

FCUL - Departamento de Física
Ano lectivo de 1985/86

ELECTROMAGNETISMO I

(Licenciaturas em Física
e em Eng.^a Geográfica)

Apontamentos das

Aulas Teóricas

(1.^a Parte)

Páginas : 1 a 49 + 49^I a 49^{IX} +
+ 50 a 120 + 120^I a 120^{XVIII} +
+ 10-1 a 10-14

CONTEÚDO

Capítulo I — Electrostatica no vácuo

§ 1. Generalidades	1
§ 2. Campo eléctrico de uma carga pontual	16
§ 3. Cp. eléct. produzido por uma distribuição de cargas pontuais	32
§ 4. Gradiente de um escalar	36
§ 5. Dipolo eléctrico	46
§ 5A. Cp. produzido por uma distrib. de cargas a grande distância	49'
§ 6. Campo produzido por uma distrib. contínua em volume	50
§ 7. Campo produzido por uma distrib. contínua em superfície	61

Capítulo II — Campo eléctrico na matéria

§ 8. Condutores na Electrostatica	73
§ 9. Campo electrostatico na presença de dieléctricos	104
§ 10. Energia de um sistema electrostatico	10-1

GENERALIDADES

1.1 — Primeiras experiências de electrização; propriedades dos corpos eletrizados. Evidência experimental de dois tipos de electricidade.

As experiências fundamentais de electricidade estática podem apresentar-se da seguinte maneira:

I. Experiências de electrização. Uma vareta de vidro friccionada com faio de algodão ou uma vareta de ebonite friccionada com pele de gato — adquirem a propriedade de atrair pequenos corpos leves, ou submetidos a ligações tais que forças de fraca intensidade bastam para deslocá-los. Diz-se que essas varetas ficam carregadas de electricidade ou electrizadas, conceito que se confunde primariamente com a propriedade de atrair pequenos corpos leves; diz-se também que as varetas exercem sobre esses pequenos corpos ações eléctricas.^(*) Vários outros tipos de materiais permitem pôr em evidência esta mesma propriedade. Fenômenos idênticos se observam, com efeito, se em vez de vidro se utiliza quartzo fundido, se em vez de ebonite se utiliza resina. (Pode ainda servir de exemplo uma experiência certamente bem conhecida: se se passa um pente pelo cabelo sêco, ele fica a atrair pedaços de papel.). Nas experiências aqui descritas, os corpos adquirem electricidade por fricção; e fala-se de electrização por fricção. Mas a mesma propriedade pode ser comunicada a outros corpos por simples contacto com um corpo já eletrizado; e fala-se nesse caso de electrização por contacto. (Ocupar-nos-emos mais adiante da electrização por influência que assume primordial importância na Electrostatica dos sistemas de condutores. São de referir também outros

(*) As primeiras experiências deste tipo conhecidas na Antiguidade teriam sido realizadas por Thales de Mileto (séc. VI AC), friccionando o âmbar em grego, electron; daí a raiz da palavra electricidade e sua família.

processos de electrizaçãõ como os de electrizaçãõ por compressãõ ou por aquecimento de certos cristais — piezo-electricidade e piro-electricidade).

II. Condutores e isolantes. A permanência da electrizaçãõ nos corpos depende muito dos materiais e tambem das accões físicas a que os corpos estãõ submetidos. Sobre alguns materiais a electrizaçãõ pode permanecer, durante um tempo longo, no local onde foi gerada por fricçãõ ou por contacto, sem se comunicar aos pontos circundantes; tais materiais dizem-se maus condutores da electricidade; deles sãõ exemplos: o vidro, o quartzõ, a ebonite, a resina, a sêda, o âmbar, a borracha, matérias plásticas, fibras artificiais, etc.. Em outros materiais observa-se, pelo contrario, que a electrizaçãõ não permanece localizada, senãõ por um tempo muito curto, nos pontos onde se gerou por fricçãõ ou por contacto, comunicando-se rapidamente aos pontos circundantes, a todo o corpo, se não há accões físicas que o impeçam; tais materiais de que sãõ exemplos os metais, as ligas metálicas, a grafite, etc., dizem-se bons condutores da electricidade. Na sua maioria, os diversos materiais da Natureza situam-se entre estes dois comportamentos limites, revelando-se condutores da electricidade em maior ou menor grau. (Sãõ condutores: a madeira, a água, o corpo humano. A água salgada é relativamente um bom condutor; a água destilada é relativamente um mau condutor. O ar húmido é um pouco condutor, o ar sêco e puro é mau condutor.). Quando se pretende conservar a electrizaçãõ adquirida por um corpo de um material condutor, torna-se conveniente isolá-lo do contacto com outros corpos condutores por meio da interposiçãõ de um material mau condutor; daí a designaçãõ de isolantes, ou ainda de dieléctricos, que se dá aos materiais maus condutores.

III. Evidência experimental de dois tipos de electricidade. Consideremos ainda as varetas de vidro e de ebonite, electrizadas por fricçãõ como se indicou no início. Se dispusermos de uma pequena bola de

medula de sabugueiro revestida, ou impregnada, de grafite e a sus-
pendermos de um fio de seda (isolante), podemos electrizar a bola
por contacto, quer com a vareta de vidro quer com a vareta de ebo-
nite. Ora verifica-se que, quando electrizada por contacto com a
vareta de vidro, a pequena bola adquire a propriedade de ser repelida
por esta vareta e de ser atraída pela vareta de ebonite; en-
contrariada, quando electrizada por contacto com a vareta de ebonite,
a pequena bola adquire, pelo contrario, a propriedade de ser repelida
por esta vareta e de ser atraída pela vareta de vidro. Estas expe-
riências tornam claramente evidente a existência de dois tipos de
electricidade distintos, perfeitamente caracterizados. Estendidas
estas experiências a outros materiais, verifica-se que todos os cor-
pos electrizados (por um qualquer processo) se comportam de uma
destas duas maneiras: comunicada a sua electricidade, por contacto,
a uma pequena bola de medula de sabugueiro impregnada de grafi-
te, fica esta pequena bola a ser atraída pela vara de vidro e a
ser repelida pela vareta de ebonite ou a ser atraída pela vareta
de ebonite e repelida pela vareta de vidro. Isto permite inferir
que só há na Natureza dois tipos distintos de electricidade, os
quais se revelam por propriedades eléctricas opostas. Assim,
é-se conduzido a adoptar para um dos tipos a designação de
electricidade positiva, para o outro a designação de electricida-
de negativa; e fala-se do sinal, (+) ou (-), da electricidade
de que um corpo está carregado. Por convenção, electricidade
positiva ou vítrea é a que é repelida pela vareta de vidro
(e atraída pela de ebonite); electricidade negativa ou resinosa
é a que é repelida pela vareta de ebonite (e atraída pela de vidro).
Um corpo diz-se no estado neutro (ou de não-electrização)
quando não revela nem electrização positiva nem electrização nega-
tiva. Voltando a considerar o processo de electrização por fricção

cabe agora referir que, quando se friccionam dois corpos um sobre o outro, isolantes, ou então isolados, e inicialmente neutros, verifica-se experimentalmente que eles adquirem sempre electrizações de sinais contrários, sempre com o mesmo sinal em cada um deles. Mas um mesmo corpo pode adquirir electrizações positiva ou negativa, consoante o material com que é friccionado. Qualquer conjunto de corpos de materiais diferentes pode ser ordenado em série de tal modo que, quando se friccionam dois quaisquer de entre eles um sobre o outro, electriza-se positivamente o que é precedente na série, negativamente o outro (supostos inicialmente neutros). Constitui-se assim uma série tribo-eléctrica (tribein, em grego: friccionar) de que é exemplo a seguinte: Pêlo de coelho; vidro; mica; lã; pêlo de gato; sêda; madeira; âmbar; resina; enxôfre, ebonite, celulóide. Vê-se, por ex., que friccionados sobre lã ou sobre sêda, o vidro fica electrizado positivamente, a ebonite negativamente. Os metais classificam-se nesta série entre a madeira e o celulóide, sendo os menos oxidáveis os mais próximos do fim da lista.

1.2 - Equilíbrio entre accões eléctricas e accões mecânicas; medição das forças eléctricas. Sobreposição de accões eléctricas; composição de forças eléctricas pela regra do paralelogramo.

A experiência revela que as accões entre corpos electrizados — accões eléctricas — podem ser compensadas, ou equilibradas, por accões mecânicas. Um exemplo disso verifica-se facilmente com o pêndulo eléctrico, que se pode constituir, por ex., com a pequena bola de medula de sabugueiro revestida de grafite e suspensa de um fio de sêda, já atrás utilizada. Quando electrizada, a pequena bola conserva a sua electrização (pois está isolada pelo fio de sêda) e fica susceptível de acusar accões eléctricas produzidas por outros corpos; ao mesmo tempo está submetida às accões mecânicas da gravidade

terrestre e da tensão do fio. Na ausência de qualquer acção eléctrica (fora da presença de outros corpos eletrizados) este pêndulo comporta-se como um puro pêndulo mecânico: oscila em torno da vertical do ponto de suspensão, tem posição de equilíbrio vertical — e este equilíbrio é o resultado da compensação entre as acções mecânicas a que está submetida a pequena bola. Ora, quando enfrenta um corpo eletrizado, o pêndulo assume geralmente um comportamento diferente: oscila em torno de uma posição não vertical, tem posição de equilíbrio não vertical — e neste novo comportamento, o equilíbrio tem de ser interpretado como o resultado de uma nova compensação entre o conjunto das acções mecânicas, a que a bola fica submetida, e a acção eléctrica que sofre da parte do corpo eletrizado.

Fig 1a

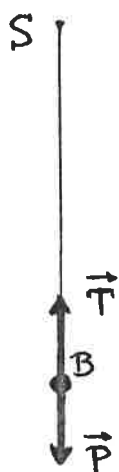


Fig 1b

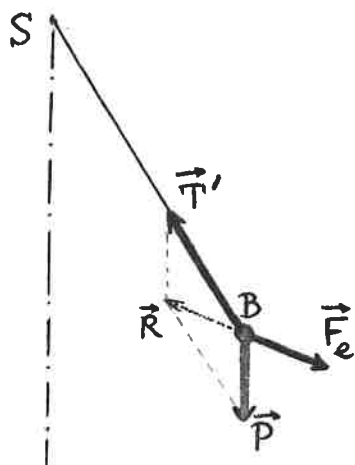


Fig 1a

Na ausência de qualquer corpo eletrizado:

$$\vec{T} + \vec{P} = 0$$

Fig 1b

Na presença do corpo eletrizado A:

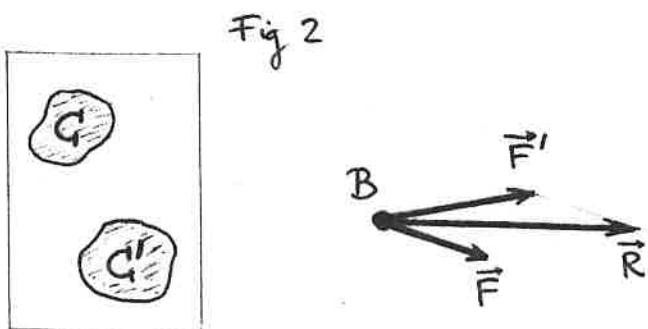
$$\vec{T}' + \vec{P} + \vec{F}_e = 0$$

Sendo assim, como as acções ^(mecânicas) se descrevem quantitativamente por grandezas físicas já bem conhecidas — as forças (mecânicas) —, uma tal compensação, num tal equilíbrio, conduz a que as acções eléctricas sejam descritas quantitativamente por grandezas físicas do mesmo carácter, que designaremos por forças eléctricas. Por outras palavras: a medição das acções eléctricas fica fundamentalmente assegurada mediante a utilização de processos experimentais de equilíbrio com acções mecânicas. (Ainda que, como é óbvio,

possamos ulteriormente utilizar outros processos destes distintos, para medir acções eléctricas.). No caso do pêndulo eléctrico atrás referido (v. Fig. 1), quando fica estabelecido o equilíbrio, a força eléctrica \vec{F}_e , que traduz a acção eléctrica exercida sobre a bola B pelo corpo electrizado A, vem dada como a força que é directamente oposta à resultante \vec{R} ($\vec{F}_e = -\vec{R}$) das duas forças mecânicas em jogo, \vec{P} e \vec{T} (pêso da bola e tensão do fio sobre a bola, respectivamente). Desta forma se respecta a equação que rege o equilíbrio, de acordo com os princípios de Newton:

$$\vec{F}_e + \vec{P} + \vec{T} = 0$$

Assim é medida a força eléctrica \vec{F}_e . (Poderia igualmente considerar-se, para este efeito da medição da força eléctrica \vec{F}_e (ou da definição da força eléctrica), a própria dinâmica do sistema — ou o "equilíbrio" dinâmico — desde que na compensação de forças correspondente se não deixasse de entrar em linha de conta com a força de inércia. Limitamo-nos aqui à situação estática por razão de simplicidade.). Repare-se agora que, sendo as forças eléctricas grandezas físicas da mesma espécie que as forças mecânicas, elas gozam das mesmas propriedades operatoriais que estas últimas e, em particular, é desde já de realçar, pela sua importância, a regra do paralelogramo para somar forças. Assim, consideremos a sobreposição das duas acções eléctricas exercidas sobre uma mesma partícula de prova B pelos dois corpos electrizados C e C' (v. Fig. 2). Se cada uma destas acções se traduz



por uma força eléctrica sobre B, sendo \vec{F} a força produzida por C e \vec{F}' a força produzida por C', então a resultante $\vec{R} = \vec{F} + \vec{F}'$, calculada pela regra do paralelogramo, traduz a acção eléctrica

global do sistema [C, C'] sobre a partícula de prova B: a sobreposição

de acções eléctricas faz-se pela composição das respectivas forças eléctricas pela regra do paralelogramo. Consideremos de novo um corpo electrizado A e suponhamos que um observador, munido de uma partícula de prova B, "se passeia" pelos diferentes pontos do espaço, para medir em cada ponto a força exercida por A sobre a partícula de prova. Este observador exprime o resultado global da miríade das suas medições dizendo que o espaço envolvente do corpo electrizado A é sede de um campo de forças eléctricas, matematicamente representado por uma função (vectorial) de ponto $\vec{F}(\mathbb{P})$, unívoca, já que a cada uma das medições corresponde um resultado bem definido. A linguagem assim adoptada tem o significado de que em qualquer ponto desse espaço podem ser detectadas propriedades especiais produzidas pelo corpo A, que se manifestam como força eléctrica desde que uma partícula electrizada aí seja colocada. Mas, este campo de forças eléctricas, produzidas por A sobre B, depende do estado de electrização da partícula B, revelando-se, em cada ponto, valores em geral diferentes para diferentes partículas B. Um corpo A produz assim, não um, mas diversos campos de forças eléctricas, consoante são diversas as partículas de prova ^(utilizadas) nos diferentes conjuntos de miríades de medições. Convém analisar estes campos de forças eléctricas produzidos por A.

1.3 — Análise das forças eléctricas. Conceitos de campo eléctrico e de carga eléctrica. Aditividade dos campos produzidos por fontes distintas.

