curvatura da superfície e  $MC$  o eixo escolhido como principal.  $V$  e  $V'$  são pontos conjugados neste eixo. Considere-se o ponto objecto  $B$  à distância  $f$  de  $U$ ;

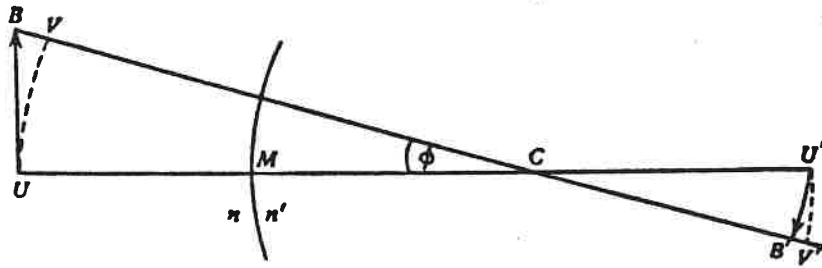


fig. VII.9

se ligarmos  $B$  a  $C$ , a linha  $BC$  pode também ser tomada como eixo do sistema pois também é perpendicular à superfície; chamá-lo-emos eixo auxiliar.  $B$  terá, evidentemente, um ponto imagem,  $B'$ , sobre o eixo auxiliar, obtido por refração dos raios paraxiais em relação a este eixo.  $V$  e  $V'$  são, por sua vez, os pontos de intersecção, com o eixo auxiliar, das arcos de circunferências, com centros em  $C$ , e de raios  $CV$  e  $CV'$  respectivamente; estas, evidentemente, às mesmas distâncias,  $l$  e  $l'$ , da superfície, que  $V$  e  $U'$ , e são, portanto, pontos conjugados no eixo  $BC$ . Repara-se, agora, que  $B$  está mais distanciado da superfície do que  $V$  de uma distância que designaremos por  $\Delta l = \overline{BV}$ . Pelo que vimos atrás, o ponto  $B'$  estará mais próximo da superfície do que  $V'$  de uma distância  $\Delta l'$  relacionada com  $\Delta l$  pela expressão (VII.23). Então

o objecto rectilíneo UB dará origem a uma imagem encurvada U'B', e, dum modo geral, um plano objecto que passe por U, perpendicular ao eixo, terá por imagem uma superfície curva que passa por U' e é simétrica em relação ao eixo principal. Esta curvatura de imagem corresponde a um defeito na sua obtusão que se designa por aberração do sistema.

Se a distância de B ao eixo for pequena comparada com as distâncias l e l', o ângulo  $\phi$  entre os dois eixos é pequeno, e, nessas condições, no triângulo BVC a hipotenusa BC pode ser considerada igual ao lado UC; isto significa que B e V estão sucessivamente na mesma posição de tal modo que B' coincide com V', que, por sua vez, e por argumentos semelhantes, pode considerar-se sobre a perpendicular ao eixo que passa por U'. A imagem dum ponto dum plano perpendicular ao eixo que passa por U situa-se, então, num plano, perpendicular ao eixo que passa por U'; tais planos chamam-se conjugados. Um plano-objecto perpendicular ao eixo dará ainda um plano-imagem perpendicular ao eixo, quando a imagem é formada por um sistema centado mais complicado, desde que se mantiverem as mesmas limitações. Isto é necessariamente assim visto que qualquer sistema se pode tratar como uma sucessão de superfícies entre dois meios.

Vejamos, agora, qual a relação, no caso de uma superfície esférica, entre a distância f do ponto B ao eixo e a

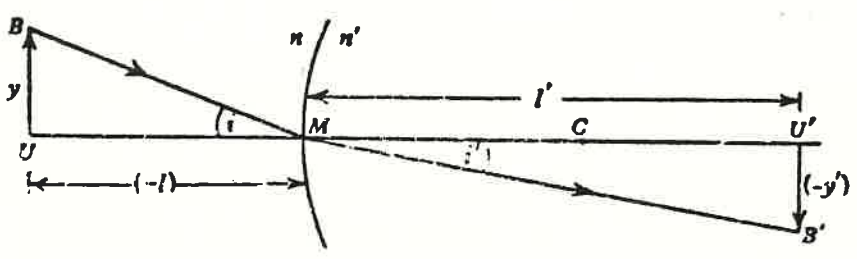


fig. VII. 10

distância f' do ponto imagem (fig. VII. 10)

Para lei de refração

$$n i = n' i'$$

ou seja:

$$n \left( \frac{f}{-l} \right) = n' \left( \frac{-f'}{l'} \right)$$

donde:

(VII-25)

$$\frac{f'}{f} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{l'}{l}$$

Para uma lente delgada, tendo em conta que o raio que passa pelo centro da lente não é desviado porque numa zona as duas superfícies são paralelas, obter-se-ia por uma dedução semelhante:

(VII-26)

$$\frac{f'}{f} = \frac{l'}{l}$$

As expressões (VII-23) (VII-24) (VII-25) e (VII-26) que nos dão as amplificações longitudinais e transversais para uma superfície simples e para lentes delgadas são de aplicação mais geral. Com efeito, as fórmulas que concernem à superfície simples são aplicáveis a todos os raios, mas ópticos que têm meios diferentes nos seus extremos; as fórmulas de lente delgada a aqueles que têm nos extremos o mesmo meio.

### Relações de Lagrange ou de Helmholtz

Considerem-se a fig. (VII.11), na qual está traçado

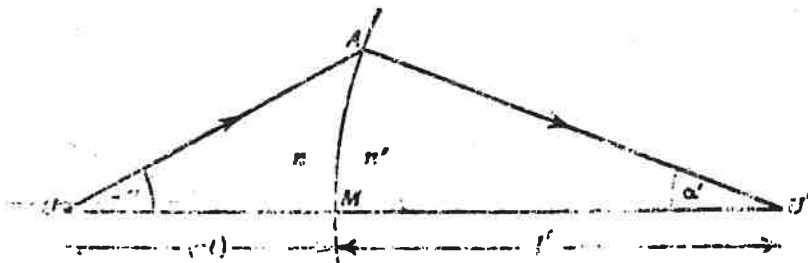


fig. VII.11

raio axial  $UA$  e o correspondente raio  $AA'$ .

Tem-se, evidentemente:  $AM = \alpha l = \alpha' l'$  ;  
 se tivermos em conta a relação (VII-25) resulta:

(VII-27)

$$n f \alpha = n' f' \alpha'$$

que é a chamada relação de LaGrange ou relação de Helmholtz

Esta relação é válida para qualquer sistema centrado, visto que numa segunda face teríamos:

$$n' f' \alpha' = n'' f'' \alpha''$$

e relações semelhantes seriam obtidas para as sucessivas superfícies de refração dos diferentes meios do sistema; assim, obter-se-á para o sistema global

$$n f \alpha = n' f' \alpha'$$

onde os símbolos sem prima se referem ao raio incidente no sistema e os símbolos com prima ao raio que dele emerge.

A importância desta relação reside no facto de que a amplificação transversal,  $f'/f$ , para um par de planos conjugados é relacionada com as inclinações, em relação ao eixo, dos raios que passam pelos pontos axiais desses planos; o quociente  $\alpha'/\alpha$  designa-se por amplificação angular.  
As amplificações transversal e angular são pois inversamente proporcionais.

Na fig. VII.12 apresentam-se alguns exemplos do traçado gráfico de imagens para o caso de uma superfície esférica. Para lentes delgadas ter-se-iam as mesmas condições, com a diferença de que neste caso  $f$  e  $f'$  seriam os mesmos e iguais.

Os casos (I) - (III) correspondem a superfícies convergentes

Os casos (IV) - (VI) correspondem a superfícies divergentes



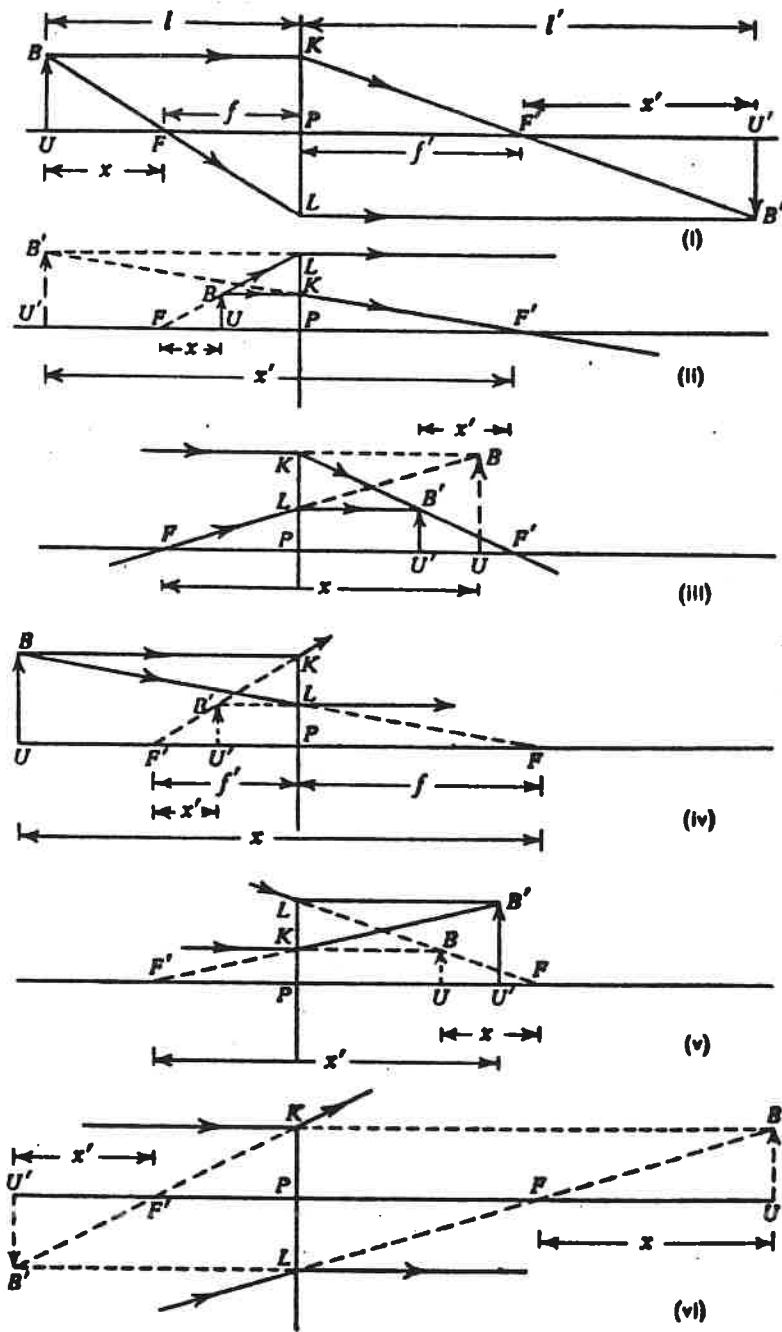


fig. VII.12

## VII. 5 - Planos principais dum sistema óptico centrado Pontos cardiais do sistema.

### I - Definições e relações gerais dos sistemas centrados

Qualquer sistema óptico centrado, embora complexo, pode ser tratado como uma sucessão de superfícies e lentes; estas podem ser consideradas uma por uma, funcionando

do a imagem formada na 1ª superfície como objecto para a 2ª e assim sucessivamente; dado que este processo seria longo e fastidioso procurou-se descobrir o modo de tratar o sistema óptico como uma unidade e encontrar as relações que se lhe aplicam num tal tratamento.

Para abordar este assunto começa-se por considerar o sistema constituído por 2 lentes delgadas 1 e 2 separadas por uma distância  $d$ . Como se vê na fig. VII.13, o raio que

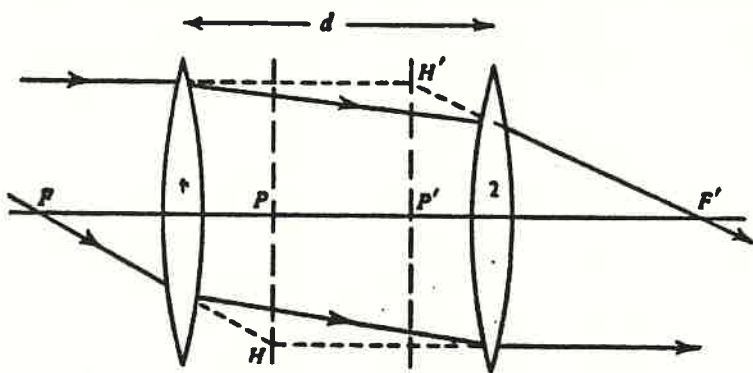


fig. VII.13

incide no sistema paralelamente ao eixo e que emerge quando uma direcção que intersecta o eixo em  $F'$ , passa no desviado no ponto  $H'$ , enquanto que o raio que incide no sistema passando pelo 1º ponto focal, passa desviado no ponto  $H$  para emergir paralelamente ao eixo; os planos, perpendiculares ao eixo, que passam pelos pontos  $H$  e  $H'$  intersectam o eixo nos pontos  $P$  e  $P'$ , respectivamente.

A distância focal equivalente do sistema é dada pela equação (VII-20)

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} - \frac{d}{f_1' f_2'}$$

a qual é simétrica em  $f_1'$  e  $f_2'$ , e portanto independente ordem pela qual a luz atravessa as duas lentes; no entanto, ramos que invertem o sentido do raio inferior (o que passamos a iniciar no sistema paralelamente ao eixo) mostram que as distâncias  $PF$  e  $P'F'$  devem ser iguais, ambas correspondem à distância focal equivalente do sistema.

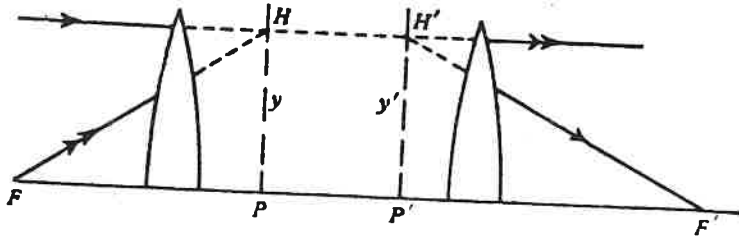


fig. VII. 13'

Na fig. VII.13' estão traçados raios semelhantes aos da fig. VII.13 mas escolhidos de tal modo que a altura, acima do eixo, do raio incidente paralelo (que emerge por  $F'$ ) é a mesma do raio emergente paralelo ao eixo (que tem origem em  $F$ ). O par de raios, que converge em  $H$ , antes de entrar no sistema, transforma-se no par de raios que emerge divergindo de  $H'$ .  $H$  e  $H'$  correspondem-se, pois, como pontos conjugados, o mesmo acontecendo a todo o par de pontos equidistantes do eixo nos planos  $PH$  e  $P'H'$ ; estes planos chamam-se planos principais do sistema e os pontos  $P$  e  $P'$  de intersecção com o eixo

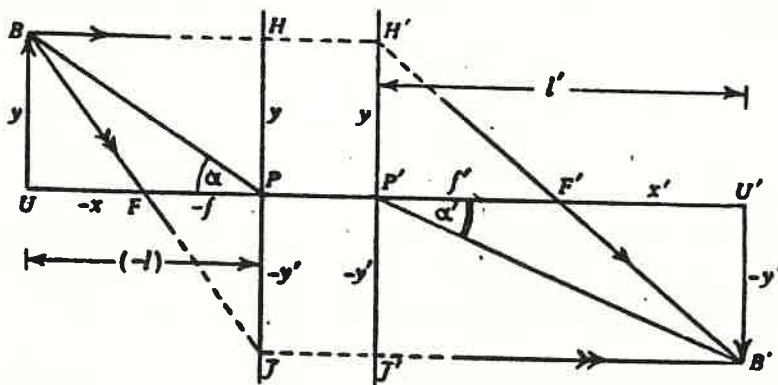


fig. VII.14

planos principais do sistema; quando a luz tem o sentido representado  $P$  é o 1º ponto principal e  $P'$  o 2º ponto principal. Dado que  $H$  e  $H'$  são pontos conjugados, qualquer raio paraxial incidente dirigido para  $H$  deve emergir passando por  $H'$ .

Vamos agora ver que, se as posições dos planos principais são conhecidas, o comportamento do sistema pode ser previsto. Veremos mais adiante, para casos especiais, como conhecer estas posições.

Considere-se a situação representada na fig. VII.14 que nos vai servir para deduzir as relações que fioceram as quais são, no entanto, válidas para outras situações (posição dos planos principais alterada, diferentes posições dos objectos, furo nos planos principais etc.). As linhas tracejadas significam que o verdadeiro percurso dos raios dentro do sistema

mas não estão representados. Como se vê da figura  $\underline{l}$  e  $\underline{l}'$  são as distâncias do objecto e da imagem ao primeiro e segundo planos principais, respectivamente; os sinais de  $\underline{l}$  e  $\underline{l}'$  (medidos a partir de  $P$  e  $P'$ ) respeitam as convenções usuais;  $x$  e  $x'$  são as distâncias do objecto e da imagem aos focos  $F$  e  $F'$ , medidas a partir destes, e com a mesma convenção de sinal.

Como os triângulos  $BVF$  e  $JPF$  são semelhantes, tem-se

$$(VII-28) \quad \frac{-f'}{f} = \frac{-f}{-x}$$

e dos triângulos  $B'U'F'$  e  $H'P'F'$

$$(VII-29) \quad \frac{f}{-f'} = \frac{f'}{x'} \quad \rightarrow \quad y = \frac{-y'f'}{x}$$

Por multiplicação destas expressões resulta:

$$(VII-30) \quad \boxed{xx' = ff'} \quad - \text{Lei de Newton} -$$

De (VII-28) resulta ainda:

$$(VII-31) \quad \frac{-f'}{f-f'} = \frac{-f}{-x-f} = \frac{-f}{-l}$$

e de (VII-29):

$$(VII-32) \quad \frac{f}{f-f'} = \frac{f'}{x'+f'} = \frac{f'}{l'}$$

Somando (VII-31) e (VII-32) vem:

$$(VII-33) \quad \boxed{\frac{f'}{l'} + \frac{f}{l} = 1}$$

Note-se que da expressão (VII-28):  $\frac{-f'}{f} = \frac{f}{x}$  se conclui que a amplificação transversal  $\alpha'$  depende da abscissa  $x$ .

As equações (VII-30) e (VII-33) são análogas a expressões obtidas para sistemas mais simples; elas mostram-se aqui de aplicação mais geral desde que  $l$ ,  $l'$ ,  $f$  e  $f'$  sejam medidas a partir dos pontos principais como indicados.

Por divisão de (VII-31) e (VII-32) obtém-se:

$$(VII-34) \quad \boxed{\frac{f'}{f} = -\frac{l'}{l} \cdot \frac{f}{f'}}$$

Se agora aplicarmos a relação de Lagrange, que vimos ser válida para um sistema centrado qualquer, aos planos principais, obtém-se, tendo em conta que para estes planos a amplificação transversal é  $+1$ ,

$$n\alpha = n'\alpha'$$

$$\text{ou} \quad n \frac{f}{-l} = n' \frac{-f'}{l'}$$

donde:

$$(VII-35) \quad \boxed{\frac{f'}{f} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{l'}{l}}$$

e, por comparação com (VII-34)

$$(VII-36) \quad \boxed{\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}}$$

fácilmente se obtém também:

$$(VII-37) \quad \boxed{\frac{dl'}{dl} = -\frac{f}{f'} \cdot \frac{l'^2}{l^2} - \frac{n}{n'} \cdot \frac{l'^2}{l^2}}$$

## II - Localizações dos pontos principais em casos especiais

### a) Sistemas constituídos por duas lentes delgadas separadas

Considere-se a fig. (VII-15); represente-se por  $\kappa$  e  $\kappa'$  as distâncias do primeiro plano principal à primeira lente e do 2º plano principal à 2ª lente, com as convenções de sinais habituais, e medidos a partir das lentes.

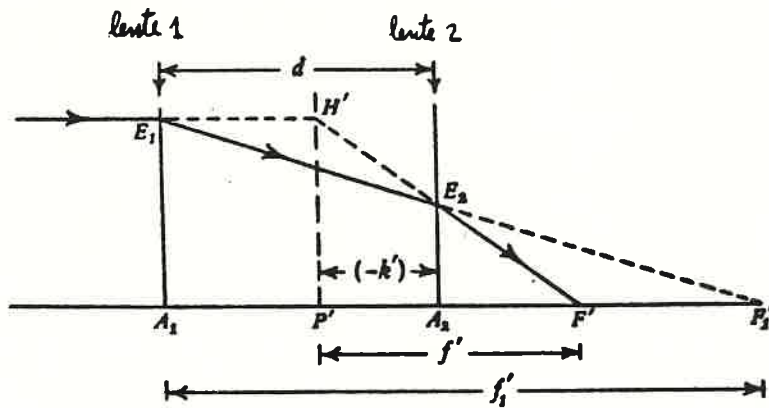


fig. VII.15

Des triângulos  $A_1 E_1 F'_1$  e  $A_2 E_2 F'_2$  tem-se:

$$(v) \quad \frac{A_1 E_2}{A_2 E_2} = \frac{A_1 F'_2}{A_2 F'_2} = \frac{f'_2}{f'_2 - d}$$

Des triângulos  $P' H' F'$  e  $A_2 E_2 F'$

$$(xx) \quad \frac{P' H'}{A_2 E_2} = \frac{P' F'}{A_2 F'} = \frac{f'}{f' - (-\kappa')}$$

Como  $P' H' = A_2 E_1$ , vem:

usando  
propriedade  
(x) = (xx)

$$\frac{f'_2 - d}{f'_2} = \frac{f' + \kappa'}{f'} \quad \text{ou} \quad 1 - \frac{d}{f'_2} = 1 + \frac{\kappa'}{f'}$$

donde:

(VII-38)

$$\kappa' = -d \frac{f'}{f'_2}$$

analogamente se obtém:

$$(VII-39) \quad \kappa = d \frac{f}{f_2} = d \frac{f'}{f'_2}$$

### b) Lente espessa

Para encontrar as posições dos planos principais utiliza-se o processo geral; o segundo plano principal é o plano, perpendicular ao eixo, onde um raio, paralelo ao eixo, parece desviar-se para emergir passando pelo foco; o primeiro plano principal encontra-se por via análoga considerando um raio paralelo ao eixo no espaço imagem. Na fig. VII.16 exemplifica-se o traçado que permite localizar  $P'$  para a lente espessa representada; no traçado dos raios em cada superfície utiliza-se a equação (VII-7).

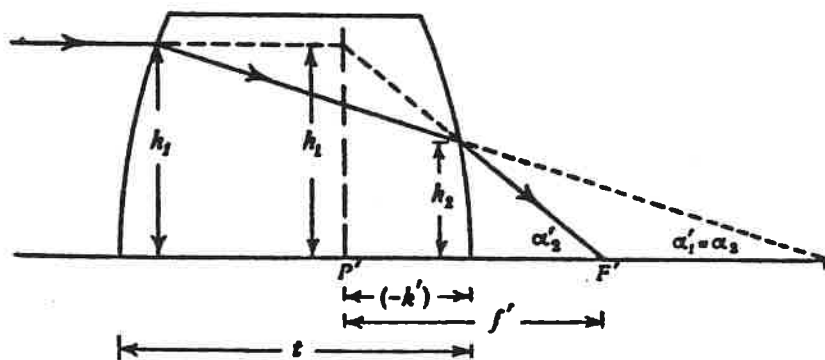


fig. VII.16

Dado que os raios paraxiais são pouco inclinados sobre o eixo, o ponto de refração, na superfície curva, está também próximo do eixo, o que implica que esteja num plano transversal ao eixo que difere pouco do plano em que se encontra o polo da superfície; estes, para raios paraxiais, as superfícies de refração são, aproximadamente, planos transversais ao eixo cujas separações é a espessura axial,  $t$ , da lente.