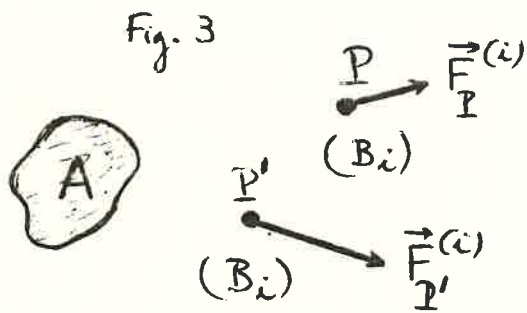
Seja A um corpo electrizado cujas acções eléctricas sobre outros corpos queremos analisar. Utilizemos para isso uma série de diferentes partículas electrizadas B_i ($i = 1, 2, \dots$) colocando-as sucessivamente, uma de cada vez, num ponto de observação P (v. Fig. 3). Admitamos que somos capazes de medir a força eléctrica que sobre cada uma destas partículas de prova exerce o corpo A. Suponhamos ainda que estas observações se estendem progressivamente a todos os pontos do espaço. O estudo experimental de situações reais

aproximadas deste esquema idealizado permite inferir os resultados que passamos a expôr. As diversas forças $\vec{F}^{(i)}$ exercidas pelo corpo A sobre as diversas partículas B_i , sucessivamente ensaiadas, revelam possuir as seguintes importantes propriedades:

(i) Num dado ponto de observação P, as diversas forças $\vec{F}_P^{(i)}$ têm idêntica direcção. O mesmo se constata em qualquer outro ponto de observação P', sendo que, no entanto a direcção comum às diversas forças $\vec{F}_P^{(i)}$ varia geralmente quando se muda de ponto de observação. Podemos dizer: A acção eléctrica do corpo A sobre as partículas B_i tem localmente uma direcionalidade bem definida, variável em geral de ponto para ponto, mas independente das partículas de prova.

(ii) No tocante ao sentido assumido pelas forças $\vec{F}_P^{(i)}$ sobre a direcção comum, observa-se sempre a mesma repartição do conjunto das partículas ensaiadas (B_i) em duas classes de comportamentos opostos, qualquer que seja o ponto de observação. Verifica-se que estas duas classes estão associadas aos dois tipos distintos de electricidade, sendo uma classe a das partículas com electricidade positiva e a outra classe a das partículas com electricidade negativa. Podemos dizer: A acção eléctrica do corpo A sobre as partículas B_i tem em cada ponto um carácter bem definido, de atracção (acção atractiva) para as de um determinado sinal, de repulsão (acção repulsiva) para as de sinal oposto, e no resto independente das partículas de prova.

(iii) Num dado ponto de observação P, as diversas forças $\vec{F}_P^{(i)}$, exercidas sobre as diversas partículas B_i , apresentam módulos geralmente diversos entre si, mas proporcionais aos módulos correspondentemente observados sobre as mesmas partículas, noutro qualquer ponto de observação P', com uma constante de proporcionalidade que só depende de P e P'. Podemos dizer: A acção eléctrica do corpo A sobre as partículas B_i varia de intensidade quando se muda de ponto de observação numa razão bem definida, independente das partículas de prova.



Assim, ainda que as forças $\vec{F}^{(i)}$ dependam evidentemente do estado de electrização das partículas enviadas, as conclusões acima extraídas conferem à acção eléctrica do corpo A uma certa

identidade, uma estrutura própria, independente das partículas de prova. Vamos ver em seguida que uma análise das forças $\vec{F}^{(i)}$, com base nos resultados que acabam de ser expostos, permite efectivamente explicitar de modo quantitativo, por um lado, a influência, sobre as forças observadas, do estado de electrização das partículas de prova, e, por outro lado, a estrutura própria da acção eléctrica produzida pelo corpo A nos diferentes pontos do espaço. Este estudo conduz-nos ao estabelecimento de dois novos conceitos físicos: carga eléctrica e campo eléctrico. Proceda-mos para isso do seguinte modo. Começamos por notar que a propriedade (iii), se designarmos por $c_{PP'}$ a constante de proporcionalidade aí mencionada, pode ser expressa por:

$$\frac{|\vec{F}_P^{(i)}|}{|\vec{F}_{P'}^{(i)}|} = c_{PP'} \quad (\text{para toda a partícula } B_i).$$

Então, para ^{quaisquer} duas partículas B_k e B_l , pode escrever-se, em consequência:

$$\frac{|\vec{F}_P^{(k)}|}{|\vec{F}_P^{(l)}|} = \frac{|\vec{F}_{P'}^{(k)}|}{|\vec{F}_{P'}^{(l)}|} = \frac{|\vec{F}_{P''}^{(k)}|}{|\vec{F}_{P''}^{(l)}|} = \dots \quad \left(\begin{array}{l} \text{constante,} \\ \text{independente do} \\ \text{ponto de observação} \end{array} \right)$$

E, se este resultado se combina com as propriedades (i) e (ii), pode afirmar-se que, para quaisquer duas partículas, B_k e B_l , se tem:

$$(1.1) \quad \vec{F}_P^{(k)} = \lambda_{kl} \vec{F}_P^{(l)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{para todo o } P, \\ \text{ponto de observação} \end{array} \right),$$

sendo λ_{kl} um escalar, independente de P , positivo ou negativo consoante as duas partículas B_k e B_l se acham carregadas com electricidade do mesmo sinal ou de sinal contrário, e com um valor bem determinado para cada par de partículas B_k e B_l (tem-se evidentemente $\lambda_{lk} = \lambda_{kl}^{-1}$ e $\lambda_{kk} = 1$). Mas isto significa que os diversos campos de forças $\vec{F}_P^{(i)}$ actuando sobre as diversas partículas B_i ($i = 1, 2, \dots$) (supostas sucessivamente, uma de cada vez) são todos eles proporcionais uns aos outros. Se adoptarmos uma partícula electrizada, $B_{0,2}$ como partícula de referência, o campo de forças $\vec{F}_P^{(0)}$ pode ser adoptado, correspondentemente, como paradigma para a determinação de todos os outros campos de forças produzidos pelo corpo A sobre as diversas partículas B_i : basta multiplicar $\vec{F}_P^{(0)}$ pelo bem determinado factor λ_{i0} para passar ao campo $\vec{F}_P^{(i)}$:

$$(1.1') \quad \vec{F}_P^{(i)} = \lambda_{i0} \vec{F}_P^{(0)} \quad (\text{para todo o } P).$$

E, com vista à mesma determinação, de qualquer campo de forças $\vec{F}_P^{(i)}$, pode igualmente servir de paradigma um campo vectorial $\vec{H}(P)$ arbitrariamente proporcional a $\vec{F}_P^{(0)}$, ou seja, definido por:

$$(1.2) \quad \vec{H}(P) = \chi_0 \vec{F}_P^{(0)} \quad (\text{sendo } \chi_0 \text{ um escalar arbitrário}),$$

desde que, simultaneamente, se substituam os coeficientes λ_{i0} por novos coeficientes α_i definidos por

$$\alpha_i = \lambda_{i0} / \chi_0 \quad (i = 1, 2, \dots),$$

com o auxilio do mesmo escalar arbitrário χ_0 . Obtém-se

óbviamente :

$$(1.3) \quad \vec{F}_P^{(i)} = \alpha_i \vec{H}(P)$$

Vê-se assim que — adoptada uma partícula de prova de referência, B_0 , e fixado um valor do escalar α_0 — é possível : (1.º) Determinar, mediante (1.2), um campo vectorial $\vec{H}(P)$, representativo de todos os campos de forças $\vec{F}_P^{(i)}$ (que dele se obtêm por simples proporcionalidade), portanto, representativo das acções eléctricas do corpo electrizado A em todos os pontos do espaço. (2.º) Determinar, mediante (1.3), escalares α_i , um para cada partícula de prova B_i , representativos da diversidade dos estados de electrização das partículas de prova, relativamente aos estados de electrização da partícula de referência. Tomado o escalar $\alpha_0 = 1/\chi_0$ para indicar o estado de electrização da partícula de referência, os α_i ($i = 1, 2, \dots$) passam a indicar os estados de electrização das diferentes partículas B_i . (Estas duas determinações, de (1.º) e de (2.º), são, como é óbvio, interdependentes.)

A presente análise das forças eléctricas produzidas por um qualquer corpo electrizado A conduz assim a dois novos conceitos físicos, cuja mensurabilidade fica perfeitamente assegurada depois de se adoptar uma partícula de prova de referência, B_0 , e de se fixar um valor para α_0 . Esses dois novos conceitos constituem portanto duas grandezas físicas : $\vec{H}(P)$ designa-se por campo eléctrico produzido por A em todo o espaço ; α_i designa-se por carga eléctrica da partícula B_i (α_0 , valor arbitrariamente escolhido, é a carga eléctrica da partícula de referência B_0).

(2ª) Suponhamos que uma partícula de carga e , em P , se acha sob a acção eléctrica de duas fontes, A_1 e A_2 , as quais produzem aí os campos $(\vec{E}_1)_P$ e $(\vec{E}_2)_P$, respectivamente. Então a partícula é solicitada, simultaneamente pelas duas forças

$$(\vec{F}_1)_P = e(\vec{E}_1)_P \quad \text{e} \quad (\vec{F}_2)_P = e(\vec{E}_2)_P,$$

portanto, pela resultante (obtida pela regra do paralelogramo)

$$(1.6) \quad \vec{F}_P = (\vec{F}_1)_P + (\vec{F}_2)_P = e [(\vec{E}_1)_P + (\vec{E}_2)_P].$$

Mas esta expressão, confrontada com a relação (1.4), permite concluir que os campos produzidos por duas fontes distintas se adicionam (pela regra do paralelogramo):

$$(1.6') \quad \vec{E}_P = (\vec{E}_1)_P + (\vec{E}_2)_P$$

Neste sentido, o campo eléctrico é uma grandeza aditiva.
Fala-se de aditividade dos campos ou diz-se existir um princípio de sobreposição (linear) dos campos.

20/11/59

1.4 — Lei de Coulomb das acções electrostáticas. Referência ao Princípio de acção e reacção.

A lei das acções electrostáticas, estabelecida experimentalmente por Coulomb em 1785, por medições directas ainda com pouca precisão, foi posteriormente verificada com grande rigor e pode enunciar-se nos seguintes termos. Suponhamos duas partículas electrizadas, com cargas e e e' (duas cargas pontuais), em repouso no espaço livre (vácuo), situadas nos pontos O e P , respectivamente, à distância $d = \overline{OP}$ (v. Fig. 4). A lei de Coulomb afirma que as acções mútuas exer-

cidas entre estas duas partículas electrizadas se traduzem por duas forças \vec{F}_O e \vec{F}_P que surgem aplicadas respectivamente em O e P , da mesma direcção, do mesmo módulo e de sentidos contrários (de sorte que $\vec{F}_O = -\vec{F}_P$) possuindo estas suas características mais as seguintes propriedades: (i) A direcção comum ao par de forças \vec{F}_O e \vec{F}_P é a linha recta que une os pontos O e P . (É muito frequente designarem-se forças nestas condições por « iguais-e-directamente-opostas »). (ii) O módulo comum ao par de forças \vec{F}_O e \vec{F}_P é directamente proporcional ao produto dos valores absolutos das cargas das partículas interactuantes e inversamente proporcional ao quadrado da distância d entre os pontos O e P . (Esta última afirmação é muito frequentemente designada por lei do inverso do quadrado). (iii) O par de forças \vec{F}_O e \vec{F}_P tem carácter ou repulsivo ou atractivo, consoante as cargas das partículas interactuantes são do mesmo sinal ou de sinal contrário. Este enunciado complexo (mas preciso) da lei de Coulomb pode sintetizar-se numa transcrição vectorial simples (mas completa), como segue:

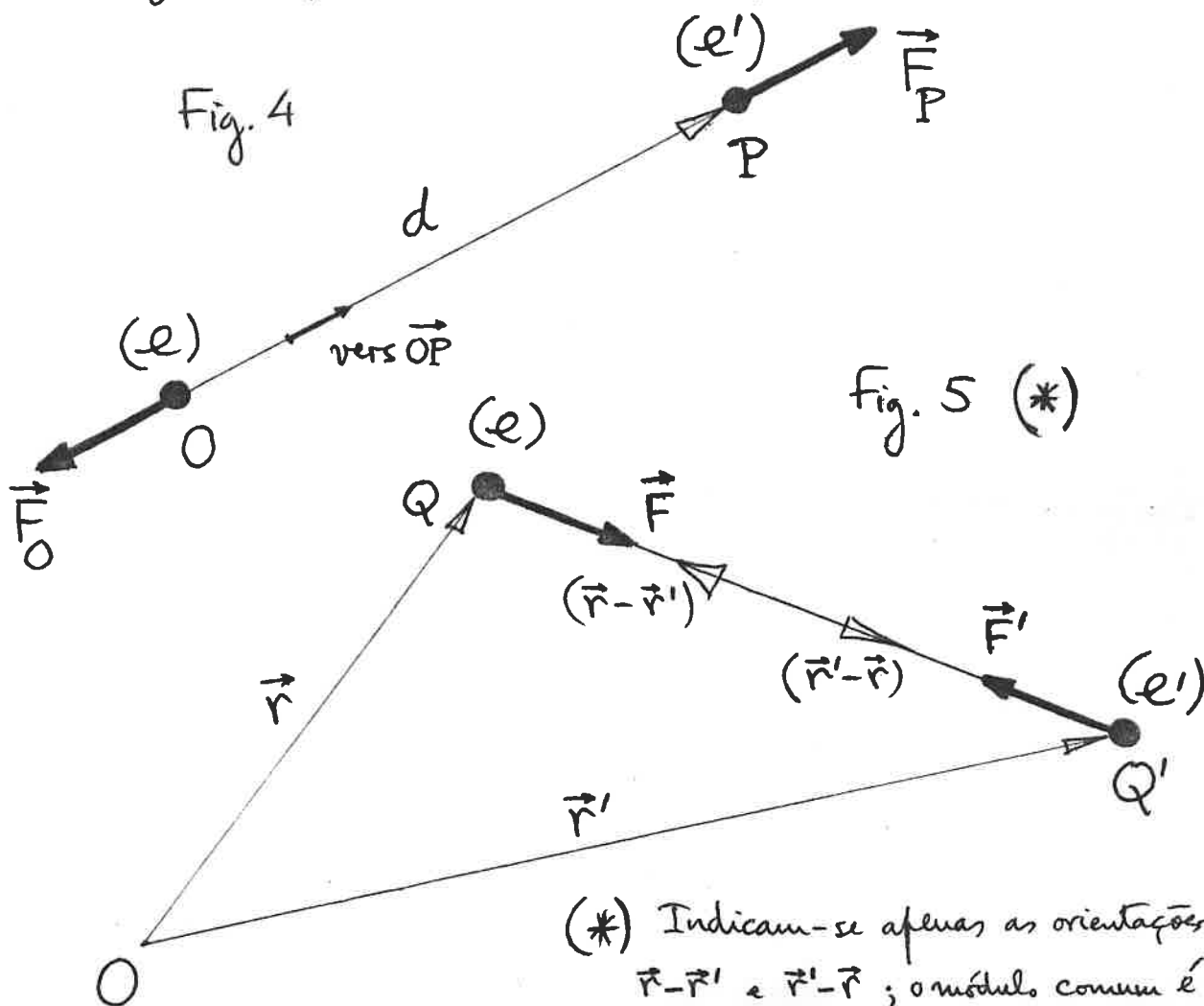
$$(1.7) \quad \begin{cases} \vec{F}_P = k_0 \frac{e e'}{d^2} \text{ vers } \vec{OP} & (\text{aplicada em } P) \\ \vec{F}_O = -\vec{F}_P & (\text{aplicada em } O) \end{cases}$$

em que e e e' entram com os seus sinais próprios e k_0 , constante de proporcionalidade, é um escalar essencialmente positivo ($\text{vers } \vec{OP} \equiv \vec{OP}/OP$). É fácil verificar que estão contidas nesta expressão todas as propriedades acima discutidas para o par de forças que traduz as acções

mútuas exercidas entre as duas partículas. (A Fig. 4 representa um caso de forças repulsivas.) Convém habituarmos-nos desde já a uma outra notação, frequentemente utilizada como alternativa de (1.7). Sejam as partículas de cargas e e e' localizadas nos pontos Q e Q' referenciados a uma origem dos espaços O pelos respectivos vectores-espaço $\vec{r} = \overrightarrow{OQ}$ e $\vec{r}' = \overrightarrow{OQ'}$; as duas forças de interacção electrostática, \vec{F}_Q e $\vec{F}_{Q'}$, aplicadas respectivamente em Q e Q' podem exprimir-se pelas seguintes relações (v. Fig. 5):

$$(1.8) \quad \vec{F}_Q = k_0 e e' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad \vec{F}_{Q'} = k_0 e e' \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3}$$

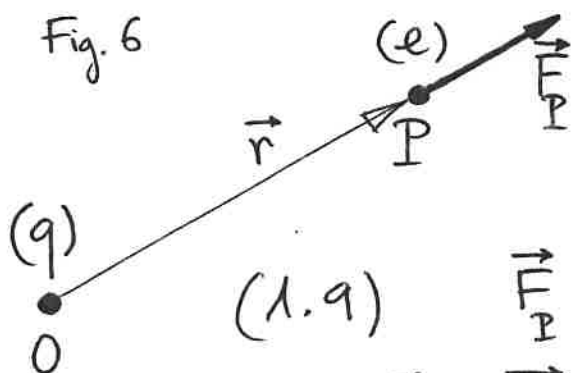
(em que $|\vec{r} - \vec{r}'| = d$), as quais respeitam $\vec{F}_{Q'} = -\vec{F}_Q$. (A Fig. 5 representa um caso de forças atractivas.)



2. CAMPO ELÉCTRICO DE UMA CARGA PONTUAL

2.1 — Características do campo eléctrico de uma carga pontual

A lei de Coulomb das acções electrostáticas constitui o ponto de partida mais natural para o estudo da Electrostatica. A expressão do campo eléctrico produzido por uma carga pontual extrai-se com efeito directamente da lei de Coulomb, fazendo uso da relação (1.4), de análise das forças eléctricas. Seja a carga pontual q , situada no ponto O , origem do espaço; e suponhamos colocada no ponto P (ponto de observação, genérico) uma partícula de prova, de carga e (v. Fig. 6). Segundo a



lei de Coulomb, a força \vec{F}_P exercida por q sobre e vem dada pela equação (1.7), ou seja, no caso presente, por:

$$(1.9) \quad \vec{F}_P = k_0 \frac{qe}{r^2} \text{ vers } \vec{OP} = k_0 \frac{qe}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

sendo $\vec{r} \equiv \vec{OP}$ e $r = |\vec{r}|$, a distância OP .

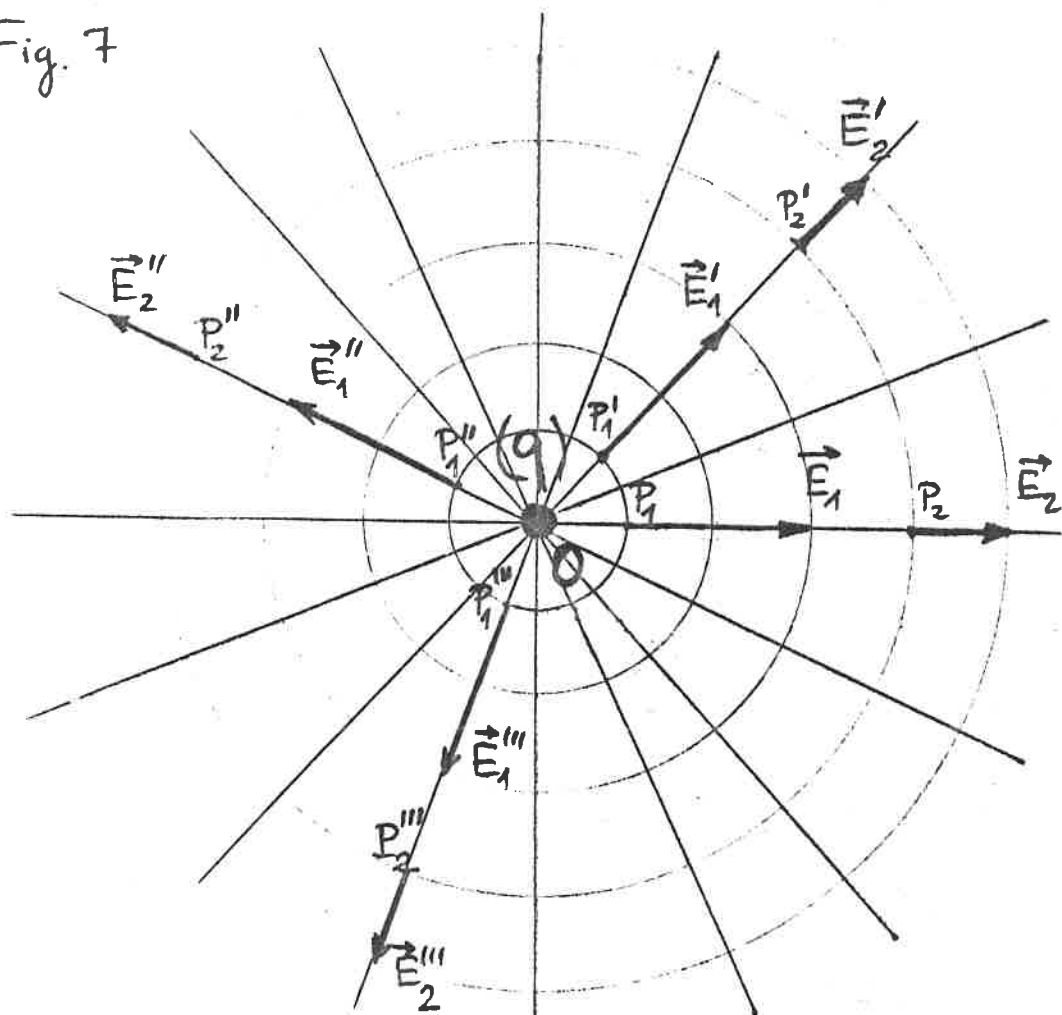
Então, aplicando a relação (1.4), resulta para o campo produzido pela carga pontual q situada em O a expressão:

$$(1.10) \quad \vec{E}_P = k_0 \frac{q}{r^2} \text{ vers } \vec{OP} = k_0 \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Esta expressão revela que o campo de uma carga pontual tem as seguintes propriedades (características):

- É um campo radial, isto é, em cada ponto dirigido segundo o raio-vector (ou vector-distância) $\vec{r} \equiv \vec{OP}$, que liga o ponto em que se situa a carga com o ponto de observação. As linhas de força do campo são o feixe de rectas que passam pela origem O . (v. Fig. 7).
- É um campo com simetria esférica, em torno do

Fig. 7



ponto O , em que se situa a carga. Com efeito, os valores (vectoriais) observados nos diferentes pontos são invariantes perante uma rotação dos observadores em torno de qualquer eixo passando por O (v. Fig 7).

c) É um campo atractivo ou repulsivo, com linhas de força convergentes para O , ou divergentes de O , respectivamente, consoante a carga q é negativa ou positiva (v. Figs 8a, 8b).

Fig. 8a

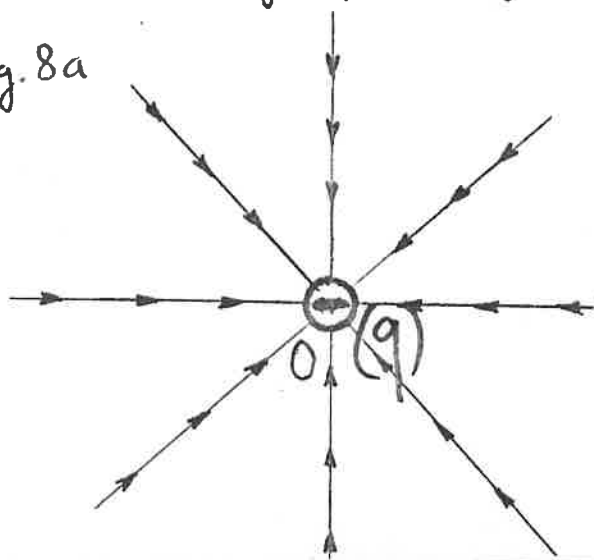
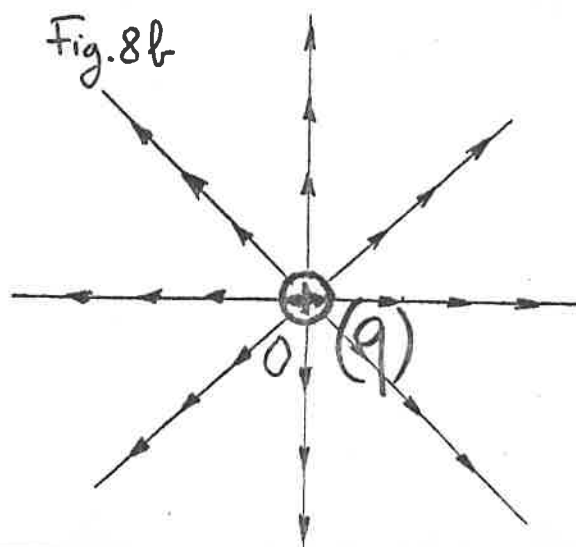


Fig. 8b



d) O campo decrece (em módulo) com a distância, r , segundo a lei do inverso do quadrado (como $1/r^2$); e é nulo no infinito, tendendo para zero como $1/r^2$, quando $r \rightarrow \infty$.

e) O campo não é definido no ponto em que se situa a carga (tende para infinito quando $r \rightarrow 0$), apresentando aí portanto uma singularidade, que é a única singularidade do campo.

2.2 — Noção de potencial. Circulação do campo. Significado físico da diferença de potencial.

Comecemos por fazer notar que a expressão (1.10), do campo eléctrico de uma carga pontual, admite facilmente a nova forma

$$(1.11) \quad \vec{E}_P = - \frac{dV}{dr} \text{ vers } \vec{OP} \quad (*)$$

sendo V um escalar função de ponto, $V(P)$, definido a menos de uma constante aditiva como

$$(1.12) \quad V_P = k_0 \frac{q}{r} + \text{const.} \quad (r \equiv \vec{OP}).$$

Esta função $V(P)$ designa-se por função potencial ou simplesmente por potencial. Por ser dado por (1.11), diz-se que o campo eléctrico deriva de um potencial escalar, V , e fala-se do potencial do campo eléctrico; passa a dizer-se mesmo, no caso presente, que a expressão (1.12) fornece o potencial "produzido" por uma carga pontual. Nessa óptica, a carga em O é a carga potenciante, o ponto O é o ponto potenciante; e o ponto P (de observação) é o ponto potenciado. Em princípio, o potencial não é senão uma função matemática auxiliar para o cálculo do campo mediante a operação indicada em (1.11). Vamos ver no entanto que

(*) Vê-se bem que esta operação se confunde com a operação $-\text{grad } V$, objecto de uma lição ulterior.

se pode atribuir um importante significado físico à diferença de potencial entre dois pontos de observação. Suponhamos que queríamos calcular o trabalho realizado hipoteticamente pela força eléctrica $\vec{F}_P = e \vec{E}_P$, que actua sobre a partícula de prova de carga e , num deslocamento elementar idealizado $d\vec{P}$, do ponto P para o ponto $P+d\vec{P}$ (v. Fig. 9).

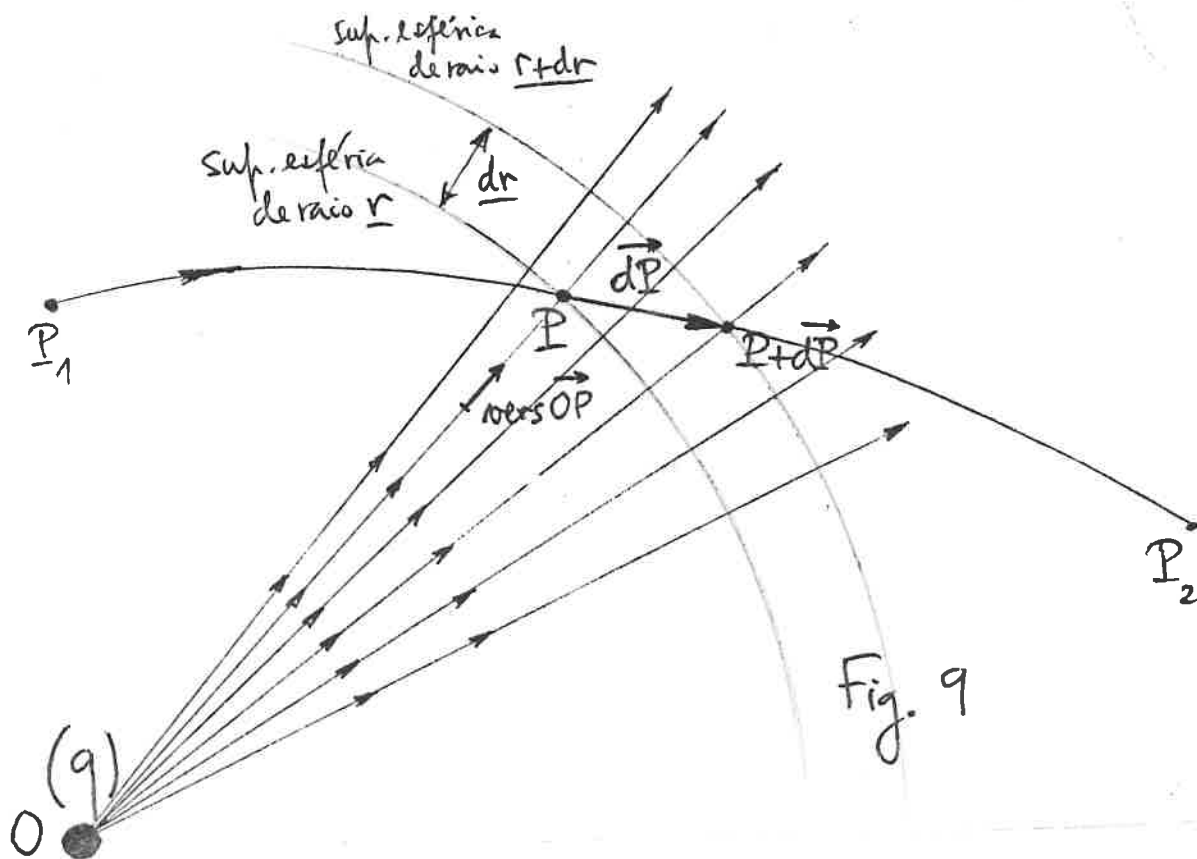


Fig. 9

Obteríamos o trabalho elementar

$$(1.13) \quad \delta W = \vec{F}_P \cdot d\vec{P} = e \vec{E}_P \cdot d\vec{P}$$

ou seja, o produto da carga de prova e pela circulação elementar do campo \vec{E}_P no deslocamento $d\vec{P}$. Ora, tendo em conta a expressão (1.11) e reparando que se tem $\text{vers } \vec{OP} \cdot d\vec{P} = dr$ (v. Fig. 9), é fácil concluir que

$$(1.14) \quad \vec{E}_P \cdot d\vec{P} = -dV$$

e portanto que

$$(1.15) \quad \delta W = -e dV$$

Ou seja: o trabalho elementar procurado iguala a diferen-

cial exacta da função $(-eV)$ e isto é equivalente a dizer que a circulação elementar do campo é a diferencial exacta da função $(-V)$. Passando a um deslocamento finito, entre os pontos P_1 e P_2 , por exemplo, ao longo da curva indicada na Fig. 9, ter-se-á para o trabalho realizado, $W(\overline{P_1 P_2})$, a expressão:

$$(1.16) \quad W(\overline{P_1 P_2}) = \int_{\overline{P_1 P_2}} \vec{F}_E \cdot d\vec{P} = -e \int_{\overline{P_1 P_2}} dV = \\ = -e(V_{P_2} - V_{P_1}) = e(V_{P_1} - V_{P_2})$$

e vê-se que este resultado é independente do caminho percorrido, isto é, é o mesmo para qualquer curva $\overline{P_1 P_2}$ que ligue os mesmos dois pontos P_1 e P_2 . Assim a função potencial V , qualquer que seja o valor da constante aditiva em (1.12), fornece sempre, fela ^{simétrica da} sua variação, o trabalho realizado pela força eléctrica sobre uma carga de prova unitária ($e=1$) que se desloca de P_1 para P_2 . (~~Seu~~ a variação, aqui, uma diminuição). Isto é equivalente a dizer que a circulação do campo eléctrico, para qualquer curva $\overline{P_1 P_2}$, iguala a diferença de potencial entre os extremos da curva:

$$(1.17) \quad \int_{\overline{P_1 P_2}} \vec{E} \cdot d\vec{P} = V_{P_1} - V_{P_2}$$

(~~Seu~~ a diferença contada entre o ponto de partida e o de chegada, ou seja, uma diminuição). Se, em particular, P_2 coincide com um ponto infinitamente afastado, P_∞ , então (1.16) escreve-se $W(\overline{P_1 P_\infty}) = e(V_{P_1} - V_{P_\infty})$; mas V_{P_∞} ou V_∞ é precisamente a constante arbitrada na definição de V (confronte (1.12): $r = \infty$ faz $V_\infty = \text{const.}$) e por consequência pode ter-se $V_\infty = 0$ se se escolher como nula a constante em (1.12); resulta então $W(\overline{P_1 P_\infty}) = eV_{P_1}$.