Se  $n$  for o índice de refração do material da lente e o meio exterior  $n'$  o ar, da equação (VII-7) na sua forma:

$$n'\alpha' - n\alpha = Ph$$



aplicando às superfícies da lente representada, sai:

$$\mu \alpha'_1 = P_1 h_1 \quad (\alpha_2 = 0)$$

$$\alpha'_2 - \mu \alpha_2 = P_2 h_2 \quad (\alpha_2 = \alpha'_1) ;$$

por outro lado, tem-se:  $h_1 - h_2 = t \alpha_2$

Das três equações:

$$\mu \alpha_2 = P_1 h_1 ; \quad \alpha'_2 - \mu \alpha_2 = P_2 h_2 ; \quad h_2 = h_1 - t \alpha_2 ;$$

resulta: 
$$\frac{\alpha'_2}{h_2} = P_1 + P_2 - \frac{t}{\mu} P_1 P_2$$

e como,  $\frac{\alpha'_2}{h_2} = \frac{1}{f'}$ , que é a potência  $P$  da lente espessa:

(VII-40)

$$P = P_1 + P_2 - \frac{t}{\mu} P_1 P_2$$

Representando por  $k'$  a distância do 2º plano principal ao polo de 2ª superfície da lente tomada como origem, vem:

$$-k' = \frac{h_1 - h_2}{\alpha'_2} = \frac{t \alpha'_1}{\alpha'_2} = t \frac{P_1 h_1 / \mu}{P h_2}$$

(VII-41)

$$k' = - \frac{t}{\mu} \frac{P_1}{P} ;$$

analogamente se obtém:

(VII-42)

$$k = + \frac{t}{\mu} \frac{P_2}{P}$$

Se fizermos as substituições  $P_1 = \frac{\mu - 1}{r_1}$ ,  $P_2 = \frac{1 - \mu}{r_2}$  obter-se-á:

$$(VII-43) \quad \frac{1}{f'} = (\mu - 1) \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{t}{\mu} \frac{\mu - 1}{r_1 r_2} \right]$$

$$(VII-44) \quad \kappa' = -\frac{t}{\mu} \cdot \frac{n_2}{n_2 - n_1 + \frac{t}{\mu}(\mu-1)}$$

$$(VII-45) \quad \kappa = -\frac{t}{\mu} \cdot \frac{n_1}{n_2 - n_1 + \frac{t}{\mu}(\mu-1)}$$

Na fig. VII.17 representam-se as posições dos planos principais, para diferentes tipos de lentes espessas, cujas características são indicadas no quadro abaixo; tem-se, em todos os casos,  $\mu=1,50$ ,  $t=30$ .

caso	$n_1$	$n_2$	$\kappa$	$\kappa'$	$f'$
a	+100	-100	10.5	-10.5	+105.3
b	+100	$\infty$	0	-20	+200
c	+100	+200	-18.2	-36.4	+363.6
d	+15	-15	15	-15	+22.5

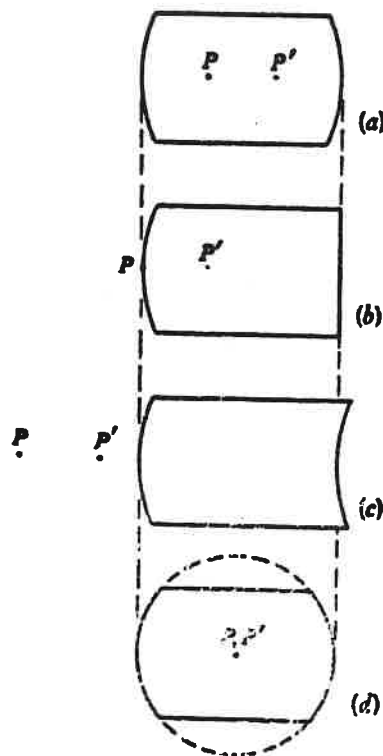


fig. VII.17

### III - Pontos e planos nodais

Pontos nodais são pontos axiais tais que um raio que incide na direção do primeiro emerge, passando pelo segundo, numa direção paralela à de incidência.

Sejam, na fig. VII.18, N e N' dois pontos axiais conjugados,  $\alpha, \alpha', \beta$  e  $\beta'$  as inclinações, em relação ao eixo, de raios paraxiais que incidem no eixo passando por N e dele emergem passando por N'.

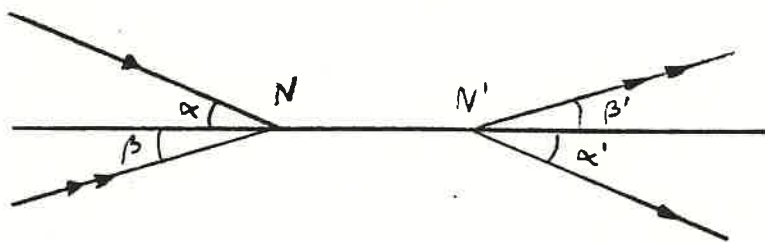


fig. VII.18

Da relação de Lagrange tem-se:

$$n' f' \alpha' = n f \alpha$$

$$n' f' \beta' = n f \beta$$

ou seja:

$$\frac{\beta'}{\beta} = \frac{\alpha'}{\alpha} ;$$

se N e N' forem os pontos nodais procurados será  $\alpha' = \alpha$ , donde, pela relação anterior,  $\beta' = \beta$ ; análogamente, para qualquer outro par de raios conjugados se terá direções de incidências e emergência paralelas; daqui resulta que um feixe de raios que converge em N com uma dada abertura angular emerge de N' com a mesma abertura. Por esta razão N = N' também se chamam pontos de amplificação angular unitária positiva.

A localização dos pontos nodais em relação aos focos e pontos principais pode encontrar-se a partir da construção representada na fig. VII.19 trace-se a linha FH que passa pelo 1º ponto focal e corta o plano principal em H; o raio emergente correspondente será paralelo ao eixo, passando por H;

no 2º plano principal, à mesma altura em relação ao eixo que H; seja B' o ponto em que este raio intersecta o 2º plano focal;

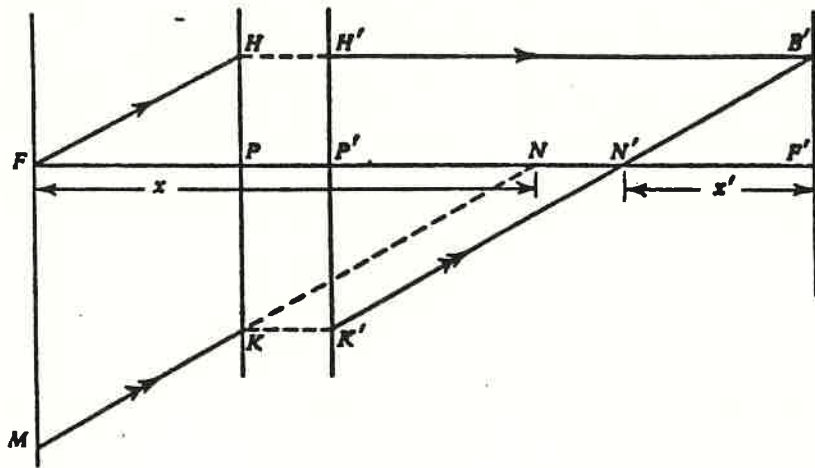


fig. VII. 19

como B' está no 2º plano focal de sua imagem dum feixe de raios paralelos, que terá, necessariamente a inclinação de FH, visto que este raio passa por B' depois da refração. Então, um raio emergente, que passe por B', paralelo a FH, será paralelo à sua direcção de incidência; B'N', que satisfaz esta condição, corta, pois, o eixo no 2º ponto nodal. Seja K' o ponto de intersecção em o 2º plano principal da recta B'N'; K será o ponto em que o raio incidente, que emerge por K'N'B', corta o 1º plano principal. Trace-se uma linha, passando por K, paralela a K'N'B'; corta o eixo em N e o 1º plano focal em M; o raio MK é o raio incidente que se transforma em K'B' e N é evidentemente o 1º ponto nodal.

Da fig. VII. 19 também se pode deduzir as posições dos pontos nodais. Visto que KK'N'N é um paralelogramo

$$NN' = KK' = PP'$$

ou seja a separação dos pontos nodais é igual à dos pontos principais e, re, como no caso representado, o 2º ponto principal está à direita do 1º o mesmo acontece com os pontos nodais.

Por outro lado, como os triângulos FPH e N'FB' são iguais

$$\underline{N'F' = FP = f}$$

e como os triângulos  $FMN$  e  $K'H'B'$  também são iguais:

$$FN = H'B' = P'F' = f'. \quad |$$

Os pontos nodais são, pois, os pontos conjugados para os quais:

$$x = f', \quad x' = f$$

ou seja, a distância do 1º foco ao 1º ponto nodal é igual à segunda distância focal e a distância entre o 2º foco e o 2º ponto nodal é a primeira distância focal. Assim, as posições dos pontos nodais fica completamente determinadas em função das posições dos focos e dos pontos principais.

Se o sistema tiver nas suas extremidades meios com o mesmo índice de refração, será  $f' = -f$  e

$$FN = x = f' = -f = FP,$$

o que significa que P e N coincidem; o mesmo se poderia concluir para P' e N'. Logo, se o sistema tiver nas suas extremidades meios com o mesmo índice de refração os pontos nodais e os pontos principais coincidem.

Chamam-se planos nodais os planos transversais ao eixo que passam pelos pontos nodais; são, evidentemente, planos conjugados para os quais se obtém, pela relação de Lagrange

$$(VII-46) \quad \frac{f'}{f} = \frac{n}{n'}$$

esta relação comparada com (VII-35) mostra que para os planos nodais se tem

$$l = l'$$

IV - Associações de sistemas ópticos

Consideremos dois sistemas ópticos centrados (1) e (2) de pontos cardiais, respectivamente,  $(H_1, H'_1, F_1, F'_1)$  e  $(H_2, H'_2, F_2, F'_2)$ , e de eixos coincidentes. Seja  $\Delta$  a distância entre o foco imagem  $F'_1$  do sistema (1) e o foco objeto  $F_2$  do sistema (2); chama-se-lhe intervalo dos dois sistemas.

Para encontrar, graficamente, a fusão dos pontos cardiais  $(H, H', F, F')$  do sistema resultante, procede-se da seguinte maneira (fig. VII.20):

Traca-se um raio incidente paralelo ao eixo, que emerge do sistema (1) passando pelo foco  $F'_1$  e vai incidir no sistema (2);

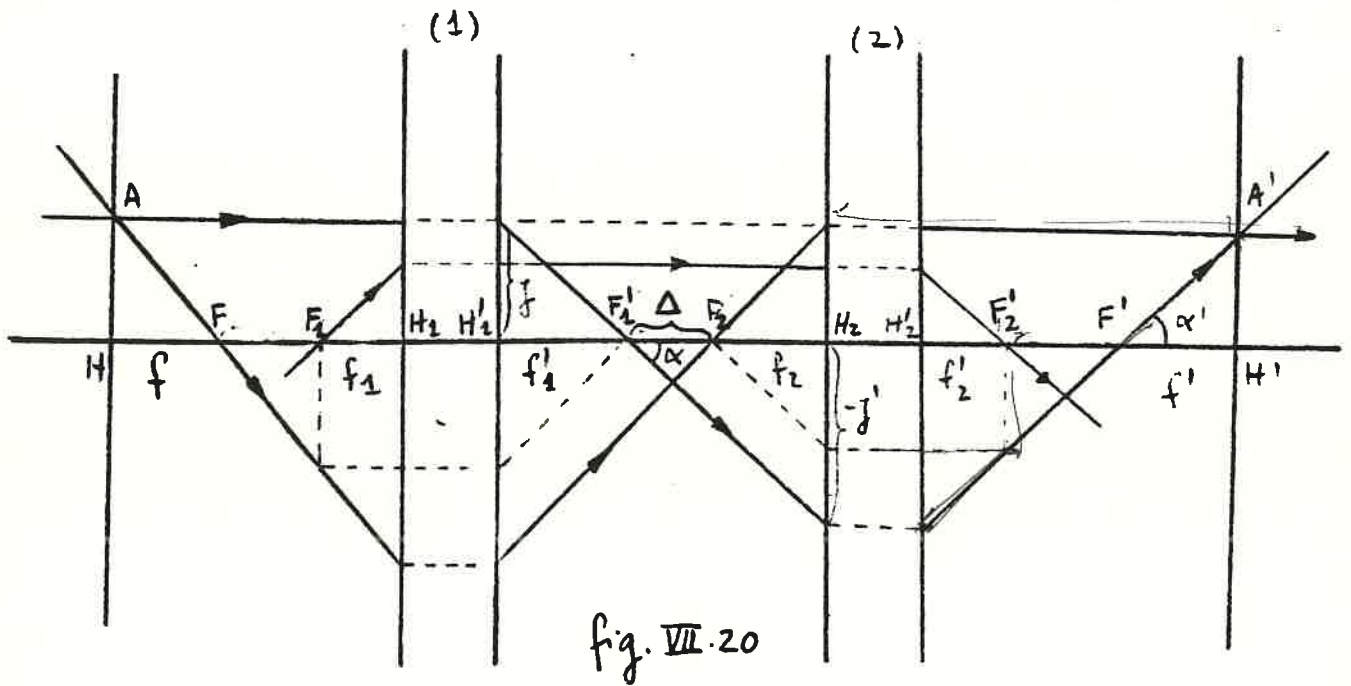


fig. VII.20

determina-se o seu conjugado em relação a este sistema por meio de um raio auxiliar paralelo que passe pelo foco  $F_2$ . O raio emergente do sistema (2) encontra o eixo no ponto  $F'$  que é o foco imagem do sistema resultante e encontra, no ponto  $A'$ , o prolongamento do raio incidente seu conjugado. O plano normal ao eixo que passe por  $A'$  é o plano principal imagem  $H'$  do sistema resultante.

Procura-se depois o raio incidente cujo conjugado no sistema (1) - imagem é paralelo ao eixo e passa pelo ponto  $A'$ . Para isso considera-se invertido o sentido de propagação da luz; os raios paralelos ao eixo, que passam pelo ponto  $A'$  do espaço - imagem, conver-

ponde um raio que passa pelo foco  $F_2$ ; o raio incidente, em função deste em relação ao sistema (2) determina-se por meio de um raio auxiliar paralelo que passa pelo foco  $F'_1$ ; o raio incidente encontra o eixo no ponto  $F$  que é o foco objecto do sistema resultante e encontra, no ponto  $A$ , o prolongamento do raio emergente seu conjugado; o plano normal ao eixo que passa por  $A$  é o plano principal depto,  $H$ , do sistema resultante.

Veremos, agora, como estabelecer as relações entre as distâncias focais  $f, f', f_1, f'_1, f_2, f'_2$  dos sistemas resultante e associados.

Continuando a considerar a aproximação paraxial:

$\text{tg } \alpha \approx \alpha; \text{tg } \alpha' \approx \alpha'$ ; donde:

$$\alpha = \frac{f}{f'_1} \quad -\alpha' = \frac{f}{-f'_1} \quad \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{f'}{f'_1}$$

$$\alpha = \frac{-f'}{-f_2 + \Delta} \quad -\alpha' = \frac{-f'}{f'_2 + \overline{F'_2 F'}} \quad \frac{\alpha}{\alpha'} = - \frac{f'_2 + \overline{F'_2 F'}}{-f_2 + \Delta}$$

Como os pontos  $F'_2$  e  $F'$  são conjugados em relação ao sistema (2):

$$\overline{F'_2 F'} \times (-\Delta) = f_2 f'_2, \quad \text{donde: } \overline{F'_2 F'} = - \frac{f_2 f'_2}{\Delta}$$

Substituído esta expressão de  $\overline{F'_2 F'}$  na expressão de  $\frac{\alpha}{\alpha'}$ :

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = - \frac{f'_2 - \frac{f_2 f'_2}{\Delta}}{-f_2 + \Delta} = - \frac{\frac{f'_2 (\Delta - f_2)}{\Delta}}{-f_2 + \Delta} = - \frac{f'_2}{\Delta}$$

e, igualando à primeira expressão obtida para  $\frac{\alpha}{\alpha'}$ :

$$\frac{f'}{f'_1} = - \frac{f'_2}{\Delta}, \quad \text{ou}$$

(VII-47)

$$\boxed{f' = - \frac{f'_1 f'_2}{\Delta}}$$

n

Tenhamos agora em conta que pelo facto de os pontos  $F_1$  e  $F_2$  serem conjugados em relação ao sistema (1), temos:

$$\overline{F_1 F} \times \Delta = f_1 f'_1 \quad \overline{F_2 F} = \frac{f_2 f'_2}{\Delta} ;$$

por os pontos  $F'_1$  e  $F'$  serem conjugados em relação ao sistema (2):

$$(-\Delta) \cdot \overline{F'_2 F'} = f_2 f'_2 \quad \overline{F'_2 F'} = \frac{f_2 f'_2}{-\Delta} ;$$

dos pontos  $F_1$  e  $F'_2$ , conjugados em relação ao sistema resultante:

$$\overline{F F_1} \cdot \overline{F' F'_2} = f f' \quad , \text{ ou seja:}$$

$$(VII-48) \quad f f' = \frac{f_1 f'_1 f_2 f'_2}{-\Delta^2} ;$$

substituído na expressão (VII-48) o valor de  $f'$  dado por (VII-47),

$$(VII-49) \quad \boxed{f = \frac{f_1 f_2}{\Delta}}$$

Note-se que esta expressão de  $f$  também se poderia ter obtido, por processo análogo ao que utilizámos para calcular  $f'$  - partir das inclinações sobre o eixo do raio incidente  $AF$  e do seu conjugado em relação ao sistema (1).



# CAP. VIII - INTERFERÊNCIAS

## VIII. 1 - Introdução

A teoria das interferências ópticas baseia-se no princípio de superposição dos campos electromagnéticos; de acordo com este princípio, o campo eléctrico  $\vec{E}$  produzido num ponto por várias fontes é dado pela soma:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$$

onde  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots$  são os campos criados, nesse ponto, pelas diferentes fontes, separadamente. O mesmo é válido para os campos magnéticos.

Consideremos, então, duas ondas planas, harmónicas, polarizadas linearmente, com a mesma frequência  $\omega$ . Os campos eléctricos serão:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{o1} e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1)}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{o2} e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_2)}$$

$\vec{k}_1$  e  $\vec{k}_2$  são os vectores de onda, com a direcção da propagação da onda respectiva.

Se a diferença de fase,  $\phi_1 - \phi_2$ , for constante, as duas fontes dizem-se coerentes; as ondas resultantes dizem-se também, coerentes.

Como se sabe, a intensidade (média) num ponto é proporcional ao quadrado da amplitude do campo nesse ponto; teremos, então, a menos de um factor constante:

$$\begin{aligned}
 I &= |\vec{E}|^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}^* = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1^* + \vec{E}_2^*) \\
 &= \vec{E}_{o1}^2 + \vec{E}_{o2}^2 + 2 \vec{E}_{o1} \cdot \vec{E}_{o2} \cos \theta \\
 &= I_1 + I_2 + 2 \vec{E}_{o1} \cdot \vec{E}_{o2} \cos \theta
 \end{aligned}$$

$$\text{com } \theta = \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \phi_1 - \phi_2.$$

O termo  $2 \vec{E}_{o1} \cdot \vec{E}_{o2} \cos \theta$  é o termo de interferência, que nos mostra que a intensidade resultante pode ser, conforme o valor de  $\theta$ , maior ou menor que  $I_1 + I_2$ . Uma vez que  $\theta$  depende de  $\vec{r}$  vão aparecer - em variações espaciais da intensidade; estas variações correspondem às franjas de interferência que se observam quando se combinam dois feixes de luz coerentes.

Se as fontes, origem das duas ondas, forem incoerentes,  $\phi_1 - \phi_2$  variará, no tempo, de modo aleatório; se o intervalo de tempo de uma observação,  $\Delta t$ , for muito maior que o intervalo de tempo,  $\delta t$ , durante o qual  $\phi_1 - \phi_2$  mantém o seu valor, o valor médio de  $\cos \theta$  durante  $\Delta t$  será nulo e não se observará figuras de interferência. Afronte-se, a título de exemplo, que para as lâmpadas de descarga em gás (lâmpadas de mercúrio, de neon...) se tem  $\delta t \sim 10^{-8} \text{ s}$ , e para os lasers  $\delta t \sim 10^{-3} \text{ s}$ .

### VIII.2 - Experiência de Young

A experiência clássica de demonstração de interferência de luz foi realizada pela primeira vez por Thomas Young em 1802.

Na experiência original a luz do Sol era utilizada como fonte e passava, primeiro por um orifício  $S_1$ , e, depois, a uma distância apreciável, por dois

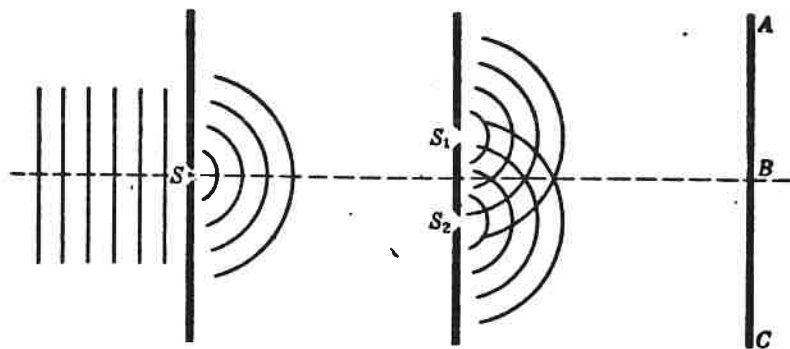


fig. VIII.1

orifícios  $S_1$  e  $S_2$ . Os dois conjuntos de ondas esféricas emergindo de  $S_1$  e  $S_2$  interferem provocando no alvo AC uma figura de intensidade variável.

A análise da experiência de Young, que nos permitirá calcular a intensidade nos pontos do alvo AC, baseia-se no cálculo da diferença de fase entre as duas ondas que chegam a cada ponto. Admitindo que as ondas são esféricas com um factor de fase do tipo  $e^{i(kr - \omega t)}$ , a diferença de fase,  $\delta$ , no ponto P, será dada por:

$$\delta = k(d_2 - d_1) = k\Delta \quad \text{com } \Delta = d_2 - d_1$$

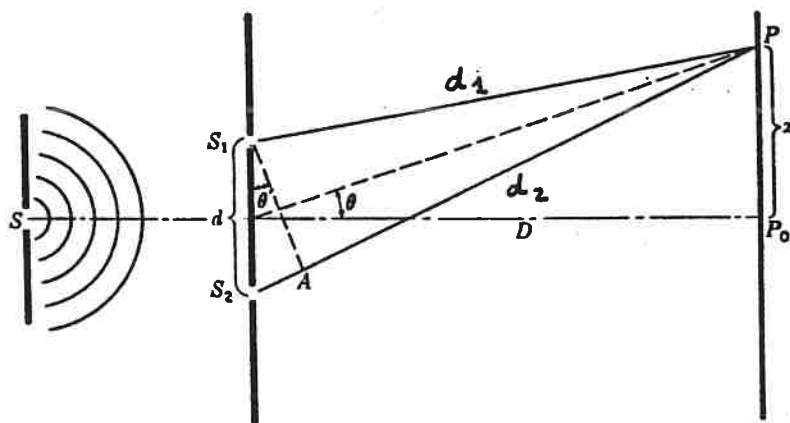


fig. VIII.2

Como os orifícios  $S_1$  e  $S_2$  estão simetricamente dispostos em relação a S, as ondas partem em fase desses orifícios.