Isto quer dizer que é possível conferir ao potencial assim especialmente escolhido um significado físico preciso: o potencial num ponto representa o trabalho realizado pela força eléctrica no transporte de uma carga unitária ($e=1$) — ou o “trabalho realizado pelo campo eléctrico” — desde esse ponto até ao infinito, por qualquer percurso. Este potencial assim especialmente escolhido (sob a condição $V_{\infty} = 0$), para o caso do campo devido a uma carga pontual q , localizada em O , tem por expressão

$$(1.12') \quad V_P = k_0 \frac{q}{r} \quad (r \equiv \overline{OP})$$

21/11/85

2.3 — Relações entre o campo e as equipotenciais

O lugar geométrico dos pontos do espaço para os quais V tem o mesmo valor que em determinado ponto P_0 , ou seja, dos pontos que satisfazem $V(P) = V_0$, sendo $V_0 = V(P_0)$ — designa-se por superfície equipotencial da função escalar $V(P)$. A superfície equipotencial assim definida passa por P_0 , obviamente; e sendo $V(P)$ uma função unívoca, como sempre vamos supor, uma e uma só equipotencial passa por P_0 . Se se substituir V_0 por um parâmetro Δ (que represente o conjunto contra-domínio de $V(P)$), obtém-se a equação paramétrica da família das equipotenciais de $V(P)$: $V(P) = \Delta$ (const.). No caso presente — campo devido a uma carga pontual —, atendendo a (1.12) ou a (1.12'), as equipotenciais são superfícies esféricas centradas no ponto O em que se situa a carga, com valores de potencial decrescentes com r se $q > 0$, crescentes com r se $q < 0$. O campo, calculado por (1.11), depende essencialmente do andamento da função potencial, portanto da distribuição das superfícies equi-

potenciais. E recordando as características do campo devido a uma carga pontual (v. § 2.1), é fácil verificar que satisfaz às seguintes três relações para com as equipotenciais:

1ª) \vec{E} , em cada ponto, normal à equipotencial que passa por esse ponto (campo radial, equipotencial esférica).

2ª) Tem sempre o sentido das equipotenciais decrescentes
 ($q > 0$: campo repulsivo, equipotenciais decrescentes com r ;
 $q < 0$: campo atractivo, equipotenciais crescentes com r).

3ª) Tem módulo dado pelo módulo da derivada de V em ordem à distância marcada sobre a normal às equipotenciais (conforme se extrai de (1.11), sendo as equipotenciais esféricas).

Importa registar desde já estas relações, porque adiante veremos terem elas um carácter geral: o campo eléctrico, na Electrostatica, satisfaz sempre, em todas as situações e quaisquer que sejam as fontes que o produzem, a estas mesmas três relações com as equipotenciais do potencial $V(P)$ de que deriva (à custa do qual se exprime sempre como $-\text{grad } V$).

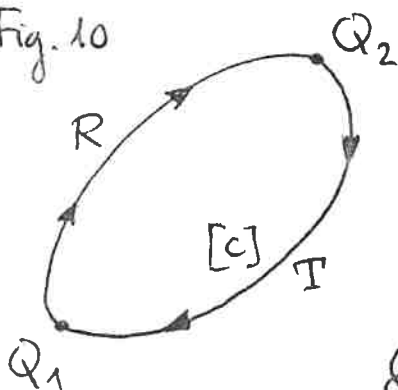
2.4 — Conservação da energia na Electrostatica

Da relação (1.17), ou da relação diferencial (1.14), extrai-se um resultado muito importante: é nula a circulação do campo \vec{E} , produzido por uma carga pontual, ao longo de qualquer curva fechada $[c]$, ou seja

$$(1.18) \quad \oint_{[c]} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

em que $d\vec{s}$ designa o vector-deslocamento infinitamente pequeno ($d\vec{P}$), ou o vector-elemento de arco, sobre a curva $[c]$. Para justificar este resultado, faz-se notar que qualquer curva fechada se pode decompor em dois percursos, um de ida e outro de volta entre dois pontos arbitrários Q_1 e Q_2 (v. Fig. 10), a saber $\overline{Q_1 R Q_2}$ e $\overline{Q_2 T Q_1}$ (na Fig. 10, as setas indicam o sentido de

Fig. 10



circulação, fixados arbitrariamente, para o cálculo do integral cíclico de (1.18)); calculando a circulação fechada ao longo de [c] mediante esta decomposição e com o uso de (1.17), resulta, com efeito:

$$\oint_{[c]} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{Q_1 R Q_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{Q_2 T Q_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \\ = (V_{Q_1} - V_{Q_2}) + (V_{Q_2} - V_{Q_1}) = 0.$$

Vamos analisar agora o significado físico que deve atribuir-se a este resultado. Consideremos uma carga pontual de prova e , colocada no campo \vec{E} produzido pela carga pontual q e idealizemos uma experiência pela qual levamos a carga e a descrever reversivelmente — com velocidade quase nula, sem aceleração, sem atrito, sem desenvolvimento de calor — uma curva fechada [c]. Nestas condições podemos pensar que não nos afastamos sensivelmente do domínio da Electrostática e que será válido aplicar as conclusões precedentes. Então, o trabalho realizado pela força eléctrica, $\vec{F}_p = e \vec{E}_p$, sobre a carga de prova, ao longo de [c], é nulo em consequência de (1.18):

$$\oint_{[c]} \vec{F} \cdot d\vec{s} = e \oint_{[c]} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Nulo é portanto também o trabalho realizado pelo observador, que em cada ponto tem de compensar a força eléctrica com uma força oposta, $-\vec{F}_p$, para garantir que a experiência idealizada se processe sem aceleração. Consequentemente, regressada a carga de prova à posição primitiva, o observador não pôde, mediante os trabalhos que realizou (de soma nula), ter absorvido qualquer energia do sistema, nem ter fornecido qualquer energia ao sistema. E não havendo por hipótese

qualquer outra forma possível de trocas de energia, deve concluir-se: a energia electrostática do sistema conserva-se, quando é reatuada a situação electrostática inicial. É o princípio de conservação da energia na Electrostática. Eis aí o significado físico, extremamente importante, da relação (1.18). Veremos que a validade desta relação se estende a toda a Electrostática, tendo ela sempre este mesmo significado físico, isto é, traduzindo sempre, por si própria ou por adequadas relações equivalentes, o princípio de conservação da energia.

2.5 — Teorema de Gauss para o campo de uma carga pontual

2.5.1 — Noção de fluxo de um campo vectorial — A noção de fluxo de um campo vectorial surge a propósito da exploração do campo que um observador pode fazer utilizando um elemento de superfície cuja orientação no espaço é livre de escolher para cada uma das suas medições. A um elemento de superfície nestas condições associa-se uma grandeza física puramente geométrica representável por um vector, que se designa por elemento de área orientado, a saber, o vector cujo módulo é a área do elemento de superfície e cuja orientação é a do vector unitário normal à superfície e com um sentido convencionalmente fixado. A atribuição deste sentido confere sinais (+) e (-) às duas faces do elemento de superfície, orientando-se a normal como uma seta que fura a superfície da face negativa para a face positiva. Um elemento de área orientado, como os exemplos da Fig. 11, pode portanto exprimir-se por $\vec{dS} = \vec{n} dS$ ou $\vec{d\Sigma} = \vec{\nu} d\Sigma$, etc.. Seja o campo vectorial $\vec{B}(P)$. Em muitas situações físicas revela-se útil que o observador meça a quantidade escalar

(1.19) $\vec{B} \cdot \vec{dS} = \vec{B} \cdot \vec{n} dS$ (projeção de \vec{B} sobre \vec{n} \times área dS)

no ponto P em que se encontra e para a orientação \vec{n} do ele-

mento de superfície, de área dS , de que dispõe. Esta quantidade escalar é precisamente, por definições, o fluxo elementar do campo \vec{B} através do elemento de área orientado $d\vec{S}$ (no ponto P). Para alguns campos, em certas situações, o fluxo assim definido tem um significado físico imediatamente acessível. Exemplo muito simples e bem ilustrativo é o caso do campo das velocidades de escoamento de um fluido, $\vec{v}(P)$; com efeito, vê-se facilmente que a quantidade $\vec{v} \cdot \vec{n} dS$ (fluxo elementar do campo $\vec{v}(P)$ através de $d\vec{S}$) se confunde com o débito que passa através de dS na direcção e sentido de \vec{n} (sendo o débito, por definição, o volume de fluido escoado por unidade de tempo). A Fig. 12 ajuda a tirar essa conclusão. Com efeito, o fluido que escoar no intervalo de tempo dt (infinitamente pequeno), através de dS , preenche o cilindro representado na Fig. 12, com base em dS e geratriz igual ao deslocamento $d\vec{l}$ percorrido no tempo dt (isto é, $d\vec{l} = \vec{v} dt$). Ora tal cilindro tem uma altura $d\vec{l} \cdot \vec{n}$ (que é a projecção da geratriz sobre a normal à base) e portanto um volume $dW = d\vec{l} \cdot \vec{n} dS$; este é volume escoado no tempo dt e daí resulta um débito $dW/dt = \vec{v} \cdot \vec{n} dS$, igual ao referido fluxo, como queríamos mostrar. Na maior parte dos casos, contudo, o significado físico do fluxo não transparece com esta facilidade, exigindo um exame mais aprofundado da situação.

Fig. 11

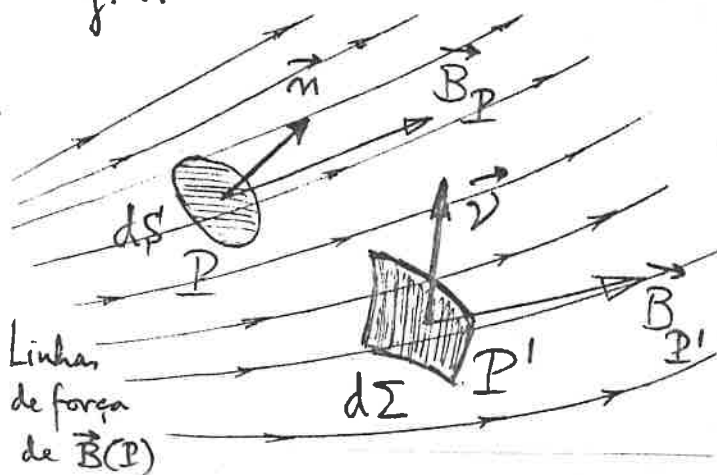
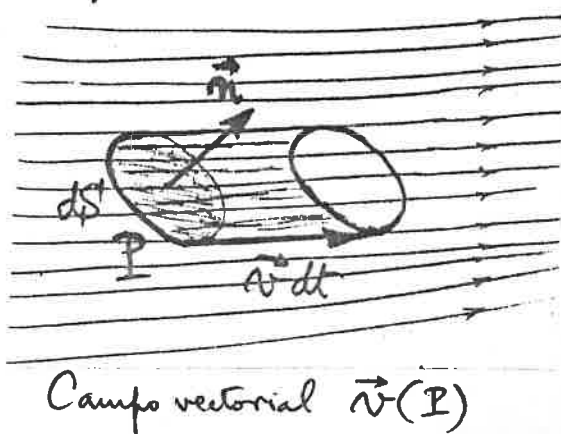


Fig. 12



A noção de fluxo pode estender-se a uma superfície finita. O fluxo Φ através de uma superfície finita S , que suporemos regular, — fixado previamente, sob algum critério, um sentido para as normais nos diferentes pontos de S — é a soma dos fluxos elementares correspondentes à decomposição de S em elementos dS , ou seja, é dado pelo integral

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS \quad (*)$$

(1.20)

Assume particular interesse o caso em que S é uma superfície fechada. Então, um critério bastante simples e natural de fixação do sentido das normais nos diferentes pontos é o de serem todas orientadas para o exterior da superfície fechada, ou todas para o interior, e dizemos que se trata do fluxo que "sai" através de S , ou do fluxo que "entra" através de S , respectivamente; diferindo estes dois fluxos apenas no sinal, obviamente. $[(*)$ Note-se que, se a superfície S não é regular, mas apenas contém algumas linhas de singularidades, pode mostrar-se que é ainda válido, sob condições pouco restritivas, definir o fluxo através de S — considerando-o como a soma dos fluxos através das zonas regulares em que S é decomposta pelas suas linhas de singularidades. Exemplos: superfície limite de um cubo, de um poliedro em geral (são fluxos parciais os fluxos através das faces); superfície limite de um cilindro (fluxos parciais através da superfície lateral e das bases).]

2.5.2 — Aplicação ao campo eléctrico de uma carga pontual —

Seja agora o campo produzido por uma carga pontual, $\vec{E}(P)$, dado por (1.10). Tem-se, para o fluxo elementar através de um dS no ponto P :

$$\vec{E}_P \cdot \vec{n} \, dS = k_0 q \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{n} \, dS$$

Mas, com a ajuda da Fig. 13, facilmente se reconhece que a quantidade

$$\left| \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{n} \, dS \right| = \frac{1}{r^2} |\cos \alpha| \, dS = \frac{d\Sigma}{r^2}$$

se identifica com a medida do ângulo sólido sob o qual um obser-

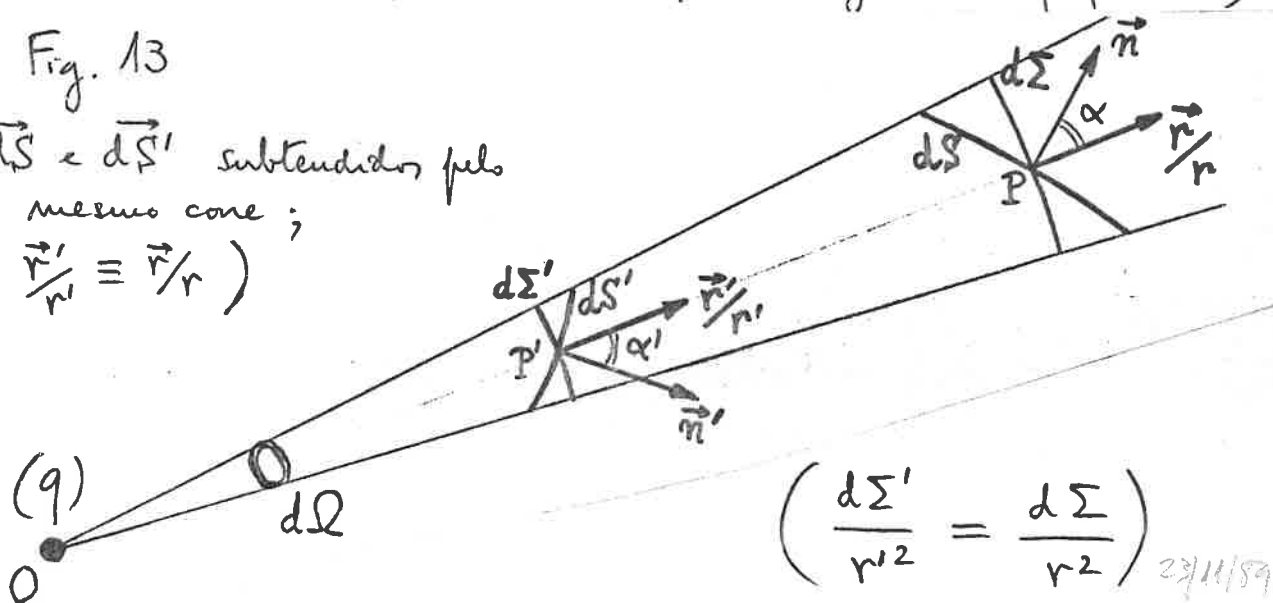
vador localizado em O (ponto em que se situa a carga q que produz o campo) «vê» a face interna do elemento de superfície esférica-centrada em O e de raio r , de área $d\Sigma$, subtendido pelo mesmo cone que subtende o elemento de área $d\vec{S}$ (*). Tal quantidade mede portanto também o ângulo sólido sob o qual o observador «vê» o elemento $d\vec{S}$. Todavia, aproveitando o carácter vectorial de $d\vec{S}$ (a sua orientação), convém definir esse ângulo sólido, $d\Omega$, mais precisamente, mediante a relação:

$$(1.21) \quad d\Omega = \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{n} dS \quad (\vec{r} \equiv \vec{OP}).$$

Diremos que esta relação define o ângulo sólido sob o qual um observador em O «vê» a face negativa do elemento de área $d\vec{S} = \vec{n} dS$, localizado em P . Tem assim o ângulo sólido um carácter algébrico: positivo, quando o observador em O efectivamente vê a face negativa de $d\vec{S}$; negativo, quando o observador efectivamente vê a face positiva; nulo, se a direcção de observação, \vec{r}/r , fica transversal à orientação, \vec{n} , de $d\vec{S}$ (se a direcção de observação é tangente à superfície dS).

Fig. 13

($d\vec{S}$ e $d\vec{S}'$ subtendidos pelo mesmo cone;
 $\frac{\vec{r}'}{r'} \equiv \frac{\vec{r}}{r}$)



(*) Esta medida de ângulo sólido, que o constitui em grandeza física, é uma extensão da medida de ângulo plano, em radianos, como a razão entre o comprimento do arco de circunferência subtendido e o raio. Para o ângulo sólido, a medida exprime-se em estereoradianos.

Nestas condições, o fluxo elementar do campo eléctrico produzido por uma carga pontual q , localizada em O , através de um qualquer elemento de área $d\vec{S}$, localizado em P (ponto genérico de observação), vale:

$$(1.22) \quad \vec{E} \cdot d\vec{S} = k_0 q d\Omega$$

o que quer dizer que é directamente proporcional ao ângulo sólido sob o qual um hipotético observador localizado em O vê o elemento de área $d\vec{S}$ (sendo $k_0 q$ a constante de proporcionalidade). Reconhece-se na simplicidade deste resultado o efeito conjugado de duas características essenciais do campo, como quem diz, da lei de Coulomb, que lhe está na origem: a direccionalidade de \vec{E} em \vec{r}/r (o seu carácter radial) e a dependência do módulo de \vec{E} em $1/r^2$. Por outras palavras: um resultado tão simples acha-se fundamentalmente ligado ao facto de se tratar aqui de um campo de forças centrais com uma dependência da distância segundo a lei do inverso do quadrado. Repare-se agora que, qualquer que seja o elemento de área $d\vec{S}'$ subtendido pelo mesmo cone que subtende $d\vec{S}$ (v. Fig. 13), se obtém sempre o mesmo valor absoluto para o fluxo; ^{o todo do tubo de linhas de força de $E(P)$ é um cone Ω fact. de O} mas todo o cone partindo de O é um tubo de linhas de força de $E(P)$; então, o fluxo (por ex., no sentido do afastamento da carga) conserva-se ao longo de um tubo de linhas de força. Atendendo a (1.22) pode ainda dizer-se que é constante, e vale $k_0 q$, a razão entre o fluxo ao longo de um cone partindo de O e o ângulo sólido contido nesse cone; mais: esta propriedade é independente da direcção do eixo do cone, em conformidade com a simetria esférica do campo. Este fluxo por unidade de ângulo sólido, assim definido, constante para todos os pontos do espaço e independente da orientação e da grandezza de $d\vec{S}$, é, à parte o factor k_0 , uma medida da carga q que produz o campo (esse, o seu significado físico).

2.5.3 — Teorema de Gauss — A expressão (1.22) permite passar quase imediatamente ao fluxo através de uma qualquer superfície (regular), S , o qual pode definir-se por (1.20). Obtém-se.

$$(1.23) \quad \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = k_0 q \int_S d\Omega$$

Assume especial interesse o caso em que S é uma superfície fechada porque então o integral contido no 2º membro de (1.23) depende de uma maneira simples da situação da superfície S relativamente ao ponto O , em que se localiza a carga. Com efeito, supondo para fixar ideias que nos ocupamos do fluxo que sai através de S , ou seja, que as normais \vec{n} são todas orientadas para o exterior de S , há a distinguir três situações: a) Se a superfície S envolve o ponto O (O interior a S), o observador em O vê todos os elementos de área sob um ângulo sólido positivo; e englobando a soma deles todo o espaço, obtém-se como resultado 4π , para o integral do 2º membro. (Este é com efeito o valor do ângulo sólido global sob o qual se "vê" uma superfície esférica, a partir do seu centro (v. Fig 14): $\int_{\Sigma} d\Omega = \int_{\Sigma} \frac{d\Sigma}{R^2} = \frac{1}{R^2} \int_{\Sigma} d\Sigma = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$). b) Se a superfície S passa pelo ponto O (O assente sobre S), o observador em O vê ainda todos os elementos de área sob um ângulo sólido positivo, mas a soma deles engloba apenas justamente um hemi-espaço, o que fica para o mesmo lado que S , do plano tangente a S em O , sendo o resultado agora, obviamente, 2π , ângulo sólido global sob o qual se "vê" uma hemi-superfície esférica, a partir do seu centro (aqui a hemi-superfície esférica centrada em O e limitada pelo plano tangente a S em O , v. Fig 15). c) Finalmente, se a superfície S não envolve o ponto O (O exterior a S), o observador em O vê uma parte dos elementos de área sob um ângulo sólido positivo, outra parte sob um ângulo sólido negativo, com uma compensação global de resultado nulo, visto que a cada elemento de área (dS_1) de S se pode associar um outro (dS_2), subtendido pelo mesmo cone e a que corresponde um ângulo sólido simétrico (com o mesmo módulo $d\Sigma/R^2$, mas de sinal contrário) (v. Fig. 16). Em resumo: O fluxo do campo eléctrico produzido por uma carga pontual,

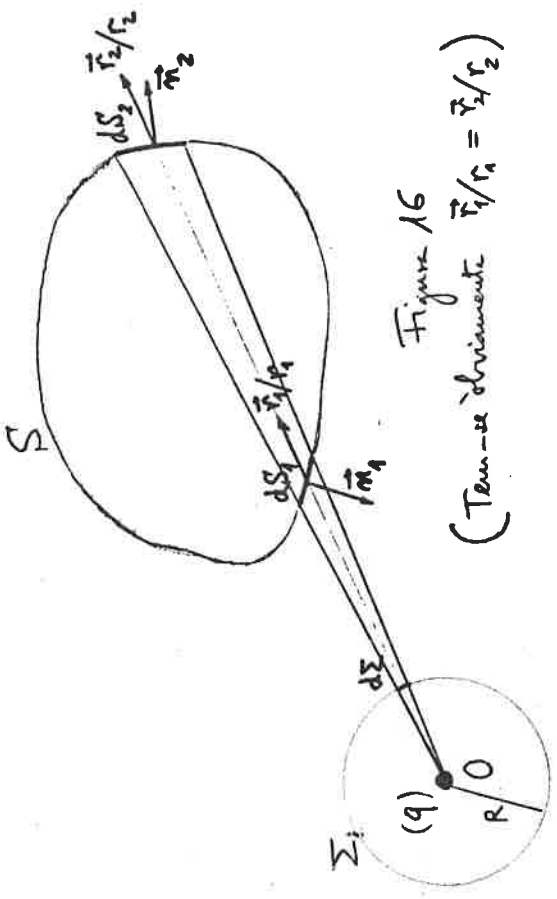


Figure 16
(Tem-a obriente $\vec{r}_1/r_1 = \vec{r}_2/r_2$)

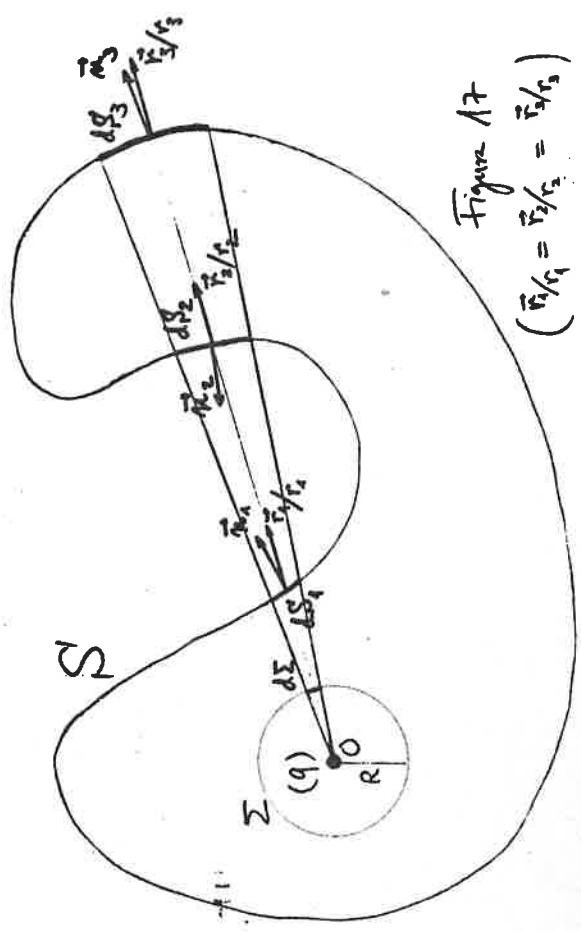


Figure 17
($\vec{r}_1/r_1 = \vec{r}_2/r_2 = \vec{r}_3/r_3$)

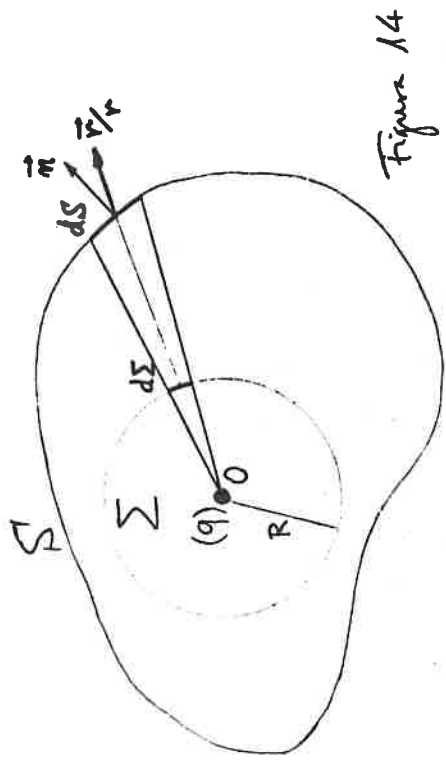


Figure 14

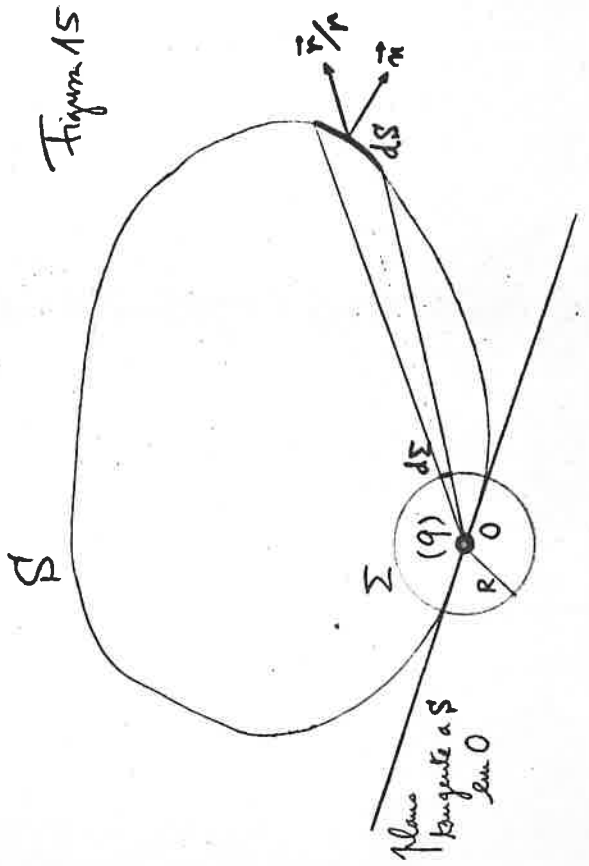


Figure 15

Plano Tangente a S em O

que sai através de uma superfície fechada S , verifica a seguinte afirmação tripartida: (1.24) (*)

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \begin{cases} 4\pi k_0 q, & \text{se a carga é interior a } S \\ 2\pi k_0 q, & \text{se a carga assenta sobre } S \\ 0, & \text{se a carga é exterior a } S. \end{cases}$$

Este enunciado constitui o célebre Teorema de Gauss, da Electrostatica, na sua primeira forma (válida para o campo de uma carga pontual). Adiante se farão dele generalizações importantes. Refere-se que pela 1ª parte da afirmação (1.24), a carga q fica proporcional ao fluxo do campo \vec{E} através de qualquer superfície fechada S que envolva a carga:

$$(1.25) \quad q = \frac{1}{4\pi k_0} \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{4\pi k_0} \Phi$$

e isto acentua o significado físico do fluxo, a que já nos tínhamos referido: à parte o factor constante $1/4\pi k_0$, esse fluxo constitui uma medida da carga eléctrica que produz o campo, se a superfície S a envolve. Por razões históricas, foi esta constante de proporcionalidade $1/4\pi k_0$ que, em detrimento de k_0 (constante da lei de Coulomb), veio a prevalecer no formalismo da Electrostatica, sob a notação de ϵ_0 e a designação de constante dieléctrica ou poder indutor específico, do vácuo.

(*) Observação: A demonstração aqui desenvolvida, do Teorema de Gauss, supõe, para não alongar demasiadamente o discurso, que a superfície fechada S fica sempre para o mesmo lado de qualquer plano tangente. Daí resultam os três únicos casos possíveis a), b) e c). Para o caso mais geral, pode todavia fazer-se do mesmo modo a demonstração, usando sempre a composição dos (vários) ângulos sólidos correspondentes aos (vários) elementos de área subtendidos pelo mesmo cone elementar. A Fig. 17 é ilustrativa de uma tal operação.