Nas condições experimentais, a distância,  $D$ , do alvo ao anteparo onde se encontram  $S_1$  e  $S_2$ , é muito maior que a distância,  $d$ , entre os dois orifícios; nestas condições, podemos fazer as aproximações:

$$\Delta \approx d \sin \theta \approx d \frac{x}{D} \quad e \quad \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \approx \frac{2\pi}{\lambda} \frac{dx}{D} ;$$

os máximos de intensidade correspondem a ter:

$$\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots, \pm 2m\pi \quad \text{com } m \text{ inteiro}$$

em ref:  $\frac{2\pi}{\lambda} \frac{dx}{D} = 2m\pi$  donde:

$$\frac{dx}{D} = m\lambda \quad \Rightarrow \quad \underline{x = m\lambda \frac{D}{d}} ;$$

os valores mínimos de intensidade correspondem a:

$$\delta = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots, (2m+1)\pi \quad m \text{ inteiro}$$

em ref:  $\frac{2\pi}{\lambda} \frac{dx}{D} = (2m+1)\pi$  donde:

$$\frac{dx}{D} = \frac{2m+1}{2} \lambda \quad \Rightarrow \quad \underline{x = (m + \frac{1}{2}) \lambda \frac{D}{d}} .$$

O número inteiro  $m$  que caracteriza uma franja brilhante chama-se ordem de interferência.

De acordo com as equações atrás escritas, a distância, no alvo, entre duas franjas sucessivas, que se obtêm variando  $m$  de uma unidade em qualquer das equações vale:  $\lambda D/d$ ; esta distância, chamada interfranja, varia pois proporcionalmente a  $D$  e a  $\lambda$  e é inversamente proporcional à distância entre as duas origens; a determinação da interfranja permite calcular o comprimento de onda,  $\lambda$ , desde que as outras distâncias sejam bem conhecidas.

### VIII.3 Outros dispositivos de obtenção de figuras de interferência

#### a) Biprismo de Fresnel

Como se vê na figura VIII.3 o duplo prisma refra-

ta o feixe de luz proveniente da fonte  $S$  dando origem a dois feixes que parecem ter origem nas "fontes"  $S_1$  e  $S_2$  (fig. VIII.3)

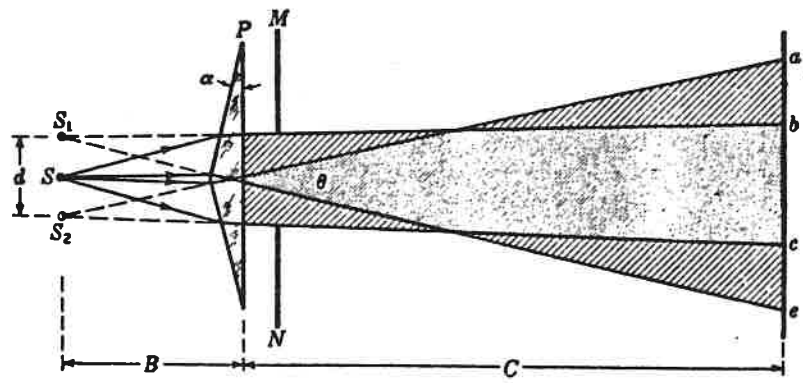


fig. VIII.3

se os anteparos M e N estão colocados na posições indicadas, só haverá franjas de interferência na região bc. Este dispositivo também permite determinar o c.d.o. da luz utilizada desde que se conheçam a distância d entre as fontes virtuais, B+C entre as fontes e o alvo e a interfranja  $\Delta x$ ; será:

$$\lambda = \frac{d \Delta x}{B+C}$$

### b) Espelhos de Fresnel

Neste dispositivo a luz é reflectida em dois espelhos planos ligeiramente inclinados um em relação ao outro. Os espelhos produzem duas imagens virtuais de fonte S como se vê na fig. VIII.4. Estas imagens actuam de modo

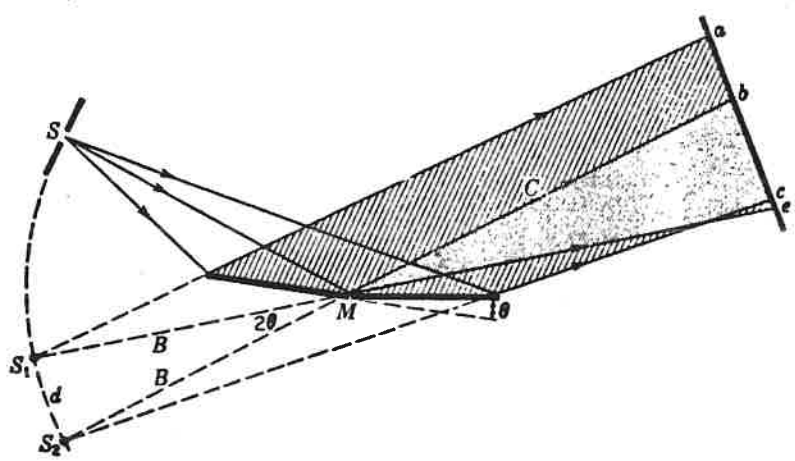


fig. VIII.4

do análogo ao das imagens formadas no biprismo e as franjas de interferência são observadas na região  $bc$  em que os feixes reflectidos se sobrepõem; aqui, também, o e.d.o.,  $\lambda$ , pode ser calculado pela expressão:

$$\lambda = \frac{d \Delta x}{B + c}$$

### c) Espelhos de Lloyd

A interferência é produzida pela sobreposição do feixe proveniente diretamente de fenda (sem reflexão) e do

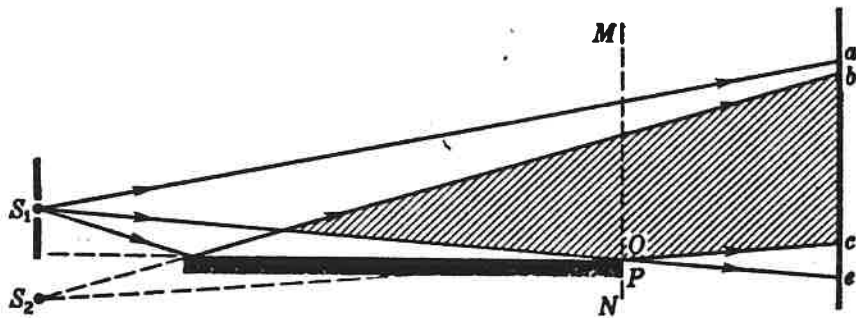


fig. VIII.5

feixe proveniente da imagem desta obtida num espelho plano (fig. VIII.5)

Todos os exemplos de dispositivos que aqui apresentamos para obter franjas de interferência são do tipo dito de "divisão da frente de onda". Outro tipo é o dito de "divisão da amplitude"; um exemplo de dispositivo deste último tipo é o interferômetro de Michelson que vamos estudar de seguida.

### VIII-4 - Interferômetro de Michelson

Este interferômetro está representado esquematicamente na fig. VIII.6; a suas peças principais são dois espelhos planos  $M_1$  e  $M_2$ , extremamente polidos, e

e duas lâminas plano-paralelas  $G_1$  e  $G_2$ ; a primeira destas lâminas é levemente espelhada na sua 2.<sup>a</sup> face o que é re-

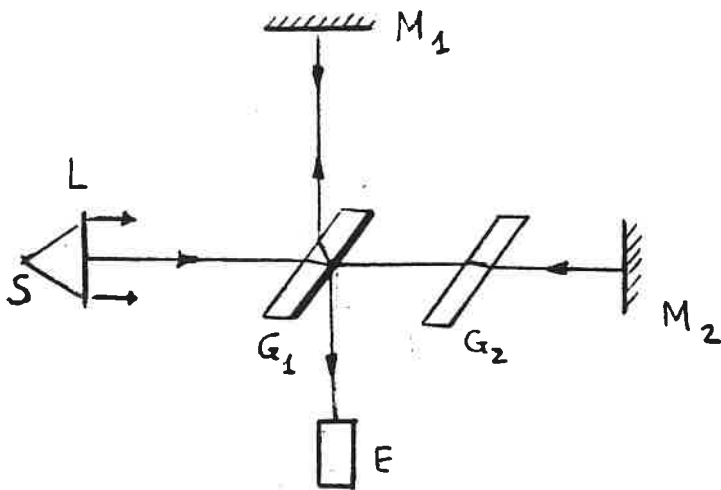


fig. VIII.6

presentado pelo espessamento do traço. A luz, proveniente da fonte  $S$ , ao incidir na lâmina  $G_1$  sob um ângulo de  $45^\circ$  é parcialmente refletida na direção do espelho  $M_1$  e parcialmente transmitida na direção de  $M_2$ ; há aqui, pois, uma divisão de amplitude. Em qualquer dos espelhos a luz incide segundo a normal, sendo refletida na mesma direção e sentido contrário; a luz refletida em  $M_1$  atravessa  $G_1$  uma terceira vez antes de atingir o dispositivo de observação  $E$ , e a refletida por  $M_2$ , atravessa  $G_2$  segunda vez e é refletida em  $G_1$  para aí também atingir  $E$ . A lâmina  $G_2$  tem por fim tornar igual o percurso no vidro para os dois raios (lâmina compensadora); isto é especialmente importante quando se trabalha com luz branca. O espelho  $M_1$  pode mover-se paralelamente a si próprio e o espelho  $M_2$  pode rodar de modo a tornar-se perfeitamente perpendicular a  $M_1$ .

Da sobreposição dos dois feixes coerentes, refletidos por  $M_1$  e  $M_2$ , resultam franjas de interferência cujo aspecto depende da inclinação relativa dos espelhos.

a) Espelhos perpendiculares; franjas de igual inclinação

Suponhamos que a luz incidente é monocromática

e suporhamos o espelho real,  $M_2$ , substituído pela sua imá-  
gem virtual,  $M'_2$ , obtida por reflexão em  $G_2$  (fig. VIII.7); como

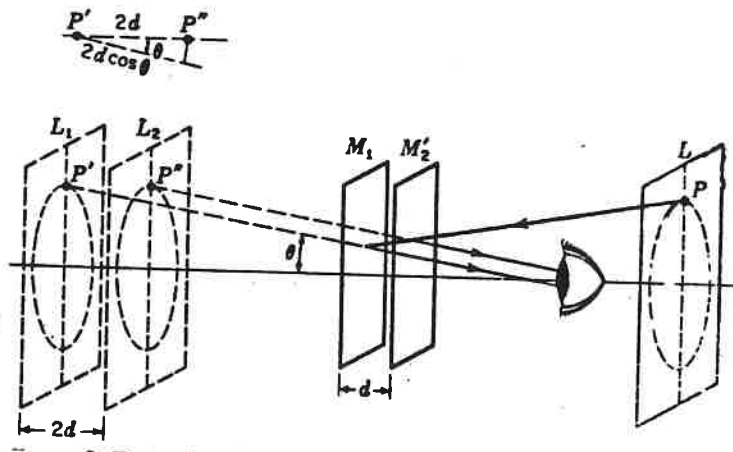


fig. VIII.7

os espelhos  $M_1$  e  $M_2$  são perpendiculares,  $M_1$  e  $M'_2$  serão pa-  
ralelos. Analogamente, a fonte estendida,  $L$ , pode considera-  
-se colocada por trás do observador com imagens  $L_1$  e  $L_2$  obti-  
das em  $M_1$  e  $M'_2$ . Estas fontes virtuais são coerentes, sendo a fase  
de pontos correspondentes, a mesma, em cada instante. Se for  
 $d$  a separação  $M_1 M'_2$ , as fontes virtuais estão separadas por  
 $2d$ .

Se  $d$  for igual a um número inteiro de meios com-  
primentos de onda,  $m \frac{\lambda}{2}$ , a diferença de percurso  $2d$  será  
igual a um número inteiro de comprimentos de onda e  
todos os raios refletidos segundo a normal aos espelhos esta-  
rão em fase; os raios inclinados, porém, normalmente não  
estarão em fase.

A diferença de percurso de dois raios provenientes dos  
pontos  $P'$  e  $P''$ , imagens de  $P$ , é  $2d \cos \theta$  em que  $\theta$  é  
o ângulo de qualquer um dos raios luminosos, prove-  
nientes de  $P'$  ou  $P''$ , com o eixo. Teremos então máximos  
de intensidade para os ângulos  $\theta$  que satisfazem a relação:

$$(VIII.1) \quad 2d \cos \theta = m \lambda$$

Visto que para cada conjunto de valores  $d$ ,  $m$  e  $\lambda$ ,



o ângulo  $\theta$  é constante, os máximos aparecerão na forma de círculos em torno do perpendicular aos espelhos tirado do dispositivo de observação.

Franjas de interferência do tipo das aqui apresentadas, em que a diferença de fase dos feixes que interferem é determinada pelo seu ângulo de inclinação,  $\theta$ , chamam-se franjas de igual inclinação.

A expressão (VIII.1) mostra-nos que a franja de ordem zero, correspondente a um ângulo  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , e que à medida que nos aproximamos do centro de figura de interferência o valor de  $m$  correspondente às sucessivas franjas é crescente, isto é, as franjas vão sendo de ordem sucessivamente mais elevada. A mesma expressão permite-nos, ainda, concluir, que, se aumentarmos  $d$ , o que se consegue movendo  $M_1$  paralelamente a si próprio, o ângulo  $\theta$ , correspondente a um dado  $m$ , aumenta, podendo, assim, ser observadas franjas de ordem cada vez mais elevada; é como se do centro de figura fossem irrompendo anéis, uns atrás dos outros.

Como no centro a condição de máximos é:

$$2d = m\lambda \quad (\cos\theta = 1)$$

fácilmente se vê que um novo anel surge quando a espessura  $d$  aumenta de  $\frac{\lambda}{2}$ .

Se fizermos diminuir  $d$ , aproximando o espelho  $M_1$  de  $M_2$ , as conclusões são contrárias, os anéis parecem ser "engolidos" no centro, e quando  $M_1$  e  $M_2$  coincidem, a figura de interferência desaparece porque os raios estão em fase para todos os ângulos  $\theta$ .

Na fig. VIII.8 (a-e) pode ver-se o aspecto de figuras de interferência obtidas num interferômetro de Michelson

nas condições descritas, correspondendo a figura central, (c), ao caso  $d=0$  e as figuras (b) e (d) a valores de  $d$  inferiores aos das figuras (a) e (e).

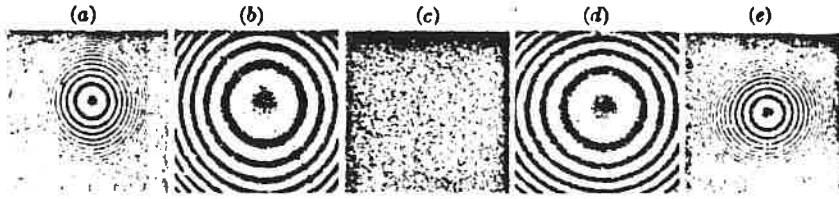


fig. VIII.8

b) Espelhos não perpendiculares; franjas de igual espessura

Se os espelhos  $M_2'$  e  $M_1$  não estiverem perfeitamente paralelos ainda é possível observar franjas de interferência. Neste caso, o espaço entre os espelhos tem a forma de cunha como se pode ver na fig. VIII.9. Os dois

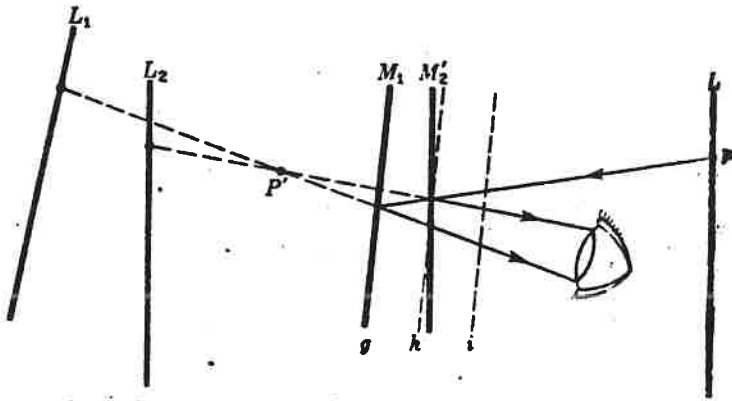


fig. VIII.9

raios luminosos que atingem o observador (correspondentes a um mesmo ponto  $P$  da fonte), já não são paralelos e parecem provir do ponto  $P'$ ; as franjas de interferência que se observam são, agora, praticamente retas, porque a variação da diferença de percurso é devida, sobretudo, à variação de espessura da camada de ar entre os espelhos; em efeito, em uma camada em forma de cunha, os pontos de igual espessura encontram-se ao longo de linhas retas paralelas à aresta da cunha. Note-se, no entanto, que se  $d$  tiver um valor

apreciável, as franjas não são rigorosamente retas, porque, entã, a inclinação também intervém para a diferença de percurso.

Franjas de interferência como as que aqui nos aparecem em que a principal razão de diferença de percurso resulta dumã variação de espessura, designam-se por franjas de igual espessura.

### VIII. 5 - Interferências por reflexões múltiplas

Alguns dos mais belos efeitos obtidos por interferência resultam de múltiplas reflexões de luz entre duas superfícies de uma lâmina delgada de material transparente; são observadas, por exemplo, em uma fina camada de óleo na água, bolãs de sabão, etc.

#### a) Lamada plano-paralela

Consideremos um raio luminoso que incide numa camada plano-paralela num ponto A e se representa na fig. VIII. 10; uma parte desse raio será reflectida (raio 1)

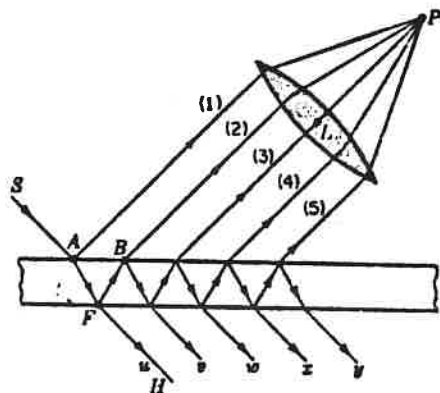


fig. VIII. 10

e outra parte reflectida na direcção AF; esta última, chega a F e, em parte, reflectida para B, em parte reflectida para H; em B haverá nova reflexão e nova refração. A continuação deste processo dará origem a dois feixes de raios paralelos, um de cada lado da camada; em qualquer

destes feixes a intensidade diminuirá, rapidamente, de um raio para o seguinte.

Se o feixe de raios paralelos (do lado "de cima" da camada, for levado a convergir em  $P$ , por meio da lente  $L$ , cada raio terá percorrido uma distância diferente e as diferenças de fase podem ser de modo a produzirem interferências construtivas ou destrutivas.

Para calcular a diferença de fase entre estes raios vamos começar por calcular a diferença de percurso óptico (produto do índice de refração pela distância percorrida, para um par de raios sucessivos tais como (1) e (2).

Seja, como representado na fig. VIII.11,  $d$  a espessura da camada,  $n$  o seu índice de refração,  $\lambda$  o c.d.o da luz e  $\phi$  e  $\phi'$  os ângulos de incidência e de refração.

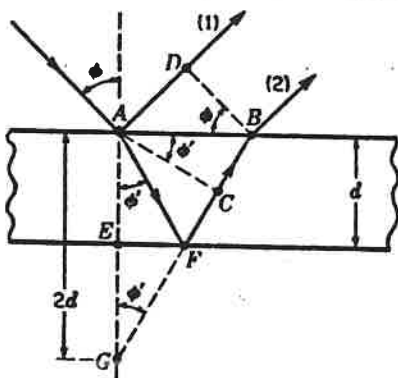


fig. VIII. 11

Se  $\overline{BD}$  for perpendicular ao raio (1), os percursos ópticos a partir de  $\underline{B}$  e de  $\underline{D}$  até ao foco de lente serão iguais; a partir de  $\underline{A}$ , o raio (2) tem o percurso  $\overline{AFB}$  na camada e o raio (1) o percurso  $\overline{AD}$  no ar; a diferença de percursos ópticos será:

$$\Delta = n(\overline{AFB}) - \overline{AD}.$$

Se  $\overline{BF}$  for prolongada até intersectar a linha  $\overline{AE}$  em  $\underline{G}$ , será  $\overline{AF} = \overline{GF}$ , porque, os ângulos, de incidência e de reflexão, na face inferior são iguais; teremos então:

$$\Delta = n(\overline{GB}) - \overline{AD} = n(\overline{GC} + \overline{CB}) - \overline{AD}$$

Sendo a linha  $\overline{AC}$  perpendicular a  $\overline{FB}$ , as linhas  $\overline{AC}$  e  $\overline{DB}$  representam duas posições, sucessivas, duma superfície de onda; como os percursos ópticos devem ser iguais, para qualquer raio, entre duas superfícies de onda, pode escrever-se:

$$n \overline{CB} = \overline{AD}$$

sendo:

$$\Delta = n \overline{GC} = n \times 2d \cos \phi'$$

Se esta diferença de percursos ópticos for igual a um número inteiro de comprimentos de onda, era de esperar que os raios (1) e (2) chegassem, em fase, ao ponto P e produzissem um máximo de intensidade; temos, no entanto, que ter em conta, o facto de que, na reflexão na superfície de separação de um meio menos denso para um meio mais denso (de maior índice de refração) há uma mudança de fase de  $\pi$ , como pode ser explicado pela Óptica electromagnética; ora, o raio (1) sofre uma reflexão deste tipo, o que significa que:

$$(VIII.2) \quad 2n d \cos \phi' = m \lambda \quad \text{condição de mínimo}$$

sendo:

$$(VIII.3) \quad 2n d \cos \phi' = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda \quad \text{condição de máximo}$$

Vejamos o que se passa com os raios (3), (4), (5)... Visto que a geometria é a mesma, a diferença de percurso entre os raios (3) e (2) será, também, dada por:  $2n d \cos \phi'$ ; mas, visto que agora não há reflexão com mudança de fase, se se verificar a condição,  $2n d \cos \phi' = m \lambda$ , o raio (3) estará em fase com (2), e o mesmo acontecerá para os sucessivos pares.

Logo, se se verificar:

$$\underline{2nd \text{ cos } \phi' = m \lambda}, \text{ teremos } \begin{cases} (1) \text{ e } (2) \text{ em oposição de fase} \\ (2), (3), (4), \dots \text{ em fase} \end{cases}$$

se se verificar:

$$\underline{2nd \text{ cos } \phi' = (m + \frac{1}{2}) \lambda} \begin{cases} (1) \text{ e } (2) \text{ em fase} \\ (3), (5), (7), \dots \text{ em oposição} \\ \text{de fase com } (2), (4), (6) \dots \end{cases}$$

Visto que (2) é mais intenso que (3), (4) mais intenso que (5), etc., estes pares não se anulam, e visto que a série mais forte está em fase com (1), que é o mais forte de todas, teremos, para:

$$\underline{2nd \text{ cos } \phi' = (m + \frac{1}{2}) \lambda} \quad \underline{\text{máximo de intensidade}}$$

Veja-nos o que se passa com o mínimo de intensidade. O raio (2) está em oposição de fase com (1) mas como (1) tem uma amplitude muito maior que (2) não se anulam completamente; porém, como vamos ver, a soma de (3), (4), (5), ..., todos em fase com (2), corresponde de uma amplitude que vai compensar, exactamente, a diferença de amplitudes entre (1) e (2).

Seja  $a$  a amplitude da onda incidente,  $r$  o coeficiente de reflexão (o mesmo quer na superfície superior, quer na inferior),  $t$  e  $t'$  os coeficientes de transmissão, respectivamente, na passagem do meio menos denso para o mais denso, e na passagem do meio mais denso para o menos denso; teremos, então, para as sucessivas ondas, as amplitudes representadas na fig. VIII. 12.