3. CAMPO ELÉCTRICO PRODUZIDO POR UMA DISTRIBUIÇÃO (DISCRETA) DE CARGAS PONTUAIS

Consideremos uma distribuição (discreta) de N partículas eletrizadas. Seja $\vec{E}_\alpha(\mathcal{P})$, genericamente, o campo que produz no ponto \mathcal{P} , isoladamente (por si só), a partícula eletrizada α , de carga q_α , localizada no ponto Q_α ($\alpha = 1, 2, \dots, N$). Então, o campo elétrico produzido em \mathcal{P} pela distribuição de cargas vem dado por:

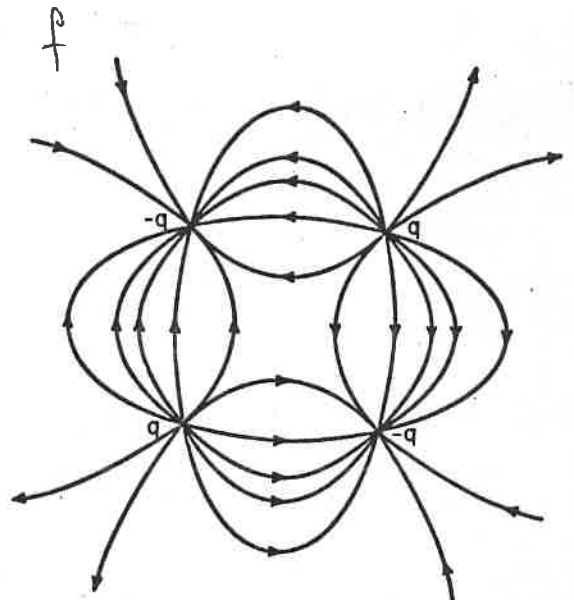
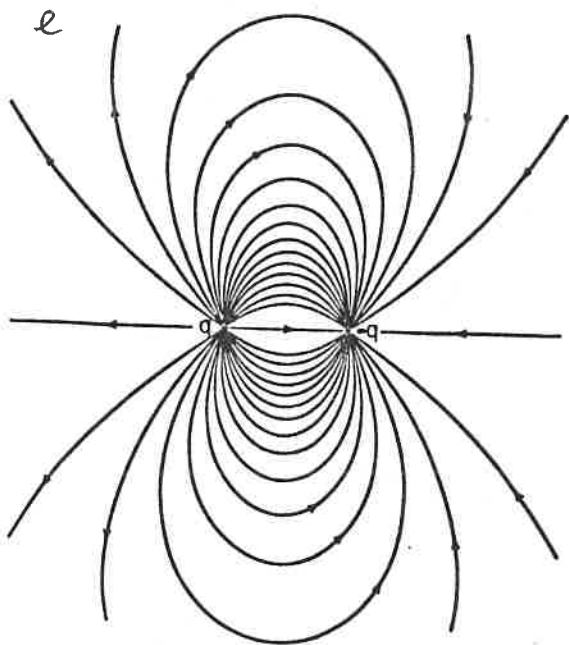
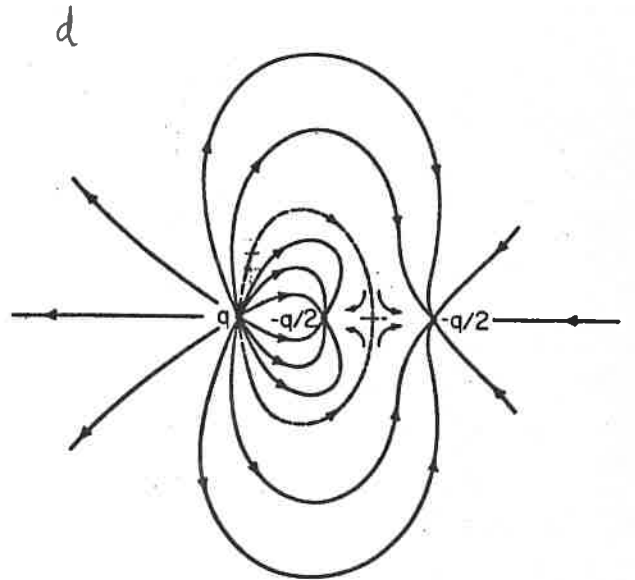
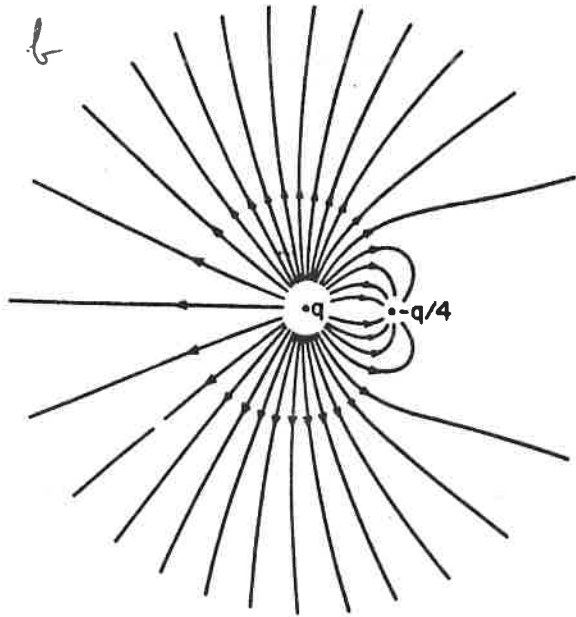
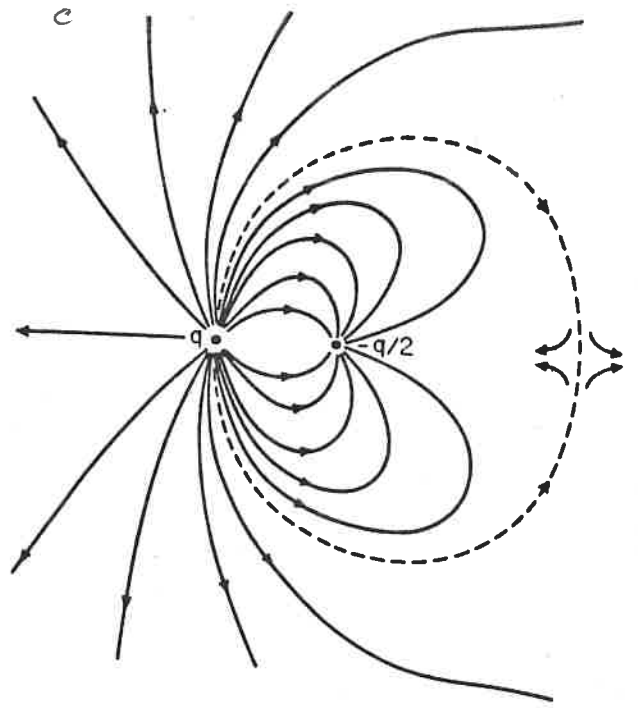
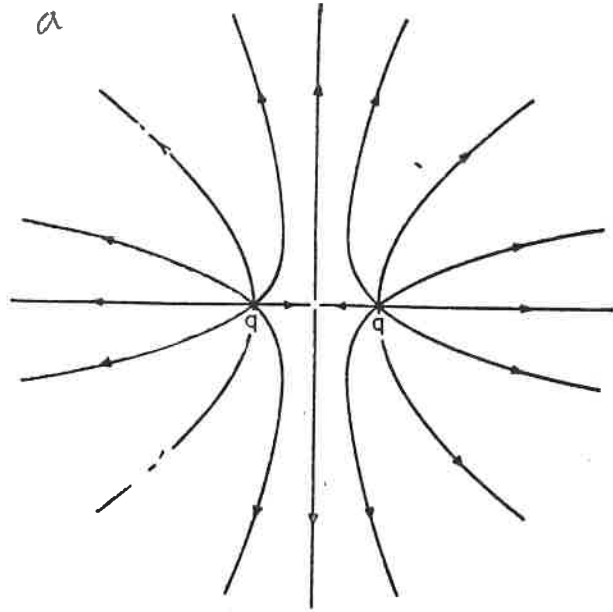
$$(1.26) \quad \vec{E}(\mathcal{P}) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{E}_\alpha(\mathcal{P})$$

Isto resulta da aditividade dos campos devidos a várias fontes, posta em evidência no § 1.3; e vamos ver adiante que esta propriedade permite estender facilmente os resultados anteriores ao estudo do campo elétrico produzido por uma distribuição de cargas pontuais. Combinando (1.10) com (1.26), $\vec{E}(\mathcal{P})$ assume a expressão

$$(1.26') \quad \vec{E}(\mathcal{P}) = k_0 \sum_{\alpha=1}^N \frac{q_\alpha}{r_{Q_\alpha \mathcal{P}}^2} \text{ vers } \vec{Q_\alpha \mathcal{P}} \quad (r_{Q_\alpha \mathcal{P}} \equiv \overline{Q_\alpha \mathcal{P}})$$

Deve notar-se que a composição dos campos devidos a várias cargas pontuais, descrita por (1.26'), vem, obviamente, destruir a simetria esférica do campo e modificar substancialmente a distribuição radial das linhas de força, características do campo produzido por uma única carga pontual (v. § 2.1). Parece-nos instrutivo a esse respeito observar as figuras das linhas de força do campo produzido por algumas distribuições simples, reproduzidas na Fig. 18 (As linhas tracejadas separam regiões de comportamentos distintos das linhas de força).

Procuramos agora saber que forma vão assumir, para uma distribuição de cargas pontuais, as duas propriedades essenciais do campo elétrico que já analisámos (§§ 2.4 e 2.5) no caso do campo produzido por uma única carga pontual, como notáveis implicações da lei de Coulomb: a conservação da energia e o teorema de Gauss.



(i) Tomemos a eq. (1.18) que traduz a conservação da energia para o campo de uma única carga pontual. Para cada uma das cargas q_α é lícito escrever, qualquer que seja a curva fechada $[c]$:

$$\oint_{[c]} \vec{E}_\alpha \cdot d\vec{s} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N)$$

Ora, atendendo a que a integração é uma operação linear, se adicionarmos em α (de 1 a N) os 1º membros das eq.ºs precedentes, vem, por (1.26):

$$\sum_{\alpha=1}^N \oint_{[c]} \vec{E}_\alpha \cdot d\vec{s} = \oint_{[c]} \left(\sum_{\alpha=1}^N \vec{E}_\alpha \right) \cdot d\vec{s} = \oint_{[c]} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Portanto, para o campo global, ainda é lícito escrever

$$(1.27) \quad \oint_{[c]} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

qualquer que seja a curva fechada $[c]$. E esta equação traduz, na presente situação mais geral, o princípio de conservação da energia.

(ii) Consideremos agora o teorema de Gauss ^{2/11/88} para o campo produzido por uma carga pontual única, sob a forma da afirmação tripartida (1.24). Idêntica afirmação é válida para cada uma das cargas q_α , qualquer que seja a superfície fechada S :

$$(\alpha = 1, 2, \dots, N) \quad \int_S \vec{E}_\alpha \cdot \vec{n} dS = \begin{cases} q_\alpha / \epsilon_0, & \text{se } Q_\alpha \text{ é interior a } S \\ q_\alpha / 2\epsilon_0, & \text{se } Q_\alpha \text{ assenta sobre } S \\ 0 \text{ (zero),} & \text{se } Q_\alpha \text{ é exterior a } S. \end{cases}$$

Somemos estas equações, sobre α , de 1 a N . Da soma dos 1º membros, pela linearidade da integração e por (1.26), resulta o fluxo do campo global, que sai através da superfície fechada S : $\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS$.

No tocante à soma dos 2º membros, pode dizer-se que: cada uma das cargas (α') interiores a S contribui com uma parcela $q_{\alpha'} / \epsilon_0$; cada uma das cargas eventualmente assentes sobre S (α'') contribui com uma parcela $1/2 q_{\alpha''} / \epsilon_0$; enquanto que as cargas (α''') exteriores a S não contribuem para a soma. Então, para o campo global, e com qualquer superfície fechada S , cumpre-se que:

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\substack{\text{(Para todo } Q_{\alpha'} \\ \text{interior a } S)}} Q_{\alpha'} + \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{\substack{\text{(Para todo } Q_{\alpha''} \\ \text{assente sobre } S)}} Q_{\alpha''}.$$

Ou, com notação mais leve, e designando por q_{int} a soma das cargas da distribuição que ficam interiores a S e por q_S a soma das cargas da distribuição que assentam sobre S :

$$(1.28) \quad \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{int}} + \frac{1}{2\epsilon_0} q_S.$$

Sob esta forma se exprime, na presente situação mais geral, o teorema de Gauss. Se, em particular, não há cargas assentes sobre S :

$$(1.28') \quad \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{int}};$$

e nós dizemos mais simplesmente: o fluxo do campo eléctrico, ^{que sai} através de uma superfície fechada S (sobre a qual não assentam cargas), é proporcional à carga total interior a S . Transparece assim, de maneira precisa, nesta situação mais geral, o significado físico do fluxo do campo eléctrico através de uma superfície fechada.

As duas propriedades (1.27) e (1.28) são as implicações fundamentais da lei de Coulomb para o campo eléctrico produzido por uma qualquer distribuição de cargas pontuais. Adiante veremos que o conhecimento completo de um campo $\vec{E}(P)$ se acha intimamente ligado ao conhecimento da circulação de \vec{E} para toda a curva fechada $[C]$ e do fluxo de \vec{E} para toda a superfície fechada S . Daí, a importância das duas propriedades (1.27) e (1.28), com a ajuda das quais se consegue sempre fazer uma exploração útil do campo, ou mesmo, nalguns casos, aceder à sua determinação prática. De resto, quando passarmos ao estudo das distribuições contínuas de carga eléctrica, teremos ocasião de ver como se baseia sobre estas duas propriedades a exploração do campo, mediante a utilização das noções de rotacional e de divergência, a elas ligadas.

4. GRADIENTE DE UM ESCALAR

Torna-se conveniente neste ponto fazer uma interrupção destinada a introduzir o conceito de operador gradiente, as suas propriedades e suas representações. Aproveita-se para aplicar desde logo esse instrumento matemático aos assuntos já tratados; isso, de certo modo, prepara a sua frequente utilização em todo o nosso estudo, daqui por diante.

4.1 — Definição e significado físico do gradiente.

Consideremos um ponto $Q(a, b, c)$ na região do espaço onde se acha definido o escalar função de ponto $V(P) \equiv V(x, y, z)$, função que suporemos unívoca, finita e contínua nessa região. Tomemos um eixo genérico, passando por Q ; seja \vec{e}_α o vector unitário da sua orientação e seja α a variável real que representa as distâncias marcadas sobre o eixo, a partir de Q , e afectadas de sinal (positivo no sentido de \vec{e}_α). O escalar $V(x, y, z)$ assume ao longo desse eixo valores que podemos representar por uma função unívoca, finita e contínua, de uma só variável, $v(\alpha)$. Suponhamos que $v(\alpha)$ admite derivada para $\alpha=0$ (i.e., no ponto Q). Esta derivada, $(\frac{dv}{d\alpha})_{\alpha=0}$, assim genericamente caracterizada em correspondência com o eixo genérico de orientação \vec{e}_α (representemo-la por $G(\vec{e}_\alpha)$), é a derivada dirigida de $V(P)$ segundo \vec{e}_α , no ponto Q . Também pode ser designada por $(\frac{\partial V}{\partial \alpha})_Q$: trata-se, com efeito, da derivada parcial de V em ordem a uma coordenada α , no ponto Q . O significado físico da derivada dirigida é imediato: ela traduz o valor que tem, no ponto Q , a taxa de variação do escalar V por unidade de comprimento, medida por um observador que se desloca, a partir de Q , ao longo e no sentido de um eixo de orientação \vec{e}_α . É evidente que, quando se passa ao eixo de orientação simétrica, se obtém um valor simétrico para a derivada dirigida: $G(-\vec{e}_\alpha) = -G(\vec{e}_\alpha)$. Assim, o conjunto das derivadas dirigidas no ponto Q , $(G(\vec{e}_\alpha))$, se não se reduz ocasionalmente ao elemento nulo, contém necessariamente um sub-conjunto de elementos positivos. Suponhamos agora que o conjunto das derivadas

4. GRADIENTE DE UM ESCALAR

Torna-se conveniente neste ponto fazer uma interrupção destinada a introduzir o conceito de operador gradiente, as suas propriedades e suas representações. Aproveita-se para aplicar desde logo esse instrumento matemático aos assuntos já tratados; isso, de certo modo, prepara a sua frequente utilização em todo o nosso estudo, daqui por diante.

4.1 — Definição e significado físico do gradiente.