Somando as amplitudes de todas as ondas que abandonam a face superior, excepto o primeiro raio:

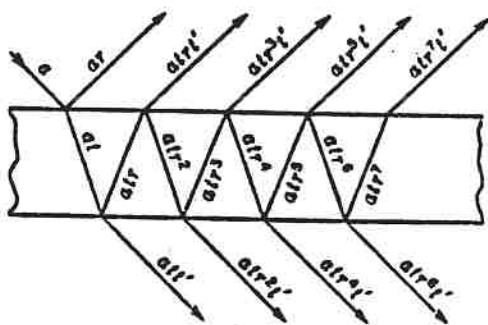


fig. VIII · 12

$$A = at r t' + a t r^3 t' + a t r^5 t' + a t r^7 t' + \dots$$

$$= a t r t' (1 + r^2 + r^4 + r^6 + \dots)$$

como  $r < 1$ , a série geométrica tem uma soma finita

$$S = \frac{1}{1 - r^2}, \text{ donde:}$$

$$A = a t r t' \frac{1}{1 - r^2};$$

ora, pode provar-se\* que se tem:  $t t' = 1 - r^2$ , logo

$$A = a r$$

que é a amplitude do raio (1); havendo, então, interferência completamente destrutiva.

Da condição de máximos que acabamos de apresentar, vemos que a cada franja brilhante, (um certo valor de  $m$ ) corresponde um valor bem determinado de  $\phi$ , de modo que a franja terá a forma de um arco de circunferência com centro no pé de perpendicular traçada do olho do observador para o plano de incidência; temos, pois, franjas de igual inclinação.

\* ver: "Fundamentals of Optics", F.A. JENKINS and H.G. WHITE, Mc Graw Hill, 3ª edição, pag. 208

Repare-se, que, para que se possam observar franjas de interferência, é necessário ter uma fonte estensa. Com efeito, se tivéssemos uma fonte puntual muito distante, teríamos apenas um valor para o ângulo de incidência, e o feixe de raios paralelos que atingiria o observador, teria apenas uma direção (a que corresponde à lei da reflexão); o observador veria, apenas, um ponto, brilhante no escuro conforme a diferença de fase correspondente a esse ângulo de incidência.

Se os raios que emergem pelo lado inferior da camada também forem levados a convergir para, igualmente, lugares e figuras de interferência; como, neste caso, não há mudança de fase devido a reflexão, a equação:

$$\underline{2 n d \cos \phi' = m \lambda} \quad \text{é condição de } \underline{\text{máximos}}$$

e a equação:

$$\underline{2 n d \cos \phi' = (m + \frac{1}{2}) \lambda} \quad \text{é condição de } \underline{\text{mínimos}}$$

Quando se verifica a condição de máximo os raios u, v, w, ..... estão todos em fase; quando se verifica a condição de mínimo estão, alternadamente, em oposição de fase. Se o coeficiente de reflexão, r, for baixo, (como no caso de vidros não espelhados), a amplitude de u é muito maior que as amplitudes de todos os outros raios, de modo que os mínimos nunca são de intensidade nula.

As intensidades, reflectida e transmitida, para uma camada com coeficiente de reflexão  $r=0,2$ , estão representadas na fig. VIII. 13, em função de diferença de fase  $\delta = \kappa \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$ ; a condição de máximo de luz transmitida (mínimo de reflectida),  $\Delta = m \lambda$ , corresponde a  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} m \lambda = m \times 2\pi$ .



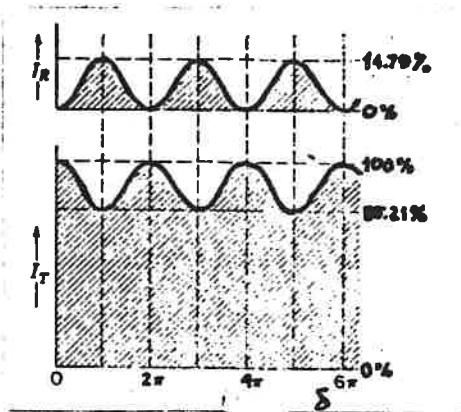


fig. VIII. 13

Como se empreeende pela observação de fig. VIII. 13 as franjas de interferência no feixe transmitido serão muito menos contrastadas que no feixe reflectido.

### b) Camada em forma de cunha

Se a camada não fôr plano-paralela, como no caso da fig. VIII. 14, os raios que interferem não são paralelos;

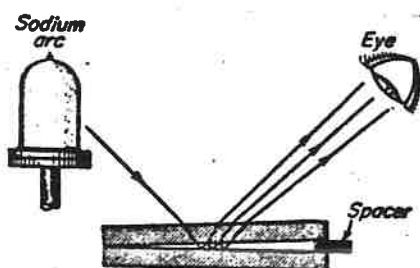


fig. VIII. 14

as franjas resultantes (semelhantes às obtidas no interferómetro de Michelson quando os espelhos não estão paralelos), se as duas superfícies não são planas (camada em forma de cunha), serão, praticamente, rectas seguindo as linhas de igual espessura. A diferença de percurso para um dado par de raios será dada, praticamente, por  $2nd \cos \phi'$ , e, se nos referirmos na situação de observação praticamente seguindo a normal ( $\cos \phi' \approx 1$ ), os máximos corresponderão a:

$$2nd = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda$$

Ao passar de uma franja para a seguinte m aumenta de

uma unidade, correspondendo a uma variação  $\frac{\lambda}{2}$  da espessura óptica da camada  $nd$ .

As franjas obtidas com este dispositivo, são, como se compreende do que foi dito atrás franjas de igual espessura. Têm grande interesse prático porque permitem fazer o teste do grau de perfeição de uma superfície plana; com efeito, se tivermos uma superfície perfeitamente plana e outra que o não seja, as franjas, obtidas no camada de ar entre elas, serão de forma irregular, a correspondendo as regiões de igual espessura,  $d$  (fig. VIII. 15).

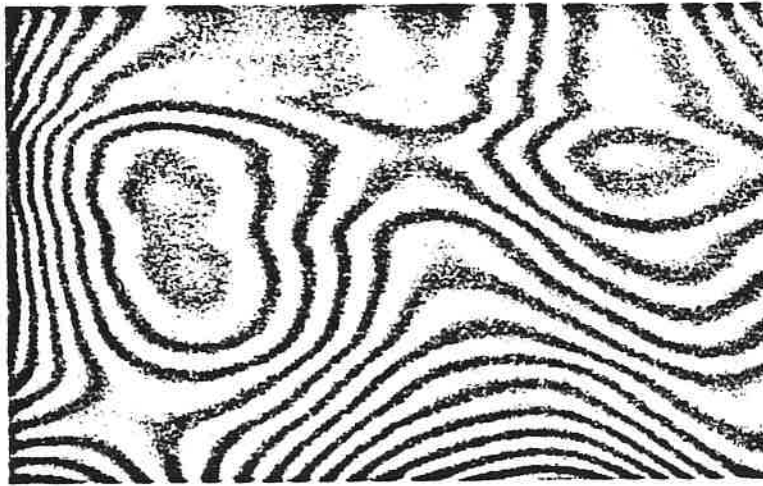


fig. VIII. 15.

### c) Anéis de Newton

As franjas chamadas anéis de Newton são outro exemplo de franjas de igual espessura; são observadas no camada de ar entre uma superfície plana de vidro e a superfície esférica de um lente convexa que contactam no ponto central; as franjas são circulares em torno do ponto de contacto.

Sendo a observação feita na perpendicular a condição de mínimos será:

$$(VIII.4) \quad 2d = m \lambda$$

( $m \approx 1$  por se tratar de uma camada de ar)

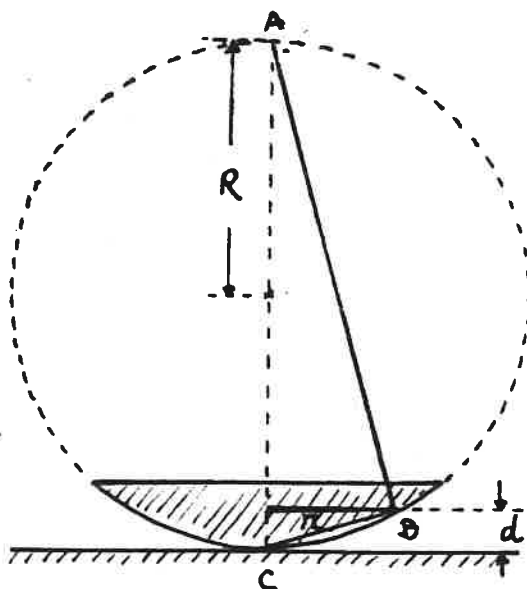


fig. VIII. 16

em relação à hipotenusa e é o meio proporcional entre os segmentos que determina na hipotenusa. Como  $d \ll R$ , vem:

$$2Rd \approx r^2 \quad \text{ou} \quad d \approx \frac{r^2}{2R}$$

que, substituído na equação (VIII. 4), dá:

$$2 \times \frac{r_m^2}{2R} = m\lambda, \quad \text{ou}$$

$$(VIII. 5) \quad \lambda = \frac{r_m^2}{mR}$$

que dá o comprimento de onda de luz em função do raio,  $r_m$ , do anel escuro de ordem  $m$ .

Nas condições que acabamos de descrever a mancha central é escura devido à mudança de fase,  $\Pi$ , que ocorre se a reflexão é na superfície de separação de um meio mais denso para um meio mais denso.

Thomas Young introduziu uma modificação nas experiências utilizando, na placa inferior, um material de índice de refração superior ao do da lente e enchendo o

Se for  $R$ , muito grande, o raio de curvatura da superfície esférica (fig. VIII. 16), o valor de  $r$ , raio do anel de Newton que corresponde à espessura  $d$ , será dado por:

$$(2R - d) \cdot d = r^2$$

visto que, num triângulo retângulo (triângulo ABC), a altura

espaço entre elas com um óleo de índice de refração intermediário; assim, ambas as reflexões são com mudança de fase e a mancha central passa a ser brilhante.

A luz transmitida também apresenta anéis de interferência; estes anéis são complementares dos da luz refletida, sendo, portanto, a mancha central brilhante, quando na refletida ela é escura; pelas razões já apresentadas em VIII.5 a) o contraste entre os anéis escuros e brilhantes é fraco.

#### d) Interferômetro de Fabry-Perot

Este interferômetro utiliza interferência por reflexão múltipla na camada de ar entre duas placas rigorosamente paralelas, parcialmente refletoras, de vidro ou quartzo. (fig. VIII.17).

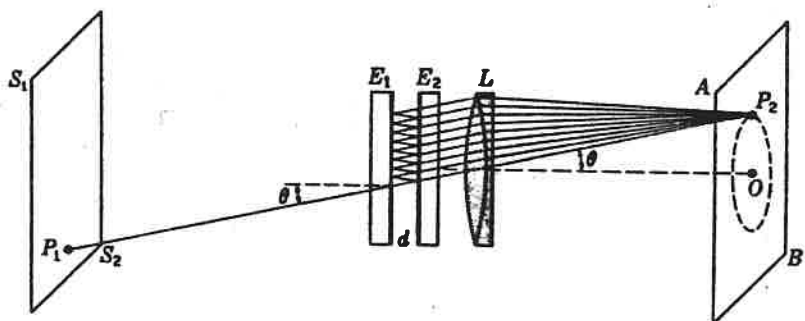


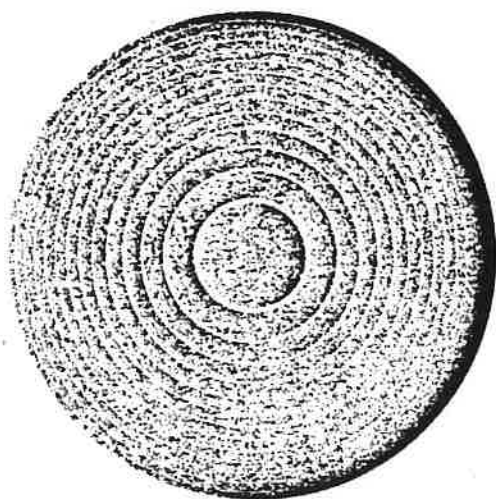
fig. VIII.17

A luz, monocromática, proveniente da fonte extensa ( $S_1, S_2$ ) vai da origem, depois de múltiplas reflexões, a feixes transmitidos de raios paralelos que são levados a convergir por meio do lente L; assim, o raio proveniente de  $P_1$ , que incide segundo um ângulo  $\theta$ , dá origem a um feixe de raios paralelos com o mesmo ângulo de inclinação, que vai convergir no ponto  $P_2$ . A condição de máximos, seja, considerando  $n=1$  (para o ar),

$$2d \cos \theta = m \lambda$$

Esta condição será satisfeita por todos os pontos de circunferência que passa por  $P_2$  e tem centro em  $O$ , interseção do eixo do lente com o eixo. Quando  $\theta$  diminuir,  $\cos \theta$  aumenta até que se atin-

ge um outro máximo quando  $n$  aumenta de uma unidade; e assim, obter uma sucessão de anéis brilhantes em centros em  $O$ , como está representado na fig. VIII. 18.



FABRY-PEROT fringes.

fig. VIII. 18

Se a distância  $d$  entre as placas pode variar deslocando uma delas paralelamente a si própria, o dispositivo descrito designa-se por interferômetro de Fabry-Perot; se a distância  $d$  é mantida perfeitamente fixa designa-se por gradeado de Fabry-Perot.

## APÊNDICE III

### NOÇÕES GERAIS SOBRE DIFERENCIAIS E INTEGRAIS

#### 1. Infinitamente pequenos

A função  $u(x)$  diz-se infinitamente pequeno ou infinitésimo, quando  $x$  tende para  $a$ , se  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$ .

Exemplos :

$$\begin{array}{lll} x^2 - 9 & (\text{quando } x \rightarrow 3) & \log x \quad (\text{quando } x \rightarrow 1) \\ \frac{x-1}{x+3} & (\text{quando } x \rightarrow 1) & \frac{1}{x} \quad (\text{quando } x \rightarrow +\infty) \\ e^x & (\text{quando } x \rightarrow -\infty) & \text{sen } x \quad (\text{quando } x \rightarrow 0) \end{array}$$

O inverso  $1/u(x)$  de um infinitamente pequeno, quando  $x \rightarrow a$ , é um infinitamente grande: tende para infinito quando  $x \rightarrow a$ .

Se uma função  $f(x)$  tem limite finito  $A$ , quando  $x \rightarrow a$ , então a função  $u(x) = f(x) - A$  é um infinitamente pequeno, quando  $x \rightarrow a$ , e reciprocamente. Se duas funções  $f(x)$  e  $g(x)$  têm o mesmo limite finito, quando  $x \rightarrow a$ , então a sua diferença  $v(x) = f(x) - g(x)$  é um infinitamente pequeno quando  $x \rightarrow a$ .

Se  $u(x)$  e  $v(x)$  tendem ambas para zero quando  $x \rightarrow a$ , dizem-se infinitamente pequenos simultâneos, quando  $x \rightarrow a$ . Exemplos:

$$\begin{array}{ll} x^2 + 2x - 3 & \text{e } \log x \quad \text{quando } x \rightarrow 1 \\ \text{sen } x & \text{e } x^2 \quad \text{quando } x \rightarrow 0. \end{array}$$

A soma, a diferença, o produto de dois infinitamente pequenos simultâneos, é ainda um infinitamente pequeno simultâneo com eles.

#### 2. Ordem dos infinitamente pequenos

Entre infinitamente pequenos simultâneos é possível estabelecer uma noção de ordem. Sejam  $u(x)$  e  $v(x)$  infinitésimos simultâneos, quando  $x \rightarrow a$ .

I)  $u(x)$  e  $v(x)$  dizem-se da mesma ordem, se

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = k.$$

sendo  $k$  finito e diferente de zero.

II)  $u(x)$  diz-se de ordem superior a  $v(x)$ , se

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = 0.$$

Diz-se também que  $u(x)$  tende para zero mais rapidamente que  $v(x)$ .

III)  $u(x)$  diz-se de ordem  $n$  relativamente a  $v(x)$  se  $u(x)$  e  $[v(x)]^n$  forem infinitésimos da mesma ordem, isto é, se

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{[v(x)]^n} = k$$

sendo  $k$  finito e diferente de zero ( $n$ , inteiro e  $\geq 2$ ).

Se  $u(x)$  é de ordem  $n$  relativamente a  $v(x)$ , com certo  $n$  (int.,  $\geq 2$ ), então  $u(x)$  é de ordem superior a  $v(x)$ . Mas pode um infinitésimo ser de ordem superior a outro, sem que se consiga encontrar para o primeiro uma ordem  $n$  relativamente ao segundo; isto é o caso de  $e^{-x}$  e  $x^{-1}$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ :  $e^{-x}$  é de ordem superior a qualquer infinitésimo  $(x^{-1})^n$ , por maior que seja  $n$ .

Exemplos :

$x^2 - 4$  e  $x - 2$  são infinitésimos da mesma ordem, quando  $x \rightarrow 2$ ; o infinitésimo  $x^2 - 2x + 1$  é de ordem superior (de 2ª ordem) relativamente a  $x - 1$ , quando  $x \rightarrow 1$ ;

$x - 1$  e  $x^2 - 1$  são infinitésimos da mesma ordem, quando  $x \rightarrow 1$ , mas o infinitésimo  $[\log(x-1)]^{-1/3}$ , quando  $x \rightarrow 1$ , é de ordem inferior ao infinitésimo  $\log(x^2 - 1)^{-1}$ , quando  $x \rightarrow 1$ ;

para uma função  $y=f(x)$ , contínua para  $x=a$ , o acréscimo  $x - a$  e o correspondente acréscimo  $f(x) - f(a)$  são infinitésimos simultâneos, quando  $x \rightarrow a$ ; se a derivada  $f'(a)$  é finita e não nula, esses dois acréscimos são infinitésimos da mesma ordem; se  $f'(a) = 0$ , o infinitésimo  $f(x) - f(a)$  é de ordem superior ao infinitésimo  $x - a$ .

### 3. Infinitamente pequenos equivalentes

Dois infinitamente pequenos simultâneos  $u(x)$  e  $v(x)$ , quando  $x \rightarrow a$ , dizem-se equivalentes se

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = 1$$

Infinitésimos equivalentes são, como é obvio, necessariamente da mesma ordem ( $k = 1$ ).

Exemplos:

$x^2 - 1$  e  $2(x-1)$  são infinitésimos equivalentes, quando  $x \rightarrow 1$ ;  $\sin x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $e^x - 1$ ,  $\log(1+x)$  e  $x$  são infinitamente pequenos equivalentes, quando  $x \rightarrow 0$ .

#### 4. Infinitamente pequenos em Física

Em Física, os valores das grandezas são conhecidos mediante a sua medição e sobre qualquer medição experimental recai fatalmente uma incerteza mínima, o limiar de sensibilidade na medição. Isso significa que a medição não poderá discriminar dois valores de uma dada grandeza que difiram menos do que o limiar de sensibilidade próprio dessa medição.

Consideremos as grandezas  $A$  e  $B$  interdependentes: os valores  $y$  de  $B$  são função dos valores  $x$  de  $A$ ,  $y = f(x)$ . Se  $y$  tende para  $b$  quando  $x$  tende para  $a$  e se  $\delta$  é o limiar de sensibilidade na medição de  $B$ , nós podemos afirmar que, por menor que seja  $\delta$ , para valores de  $x$  dentro de uma vizinhança  $\epsilon$  de  $a$  (sendo  $\epsilon$  dependente de  $\delta$ ), vem  $|y - b| < \delta$ , pela própria noção de limite (finito) de uma função. Portanto, a medição de  $B$  não discrimina os valores  $y$  do valor  $b$  (seu limite quando  $x \rightarrow a$ ), para valores de  $x$  suficientemente próximos de  $a$ .

Nestas condições, em Física, pode substituir-se o valor variável de uma grandeza pelo seu limite. E isto é assim, por menor que seja o limiar de sensibilidade na medição.

Esta substituição é utilizada em particular para os infinitamente pequenos. (Notemos aliás que substituir  $y$  por  $b$ , como se faz acima, equivale a substituir o infinitésimo  $y - b$  pelo seu limite zero). Os infinitamente pequenos podem pois substituir-se por zero — os infinitamente pequenos podem desprezar-se, como se usa dizer. Mas deve fazer-se aqui uma reserva, que passamos a explicar.



Se uma dada grandeza, na interpretação de algum fenómeno, assume um valor variável infinitamente pequeno, nós não fazemos em tal caso a substituição pelo limite zero, sistematicamente. Antepomos a essa iniciativa um critério de conveniência, pois seria totalmente desprovido de interesse que a substituição por zero produzisse, em vez de simplificação importante de um resultado final (caso conveniente), conclusões inadequadas aos pontos de partida, pela oclusão de uma grandeza essencial embora de valor infinitamente pequeno; igualmente desprovido de interesse seria que, pelo mesmo motivo, a substituição por zero determinasse, em vez do acesso a um cálculo exequível (caso conveniente), a paralização de uma análise matemática em curso.

Postas estas considerações, podemos estabelecer três regras gerais de grande utilidade para trabalhar com infinitamente pequenos em Física :

I) Um infinitamente pequeno pode substituir-se por um infinitamente pequeno equivalente. Com efeito, se  $u(x)$  e  $v(x)$  são infinitésimos equivalentes quando  $x \rightarrow a$ , então o limite do quociente  $u(x)/v(x)$  é igual a 1 e daí, para valores de  $x$  suficientemente próximos de  $a$ ,  $u(x)/v(x)$  vem igual a 1, ou  $u(x) = v(x)$ .

II) Numa soma de grandezas, um infinitamente pequeno pode desprezar-se em face de alguma parcela de limite finito e não nulo (em particular, em face de uma parcela constante e significativa). Porque a presença do infinitamente pequeno não altera o valor limite da soma.

III) Numa soma de infinitamente pequenos simultâneos, podem desprezar-se as parcelas de ordem superior. Com efeito,  $u(x) + v(x)$  é equivalente a  $u(x)$ , se  $v(x)$  é de ordem superior a  $u(x)$  :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x) + v(x)}{u(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left( 1 + \frac{v(x)}{u(x)} \right) = 1.$$

Outras regras práticas podem daqui deduzir-se, como por exemplo:

a) Se  $u$  e  $v$  são infinitésimos da mesma ordem, o produto  $(1+u)(1+v)$  pode igualar-se a  $1+u+v$ .

b) Se  $u$  é infinitésimo,  $(1+u)^n$  pode igualar-se a  $1+nu$ , com qualquer  $n$ . Em particular,  $\sqrt{1+u} = 1 + u/2$  e  $1/(1+u) = 1-u$ .

A respeito de todas estas igualdades, diz-se: são válidas a menos de um infinitamente pequeno de ordem superior.

5. Noção de diferencial de uma função

Consideremos a função  $y = f(x)$  contínua e admitindo derivada. A partir de um determinado ponto  $a$ , demos um acréscimo arbitrariamente pequeno  $h$  à variável independente  $x$ . Diferencial da função  $y=f(x)$  no ponto  $a$ , é por definição o produto de  $f'(a)$ , derivada de  $f(x)$  no ponto  $a$ , pelo acréscimo  $h$ . Designa-se por  $(dy)_a$  e assim

$$(dy)_a = f'(a) \cdot h \tag{III-1}$$

Num ponto genérico  $x$  é

$$dy = f'(x) \cdot h \tag{III-2}$$

Do ponto de vista geométrico, a diferencial  $(dy)_a$  é representada pelo acréscimo da ordenada sobre a tangente à curva  $y = f(x)$ , em  $a$ , quando se passa deste ponto para o ponto  $a+h$ : a fig. 1 mostra, de facto, que esse acréscimo,  $\overline{RQ}$ , é igual a  $\text{tg} \alpha \cdot \overline{PQ} = \text{tg} \alpha \cdot h$ , ou seja  $f'(a) \cdot h$  atendendo ao significado geométrico da derivada. Entretanto, a diferença ou a variação de  $f(x)$  para o acréscimo  $h$  de  $x$  é o acréscimo da ordenada sobre a própria curva,  $\overline{QS}$  (fig. 1):

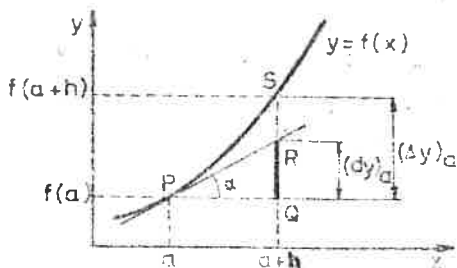


Fig. 1

$$(\Delta y)_a = f(a+h) - f(a) \tag{III-3}$$

A diferencial e a diferença, no mesmo ponto  $a$  e para o mesmo  $h$ , são infinitamente pequenos equivalentes, quando  $h \rightarrow 0$ . Com efeito,

$$\frac{(\Delta y)_a}{(dy)_a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{f'(a) \cdot h} = \frac{1}{f'(a)} \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

e, portanto, pela própria definição de derivada, o quociente de  $(\Delta y)_a$  por  $(dx)_a$  tende para 1, quando  $h \rightarrow 0$ .

A diferencial da função  $y = x$ , ou seja, a diferencial da variável independente, designada com justeza por  $dx$ , coincide, em qualquer ponto  $a$ , com o próprio acréscimo  $h$ : de (III-1) vem, com efeito,  $(dx)_a = 1 \cdot h = h$ . Num ponto genérico  $x$  é  $dx = h$ .

Passamos por isso a escrever, em vez de (III-2), a expressão

$$dy = f'(x) \cdot dx \quad (\text{III-4})$$

e dizemos: a diferencial de  $y = f(x)$  é o produto da derivada  $f'(x)$  pela diferencial da variável independente. Daí resulta que podemos tomar  $f'(x)$  como igual ao quociente das diferenciais  $dy$  e  $dx$  (mas consideradas no mesmo ponto e relativamente ao mesmo acréscimo  $h$ ).

Por outro lado, a expressão (III-4) torna evidente que a operação matemática diferenciação ou de diferenciar — que consiste em obter a diferencial de uma função  $y = f(x)$  — se identifica formalmente com a operação matemática derivação ou de derivar — que consiste em obter a derivada de uma função.

## 6. Interesse da noção de diferencial em Física

Em Física, muito frequentemente, os fenómenos são descritos com base nas variações das grandezas, como quem diz, através das diferenças dos valores assumidos pelas grandezas para os diversos acontecimentos que compõem os fenómenos.

Exemplos destas variações (intervenientes em vários fenómenos) são: a variação diurna da temperatura de um dado ambiente; a variação da pressão com a altitude; a variação da declinação magnética ao longo de um meridiano. Cada uma destas variações se aprecia como a diferença dos valores da grandeza em causa entre dois instantes, entre duas cotas, entre duas latitudes.

Ora nós vimos no último parágrafo que a diferença  $\Delta y$  e a diferencial  $dy$  de uma mesma função  $y=f(x)$ , num mesmo ponto  $a$ , e relativamente a um mesmo acréscimo  $h$ , são infinitamente pequenos equivalentes, quando  $h \rightarrow 0$ . Donde resulta que a diferença se pode subs-

tituir pela diferencial, nas condições do parágrafo 4. Portanto sempre que esta substituição for conveniente, a diferencial passa a desempenhar um papel importante.

Podemos afirmar que a conveniência de uma tal substituição se fundamenta na maior simplicidade das expressões das diferenciais em face das expressões das diferenças. Com efeito, se A e B são grandezas interdependentes com valores x e y, respectivamente, com  $y=f(x)$ , a diferença  $(\Delta y)_a = f(a+h) - f(a)$  pode ser uma expressão complicada de h, enquanto que a diferencial  $(dy)_a$  — que lhe é equivalente — é sempre uma expressão linear em h:  $(dy)_a = f'(a).h$ , ou seja, uma constante,  $f'(a)$ , a multiplicar por h. Segue-se um quadro de exemplos a corroborar estas considerações. (\*)

<u>função</u>	<u>diferença</u>	<u>diferencial</u>
$y = f(x)$	$(\Delta y)_a = f(a+h) - f(a)$	$(dy)_a = f'(a).h$
$y = x^2$	$(a+h)^2 - a^2$	$2a.h$
$y = x^n$	$(a+h)^n - a^n$	$n a^{n-1}.h$
$y = \text{sen } x$	$\text{sen } (a+h) - \text{sen } a$	$\cos a . h$
$y = e^x$	$e^{a+h} - e^a$	$e^a . h$
$y = \log_e x$	$\log_e (a+h) - \log_e a$	$1/a . h$

7. Noção de integral definido

Seja  $f(x)$  uma função que é positiva e contínua no intervalo  $(a,b)$  (com  $a \leq x \leq b$ ). Dividamos o intervalo, por  $(n-1)$  pontos  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ , em n sub-intervalos iguais ou diferentes. Tomemos em cada um destes sub-intervalos um ponto completamente arbitrário —  $\xi_1$  no primeiro sub-intervalo,  $\xi_2$  no segundo, etc.,  $\xi_n$  no enésimo sub-intervalo.

Em vez da função contínua  $f(x)$  podemos pensar na função descontínua (com a forma de uma sucessão de degraus) que tem o valor  $f(\xi_1)$

(\*) A passagem das diferenças às respectivas diferenciais constitui a linearização de um processo de cálculo.

no 1º sub-intervalo,  $f(\xi_1)$  no 2º, etc.,  $f(\xi_n)$  no enésimo. Como se mostra na fig. 2 o gráfico desta função de degraus define uma série de rectângulos e a soma das áreas desses rectângulos é dada pela expressão:

$$S_n = (x_1 - x_0) \cdot f(\xi_1) + (x_2 - x_1) \cdot f(\xi_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) \cdot f(\xi_n)$$

em que  $x_0 = a$  e  $x_n = b$ . (III-5)

Se fizermos  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , podemos abreviar a expressão de  $S_n$ :

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad (III-6)$$

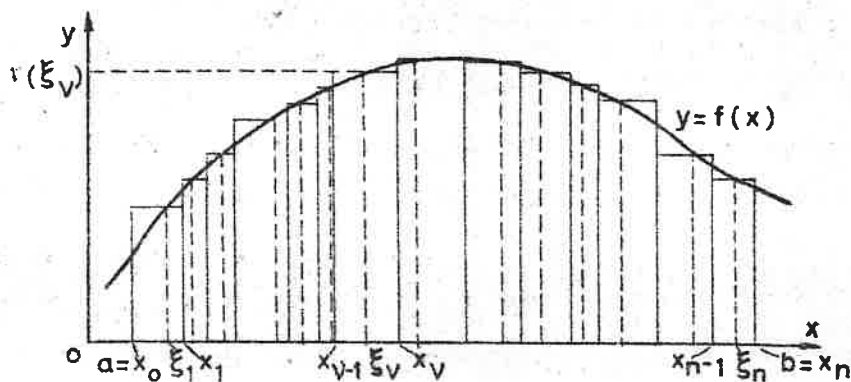


Fig. 2

Suponhamos agora que fazemos variar a decomposição do intervalo  $(a, b)$  aumentando indefinidamente o número de sub-intervalos  $n$  ( $n \rightarrow \infty$ ) e ao mesmo tempo fazendo tender para zero a extensão de cada um dos sub-intervalos ( $\Delta x_i \rightarrow 0$ ).

O limite de  $S_n$ , quando  $n \rightarrow \infty$  e simultaneamente cada  $\Delta x_i$  tende para zero, se existir, chama-se por definição integral definido da função  $f(x)$  entre  $a$  e  $b$ , e designa-se simbolicamente por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \left( \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \right) \quad (III-7)$$

Então,

Designa-se  $f(x)$  por função integranda ;  $x$  é a variável de integração ;  $a$  e  $b$  são os limites de integração, inferior e superior, respectivamente ; o intervalo  $(a,b)$  é o domínio de integração .

A notação simbólica, devida a Leibnitz, procura representar de forma sugestiva a própria definição. O sinal de integral é uma modificação de um sinal de soma que tem a forma de um S alongado. A passagem ao limite da decomposição do intervalo  $(a,b)$  é sugerida pelo uso de  $dx$  como representativo dos  $\Delta x_i$  que se fazem tender para zero .

É evidente que, nas condições de passagem ao limite acima indicadas ( $n \rightarrow \infty$  e  $\Delta x_i \rightarrow 0$ ), a função descontínua representada na fig. 2 pela sucessão de degraus vai tender para a própria função  $f(x)$  . E, por conseguinte, a soma das áreas dos rectângulos figurados, ou seja  $S_n$ , vai tender para a área  $A$  compreendida entre  $f(x)$  e o eixo dos  $xx$  e limitada ainda pelas duas paralelas ao eixo dos  $yy$   $x=a$  e  $x=b$  (fig. 3) .

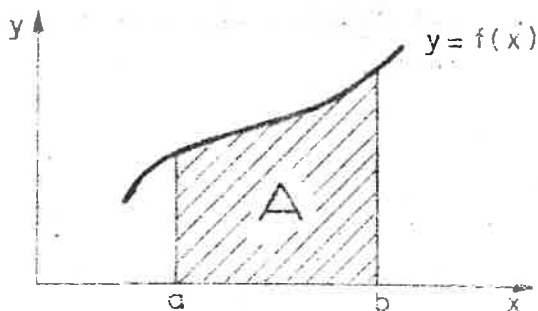


Fig. 3

Daqui resulta que o integral definido de  $f(x)$  entre  $a$  e  $b$  tem este preciso significado geométrico : igual a área  $A$ , acima referida, em valor numérico.

Em Física, há muito frequentemente a necessidade de recorrer à noção de integral definido para representar certas grandezas. Isso acontece sempre que uma grandeza  $G$  se define como a soma de grande número de produtos do tipo  $y \cdot \Delta x$ , isto é, de uma grandeza  $y$  pela variação muito pequena de outra grandeza  $x$  da qual a primeira depende. Se as variações  $\Delta x$  se tornam suficientemente pequenas e o número de parcelas suficientemente grande — então a soma  $\sum y_i \cdot \Delta x_i$  pode substituir-se pelo seu limite, de acordo com as considerações do parágrafo 4 . E o seu limite é precisamente o integral definido de  $y=f(x)$  em certo intervalo de variação de  $x$  .

A conveniência desta substituição reside no facto de serem mais facilmente manejáveis os integrais definidos do que as somas de que resultam. Nos parágrafos seguintes apresentamos as propriedades que estão na base do conjunto de regras práticas de utilização dos integrais definidos.

### 8. Propriedades do integral definido

I. Considerámos no parágrafo anterior  $f(x)$  positiva e  $b > a$  mas a definição dada, como facilmente se reconhece, é independente de tais hipóteses, postas apenas para fixar ideias.

Ainda com  $b > a$ , se  $f(x) > 0$  em todo o intervalo  $(a, b)$ , o integral é positivo; se  $f(x) < 0$  em todo o intervalo  $(a, b)$ , o integral é negativo. Atendendo ao significado geométrico, podemos convencionar, em correspondência, áreas positivas ou áreas negativas, consoante totalmente situadas acima ou abaixo do eixo dos  $xx$ . Se  $f(x)$  assume valores positivos em certas regiões de  $(a, b)$  e negativos noutras, o integral é uma soma algébrica de contribuições positivas e negativas; e o mesmo se diz da área correspondente. Eventualmente o integral de  $f(x)$  em  $(a, b)$  poderá sair nulo, como acontece com  $\text{sen } x$  em  $(0, 2\pi)$ :

$$\int_0^{2\pi} \text{sen } x \, dx = 0$$

Se  $b > a$ , o integral entre  $\underline{a}$  e  $\underline{b}$  é um integral definido no sentido positivo do eixo dos  $xx$  e isto com o significado de que todos os  $\Delta x_i$  são positivos; quando, pelo contrário, se considera o integral entre  $\underline{b}$  e  $\underline{a}$ , portanto no sentido negativo do eixo dos  $xx$ , todos os  $\Delta x_i$  vêm negativos, e como os  $f(\xi_i)$  mantêm o seu sinal, pode concluir-se que o integral mantêm o valor absoluto mas muda de sinal. Temos portanto:

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx \quad (\text{III-8})$$

o que se pode dizer nestes termos: Trocar os limites de integração equivale a mudar o sinal do integral.

II. Atendendo ao significado geométrico do integral definido a fig. 4 conduz imediatamente à seguinte relação (com  $a < b < c$ ):

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \quad (\text{III-9})$$

E a precedente propriedade (III-8) permite concluir que esta relação

(III-9) é válida para qualquer posição relativa dos pontos  $a, b$  e  $c$ . Generalizando (III-9), pode afirmar-se:

O integral estendido a determinado domínio de integração é igual à soma dos integrais da mesma função estendidos aos sub-domínios em que se divide o domínio dado.

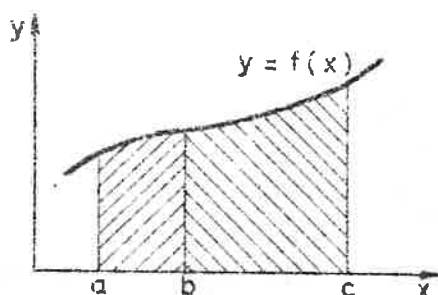


Fig. 4

III. Da definição do integral definido resultam imediatamente as seguintes propriedades:

$$\alpha) \int_a^b [k \cdot g(x)] dx = k \cdot \int_a^b g(x) dx \quad (\text{III-10})$$

$$\beta) \int_a^b [g(x) + h(x)] dx = \int_a^b g(x) dx + \int_a^b h(x) dx \quad (\text{III-11})$$

Encarando o integral definido como um operador que se aplica a funções, as duas propriedades  $\alpha)$  e  $\beta)$  revelam-no como um operador linear. A propriedade  $\alpha)$  traduz-se muitas vezes nesta linguagem prática: "uma constante (k) pode passar para fora do sinal de integral".

## 9. Cálculo do integral definido

### A. O integral indefinido

O valor do integral definido de uma função  $f(x)$  depende da escolha dos dois limites de integração  $a$  e  $b$ . A fim de estudar esta dependência, nós podemos supor fixo o limite inferior  $a$  e tomar o limite superior como variável sobre o eixo dos  $xx$ , designando-o por  $X$ , por exemplo; e em seguida vamos averiguar como varia o integral como uma função do limite superior  $X$ . Escrevemos pois:

$$\int_a^X f(x) dx = \Phi(X) \quad (\text{III-12})$$



Mas, com o mesmo significado que (III-12), podemos escrever

$$\int_a^x f(u) du = \Phi(x) \quad (\text{III-13})$$

em que se designa por  $u$  a variável de integração (embora continue a ser uma variável corrente sobre o eixo dos  $xx$ ) e por  $x$  o limite superior do integral (variável também corrente sobre o eixo dos  $xx$ ). Isto pode fazer-se porque, como é evidente, o valor do integral definido não depende da variável de integração (sempre num eixo real) desde que com os mesmos limites e com a mesma função; e é conveniente para que a variável independente da função  $\Phi$ , agora mais directamente em estudo, seja designada por  $x$ .

Esta função  $\Phi(x)$  diz-se um integral indefinido da função  $f(x)$ . Com outro valor fixo,  $a'$ , do limite inferior teríamos outro integral indefinido de  $f(x)$ :

$$\int_{a'}^x f(u) du = \Psi(x).$$

Mas, atendendo a (III-9), dois quaisquer integrais indefinidos da mesma função  $f(x)$  diferem apenas por uma constante (número independente de  $x$ ):

$$\Phi(x) - \Psi(x) = \int_a^{a'} f(u) du \quad (\text{III-14})$$

#### B. A derivada do integral indefinido

Pode demonstrar-se o seguinte teorema: O integral indefinido  $\Phi(x)$  da função contínua  $f(x)$  tem sempre derivada e esta é igual a  $f(x)$ :  $\Phi'(x) = f(x)$ . Isto é, a diferenciação do integral indefinido de uma dada função contínua é um retorno à mesma função:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(u) du = f(x) \quad (\text{III-15})$$

A prova deste teorema fundamental do Cálculo pode fazer-se de uma maneira simples a partir do significado geométrico do integral. Com efeito, ao fazermos o quociente

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h}$$

(cujo limite, quando  $h \rightarrow 0$ , é  $\Phi'(x)$  — por definição) observa-

remos que o numerador

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int_a^{x+h} f(u) du - \int_a^x f(u) du = \int_x^{x+h} f(u) du$$

é a área compreendida entre a curva  $f(x)$  e o eixo dos  $xx$  e limitada

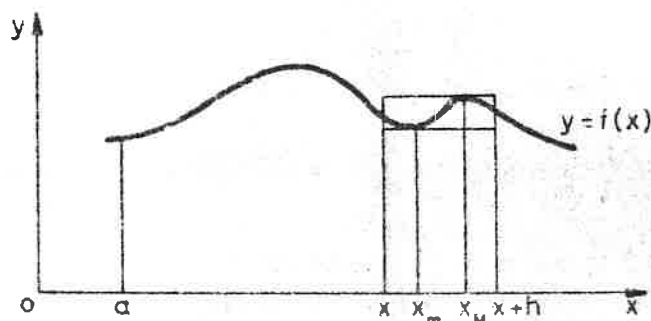


Fig. 5

pelas ordenadas correspondentes a  $x$  e  $x+h$  (a cheio na fig. 5). Seja agora  $x_M$  o ponto do intervalo  $(x, x+h)$  em que a função assume o seu valor máximo e  $x_m$  o ponto de  $(x, x+h)$  em que a função assume o seu valor mínimo (fig. 5). Então a área em questão ficará compreendida entre  $h \cdot f(x_m)$  e  $h \cdot f(x_M)$  ou seja entre as áreas dos rectângulos cuja base é o intervalo  $(x, x+h)$  e cujas alturas são respectivamente  $f(x_m)$  e  $f(x_M)$ . Donde resulta:

$$h \cdot f(x_m) \leq \Phi(x+h) - \Phi(x) \leq h \cdot f(x_M)$$

ou :

$$f(x_m) \leq \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} \leq f(x_M)$$

Se  $h \rightarrow 0$ , ambos os valores  $f(x_m)$  e  $f(x_M)$  tendem para o mesmo limite  $f(x)$ , porque o intervalo  $(x, x+h)$  se fecha sobre o ponto  $x$ . Donde:

$$\Phi'(x) = f(x).$$

### C. Primitiva de uma função

Por definição, primitiva de uma função  $f(x)$  é uma função  $F(x)$ ,

tal que

$$F'(x) = f(x) \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$$

A primitivação é assim uma operação inversa da derivação ou da diferenciação. Mas enquanto a derivação de uma função conduz a uma nova função bem definida, a operação inversa, não.

Todavia, duas primitivas  $F_1(x)$  e  $F_2(x)$  de uma função  $f(x)$  apenas diferem por uma constante, pois se

$$F_1'(x) = f(x) \quad \text{e} \quad F_2'(x) = f(x),$$

então  $[F_1(x) - F_2(x)]' = 0$ , donde resulta que  $F_1(x) - F_2(x)$  deve ser igual a uma constante. E isto significa que, encontrada um qualquer primitiva de  $f(x)$ , seja  $F(x)$ , então a expressão geral das primitivas de  $f(x)$  é:

$$G(x) = F(x) + C \quad \text{(III-16)}$$

sendo  $C$  uma constante arbitrária.

Ora, pela secção B deste parágrafo, qualquer integral indefinido de  $f(x)$  é uma primitiva de  $f(x)$ . Por outro lado, um qualquer integral indefinido de uma função, somado a uma constante, dá um outro integral indefinido da mesma função (secção A deste parágrafo). Então, se existe o integral de  $f(x)$ , podemos afirmar que: o integral indefinido de  $f(x)$  constitui a expressão geral da primitiva de  $f(x)$ :

$$G(x) = \int_a^x f(u) du \quad \text{(III-17)}$$

sendo, aqui,  $a$  um limite inferior arbitrário. A arbitrariedade de  $C$  em (III-16) reverte em (III-17) na arbitrariedade de  $a$ , mas com o mesmo significado: ambas as expressões traduzem uma função —  $G(x)$  — definida a menos de uma constante aditiva.

#### D. Regra de Barrow

Conhecida uma qualquer primitiva de  $f(x)$ , seja  $F(x)$ , podemos escrever, combinando (III-16) e (III-17) :

$$\int_a^x f(u) du = F(x) + C$$

e, como para  $x = a$  o integral indefinido vem nulo, resulta ser

$C = -F(a)$ , e portanto:

$$\int_a^x f(u) du = F(x) - F(a) .$$

Donde, para  $x = b$ , vem

$$\int_a^b f(u) du = F(b) - F(a) . \tag{III-18}$$

Esta é uma regra fundamental no cálculo dos integrals definidos — regra de Barrow. Para representar a diferença  $F(b) - F(a)$  usa-se muitas vezes a notação

$$\left[ F(x) \right]_a^b \quad \text{ou ainda} \quad F(x) \Big|_a^b .$$

E. Quadro de exemplos

Função $f(x)$	Primitiva $P[f(x)] = F(x)$	Integral definido $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
1	$x + C$	$\int_a^b dx = b - a$
$k$ (constante)	$kx + C$	$\int_a^b kdx = k(b-a)$
$x$	$\frac{x^2}{2} + C$	$\int_a^b xdx = \frac{b^2 - a^2}{2}$
$x^{\gamma}$ ( $\gamma$ , const. $\neq -1$ )	$\frac{x^{\gamma+1}}{\gamma+1} + C$	$\int_a^b x^{\gamma} dx = \frac{1}{\gamma+1} (b^{\gamma+1} - a^{\gamma+1})$
$\frac{1}{x}$	$\log_e x + C$ (log. neperiano)	$\int_a^b \frac{dx}{x} = \log_e b - \log_e a$
$e^x$ ( $e$ , base neperiana)	$e^x + C$	$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$
$\text{sen } x$	$-\cos x + C$	$\int_a^b \text{sen } x dx = \cos a - \cos b$
$\text{cos } x$	$\text{sen } x + C$	$\int_a^b \text{cos } x dx = \text{sen } b - \text{sen } a$

PROBLEMAS

1. Atenda ao significado físico do integral definido para verificar, com base em conhecimentos de geometria elementar, os seguintes cálculos :

$$a) \quad \int_a^b k \, dx = k(b - a) \quad (k, \text{const.})$$

$$b) \quad \int_a^b x \, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

$$c) \quad \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \, dx = \frac{\pi R^2}{4}$$

2. Mostre que o integral definido de uma função  $f(t)$ , periódica, ao longo de um número inteiro  $n$  de períodos é igual a  $n$  vezes o integral definido da mesma função ao longo de um período.

3. Aproveite a identidade trigonométrica

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

e atenda ao significado físico do integral definido para mostrar que:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha \, d\alpha = \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha \, d\alpha = \pi$$

4. Aproveite o resultado do problema anterior para mostrar que o valor quadrático médio de uma função sinusoidal  $f(t) = A \sin \frac{2\pi}{T} t$ , a saber, a quantidade

$$\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 \, dt}$$

( $T$ , é o período) vale precisamente  $\frac{A}{\sqrt{2}}$ .

5. Com base na regra de Barrow, verifique que a superfície compreendida entre a curva representativa da função  $y = e^{-x}$  (com  $x \geq 0$ ) e o eixo dos  $xx$ , embora de extensão infinita, tem uma área igual à unidade.

Novo título :

EMI | 86/87 |  
e  
87/88 |

Noções elementares sobre grandezas vectoriais

~~APÊNDICE II~~

~~ELEMENTOS DE ANÁLISE VECTORIAL~~

1. Grandezas escalares

No estudo da Física faz-se uso frequente de grandezas físicas cuja expressão (ou representação) matemática, muito simples, consiste apenas em fazer corresponder a cada valor da grandeza um número real, o qual nos fornece uma informação completa acerca do valor da grandeza independentemente do sistema de referência que esteja a ser usado.

Exemplos típicos são: o volume, a temperatura, a massa, a energia, a carga eléctrica, a intensidade luminosa; e muitos outros o leitor conhece.

Estas grandezas dizem-se grandezas escalares ou escalares. O seu tratamento matemático rege-se pelas regras bem conhecidas da álgebra dos números reais.

2. Grandezas vectoriais

Há porém grandezas físicas para as quais a representação matemática por meio de um número real não basta para uma informação completa acerca do valor da grandeza. Destas vamos considerar por agora (\*) as que podem ser representadas por segmentos de recta orientados relativamente a um dado sistema de referência.