Consideremos um ponto $Q(a, b, c)$ na região do espaço onde se acha definido o escalar função de ponto $V(P) \equiv V(x, y, z)$, função que suponhamos unívoca, finita e contínua nessa região. Tomemos um eixo genérico, passando por Q ; seja \vec{e}_α o vector unitário da sua orientação e seja α a variável real que representa as distâncias marcadas, sobre o eixo, a partir de Q , e afectadas de sinal (positivo no sentido de \vec{e}_α). O escalar $V(x, y, z)$ assume ao longo desse eixo valores que podemos representar por uma função unívoca, finita e contínua, de uma só variável, $v(\alpha)$. Suponhamos que $v(\alpha)$ admite derivada para $\alpha=0$ (i.e., no ponto Q). Esta derivada, $(\frac{dv}{d\alpha})_{\alpha=0}$, assim genericamente caracterizada em correspondência com o eixo genérico de orientação \vec{e}_α (representemo-la por $G(\vec{e}_\alpha)$), é a derivada dirigida de $V(P)$ segundo \vec{e}_α no ponto Q . Também pode ser designada por $(\frac{\partial V}{\partial \alpha})_Q$: trata-se, com efeito, da derivada parcial de V em ordem a uma coordenada α , no ponto Q . O significado físico da derivada dirigida é imediato: ela traduz o valor que tem, no ponto Q , a taxa de variação do escalar V por unidade de comprimento, medida por um observador que se desloca, a partir de Q , ao longo e no sentido de um eixo de orientação \vec{e}_α . É evidente que, quando se passa ao eixo de orientação simétrica, se obtém um valor simétrico para a derivada dirigida: $G(-\vec{e}_\alpha) = -G(\vec{e}_\alpha)$. Assim, o conjunto das derivadas dirigidas no ponto Q , $(G(\vec{e}_\alpha))$, se não se reduz ocasionalmente ao elemento nulo, contém necessariamente um sub-conjunto de elementos positivos. Suponhamos agora que o conjunto das derivadas

dirigidas no ponto Q admite um máximo (forçosamente não-negativo; nulo, só quando o conjunto se reduz ao elemento nulo); e seja \vec{e}_v a orientação do eixo para o qual o máximo é atingido: $\text{Máx}(G(\vec{e}_{ox})) = G(\vec{e}_v)$.

Para muitos tipos de funções $V(x, y, z)$, este máximo existe e é finito para cada ponto Q , em geral; e, quando não nulo, é atingido para uma única orientação \vec{e}_v . Estamos então em condições de definir o gradiente do escalar V no ponto Q , designado por $\text{grad}_Q V$: é um vector cujo módulo é o máximo valor do conjunto das derivadas dirigidas de V no ponto Q , ou seja $G(\vec{e}_v) \equiv \left(\frac{dV}{dv}\right)_{v=0} \equiv \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)_Q$, e cuja orientação (directão e sentido) é aquela para a qual se atinge esse valor máximo. Pode escrever-se:

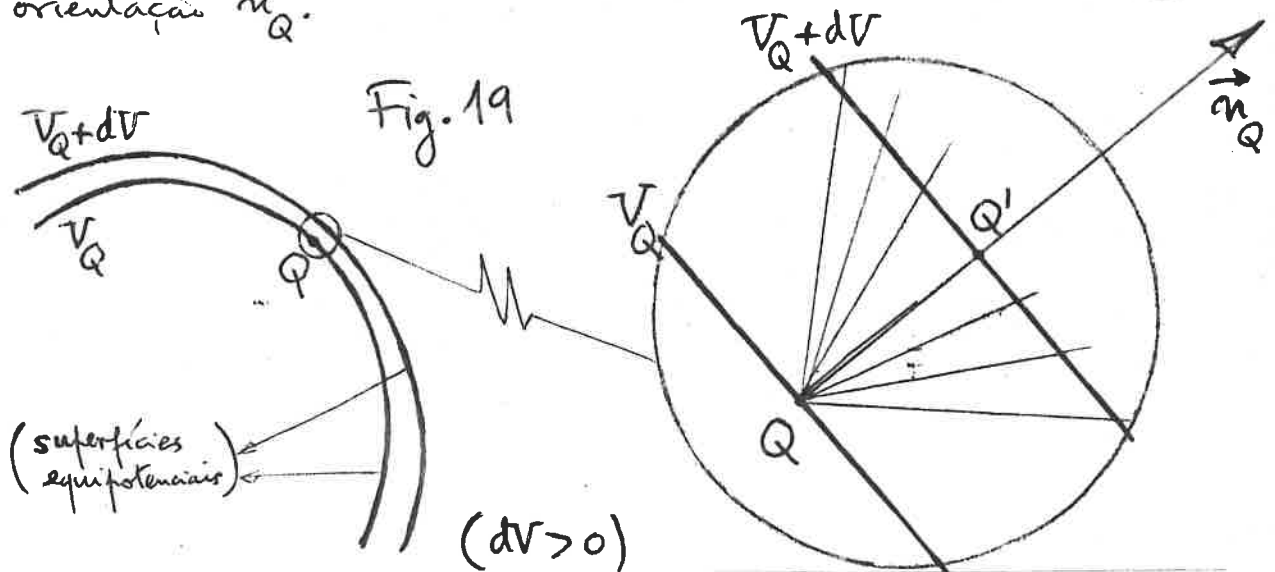
$$(1.29) \quad \text{grad}_Q V \equiv G(\vec{e}_v) \vec{e}_v \equiv \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)_Q \vec{e}_v.$$

Quanto ao significado físico do vector assim definido, que decorre directamente do de derivada dirigida, podemos afirmar que o gradiente de um escalar V no ponto Q representa para um observador que pretenda deslocar-se a partir de Q : em módulo, a máxima taxa de variação do escalar que o observador detecta por unidade de comprimento de percurso, a partir de Q e para um ponto na sua vizinhança próxima; em directão e sentido, a orientação segundo a qual o observador se deve deslocar, a partir de Q , para obter essa máxima taxa de variação.

4.2 — Relações entre $\text{grad } V$ e as equipotenciais de V

Consideremos as superfícies equipotenciais de V na vizinhança do ponto Q . Em primeiro lugar, é evidente que $\text{grad}_Q V$ tem o sentido das equipotenciais crescentes. Além disso, é fácil mostrar que $\text{grad}_Q V$ se dirige segundo a normal em Q à equipotencial que passa por Q . Tomemos para esse efeito a equipotencial V_Q , que passa por Q , e uma equipotencial infinitamente vizinha $V_Q + dV$ para o lado das equipotenciais crescentes ($dV > 0$); na vizinhança de Q , as duas equipotenciais confundem-se com os respectivos planos tangentes,

em Q e em Q' , paralelos entre si (v. Fig. 19 — a normal à equipotencial V_Q em Q intersecta a equipotencial $V_Q + dV$ no ponto Q'). Nestas condições, a Geometria ensina que o percurso mínimo, de entre os possíveis para se atingir, a partir de Q , a equipotencial $V_Q + dV$ — portanto, para se obter uma mesma variação $dV (> 0)$ do escalar V —, é precisamente o percurso segundo a normal em Q (de orientação \vec{n}_Q), de Q para Q' ; mas, com uma mesma variação, positiva, de V , é ao percurso mínimo que corresponde a máxima taxa de variação por unidade de comprimento de percurso. O vector $\text{grad}_Q V$ tem pois a orientação \vec{n}_Q .



Finalmente, e em consequência, o módulo de $\text{grad}_Q V$ vem dado por $(\frac{\partial V}{\partial n})_Q$, se designarmos por n a variável real associada às distâncias sobre o eixo normal \vec{n}_Q . Pode escrever-se, como uma versão de (1.29), enriquecida de conteúdo, a seguinte igualdade

$$(1.30) \quad \text{grad}_Q V = \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_Q \vec{n}_Q$$

que sintetiza as relações de $\text{grad}_Q V$ com as equipotenciais de V . Pode dizer-se que o operador gradiente, quando aplicável em todos os pontos da região do espaço em que $V(P)$ é definida, transforma o campo escalar $V(P)$ no campo vectorial $\text{grad}_P V$ (vector função de ponto); e existe entre os dois campos uma conexão geométrica que importa realçar. Com efeito, por (1.30), as linhas de força do campo vectorial $\text{grad}_P V$ são as trajectórias ortogonais da família de

superfícies equipotenciais do campo escalar $V(\mathbf{I})$.

4.3 — Circulação de um gradiente.

Continuando a pensar no campo vectorial $\text{grad}_{\mathbf{P}} V$, atrás referido, consideremos agora a sua circulação elementar para um deslocamento qualquer $d\mathbf{P}$, do ponto \mathbf{P} para $\mathbf{P}+d\mathbf{P}$: $d\mathbf{P} \cdot \text{grad}_{\mathbf{P}} V$. Se utilizarmos a igualdade (1.30), essa circulação resulta igual a $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{\mathbf{P}} \vec{n}_{\mathbf{P}} \cdot d\mathbf{P}$ e a Fig. 20 mostra que isso vale $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{\mathbf{P}} dn$,

ou seja, $\left(\frac{dV}{dn}\right)_{n=0}$, pelo § 4.1;

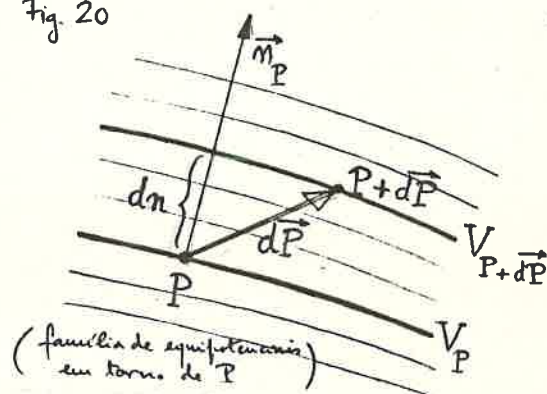
ora esta última expressão identifica-se com a variação de V correspondente a dn sobre a normal $\vec{n}_{\mathbf{P}}$, variação esta que coincide com a correspondente a $d\mathbf{P}$, $dV = V(\mathbf{P}+d\mathbf{P}) - V(\mathbf{P})$.

Tem-se, portanto:

$$(1.31) \quad d\mathbf{P} \cdot \text{grad}_{\mathbf{P}} V = dV$$

para qualquer deslocamento elementar $d\mathbf{P}$ a partir de \mathbf{P} , sendo dV a correspondente variação do escalar V . (Obtém-se uma verificação particular imediata para um deslocamento $d\mathbf{P}$ sobre a equipotencial $V_{\mathbf{P}}$: $dV=0$; e $\text{grad}_{\mathbf{P}} V (\propto \vec{n}_{\mathbf{P}}) \perp d\mathbf{P}$). Do ponto de vista matemático, a importância desta propriedade é acrescida pelo facto de que ela implica, reciprocamente, a definição de gradiente dada no § 4.1; uma tal equivalência justifica que alguns autores façam mesmo da identidade (1.31) uma definição intrínseca do operador gradiente. Do ponto de vista físico, o grande interesse por esta propriedade provém do facto de que o conhecimento de $\text{grad } U$ permite encontrar mediante as simples circulações, a variação de U para qualquer deslocamento elementar do observador. Passando agora à circulação ao longo de um percurso finito $\overline{\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2}$ pode repetir-se aqui o cálculo já efectuado na eq. (1.16) do § 2.2, vindo:

Fig. 20



$$(1.32) \quad \int_{\widehat{P_1 P_2}} d\vec{P} \cdot \text{grad}_P V = \int_{P_1}^{P_2} dV = V_{P_2} - V_{P_1}.$$

E para a circulação ao longo de qualquer curva fechada $[C]$ (circulação fechada) tem-se

$$(1.33) \quad \oint_{[C]} d\vec{P} \cdot \text{grad}_P V = 0.$$

Por força de (1.33), se o campo vectorial $\vec{A}(P)$ se pode exprimir como gradiente de um escalar $\phi(P)$ ($\vec{A} = \text{grad} \phi$), então tem-se $\oint_{[C]} \vec{A} \cdot d\vec{s} = 0$ com qq. curva fechada $[C]$. Mostra-se que, reciprocamente, sempre que $\oint_{[C]} \vec{A} \cdot d\vec{s} = 0$ se cumpre com qq. curva fechada $[C]$, existe um campo escalar $\phi(P)$ do qual $\vec{A}(P)$ deriva pela operação gradiente: $\vec{A} = \text{grad} \phi$.

4.4 — Representação cartesiana de $\text{grad} V$.

A propriedade fundamental (1.31) permite encontrar facilmente qualquer derivada dirigida de $V(P)$ no ponto Q , desde que se conheça $\text{grad}_Q V$. Seja genericamente a derivada dirigida segundo a orientação \vec{e}_α , $G(\vec{e}_\alpha)$. Tomemos um deslocamento infinitamente pequeno $d\vec{Q} = d\alpha \vec{e}_\alpha$ ao longo do eixo \vec{e}_α . Então, por (1.31), a variação de V correspondente a $d\vec{Q}$ é dada por $d\vec{Q} \cdot \text{grad}_Q V$ ou seja $(\vec{e}_\alpha \cdot \text{grad}_Q V) d\alpha$; mas a mesma variação também se exprime como $dV(\alpha) = \left(\frac{dV}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha = G(\vec{e}_\alpha) d\alpha = \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right)_Q d\alpha$. Donde resulta:

$$(1.34) \quad G(\vec{e}_\alpha) = \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right)_Q = \vec{e}_\alpha \cdot \text{grad}_Q V,$$

o que quer dizer que a projecção do vector $\text{grad}_Q V$ sobre um eixo — a sua componente segundo esse eixo — iguala a derivada parcial, no ponto Q , em ordem à coordenada α definida ao longo e no sentido do eixo. Sendo assim, as componentes cartesianas de $\text{grad}_P V$, relativamente a um sistema de eixos $[Oxyz]$ são respectivamente $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_P$, $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_P$ e $\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_P$.

Pode escrever-se

$$(1.35) \quad \text{grad}_{\mathbb{P}} V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{\mathbb{P}} \vec{e}_x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{\mathbb{P}} \vec{e}_y + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{\mathbb{P}} \vec{e}_z.$$

Note-se que a representação cartesiana de $\text{grad}_{\mathbb{P}} V$, a que assim chegamos, é perfeitamente coerente com a conhecida expressão da diferencial da função $V(x, y, z)$ no ponto \mathbb{P} , dada por:

$$(1.36) \quad dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{\mathbb{P}} dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{\mathbb{P}} dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{\mathbb{P}} dz$$

e que pode obter-se a partir de (1.31) combinada com (1.35), sendo dx, dy, dz (diferenciais, arbitrárias e independentes entre si, das variáveis x, y, z de que depende V) as componentes cartesianas do vector deslocamento elementar $d\vec{P}$ em (1.31).

Se adoptarmos como princípio convencional que o "produto" (simbólico) do operador diferenciante $\frac{\partial}{\partial x}$ por uma quantidade U (escalar, função de ponto, por exemplo) significa a derivada parcial $\frac{\partial U}{\partial x}$, então a eq. (1.35) pode ser re-escrita simbolicamente como

$$(1.35') \quad \text{grad } U = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) U$$

ou seja, em termos de um vector simbólico cujas componentes cartesianas são $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ e $\frac{\partial}{\partial z}$ e que é designado por $\vec{\nabla}$:

$$(1.37) \quad \vec{\nabla} \equiv \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

O símbolo ∇ chama-se "nabla" e $\vec{\nabla}$ é o vector-nabla ou operador vectorial nabla. Segundo o mesmo princípio convencional acima introduzido, a eq. (1.35') traduz que o gradiente de U pode obter-se pelo "produto" (simbólico) do escalar U pelo vector-nabla:

$$(1.35'') \quad \text{grad } U \equiv \vec{\nabla} U.$$

4.5 — O gradiente como operador linear.

A partir da definição de $\text{grad } V$ (§ 4.1), ou da sua propriedade fundamental (1.31), e tendo em conta a lineari-

dade das operações de diferenciação, mostra-se facilmente que o gradiente é um operador linear, i. e., um operador que satisfaz em todo o ponto as duas seguintes relações:

$$(1.38) \quad \begin{cases} \text{grad}(U+V) = \text{grad} U + \text{grad} V \\ \text{grad}(\lambda U) = \lambda \text{grad} U \end{cases}$$

quaisquer que sejam U e V , funções de ponto admitindo gradiente, e qualquer que seja a constante λ .