O exemplo mais simples que se pode colher na nossa observação quotidiana é o da grandeza deslocamento (deslocamento rectilíneo de um móvel: da ponta do giz sobre a ardósia, para fixar ideias). Para esta grandeza, não basta na verdade dizer que a ponta do giz se deslocou de um certo comprimento sobre a ardósia (suposto que em linha

---

(\*) Em certos problemas de Física mais avançados, as noções de grandezas escalares e de grandezas vectoriais são insuficientes. Por exemplo no estudo das deformações produzidas nos meios materiais anisótropos, torna-se necessária a introdução de grandezas tensoriais e a utilização de uma análise tensorial.

recta); para uma informação completa tem de acrescentar-se em que direcção — horizontal, vertical, inclinada de um certo ângulo sobre o horizonte, etc. — e em que sentido — ascendente, descendente, da direita para a esquerda, etc. — se produziu o deslocamento.

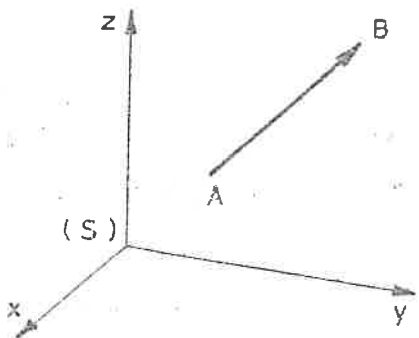


Fig. 1

Ora, na verdade, um segmento de recta orientado (como  $\overline{AB}$ , relativamente ao sistema (S), (fig. 1)) tem por assim dizer três elementos essenciais:

- 1) módulo (comprimento de  $\overline{AB}$ )
- 2) direcção (paralela à recta definida por A e B)
- 3) sentido (o de A, origem para B, extremidade)

e por isso se presta à representação de grandezas físicas como o deslocamento acima exemplificado.

Tais grandezas dizem-se grandezas vectoriais ou vectores. Um vector assume como atributos ou características os elementos essenciais do segmento orientado que o representa e por vezes a nossa linguagem confunde-os (como acontece aos escalares e aos números reais) mas sem inconvenientes de maior, desde que se não perca de vista o significado físico da grandeza.

Em muitas questões tem importância fundamental considerar que A é o ponto de aplicação do segmento  $\overrightarrow{AB}$  ou que  $\overline{AB}$  é um segmento orientado aplicado no ponto A. Isso leva alguns autores a tomar o ponto de aplicação como um quarto atributo do vector. Para a grandeza força, por exemplo, é quase sempre de importância fundamental considerar o ponto de aplicação do vector.

Grandezas vectoriais para cuja definição unívoca e precisa deva ser considerado um ponto de aplicação bem determinado, dizem-se vectores aplicados (nesse ponto).

Grandezas vectoriais para cuja definição unívoca e precisa deva ser tomado como ponto de aplicação um qualquer ponto de uma determi-



nada recta com a própria direcção do vector, dizem-se vectores deslizantes (ao longo dessa recta).

Grandezas vectoriais para cuja definição unívoca e precisa possa prescindir-se em absoluto do ponto de aplicação, que poderá então ser um qualquer de todo o espaço, dizem-se vectores livres. (\*)

### 3. Generalidades sobre vectores

As notações mais usadas para designar um vector são:

1)  $\overrightarrow{AB}$ , já acima utilizada e que se lê "vector  $\overrightarrow{AB}$ ";

2)  $B - A$ , com as maiúsculas indicativas dos pontos extremos e que se lê: "vector B menos A"

(ambas estas notações se referem aos extremos do segmento orientado e ambas indicam a sua ordem embora diferentemente)

3) uma letra qualquer, maiúscula ou minúscula, de qualquer alfabeto e encimada por uma pequena seta, por exemplo,  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{F}$ ,  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\Sigma}$  e que se lê "vector v" ... "vector  $\Sigma$ ".

(esta notação, por mais simples, é a mais vulgarizada).

A recta definida pelos extremos de um vector é a recta de suporte ou linha de acção do vector.

O módulo de um vector designa-se, como para os números reais, por  $|\overrightarrow{AB}|$ ,  $|B - A|$  ou  $|\vec{v}|$ .

Dois vectores com o mesmo módulo, a mesma direcção e o mesmo sentido dizem-se equipolentes e poderão ser tratados como iguais se não interessa, para o problema em causa, considerar os pontos de aplicação dos vectores.

Dois vectores com o mesmo módulo, a mesma direcção e sentidos contrários dizem-se simétricos ou iguais-e-opostos; a designação iguais-e-directamente-opostos reserva-se para o caso de vectores simétricos sobre a mesma linha de acção (ou recta de suporte); o vector simétrico de  $\vec{a}$  representa-se por  $-\vec{a}$ .

(\*) Quando não se diga expressamente outra coisa, suporemos tratar com vectores livres.

Vector unitário é todo o vector  $\vec{u}$  de módulo igual a 1,  $|\vec{u}|=1$ . Um vector unitário representa pois uma direcção e um sentido determinados, em relação aos quais assume a denominação de versor. Também se usa a designação versor de um vector  $\vec{v}$  para indicar o vector unitário que tem a mesma direcção e o mesmo sentido que o vector  $\vec{v}$ . Numa qualquer direcção dada, considerando os dois sentidos que sobre ela se podem tomar, temos dois vectores unitários, simétricos entre si.

Quando se projecta um segmento orientado sobre um eixo (uma direcção e um sentido definidos) convém atribuir sinal ao valor da projecção — precisamente o sinal do coseno do ângulo que fazem as duas orientações, ângulo este que pode variar entre 0 e  $\pi$  radianos. Isso permite escrever, em qualquer caso (a fig.2 mostra dois casos diferentes), para o valor da projecção de  $\vec{v}$  sobre  $\underline{e}$ , designado por  $\text{proj}_e \vec{v}$ , a expressão

$$\text{proj}_e \vec{v} = |\vec{v}| \cos \theta \quad (\text{II-1})$$

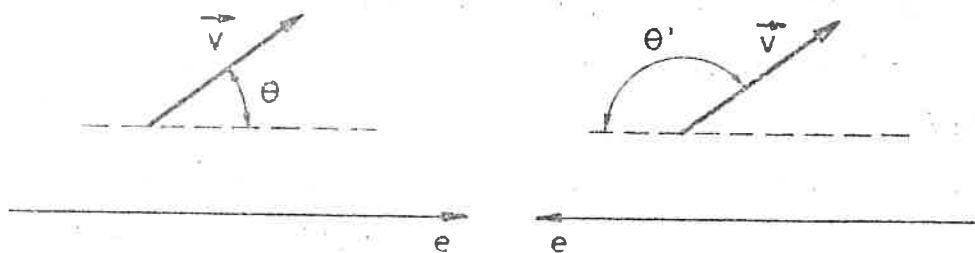


Fig. 2

Se  $\vec{v}$  é perpendicular ao eixo,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e  $\text{proj}_e \vec{v} = 0$ .

Projectemos agora (fig. 3) o segmento orientado representativo de  $\vec{v}$ , sucessivamente, sobre os eixos do sistema  $Oxyz$  ao qual se refere — por hipótese um sistema triortogonal. As projecções obtidas de harmonia com o que acima fica expresso dizem-se componentes cartesianas do vector  $\vec{v}$  nos eixos respectivos e designam-se por  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$  (no caso da fig. 3 acidentalmente positivas e represen-

tadas por  $\overline{A_x B_x} = \overline{AB'}$ ,  $\overline{A_y B_y} = \overline{AB''}$ ,  $\overline{A_z B_z} = \overline{AB'''}$ .)

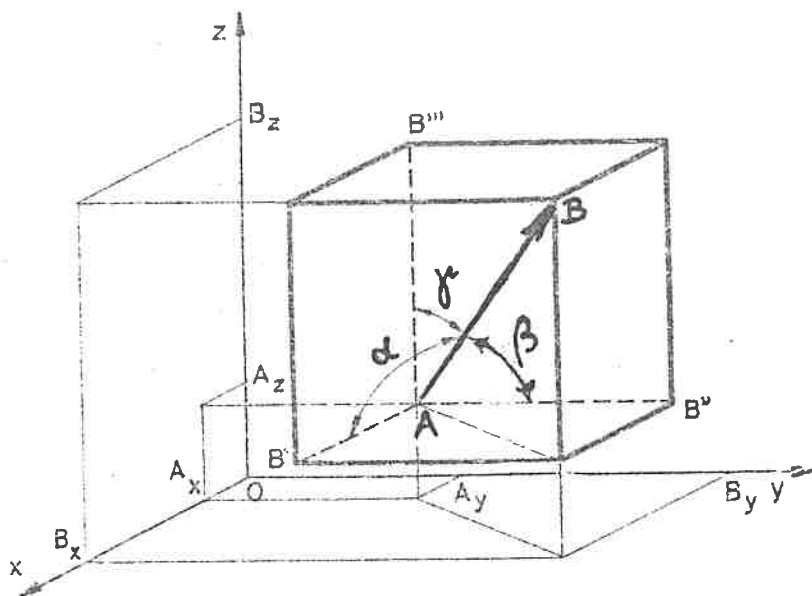


Fig. 3

Pela própria definição as componentes de  $\vec{v}$  relacionam-se com o módulo  $|\vec{v}|$  e com  $\cos\alpha$ ,  $\cos\beta$  e  $\cos\gamma$  — cosenos directores do vector  $\vec{v}$ , ou da sua direcção e sentido — pelas expressões

$$v_x = |\vec{v}| \cos\alpha \quad v_y = |\vec{v}| \cos\beta \quad v_z = |\vec{v}| \cos\gamma. \quad (\text{II-2})$$

A consideração da fig. 3 e a observação de que  $\overline{AB}$  é a diagonal do paralelepípedo rectângulo de arestas  $\overline{AB'}$ ,  $\overline{AB''}$  e  $\overline{AB'''}$  conduz, pelo Teorema de Pitágoras, a:

$$|\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad (\text{II-3})$$

Quer dizer: o quadrado do módulo de um vector é igual à soma dos quadrados das componentes.

Pela mesma via, é também:  $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ , donde resulta que dos 3 cosenos directores só dois são independentes: o 3º é função dos outros dois.

A um vector  $\vec{v}$  podemos pois fazer corresponder 3 números reais, utilizando para isso:

- a) ou as componentes cartesianas  $v_x, v_y, v_z$  ;  
 b) ou o módulo  $|\vec{v}|$  e dois dos cosenos directores,  $\cos\alpha$  e  $\cos\beta$  ,  
 por exemplo.

#### 4. Adição e subtracção de vectores

Retomando a grandeza vectorial deslocamento, já utilizada no parágrafo 2, analisemos agora como se efectua a composição de deslocamentos, ou seja como se vem a conhecer qual o resultado final da aplicação sucessiva de dois ou mais deslocamentos a um determinado ponto. Esta ideia de composição é o conceito básico da operação vectorial que se chama adição de vectores.

Consideremos a fig. 4 e tomemos o ponto O como origem de deslocamentos. Na fig. 4a, o vector  $\vec{a}$  representa um deslocamento de O para P ; o vector  $\vec{b}$  representa um deslocamento de P para Q. Como resultado final da composição destes dois deslocamentos vemos que nos surge um deslocamento de O para Q que se pode representar univocamente pelo vector  $\vec{c}$  — se continuarmos a pensar apenas em deslocamentos rectilíneos, como vimos fazendo. Neste sentido nós podemos estabelecer que o deslocamento  $\vec{c}$  é a resultante ou a soma dos deslocamentos  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .

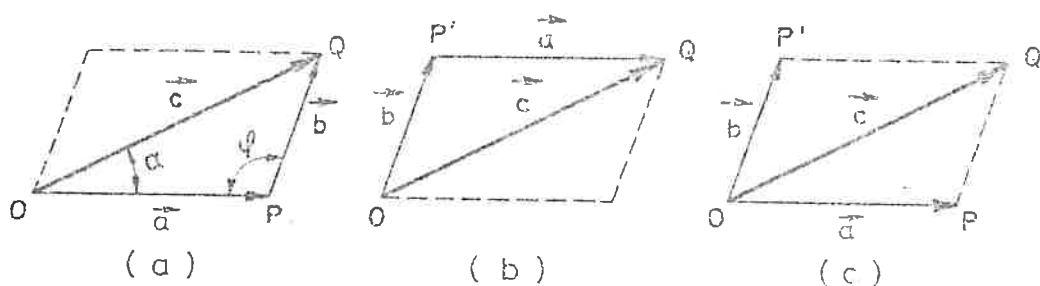


Fig.4

Pela fig. 4b é evidente que o mesmo resultado final seria obtido, se primeiro se efectuasse o deslocamento  $\vec{b}$  de O para P' e depois o deslocamento  $\vec{a}$  de P' para Q. Podemos por isso supor também que os dois deslocamentos  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  se acham potencialmente aplicados ao ponto origem O (fig. 4c) para deles se efectuar a composição de que resulta  $\vec{c}$ . Em qualquer destas representações, vê-se bem que  $\vec{c}$  é um vector que tem o módulo, a direcção e o sentido do segmento orientado que parte de O e é diagonal ao paralelogramo definido por  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .

A adição de vectores define-se pois nestes termos: a soma ou resultante de dois vectores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  referidos ao mesmo sistema de coordenadas é um terceiro vector

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad (\text{II-4})$$

obtido nos seus atributos pela regra representada na fig. 4, dita regra do paralelogramo.(\*)

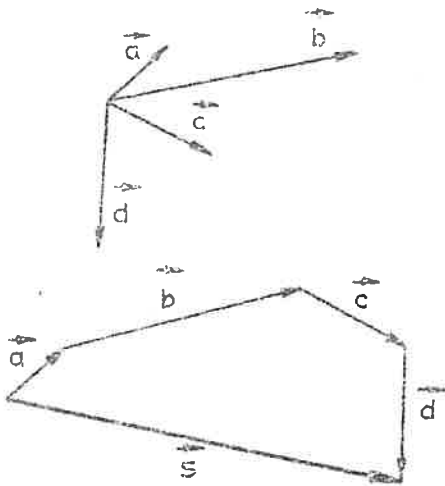


Fig. 5

É imediata a extensão a mais de dois vectores, por sucessivas aplicações da regra do paralelogramo. É cômodo nestes casos operar como na fig. 4a ou fig. 4b, com o que se vai construindo uma poligonal (em geral não plana), cuja origem se une à extremidade final para definir o vector soma (fig. 5):  $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ .

Na prática torna-se muitas vezes necessário achar as características do vector soma por via algébrica. Dados  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , acha-se o módulo de  $\vec{c}$  e o ângulo que  $\vec{c}$  faz com  $\vec{a}$ , mediante as

equações trigonométricas

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi \\ \frac{\text{sen} \varphi}{c} &= \frac{\text{sen} \alpha}{b} \end{aligned} \quad (\text{II-5})$$

(\*) Esta definição de adição de vectores pela regra do paralelogramo é, como aqui se procura mostrar, a que melhor se quadra com a composição de deslocamentos, quando se atenta, como fizemos, no pró

extraídas da fig. 4a, da qual todavia se não pode prescindir para uma resolução completa. Deve olhar-se para (II-5) como uma expressão, na linguagem dos números reais, da relação vectorial (II-4) formalmente mais simples.

Vejamos agora algumas propriedades da adição de vectores. A propriedade comutativa

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{II-6})$$

resulta imediatamente das considerações anteriores e da fig. 4. Para demonstrar a propriedade associativa

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (\text{II-7})$$

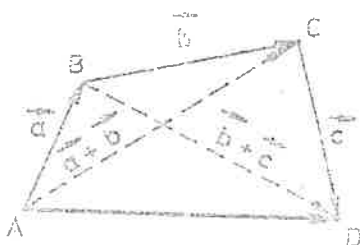


Fig. 6

representemos (fig. 6) a poligonal de lados  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  (não necessariamente plana), tracemos as diagonais  $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$  e  $\vec{BD} = \vec{b} + \vec{c}$  e notemos que o vector  $\vec{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  tanto pode resultar de  $\vec{AC} + \vec{CD}$  como de  $\vec{AB} + \vec{BD}$ .

A subtração define-se como operação inversa da adição. Dados dois vectores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , a diferença  $\vec{a} - \vec{b}$ , ( $\vec{a}$ , aditivo;  $\vec{b}$ , subtractivo) é um terceiro vector que somado a  $\vec{b}$

tem o mesmo significado físico desta grandeza vectorial.

Mas pode perguntar-se se será conveniente adoptar a mesma definição de adição para todas as grandezas vectoriais.

Para responder a esta pergunta, diremos em primeiro lugar que para a grandeza vectorial força, também é válida, como se sabe, a regra do paralelogramo, para somar forças no mesmo sistema de referência. Isso não pode é certo ser estabelecido por um processo análogo ao que aqui se desenvolve para os deslocamentos; pelo contrário, é a experiência que nos sugere, para a adição de forças, a regra do paralelogramo, levando-nos a incluí-la nos Princípios fundamentais da Mecânica, como adiante veremos.

Em segundo lugar, diremos que todas as restantes grandezas vectoriais definidas na Mecânica derivam das duas precedentes que são grandezas fundamentais e de uma terceira grandeza escalar fundamental, o tempo, (como o leitor também conhece), através de operações entre vectores ou entre vectores e escalares que conduzem a novos vectores. Como ao introduzir essas operações se segue sempre o critério de conservação das definições e propriedades das operações previamente introduzidas, está assegurado que todas as grandezas vectoriais que surgirem vão obedecer, quando fisicamente aditivas, a uma definição de soma pela regra do paralelogramo.

reproduz  $\vec{a}$ . A regra do paralelogramo aplicada a esta soma (fig. 7 - traço cheio) revela que o vector diferença de dois vectores se repre-

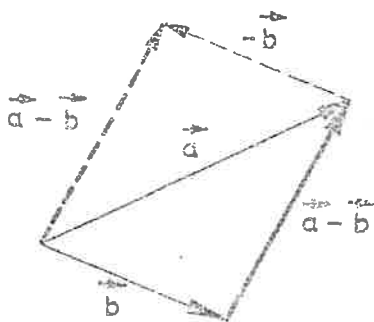


Fig. 7

senta pelo segmento orientado que liga as suas extremidades, da extremidade do subtractivo para a extremidade do aditivo. Note-se que, como mostra a fig. 7 - tracejado, a diferença  $\vec{a} - \vec{b}$  equivale à soma de  $\vec{a}$  com o vector simétrico de  $\vec{b}$  :

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad (\text{II-8})$$

Mediante esta transformação, podem utilizar-se as propriedades da adição para trabalhar com subtracções.

### 5. Produto de um escalar por um vector

Trata-se de uma operação frequente na Física e por meio da qual podemos, por exemplo, definir novas grandezas vectoriais à custa de um escalar e de um vector já conhecidos.

O produto do escalar  $m$  pelo vector  $\vec{v}$  designa-se por  $m\vec{v}$  e é um outro vector com a direcção de  $\vec{v}$ , de módulo igual a  $|m| \times |\vec{v}|$  e com o sentido de  $\vec{v}$  ou o contrário consoante  $m > 0$  ou  $m < 0$ .

Notemos que, em particular, o produto de  $-1$  por  $\vec{a}$  conduz ao simétrico  $-\vec{a}$ .

Também se pode pensar em dividir  $\vec{v}$  pelo escalar  $n$  ( $n \neq 0$ ), operação que se reduz à anterior na forma do produto do escalar  $\frac{1}{n}$  por  $\vec{v}$ .

Destacamos aqui as propriedades seguintes que facilmente se provam:

$$1^{\text{a}}) \quad (m \pm n)\vec{a} = m\vec{a} \pm n\vec{a} \quad (\text{II-9})$$

$$2^{\text{a}}) \quad m(\vec{a} \pm \vec{b}) = m\vec{a} \pm m\vec{b} \quad (\text{II-10})$$

$$3^{\text{a}}) \quad m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a} \quad (\text{II-11})$$

Esta operação permite exprimir qualquer vector  $\vec{v}$  no vector unitário da sua direcção e sentido (no seu versor,  $\text{vers } \vec{v}$ ) mediante a relação:

$$\vec{v} = |\vec{v}| \text{vers } \vec{v} \quad (\text{II-12})$$

E se são dados vários vectores  $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots$ , com a mesma direcção mas eventualmente nem todos com o mesmo sentido, pode convir exprimi-los num dos vectores unitários dessa direcção, seja  $\vec{u}$ , surgindo nesse caso relações

$$\vec{\omega}_i = \omega_i \vec{u} \quad (\text{II-13})$$

em que  $\omega_i = \pm |\vec{\omega}_i|$  é o valor algébrico de  $\vec{\omega}_i$  relativo a  $\vec{u}$ .

Retomemos agora a fig. 3 e as considerações do parágrafo 3 a ela referentes. Fácilmente se verifica que o vector  $\vec{AB}$  é a soma dos vectores representados pelos segmentos  $\vec{AB'}$ ,  $\vec{AB''}$  e  $\vec{AB'''}$ .

$$\vec{AB} = \vec{AB'} + \vec{AB''} + \vec{AB'''}$$

Se designarmos por  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$ , respectivamente, os vectores unitários, ou versores, dos eixos coordenados Ox, Oy e Oz, temos

$$\vec{AB'} = v_x \vec{i} \quad \vec{AB''} = v_y \vec{j} \quad \vec{AB'''} = v_z \vec{k}$$

de harmonia com a definição das componentes cartesianas do vector  $\vec{v} = \vec{AB}$ . Donde resulta:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad (\text{II-14})$$

Esta expressão de um vector  $\vec{v}$  em termos das componentes cartesianas e dos versores dos eixos — mais precisamente a expressão de um vector  $\vec{v}$  como a soma dos produtos das componentes cartesianas pelos versores dos eixos homólogos — diz-se expressão cartesiana do vector  $\vec{v}$ .

## 6. Produto interno ou produto escalar de dois vectores (\*)

O produto interno ou produto escalar de dois vectores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , que se designa por  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , é a grandeza escalar igual ao produto dos módulos dos dois vectores pelo coseno do ângulo que eles formam,  $\theta = (\vec{a}, \vec{b})$ :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta \quad (\text{II-15})$$

(\*) Na base desta importante operação vectorial está a ideia de projectar um vector  $\vec{a}$  sobre a direcção e o sentido de um outro vector  $\vec{b}$ . Isto tem frequente aplicação, como o leitor já pode perceber, por exemplo, quando se pretende achar o trabalho realizado por uma força ao longo de um dado deslocamento de diferente direcção e/ou sentido.



Da definição decorrem imediatamente duas propriedades:

$$\text{I) } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (\text{II-16})$$

$$\text{II) } k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) \quad (\text{II-17})$$

Além disso vê-se (fig. 8) que a operação pode consistir em projectar primeiro o vector  $\vec{a}$  sobre o vector  $\vec{b}$  e multiplicar depois o resultado pelo módulo de  $\vec{b}$ . Daqui e da propriedade comutativa conclue-se: O produto interno de dois vectores é igual ao módulo de um deles multiplicado pela projecção do outro sobre ele.

O produto interno de um vector  $\vec{v}$  pelo vector unitário de uma dada direcção e sentido,  $\vec{u}$ , iguala a projecção do vector sobre essa direcção e sentido. Se em particular a direcção de  $\vec{u}$  coincide com a de  $\vec{v}$ , o produto interno  $\vec{v} \cdot \vec{u}$  iguala o valor algébrico de  $\vec{v}$  relativo a  $\vec{u}$  (confronte (II-13)).

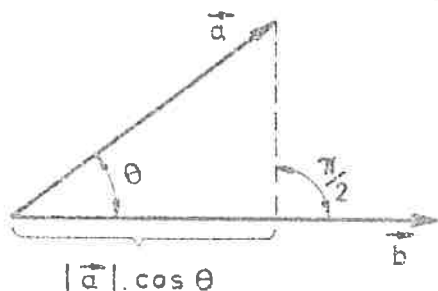


Fig. 8

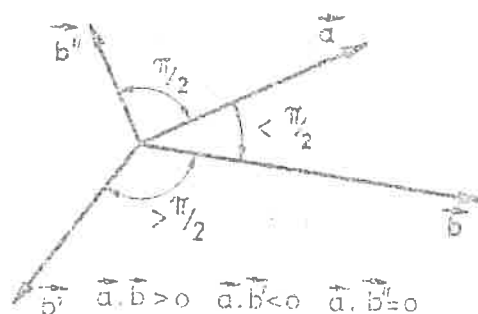


Fig. 9

Quando se analisa o produto interno de 2 vectores, nenhum deles nulo por hipótese, como função do ângulo  $\theta$  que formam os 2 vectores, através de  $\cos\theta$ , conclui-se que (fig. 9):

$$\begin{array}{lll} \vec{a} \cdot \vec{b} > 0 & \text{quando} & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 & \text{quando} & \theta = \frac{\pi}{2} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 & \text{quando} & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{array} \quad (\text{II-18})$$

e as afirmações recíprocas também são verdadeiras. Em particular, a condição necessária e suficiente de anulamento do produto interno de dois vectores, nenhum deles nulo, é que sejam perpendiculares entre si.

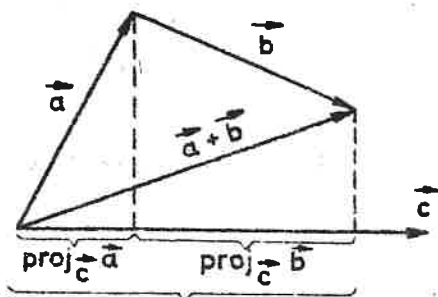
O produto interno de dois vectores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  com a mesma direcção iguala  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$  ou  $-|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$  consoante os vectores têm ou não o mesmo sentido.

O produto interno de um vector  $\vec{v}$  por si próprio, chama-se quadrado do vector  $\vec{v}$ , designa-se por  $(\vec{v})^2$  ou  $\vec{v}^2$ , e iguala o quadrado do módulo:

$$\vec{v}^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{v}, \vec{v}) = |\vec{v}|^2 \quad (\text{II-19})$$

O produto interno de um vector  $v$  pelo seu versor iguala o módulo do vector:

$$\vec{v} \cdot \text{vers } \vec{v} = |\vec{v}| \cdot (\text{vers } \vec{v})^2 = |\vec{v}| \quad (\text{II-20})$$



$\text{proj}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$

Fig. 10

Que o produto interno é distributivo em relação à adição vectorial pode mostrar-se mediante um exame da fig. 10.

Tem-se, com efeito

$$\text{proj}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{proj}_{\vec{c}}\vec{a} + \text{proj}_{\vec{c}}\vec{b}$$

e daí

$$\frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|} + \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|}$$

ou seja:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

À custa da expressão cartesiana dos vectores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  e por aplicação das propriedades acima referidas, estabelece-se a expressão cart

siana do produto interno  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

De  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$  e

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

e notando que (fig. 11)

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \quad (\text{II-21})$$

o produto  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

por aplicação das propriedades atrás

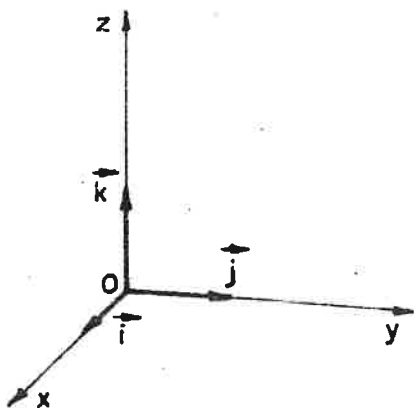


Fig. 11

descritas, transforma-se em:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (\text{II-22})$$

Quer dizer: o produto interno de dois vectores iguala a soma dos produtos das componentes homólogas. Note-se, a título de verificação, que para  $\vec{a} = \vec{b} = \vec{v}$  somos conduzidos à expressão (II-3) anteriormente estabelecida.

### 7. Produto externo ou produto vectorial

O produto externo ou produto vectorial de dois vectores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , por esta ordem, designa-se por  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  e é, por definição, um terceiro vector  $\vec{c}$  com as seguintes características (vide fig. 12):

- 1) direcção: perpendicular ao plano definido por  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  (plano  $\pi$ )
- 2) sentido: tal que os três vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$ , por esta ordem, definam um triedro directo (com a mesma axialidade que o espaço do sistema de referência Oxyz)
- 3) módulo: dado por

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \text{sen } \theta \quad (\text{II-23})$$

em que  $\theta$  é o ângulo dos dois vectores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  (note-se que (II-23) é consistente como expressão de um módulo porque sendo  $0 < \theta < \pi$  vem  $\text{sen } \theta > 0$ ).

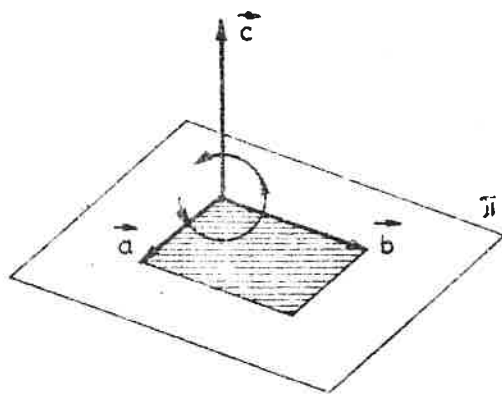


Fig. 12

Os casos em que  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$  ou  $|\vec{a}| = 0$  ou  $|\vec{b}| = 0$  conduzem a uma indeterminação nas características 1) e 2) (direcção e sentido) mas isso está em perfeita conformidade com o facto de vir então também o módulo nulo, por (7.1): o produto externo identifica-se em qualquer desses casos com o vector nulo (de direcção e sentido indeterminados). A definição dada acima abrange assim todos os casos: e desta análise saem simultaneamente as condi-

ções de anulamento do produto externo. Pode dizer-se, em particular: A condição necessária e suficiente de anulamento do produto externo de

dois vectores, nenhum deles nulo, é que sejam colineares (ou com a mesma direcção).

Pela definição tem-se que  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  é perpendicular a qualquer dos factores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  (por 1). Daí resulta aproveitar-se muitas vezes a operação produto externo para exprimir um no outro, dois vectores perpendiculares entre si,  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$ . É sempre possível escrever por exemplo

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{u} \quad (\text{II-24})$$

sendo  $\vec{\omega}$  um vector do plano perpendicular a  $v$  e com características tais que satisfaça a equação (II-24)<sup>(\*)</sup>.

A expressão do módulo de  $\vec{a} \wedge \vec{b}$ , (II-23), é susceptível de uma interpretação geométrica que convém ter em conta: coincide com a área do paralelogramo definido pelos dois vectores  $a$  e  $b$  no seu plano (assinalada a tracejado na fig. 12).

Das propriedades do produto externo salientamos aqui as traduzidas nas seguintes identidades:

$$\text{I) } \vec{a} \wedge \vec{b} = - \vec{b} \wedge \vec{a} \quad (\text{II-25})$$

$$\text{II) } \vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c} \quad (\text{II-26})$$

$$\text{III) } m(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (m\vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (m\vec{b}) \quad (\text{II-27})$$

A identidade I) afirma que o produto externo não é comutativo mas sim anti-comutativo e resulta de terem  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  e  $\vec{b} \wedge \vec{a}$ , em face da definição, a mesma direcção e o mesmo módulo — mas sentidos contrários, e isto como consequência de que, em qualquer caso, devemos factores, pela sua ordem, e o produto definir um triedro directo.

A identidade II) traduz a propriedade distributiva em relação à adição vectorial; não pode, claro está, alterar-se a ordem da operação produto externo<sup>(\*\*)</sup>.

A identidade III) significa que um escalar que multiplica um produto externo pode, indiferentemente, multiplicar qualquer dos factores<sup>(\*\*)</sup>.

(\*) Este problema matemático constitue a chamada divisão vectorial e tem aliás um número infinito de soluções.

(\*\*) O leitor facilmente demonstrará a propriedade III) por si próprio e encontrará a demonstração de II) num compêndio de análise vectorial.

Vamos agora operar os produtos externos dos vectores unitários dos eixos  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$ , entre si, tomados dois a dois. Tendo em atenção que  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  fazem entre si ângulos rectos e têm módulos iguais a 1 e considerando a sua disposição relativa (fig. 11) é fácil reconhecer que a definição do produto externo conduz a :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}; \quad (\text{II-28})$$

e pela mesma via, ou por aplicação da propriedade anti-comutativa, vem

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j} \quad (\text{II-29})$$

Note-se que nas igualdades (II-28) se passa por uma permutação circular da 1ª para a 2ª e da 2ª para 3ª e reciprocamente; e o mesmo em relação às igualdades (II-29). As seis igualdades podem aliás reconstituir-se mnemonicamente com circulações como a da fig. 13 : se directas, nenhum vector é afectado do sinal; se retrógradas, com um sinal menos no segundo membro.

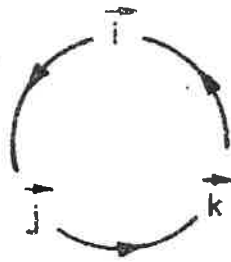


Fig. 13

Estamos agora aptos a estabelecer a expressão cartesiana do produto externo. A aplicação dos resultados (II-28) e (II-29) e das propriedades (II-25), (II-26) e (II-27) transforma

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \wedge (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

em

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \quad (\text{II-30})$$

que é a expressão cartesiana do produto externo.

Vê-se aqui também que uma permutação circular permite passar da componente em x, para a componente em y e desta para a componente em z e reciprocamente.

Os termos de (II-30) podem aliás reconstituir-se mnemonicamente com circulações dos índices como a da fig. 14 no produto  $a_* b_* \vec{e}_*$  representando  $\vec{e}_*$  os versores dos eixos e acarretando uma circulação inversa um sinal menos para a parcela de (II-30) que essa circulação gera.

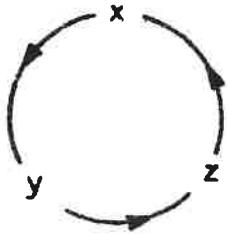


Fig. 14

A expressão (7.8) é ainda susceptível de se escrever sob a forma de um determinante, o determinante da matriz  $3 \times 3$  cuja 1ª linha é constituída pelos vectores unitários  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ , cuja 2ª linha é constituída pelas componentes do vector  $\vec{a}$  (1º factor) e cuja 3ª linha é constituída pelas componentes do vector  $\vec{b}$  (2º factor):

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (\text{II-31})$$

9. Duplo produto externo

Pode definir-se o duplo produto externo de três vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$ , por esta ordem, como o vector

$$\vec{p} = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} \quad (\text{II-32})$$

Como, por definição de produto externo,  $\vec{p}$  deve ser perpendicular a  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  e  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  deve por sua vez ser perpendicular ao plano de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , segue-se que  $\vec{p}$  existe no plano de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

É portanto possível exprimir  $\vec{p}$  como composição de dois vectores colineares com  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , respectivamente. Utilizando as expressões cartesianas, mostra-se que se tem:

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u} \quad (\text{II-33})$$

10. Produto misto

Internando o produto externo de dois vectores,  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$ , por um 3º vector,  $\vec{t}$ , obtém-se o chamado produto misto dos três vectores  $\vec{r}$ ,  $\vec{s}$  e  $\vec{t}$ , por esta ordem:  $\vec{r} \wedge \vec{s} \cdot \vec{t}$ .

Trata-se evidentemente de um escalar e prova-se que iguala o volume do paralelepípedo definido pelos três vectores, afectado de sinal + ou - consoante eles constituem pela sua ordem um triedro directo ou inverso.

Mostra-se também que o produto misto é insensível a uma permutação circular dos três vectores na sua ordem :

$$\vec{r} \wedge \vec{s} \cdot \vec{t} = \vec{t} \wedge \vec{r} \cdot \vec{s} = \vec{s} \wedge \vec{t} \cdot \vec{r} \quad (\text{II-34})$$

E, dada a comutatividade do produto interno, estas igualdades (II-34) significam que o produto misto se mantém quando se trocam os sinais de produto externo ( $\wedge$ ) e de produto interno ( $\cdot$ ).

A expressão cartesiana do produto misto, fácil de deduzir reunindo (II-22) e (II-30), pode escrever-se na forma <sup>do</sup> determinante de uma matriz, a matriz das componentes dos factores, pela sua ordem:

$$\vec{r} \wedge \vec{s} \cdot \vec{t} = \begin{vmatrix} r_x & r_y & r_z \\ s_x & s_y & s_z \\ t_x & t_y & t_z \end{vmatrix}$$

### 11. Derivada de um vector

Suponhamos que um vector  $\vec{v}$ , variável, é função de um escalar  $t$ , variável (parâmetro  $t$ ):

$$\vec{v} \equiv \vec{v}(t) \quad (\text{II-35})$$

Então, uma variação  $\Delta t$  do escalar  $t$  determina uma variação  $\Delta \vec{v}$  do vector  $\vec{v}$  dada por

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t).$$

Tem interesse em muitos casos o confronto destas duas variações e em particular a consideração do quociente (de um vector por um escalar)

$$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \quad (\text{II-36})$$

vector que recebe o nome de taxa de variação do vector  $\vec{v}$  com o parâmetro  $t$ .

A noção de derivada do vector  $\vec{v}$  função de  $t$ , em ordem a este parâmetro é um vector que surge como o limite daquele quociente, se existe :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \quad (*) \quad (\text{II-37})$$

Esta definição é perfeitamente análoga à que foi feita no domínio das funções escalares e admite logo o estabelecimento de algumas propriedades formalmente idênticas e deduzidas por via semelhante à seguida nesse domínio. Assim, surgem as seguintes regras de derivação :

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt} \quad (\text{II-38})$$

$$\frac{d}{dt} (m \vec{a}) = \frac{dm}{dt} \vec{a} + m \frac{d\vec{a}}{dt} \quad (\text{II-39})$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} \quad (\text{II-40})$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \frac{d\vec{b}}{dt} \quad (\text{II-41})$$

## 12. Expressão cartesiana da derivada de um vector.

Num referencial de eixos  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  fixos (não variáveis) relativamente ao parâmetro  $t$ , a derivada do vector

$$\vec{v}(t) = v_x(t) \vec{i} + v_y(t) \vec{j} + v_z(t) \vec{k}$$

(\*) As noções de limite, continuidade, etc, conhecidas para as funções escalares são facilmente extensíveis às funções do tipo (II-35), apesar da maior complexidade dos vectores na sua representação matemática. (É-nos já familiar com efeito a noção de limite de uma direcção : a tangente a uma curva é definida como o limite de uma sucessão de secantes). Do mesmo modo são também extensíveis as propriedades válidas para tais noções.



vem, por virtude das propriedades (II-38) e (II-39), dada por :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} \quad (\text{II-42})$$

Portanto : em eixos fixos , isto é , podendo considerar-se  $\vec{i}$  ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  como constantes a derivada de um vector tem por componentes as derivadas das componentes homólogas.

Esta é a expressão cartesiana da derivada de um vector , como normalmente se entende.

Mas pode acontecer , pelo contrário , que um vector  $\vec{v}$  seja inalterável num dado referencial ( isto é , tenha aí componentes  $v_x$  ,  $v_y$  e  $v_z$  não variáveis com o parâmetro  $t$  ), e que entretanto variem com  $t$  as orientações  $\vec{i}$  ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  , embora constituindo sempre um triedro triortogonal directo . O vector  $\vec{v}$  é portanto ainda uma função de  $t$

$$\vec{v}(t) = v_x \vec{i}(t) + v_y \vec{j}(t) + v_z \vec{k}(t)$$

e a sua derivada , por virtude de (II-38) e (II-39) vem agora dada por :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = v_x \frac{d\vec{i}}{dt} + v_y \frac{d\vec{j}}{dt} + v_z \frac{d\vec{k}}{dt} \quad (\text{II-43})$$

E , como é evidente , no caso mais geral é

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} + v_x \frac{d\vec{i}}{dt} + v_y \frac{d\vec{j}}{dt} + v_z \frac{d\vec{k}}{dt} \quad (\text{II-44})$$

As expressões (II-43) e (II-44) ocorrem sempre que estão em jogo observações sobre vectores em dois referenciais distintos , sendo um deles variável em função do parâmetro  $t$  .

PROBLEMAS

1. Considere os vectores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  dados por  $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$  ,  $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$ .
- a) Ache o produto interno  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  expresso nos módulos de  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .
- b) Aproveite o resultado obtido para mostrar que só no caso particular do losango é que as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares entre si.

2. Mostre que o ângulo  $\delta$  de duas orientações cujos cosenos directores são  $l_1, m_1, n_1$  e  $l_2, m_2, n_2$ , é dado através da seguinte expressão

$$\cos \delta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 .$$

3. Dados os vectores  $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$  e  $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$  e recorrendo a uma representação gráfica, ache o produto externo  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  por aplicação directa da definição.

Mesmo problema para  $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$  e  $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$ .

4. Mostre que um vector  $\vec{A}$  se pode decompôr segundo a normal a um plano  $\pi$  e numa direcção paralela ao mesmo plano  $\pi$ , vindo

$$\vec{A} = \vec{A}_N + \vec{A}_P$$

com  $\vec{A}_N = (\vec{n} \cdot \vec{A}) \vec{n}$ , componente normal e  $\vec{A}_P = (\vec{n} \wedge \vec{A}) \wedge \vec{n}$ , componente paralela, em que  $\vec{n}$  é o versor da normal ao plano  $\pi$ , orientado para o mesmo lado que o próprio vector  $\vec{A}$ , relativamente ao plano  $\pi$ .

5. Suponha que  $\vec{r}$  designa o vector  $\vec{OP}$  — vector distância tirado da origem das coordenadas para um qualquer ponto P do espaço. Indique qual o lugar geométrico dos pontos P que satisfazem a equação :

a)  $|\vec{r}| = c$ , sendo  $c$  uma constante.

b)  $\vec{r} \cdot \vec{s} = d$ , sendo  $d$  uma constante e  $\vec{s}$  um determinado vector unitário.

6. Mostre que <sup>se</sup> um vector variável com o parâmetro  $t$  se mantém constantemente paralelo a um dado plano, da mesma propriedade goza a sua derivada em ordem a  $t$ .
7. Mostre que se um vector,  $\vec{w}$ , variável com o parâmetro  $t$  mantém direcção constante (a do vector unitário  $\vec{e}$ ), a sua derivada em ordem a  $t$  é um vector com essa mesma direcção. Ache o valor algébrico da derivada relativamente a  $\vec{e}$ , supondo que  $\vec{w} = w \vec{e}$ .
8. Mostre que, se um vector  $\vec{u}$ , variável com o parâmetro  $t$ , tem módulo constante, a sua derivada em ordem a  $t$ , é, para todo o valor de  $t$ , perpendicular ao próprio  $\vec{u}$ .

Resolução:

Se  $|\vec{u}| = k$  (const.) também  $\vec{u}^2 = |\vec{u}|^2 = k^2$  (const.) e daí

$$\frac{d}{dt} (\vec{u}^2) = 0$$

Mas, por (II-40) :

$$\frac{d}{dt} (\vec{u}^2) = \frac{d}{dt} (\vec{u} \cdot \vec{u}) = 2 \vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Então

$$\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0$$

e, não sendo neste produto interno nenhum dos factores nulo, resulta que são perpendiculares entre si.

## APÊNDICE I

### GRANDEZAS FÍSICAS

#### 1. Noção de grandeza física

A observação da Natureza conduz-nos muito frequentemente a atribuir aos corpos propriedades que traduzem aspectos apreendidos por via sensorial directa. São exemplos o comprimento, o volume, a forma, a densidade, a transparência, a cor, a temperatura.

Acontece também que a observação de um qualquer fenómeno natural muitas vezes nos lega noções originadas na percepção global do fenómeno em si, independentemente das propriedades dos corpos intervenientes. São exemplos: a duração das oscilações de um pêndulo; a velocidade de um móvel; o calor produzido numa combustão.

As propriedades dos corpos e as noções suscitadas na percepção dos fenómenos são conceitos abstractos resultantes da observação, e é o estabelecimento das leis experimentais que correlacionam tais conceitos, que permite o desenvolvimento das Ciências da Natureza<sup>(\*)</sup>.

Mas, para este efeito, as Ciências da Natureza só num domínio cada vez mais restrito do seu objecto se contentam com o carácter qualitativo dos conceitos abstractos formulados na observação. Em face de um novo conceito abstracto sugerido pela experiência, a preocupação preponderante é procurar por que via esse conceito se torna susceptível de assumir um carácter quantitativo. Quando o conceito revela efectivamente esse cunho, diz-se que constitui uma grandeza.

---

(\*) Estes conceitos admitem imediatamente o uso de uma linguagem convencional e tornam-se instrumentos cómodos para uma descrição simples dos factos observados ulteriormente. Note-se para exemplo que o conceito de comprimento permite descrever observações tão diversas como a distância entre dois pontos, a altura de que cai um corpo, a diferença de nível marcada pela água num cais entre a preia-mar e a baixa-mar, o espaço percorrido por um móvel, etc.. Facilmente o leitor colhe exemplos semelhantes na memória dos estudos feitos.

Esta atribuição de carácter quantitativo anda ligada, primariamente, à possibilidade de comparar, entre si, conceitos da mesma espécie, obtendo como resultado um número, um valor numérico puro, que exprime de modo preciso a comparação efectuada. Uma tal comparação, que envolve experiências mais ou menos complexas, constitui a medição da grandeza. Casos simples são o da grandeza comprimento e o da grandeza ângulo, as quais aprendemos a medir na geometria elementar<sup>(\*)</sup>.

Por generalização destes casos mais simples, realizar a medição de uma grandeza  $G$  ou medir uma grandeza  $G$  é compará-la, por algum processo, com outra da mesma espécie  $U$  tomada para unidade. O resultado da medição,  $g$ , designa-se por medida de  $G$  na unidade  $U$ .

Diz-se que o valor de  $G$ , na unidade  $U$ , é o número  $g$ ; ao exprimir-se o valor de  $G$  deve acrescentar-se adiante de  $g$  a unidade  $U$  que foi tomada na medição e, mais correctamente, entre parêntesis. Exemplos: " o comprimento desta sala, na unidade metro, é 10 " ou " o comprimento desta sala vale 10 (metro) " ; " a duração da aula, na unidade minuto, é 50 " ou " a duração da aula vale 50 (minuto) ". Na linguagem corrente, erroneamente, leva-se ao plural a designação da unidade.

Pode escrever-se simbòlicamente

$$G = g \times U \quad \text{ou} \quad G = g \cdot U \quad \text{ou} \quad G = g U \quad (\text{I-1})$$

o que pretende significar, numa extensão da linguagem adoptada para os casos mais simples<sup>(\*)</sup>, que a grandeza  $G$  vale  $g$  vezes a grandeza  $U$

(\*) A comparação dos comprimentos de dois segmentos de recta  $a$  e  $b$  conduz à medição do comprimento do segmento  $a$  tomando para unidade o comprimento do segmento  $b$ ; o resultado desta operação exprime-se dizendo que o comprimento de  $a$  cabe  $n$  vezes no comprimento de  $b$  ou que o comprimento de  $b$  vale  $n$  vezes o comprimento de  $a$  (escrevendo-se então simbòlicamente  $L_b = n \cdot L_a$ ). Esta linguagem é aqui perfeitamente inteligível e aceitável.

O mesmo acontece com outros exemplos ainda simples como as áreas e os volumes: pode ensaiar-se com êxito a comparação da área do tampo de uma secretária com a área de uma folha de blocos-notas; e assim também do volume de um armário com o volume de uma caixa de giz. E uma idêntica linguagem pode aqui ainda ser adoptada, para se entender e aceitar sem esforço.

ou que a grandeza  $\underline{U}$  cabe  $g$  vezes na grandeza  $\underline{G}$ . O valor da grandeza  $\underline{G}$  aparece-nos assim com o produto simbólico do valor numérico  $g$  pela unidade  $\underline{U}$ :

$$\text{grandeza} = \text{valor numérico} \times \text{unidade} \quad (*)$$

A concepção de uma grandeza fica pois ligada à possibilidade da sua medição e isso torna compreensível a afirmação que segue: A definição precisa de uma grandeza é normalmente feita através da descrição do processo pelo qual ela se mede.

Uma vez fixadas, ainda que arbitrariamente, as unidades de medição das diferentes grandezas, podemos passar a tratar as grandezas que intervêm num dado fenómeno através dos valores numéricos que lhes correspondem e utilizar estes valores numéricos no registo das observações. Estaremos assim aptos a conferir às leis experimentais uma expressão matemática: as relações entre conceitos, por vezes vagas, transformam-se em relações matemáticas concretas entre valores numéricos.

Quando uma grandeza  $\underline{G}$  assuma, em sucessivas experiências no âmbito do mesmo fenómeno, valores  $g$  de um conjunto de números e por esta sua variação determine a variação de outra grandeza  $\underline{H}$ , a qual assume, em consequência, valores  $h$  de um outro conjunto de números, então a lei experimental que respeita ao fenómeno em causa é representada por uma relação funcional do tipo  $\Psi(g, h) = 0$ . Semelhantemente para o caso mais geral de uma lei em que estejam envolvidas várias grandezas  $G, H, I, J, L, \dots$ : a relação funcional representativa da lei é  $\Psi(g, h, i, j, l, \dots) = 0$ .

Tendo em conta as considerações precedentes podemos afirmar que a Física é uma ciência eminentemente quantitativa: atribue exaustivamente carácter quantitativo aos conceitos originados na observação experimental fazendo surgir grandezas físicas; utiliza as grandezas físi

---

(\*) De acordo com as recomendações da Comissão de Símbolos, Unidades e Nomenclatura da União Internacional de Física Pura e Aplicada (Reunião de 1960).

cas na descrição dos seus fenómenos e no estabelecimento das suas leis, as quais assumem na maior parte dos casos uma expressão matemática bem definida.

A medição das grandezas físicas é por consequência uma operação fundamental ao longo de todo o desenvolvimento desta ciência.

## 2. Grandezas fundamentais e grandezas derivadas

De entre os conceitos abstratos que estão na origem das grandezas físicas destaquemos agora aqueles que nos são sugeridos com absoluta independência, ou seja como conceitos primários — insusceptíveis de qualquer definição, de qualquer representação baseada em ideias já formuladas. As grandezas que lhes correspondem chamam-se grandezas fundamentais. É sempre muito reduzido o número de grandezas fundamentais e variável com o conjunto de fenómenos considerado : três na Mecânica, quatro na Termodinâmica, cinco no Electromagnetismo.

Todos os restantes conceitos nos são sugeridos em termos de conceitos já estabelecidos, quer dizer, ao fim e ao cabo na dependência dos referidos conceitos primários. As grandezas que lhes correspondem chamam-se grandezas derivadas e a sua definição faz-se, directa ou indirectamente, à custa das grandezas fundamentais.

Na Mecânica, as grandezas fundamentais, originadas em conceitos primários sugeridos na geometria e nos mais simples movimentos, bem como na percepção das suas causas, são, como já se disse, três: o comprimento, o tempo e a força. São exemplos de grandezas derivadas: a área, o ângulo, o volume (dependentes apenas da grandeza comprimento); a velocidade, a aceleração, a velocidade angular (dependentes do comprimento e do tempo); a frequência de um fenómeno periódico (dependente apenas do tempo); a pressão, o trabalho (dependentes da força e do comprimento); a massa, a potência (dependentes do comprimento, do tempo e da força).

Na Termodinâmica, às três grandezas fundamentais da Mecânica, junta-se a temperatura. Na verdade, logo os mais simples fenómenos, que constituem objecto da Termodinâmica, sugerem dois novos conceitos primários : o calor e a temperatura. Mas justamente um dos princípios

fundamentais da Termodinâmica vem identificar o calor a uma energia e assim apenas a temperatura subsiste como grandeza fundamental. Grandezas derivadas são : o calor específico, a capacidade calorífica, o calor latente, os coeficientes de dilatação, a constante dos gases perfeitos, a entropia, etc. .

A descrição dos fenômenos do Electromagnetismo exige, quando completa, a consideração de cinco grandezas fundamentais : duas novas se juntam às da Mecânica. As duas novas grandezas fundamentais são habitualmente escolhidas de entre cinco grandezas muito importantes no Electromagnetismo : carga eléctrica, constante dielétrica, carga magnética, permeabilidade magnética e constante universal do electromagnetismo.

Qualquer outro ramo da Física se vai radicar nestes três, ou nalguns deles, e por isso fácil se torna sempre encontrar o número de grandezas fundamentais que estão na base do desenvolvimento desse ramo. Assim, a Acústica tem quatro grandezas fundamentais (porque se baseia na Mecânica e na Termodinâmica); os fenômenos gerais da Óptica descrevem-se com cinco grandezas fundamentais (as do Electromagnetismo, em que se radica), o estudo do radiamento térmico (implicando Óptica e Termodinâmica) e a electroacústica (implicando Electricidade e Acústica) exigem seis grandezas fundamentais. E este último número não é excedido em qualquer outro ramo da Física, no estado actual da evolução desta ciência.

Se fôr  $N_g$  o número de grandezas intervenientes na descrição de todos os fenômenos conhecidos num certo ramo da Física, e  $N_r$  o número de relações físicas independentes que podemos estabelecer entre essas  $N_g$  grandezas — então, como é evidente, a diferença  $N_g - N_r$  representa o número  $n$  de grandezas fundamentais. Do ponto de vista matemático, diremos que o número de grandezas fundamentais iguala o excesso do número de variáveis  $N_g$ , sobre o número de equações independentes,  $N_r$ , entre as mesmas variáveis, ou seja, o número  $n = N_g - N_r$  de variáveis independentes nesse conjunto de variáveis.



Isto deixa ver que nos é permitido fazer uma re-escolha arbitrária das grandezas que vão desempenhar o papel de fundamentais num rearranjo da teoria, visto que, mantendo-se o número, quaisquer variáveis podem assumir o papel de independentes. Assim é que na Mecânica se podem tomar como grandezas fundamentais o comprimento, o tempo e a massa ( a massa substitue a força ) como no sistema CGS ou no sistema Giorgi (\*). Também do mesmo modo se justifica a arbitrariedade da escolha, que se faz no Electromagnetismo, de duas novas grandezas fundamentais entre cinco grandezas electromagnéticas, como atrás se apontou.

### 3. Sistemas de unidades

Se escolhermos arbitrariamente para cada grandeza de um dado ramo da Física, uma determinada unidade, fica constituído um grupo de unidades a que podemos chamar sistema de unidades, no sentido lato.

Mas, com o objectivo de alcançar comodidade no seu uso prático, deve um sistema de unidades ser organizado criteriosamente, mediante o estabelecimento de algumas convenções que podem ser adoptadas dentro daquela larga arbitrariedade de escolha.

Tais convenções são geralmente as seguintes:

1ª) escolha das grandezas que vamos considerar grandezas fundamentais (o seu número é bem determinado para cada ramo da Física, como já dissemos ; mas as grandezas aqui escolhidas como fundamentais podem não corresponder aos conceitos primários (cf § 2))

2ª) escolha das relações de definição que ligam as grandezas derivadas às fundamentais (a ligação de dada grandeza derivada às grandezas fundamentais pode ser directa ou por intermédio de outras grandezas derivadas previamente definidas)

3ª) escolha das unidades com que se medem as grandezas fundamentais (esta escolha é ainda absolutamente arbitrária e independente

---

(\*) Entre outros motivos esta escolha é aconselhada pela comodidade de estabelecimento dos padrões fundamentais.

porque nenhuma relação liga entre si as grandezas fundamentais)

4ª) estabelecimento da unidade de cada grandeza derivada sob o critério de que tal unidade verifique a relação de definição da respectiva grandeza, escolhida pela 2ª convenção, quando nessa relação fazemos figurar as unidades das grandezas intervenientes.

As convenções acima enunciadas, na medida em que são invariavelmente respeitadas, qualquer que seja o problema em causa, conferem a todo o sistema assim constituído uma coerência interna que nos assegura a máxima simplicidade e constância das fórmulas na aplicação numérica das relações físicas, ao mesmo tempo que uma grande facilidade e universalidade na expressão dos resultados das medições experimentais.

Os sistemas assim constituídos dizem-se sistemas racionais ou sistemas coerentes (de unidades).

Exemplo :

Tomemos como grandezas fundamentais o comprimento, a massa e o tempo e como unidades respectivas o metro ( $L_0$ ), o quilograma ( $M_0$ ) e o segundo ( $T_0$ ). Trata-se do sistema de Giorgi, na Mecânica.

Seja a grandeza velocidade, uma grandeza derivada que se relaciona com o comprimento e com o tempo. Convencionemos para relação de definição da velocidade a relação (que adoptamos a partir do estudo do movimento uniforme e rectilíneo) :  $V = L/T$ . A unidade de velocidade  $V_0$  deverá verificar esta relação quando nela fazemos figurar o metro ( $L_0$ ) e o segundo ( $T_0$ ) :  $V_0 = L_0/T_0$ .  $V_0$  é portanto a velocidade que teria um móvel se percorresse, em movimento uniforme e rectilíneo, um metro durante um segundo.

Repare-se que nestas condições, e recorrendo aos produtos simbólicos do tipo (I-1)

$$L = l L_0 \quad T = t T_0 \quad \text{e} \quad V = v V_0$$

se pode estabelecer, para o caso do movimento uniforme e rectilíneo, uma relação entre valores numéricos  $v = l/t$  formalmente idêntica

à convencionalizada relação entre as grandezas (\*).

Prova-se por outro lado que, se se trabalha com unidades de um sistema coerente, às relações entre valores numéricos obtidas experimentalmente como tradução de uma lei física, correspondem relações formalmente idênticas entre as próprias grandezas.

Quando não se trabalha com unidades de um sistema coerente, facilmente se prova que se passa da relação entre valores numéricos para a relação entre as grandezas, aplicando uma constante numérica, um número puro, como factor multiplicativo, que se tem de calcular cuidadosamente. Somos assim conduzidos a uma fórmula preparada, essencial para obter a expressão correcta dos resultados experimentais quando se usa um tal grupo de unidades incoerentes.

São sistemas coerentes, no domínio da Mecânica : CGS, MKS (ou de Giorgi), métrico gravitacional, etc..

São sistemas coerentes, no domínio da Electricidade : electrostático CGS, electromagnético CGS, de Gauss, electromagnético prático, de Sommerfeld-Giorgi, etc..

O Sistema Internacional, há pouco tempo oficializado em França para todas as aplicações técnico-científicas, é um sistema coerente no domínio geral da Física.

Na Termodinâmica é muito usado um sistema incoerente, constituído com as unidades fundamentais mecânicas do sistema de Giorgi (metro, kg, seg) e com o grau centígrado para unidade de temperatura (4ª unidade fundamental) mas definindo em seguida, incoerentemente, a caloria

---

(\*) Quando fazemos o estudo experimental do movimento uniforme e rectilíneo, tendo previamente escolhido de modo arbitrário uma unidade de comprimento, uma unidade de tempo e uma unidade de velocidade, independentes entre si, obtemos uma relação entre valores numéricos com a forma  $v = k \frac{l}{t}$  (proporcionalidade entre os valores numéricos da velocidade e os quocientes dos valores numéricos do comprimento e do tempo). Esta constante  $k$  torna-se igual a 1, para o caso do sistema que estamos a construir e isto já por força das convenções adoptadas.

como unidade de calor. Sendo o calor uma energia<sup>(\*)</sup>, a sua unidade coerente neste sistema deveria ser o joule. Em consequência, torna-se necessário esclarecer qual a unidade a ser usada em tal ou tal fórmula, se o joule, se a caloria, ou seja, torna-se necessário distinguir as diferentes fórmulas preparadas<sup>(\*\*)</sup>.

Os diferentes sistemas usados num dado ramo da Física distinguem-se em primeiro lugar, pela escolha das grandezas fundamentais (1ª convenção) — são distintos por este motivo o sistema de Giorgi e o métrico gravitacional, na Mecânica. Em segundo lugar, distinguem-se pela escolha das unidades fundamentais (3ª convenção) — só isto torna diferentes o sistema de Giorgi e o CGS na Mecânica.

Mas há uma tendência para tornar tão próximas quanto possível as escolhas referidas na 2ª convenção, para os diversos sistemas. As diferenças reduzem-se quase sempre às que são consequências forçadas de serem distintas as grandezas fundamentais. Isto tem o objectivo evidente de conseguir que as relações físicas tenham expressões matemáticas quanto possível independentes do sistema utilizado.

#### 4. Equações das dimensões

Uma grandeza  $G$  mede-se em relação a duas unidades diferentes  $G_1^0$  e  $G_2^0$ , respectivamente pelos valores numéricos  $g_1$  e  $g_2$  tais que

$$G = g_1 G_1^0 = g_2 G_2^0 \quad (\text{I-2})$$

Isto quer dizer que entre as unidades e os valores numéricos respectivos de uma grandeza há proporcionalidade inversa. A razão de proporção  $g_2/g_1 = G_1^0/G_2^0$  representa-se por  $|G|$  e chama-se factor de redu-

(\*) O facto de o calor ser tratado, antes do estabelecimento do 1º Princípio da Termodinâmica como uma grandeza independente, está certamente na origem da definição independente da caloria. Depois, a prática consagrou a sua utilização.

(\*\*) Isto dá origem com frequência a enganos não só no tocante ao calor mas também a todas as grandezas com essa relacionadas: calor específico, calor latente, entropia, etc.

ção ou de transformação de  $G$ , da unidade  $G_1^0$  para a unidade  $G_2^0$ .

Tem-se :

$$g_2 = |G| g_1 \quad \text{e} \quad G_1^0 = |G| G_2^0 \quad (\text{I-3})$$

Se  $G_1^0$  e  $G_2^0$  se acham integradas em sistemas  $S_1$  e  $S_2$ , respectivamente, diz-se que  $|G|$  é o factor de redução ou de transformação da grandeza  $G$ , de  $S_1$  para  $S_2$ . Note-se desde já que, para dois determinados sistemas,  $|G|$  é um valor numérico constante, por ser  $|G| = G_1^0/G_2^0$ , e isto independentemente, é claro, de quais os valores numéricos  $g_1$  e  $g_2$  da grandeza  $G$ .

Consideremos agora dois sistemas coerentes  $S_1$  e  $S_2$ , com as mesmas grandezas fundamentais e com o mesmo grupo de relações de definição das grandezas derivadas.

Para fixar ideias, situemo-nos na Mecânica e sejam o comprimento, a massa e o tempo as grandezas fundamentais. Sejam  $L_1^0$ ,  $M_1^0$  e  $T_1^0$  as unidades fundamentais de  $S_1$ ; e  $L_2^0$ ,  $M_2^0$  e  $T_2^0$  as unidades fundamentais de  $S_2$ .

O conhecimento destes dados, definidores dos dois sistemas, permite encontrar já os factores de transformação das grandezas fundamentais, de  $S_1$  para  $S_2$  :

$$|L| = L_1^0/L_2^0 \quad |M| = M_1^0/M_2^0 \quad |T| = T_1^0/T_2^0 \quad (\text{I-4})$$

Se se tratasse por exemplo dos sistemas de Giorgi e CGS, respectivamente, estes factores de transformação valeriam :  $L = \text{metro/cm} = 10^2$ ;  
 $M = \text{kgr/gr} = 10^3$  ;  $T = \text{seg/seg} = 1$  .

Ocupemo-nos em seguida dos factores de transformação das grandezas derivadas.

Em primeiro lugar vamos supor que a relação de definição de uma grandeza  $Q$  a liga, por meio de um monómio algébrico, directamente às grandezas fundamentais, como acontece nalguns casos simples. A relação entre os valores numéricos da grandeza  $Q$  e das fundamentais, no âmbito dessa definição será do tipo :

$$q = l^\alpha m^\beta t^\gamma \quad (\text{I-5})$$

em que  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são números racionais, positivos ou negativos (eventualmente nulos).

Então, para uma determinada situação concreta a que seja aplicável (I-5), no sistema  $S_1$  temos  $q_1 = l_1^\alpha m_1^\beta t_1^\gamma$  e no sistema  $S_2$   $q_2 = l_2^\alpha m_2^\beta t_2^\gamma$ . Donde:

$$q_2/q_1 = (l_2/l_1)^\alpha (m_2/m_1)^\beta (t_2/t_1)^\gamma$$

ou, utilizando (I-3):

$$|Q| = |L|^\alpha |M|^\beta |T|^\gamma \quad (I-6)$$

Esta equação permite obter o factor de transformação da grandeza  $Q$  à custa dos factores de transformação das grandezas fundamentais, previamente conhecidos. Vê-se que (I-6) neste caso simples é um decalque de (I-5): os valores numéricos são substituídos pelos respectivos factores de transformação.

A eq. (I-6) chama-se equação das dimensões da grandeza  $Q$ . Os números  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são as dimensões (\*) da grandeza  $Q$  no sistema de base comprimento - massa - tempo, ou sistema de base LMT.

Se a grandeza derivada em causa,  $R$ , não se liga, pela sua definição, directamente às grandezas fundamentais mas sim por intermédio de outras grandezas derivadas anteriormente definidas (e sendo as relações de definição sempre monómios algébricos) — é fácil de entender que um raciocínio como o de acima [(I-5)  $\longrightarrow$  (I-6)] e convenientes substituições sucessivas possam conduzir a uma equação das dimensões de  $R$ , análoga a (I-6):

$$|R| = |L|^{\alpha'} |M|^{\beta'} |T|^{\gamma'}$$

(\*) O termo dimensão surge por via de uma extensão, a todas as grandezas fundamentais, do conceito corrente de dimensão que se estabeleceu a respeito do comprimento. Diz-se, com efeito, na linguagem corrente, que as áreas planas ou os volumes têm duas ou três dimensões de comprimento, respectivamente, E escreve-se, em particular, para a área de um quadrado  $S = l^2$  e para o volume de um cubo  $v = l^3$ , relações em que o número de dimensões de comprimento, atrás referido, figura como expoente em potência de base, precisamente como em (I-5) ou (I-6).

Por outro lado, se, na tradução analítica de alguma lei física,  $q$  se liga a  $l$ ,  $m$  e  $t$  não na forma simples (I-5) mas sim através de uma relação matematicamente mais complexa

$$q = f(l, m, t)$$

mostra-se que ainda assim somos conduzidos a uma equação do tipo (I-6) e com o mesmo significado, desde que  $f$  seja uma função contínua.

Não o faremos aqui. Diremos apenas que, nessa demonstração, do mesmo passo se estabelece o princípio da homogeneidade dimensional das fórmulas físicas, isto é, que em todas as equações físicas, os termos de cada membro e ambos os membros têm as mesmas dimensões num determinado sistema de base (como quem diz, são homogêneos).

Tudo o que atrás fica dito, é ainda válido para dois sistemas de unidades  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , que não tenham as mesmas grandezas fundamentais, desde que, apesar disso, tenham de comum o conjunto de relações de definição das suas grandezas derivadas (isto acontece por exemplo para os sistemas de Giorgi e métrico gravitacional, na Mecânica; e para vários sistemas do Electromagnetismo). Basta que se adopte um sistema-de-base e se proceda como se as grandezas-de-base escolhidas fossem as fundamentais, ainda que possam não coincidir com as fundamentais de  $\Sigma_1$  ou de  $\Sigma_2$ .

Achar a equação das dimensões de uma grandeza derivada no sistema-de-base de dois determinados sistemas é o primeiro passo para uma resolução sistemática e segura de todos os problemas de transformação de unidades (ou de valores numéricos) entre esses dois sistemas.

Na prática, para abreviar a escrita das equações das dimensões, simplifica-se a notação dos factores de transformação das grandezas de base. Assim, em vez de (I-6), escreve-se normalmente:

$$|Q| = L^\alpha M^\beta T^\gamma \quad (I-7)$$

### 5. Medição das grandezas físicas

O processo de medição directa consiste em comparar a grandeza  $G$  a medir com um padrão que representa a unidade  $U$  da mesma espécie em plena conformidade com a definição dada no §1 e conduzindo directamente a um resultado com a expressão (I-1).

Convém distinguir dois casos de medição directa. Com efeito, na prática pode realizar-se :

caso I - ou o confronto das grandezas  $G$  e  $U$  por si próprias;  
caso II - ou o confronto dos diferentes efeitos determinados por  $G$  ou  $U$  nalgum fenómeno físico em que intervenham, sendo esses efeitos apreciados em grandezas de outra espécie que se confrontam entre si como no caso I.

Em qualquer destes dois casos se observa sempre a presença imprescindível do padrão  $U$  e isso os caracteriza afinal como casos de medição directa.

No caso II de medição directa pode ainda fazer-se , no tocante aos métodos seguidos , uma distinção de interesse :

a) os efeitos de  $G$  e  $U$  são confrontados em experiências sucessivas através dos valores assumidos por uma determinada grandeza de outra espécie — método de comparação sucessiva ou método de desvio ;

b) os efeitos de  $G$  e  $U$  sobre uma determinada grandeza de outra espécie são equilibrados entre si numa única experiência — método de redução a zero ou método de zero .

São exemplos de medição directa no caso I : a medição de um comprimento com uma régua graduada ; a medição do período de um pêndulo pelo método das coincidências (\*). São exemplos de medição directa

---

(\*) Consiste em contar as oscilações de dois pêndulos A e B a partir do momento em que ocupam determinadas posições correspondentes até o momento em que voltam simultaneamente a ocupar essas mesmas posições correspondentes : o quociente dos n.ºs. de oscilações, que se contém entre essas duas coincidências consecutivas, mede a duração de oscilação do pêndulo A , tomando como unidade a do pêndulo B .



pelo método do desvio : a medição da massa de um corpo com a balança de mola ; a comparação de forças electromotrices pelo método de Du-bois—Reymond (\*). São exemplos de medição directa pelo método de zero : a medição da massa de um corpo na balança de travessão ; a medição da resistência de um condutor pela ponte de Wheatstone ; a comparação de intensidades luminosas com o fotómetro de Buñsen.

O processo de medição indirecta consiste em calcular o valor numérico da grandeza  $G$  em função dos valores numéricos das grandezas que se ligam a  $G$  através da expressão matemática de uma determinada relação física (\*\*). É de assinalar que se prescinde do padrão  $U$  nas experiências envolvidas na medição (intervêm no fundo os padrões das outras grandezas , previamente medidas por medições directas) ; isto verdadeiramente caracteriza a medição de  $G$  como indirecta.

Conhece-se porém , a priori , a unidade  $U$  (\*\*\*) que vai ser virtualmente tomada na medição , o que permite apresentar um resultado com a expressão (I-1) e por consequência , indirectamente , em conformidade com a definição dada no § 1.

São exemplos de medição indirecta : a medição da resistividade de um metal , a partir da resistência , comprimento e secção de um condutor cilíndrico constituído desse metal ; a medição da velocidade de um móvel em movimento uniforme a partir do espaço percorrido e do tempo gasto ; a determinação da aceleração da gravidade por meio do pêndulo de Kater (v. nota (\*)) ; a medição do índice de refração do vidro de um prisma pelo método do desvio mínimo ; a determinação de uma intensidade de corrente através do voltâmetro de cobre.

---

(\*) O leitor facilmente encontra a descrição deste método na bibliografia.

(\*\*) Esta relação física pode ser a própria definição de  $G$  , ou constituir uma lei experimental, ou ainda representar um resultado teórico.

(\*\*\*) Pelo critério de coerência, se o sistema é coerente; ou por uma definição independente, o que exige ser a expressão matemática da lei física utilizada, uma fórmula preparada. (cf. § 4).