4.6 — Gradiente de função de função

Consideremos o escalar função de ponto $V \equiv \varphi(P)$ e seja U um escalar função de V , $U = f(V)$; então U é também função de ponto $U \equiv f[\varphi(P)] \equiv \psi(P)$. Interessa em muitas situações saber como se exprime $\text{grad} U$ em termos de $\text{grad} V$, suposta conhecida a função $U = f(V)$. Para isso, escrevamos (1.31) para ambas as funções de ponto U e V , e relativamente ao mesmo deslocamento $d\vec{P}$, arbitrário: $d\vec{P} \cdot \text{grad} V = dV$; $d\vec{P} \cdot \text{grad} U = dU$. Mas sabe-se que $dU = \frac{dU}{dV} dV = f'(V) dV$ (diferencial da função de uma variável $U = f(V)$). Então

$$d\vec{P} \cdot \text{grad} U = \frac{dU}{dV} dV = \frac{dU}{dV} d\vec{P} \cdot \text{grad} V$$

e, porque $d\vec{P}$ é arbitrário, resulta:

$$(1.39) \quad \text{grad} U = \frac{dU}{dV} \text{grad} V$$

Vê-se, por (1.39), que, para uma função de função, o comportamento do operador gradiente é formalmente idêntico ao da operação de diferenciação, linhas acima recordadas.

4.7 — Gradiente do escalar distância

A distância de um ponto $P(x, y, z)$ à origem do referencial, O , $r \equiv |\vec{OP}|$, é um escalar função de ponto $r(P)$, dos mais simples e dos que mais frequentemente ocorrem no nosso estudo. Importa, desde já, determinar $\text{grad}_P r$. Isso pode fazer-se por vários

caminhos; utilizemos a representação cartesiana (1.35). Visto que se tem $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, resulta $(\frac{\partial r}{\partial x})_P = \frac{x}{r}$, etc.; portanto,

$$\text{grad}_P r = \frac{x}{r} \vec{e}_x + \frac{y}{r} \vec{e}_y + \frac{z}{r} \vec{e}_z, \text{ ou seja:}$$

$$(1.40) \quad \text{grad}_P r = \frac{\vec{r}}{r} = \text{vers } \vec{OP} \quad (\vec{r} \equiv \vec{OP})$$

Para toda a função de ponto $U(P)$ que seja uma função exclusiva da distância $r \equiv |\vec{OP}|$, $U = U(r)$, suposta conhecida, torna-se fácil encontrar $\text{grad}_P U$, por aplicação de (1.39) e (1.40):

$$(1.41) \quad \text{grad}_P U(r) = \frac{dU}{dr} \frac{\vec{r}}{r} \quad (\vec{r} \equiv \vec{OP})$$

Exemplo de aplicação de (1.41): $\text{grad}_P \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$.

Note-se que os resultados (1.40) e (1.41) poderiam facilmente ser obtidos, independentemente, mediante as conclusões do §4.2 e constatando que as equipotenciais são, em ambos os casos, superfícies esféricas centradas em O .

A consideração da distância entre dois quaisquer pontos P e Q , $r_{PQ} \equiv |\vec{PQ}|$, e o facto de se tratar então de um escalar que tanto é uma função de P como uma função de Q , leva naturalmente à determinação de dois gradientes: $\text{grad}_P r_{PQ}$ e $\text{grad}_Q r_{PQ}$.

Seus $r_{PQ}^2 = (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2$ e reparando que

$$\frac{\partial r_{PQ}}{\partial x_P} = \frac{x_P - x_Q}{r_{PQ}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial r_{PQ}}{\partial x_Q} = -\frac{x_P - x_Q}{r_{PQ}}, \text{ etc.,}$$

mostra-se que os dois gradientes são simétricos:

$$(1.42) \quad \text{grad}_P r_{PQ} = -\text{grad}_Q r_{PQ}$$

Do mesmo modo, são simétricos os dois gradientes de uma qualquer função exclusiva da distância r_{PQ} , $U = U(r_{PQ})$:

$$(1.43) \quad \text{grad}_P U(r_{PQ}) = -\text{grad}_Q U(r_{PQ})$$

4.8 — Utilização do operador gradiente para obter a variação de uma grandeza vectorial

No § 4.3 pôs-se em evidência que o conhecimento de $\text{grad } U$ permite encontrar, mediante a simples circulação elementar (1.31), a variação dU correspondente a um qualquer deslocamento do observador, $d\vec{P}$. Dado um campo vectorial função de ponto, $\vec{B}(\vec{P})$, vamos mostrar que o mesmo operador gradiente presta igualmente bons serviços na determinação da variação $d\vec{B} = \vec{B}(\vec{P} + d\vec{P}) - \vec{B}(\vec{P})$ correspondente a um qualquer $d\vec{P}$. Na verdade, recorrendo à decomposição cartesiana de \vec{B} , $\vec{B} = \sum_{\gamma} B_{\gamma} \vec{e}_{\gamma}$ ($\gamma = x, y, z$), sendo cada componente B_{γ} uma função de ponto, obtém-se evidentemente $d\vec{B} = \sum_{\gamma} (dB_{\gamma}) \vec{e}_{\gamma}$ com $dB_{\gamma} = d\vec{P} \cdot \text{grad}_{\vec{P}} B_{\gamma}$ por (1.31) e portanto:

$$(1.44) \quad d\vec{B} = \sum_{\gamma} (d\vec{P} \cdot \text{grad}_{\vec{P}} B_{\gamma}) \vec{e}_{\gamma}$$

É usual escrever-se, em vez de (1.44), mas com o mesmo significado a seguinte expressão deste resultado:

$$(1.44') \quad d\vec{B} = (d\vec{P} \cdot \text{grad}_{\vec{P}}) \vec{B}$$

entendendo-se aqui que o operador $d\vec{P} \cdot \text{grad}_{\vec{P}}$ actua sobre cada uma das componentes de \vec{B} para fornecer a componente homologa de $d\vec{B}$. Estas expressões serão também utilizadas adiante.

4.9 — Aplicações do operador gradiente ao campo eléctrico.

4.9.1 — Campo produzido por uma carga pontual — A partir da expressão (1.11) obtida no § 2.2 para o campo eléctrico de uma carga pontual e tendo em conta (1.41), segue-se imediatamente que:

$$(1.45) \quad \vec{E}_{\vec{P}} = -\text{grad}_{\vec{P}} V$$

Passaremos a escrever (1.45), de preferência a (1.11), com as mesmas implicações. E diremos: o campo eléctrico de uma carga pontual deriva de um potencial escalar V pela operação $-\text{grad } V$.

(Recorde-se que este potencial V é dado pela eq. (1.12) do § 2.2). Facilmente se reconhecem nas propriedades de \vec{E}_P traduzidas por (1.14) e (1.17) do § 2.2 e por (1.18) do § 2.4 as propriedades estabelecidas no § 4.3 para todo o campo vectorial que se possa exprimir como $-\text{grad } V$. Do mesmo modo, as relações de \vec{E}_P com as equipotenciais de V , discutidas no § 2.3, constituem nada mais que uma ocorrência particular das conclusões do § 4.2.

4.9.2 — Campo produzido por uma distribuição de cargas pontuais.

— Dado que para cada uma das cargas da distribuição o campo, \vec{E}_α , cumpre a relação (1.45), com V_α dado por (1.12) do § 2.2, de modo geral, então tem-se ($\alpha = 1, \dots, N$):

$$\vec{E}_\alpha = -\text{grad } V_\alpha \quad \text{com } V_\alpha = k_0 \frac{q_\alpha}{r_{\alpha P}} + \text{const.}$$

(em que se usam as notações do § 3. e $r_{\alpha P} \equiv |\vec{Q}_\alpha P|$). Se tivermos em conta a aditividade dos campos (relação (1.26) do § 3.) e o carácter linear do operador gradiente, vem para o campo produzido por toda a distribuição

$$(1.45) \quad \vec{E} = -\text{grad } V, \quad \text{com } V = \sum_{\alpha=1}^N V_\alpha.$$

Cumpre-se portanto ainda a relação (1.45) para o campo global, com um potencial global que se obtém também por aditividade dos potenciais V_α (aqui, mediante uma soma algébrica de escalares).

Se, em particular, se adopta para todos os potenciais V_α a condição $V_\infty = 0$, a mesma condição respeitará o potencial global V , com o significado físico preciso daí decorrente. Este potencial global, nulo no infinito, será então definido por:

$$(1.47) \quad V(P) = k_0 \sum_{\alpha=1}^N \frac{q_\alpha}{r_{\alpha P}} \quad (r_{\alpha P} \equiv |\vec{Q}_\alpha P|).$$

A Fig 21 ilustra a conexão geométrica (determinada pela relação (1.45)) entre as superfícies equipotenciais de V (representadas

pelas secções no plano do papel, a tracejado) e as linhas de força de \vec{E} (a cheio), para duas muito simples distribuições de cargas pontuais: a — sistema $+q, +q$; b — sistema $-q, +q$. (As linhas de força de \vec{E} são as trajectórias ortogonais das equipotenciais).

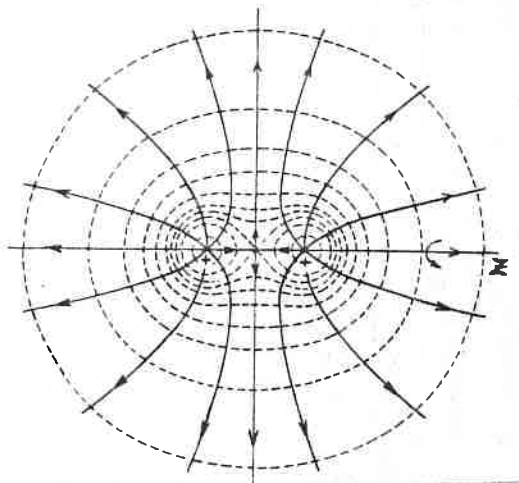


Fig 21-a

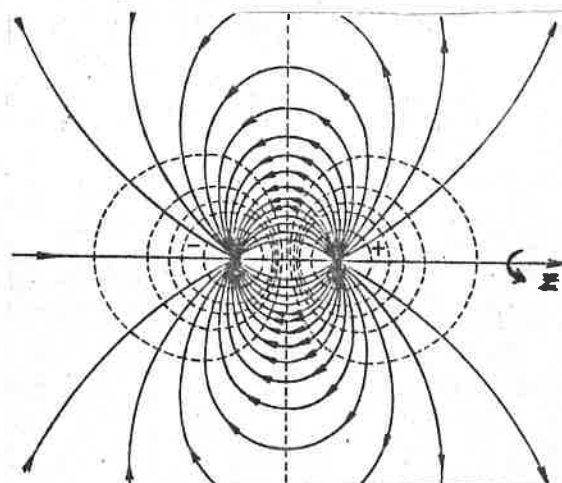


Fig 21-b

5. DIPOLO ELÉCTRICO

De entre as mais simples distribuições de cargas pontuais, sobressai, pelo seu interesse, o dipolo eléctrico. Designa-se assim o sistema de duas cargas pontuais, $-e$ e $+e$, com o mesmo módulo e sinal contrário, colocadas a uma distância muito pequena uma da outra. (Na Fig. 22, as cargas estão localizadas nos pontos A e B, respectivamente). Vamos supor, mais precisamente, que a distância \overline{AB} , dimensão geométrica do sistema, é muito menor que a distância \overline{AP} a que o observador, em P, se encontra do sistema:

$$(1.48) \quad \overline{AB} \ll \overline{AP}$$

O campo criado pelo dipolo eléctrico pode calcular-se começando por achar o potencial que lhe está associado e utilizando depois a operação $\vec{E} = -\text{grad} V$. Ora, o potencial 'produzido' pelo dipolo (sistema $-e$ em A; $+e$ em B) para um observador em P, $V_P^{\text{dip.}}$, obtém-se pela soma algébrica dos potenciais 'produzidos' no mesmo ponto P por cada uma das cargas do sistema (tendo em conta a aditividade dos potenciais, já justificada

no § 4.9.2); vem portanto: $V_P^{dip} = V_P^{(+e)} + V_P^{(-e)}$.

Mas $V_P^{(-e)} = \frac{k_0(-e)}{r}$

ou $V_P^{(-e)} = -\frac{k_0(+e)}{r'_+}$

ou $V_P^{(-e)} = -V_{P'}^{(+e)}$

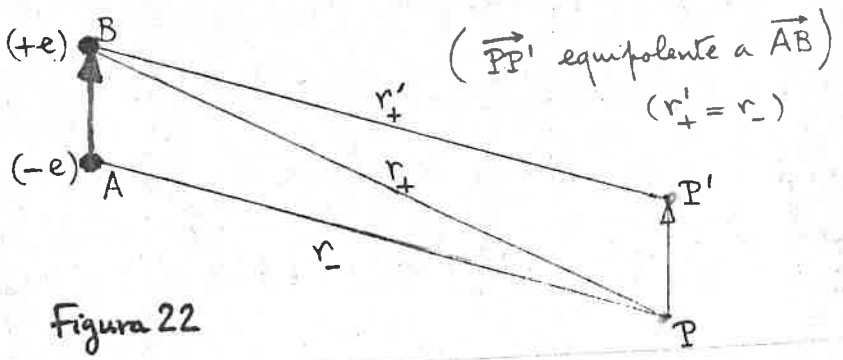


Figura 22

como a Fig. 22 ajuda a ver (\vec{PP}' , vector-deslocamento auxiliar, foi construido equipotente a \vec{AB} ; donde $r'_+ = r_-$). Entao:

$$V_P^{dip} = V_P^{(+e)} - V_{P'}^{(+e)} = -\left(V_{P'}^{(+e)} - V_P^{(+e)}\right)$$

e sendo \vec{PP}' um deslocamento muito pequeno pela condicao (1.48), pode tomar-se como infinitamente pequeno; donde resulta:

$$V_{P'}^{(+e)} - V_P^{(+e)} = \vec{PP}' \cdot \text{grad}_P V^{(+e)}$$

por aplicacao de (1.31). Ou seja, dentro da mesma aproximacao ($r_+ \approx r_-$; pode escrever-se simplesmente r como a distancia de \vec{AB} a P): $V_P^{dip} = -k_0(e\vec{AB} \cdot \text{grad}_P \frac{1}{r})$.

Se designarmos por \vec{p} o produto $e\vec{AB}$ — momento do dipolo — (grandeza que associa deste modo as caracteristicas do sistema: e , modulo comum as duas cargas; \vec{AB} vector-distancia que as une, da negativa para a positiva, por convencao) tem-se enfim:

$$(1.49) \quad V_P^{dip} = -k_0 \vec{p} \cdot \text{grad}_P \frac{1}{r} = k_0 \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

Passemos agora ao calculo do campo. Tem-se:

$$\vec{E}_P^{dip} = -\text{grad}_P \left(-k_0 \vec{p} \cdot \text{grad}_P \frac{1}{r} \right), \quad (\vec{r} \equiv \vec{OP})$$

expressao cujo desenvolvimento directo, pela representacao cartesi- ana de gradiente, conduz a:

Mais simples

$$(1.50) \quad \vec{E}_P^{\text{dip.}} = k_0 \left[\frac{3}{r^5} (\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right]$$

O mesmo resultado pode ser obtido por uma outra via, utilizando coordenadas a que melhor se adapta a simetria do campo. Seja o dipolo de momento \vec{p} localizado em O (v. Fig. 23). Se designarmos por θ o ângulo de \vec{p} com \vec{OP} (P , localização do observador) segue-se de (1.49):

$$(1.49') \quad V_P^{\text{dip.}} = k_0 \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

($p = |\vec{p}|$) — expressão de $V_P^{\text{dip.}}$ nas coordenadas esféricas que se representam sobre a Fig. 23:

$P \equiv P(r, \theta, \varphi)$ (o eixo polar (zz) orienta-se segundo \vec{p}).

Note-se desde logo que a independência em φ patente em (1.49') reflecte a simetria cilíndrica do campo, em torno do eixo (zz), ou seja, em torno de \vec{p} , como poderia prever-se. Basta agora conhecer as componentes do operador gradiente em coordenadas esféricas (puro problema de cálculo diferencial), a saber:

$$(\text{grad } V)_r = \frac{\partial V}{\partial r}; \quad (\text{grad } V)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}; \quad (\text{grad } V)_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

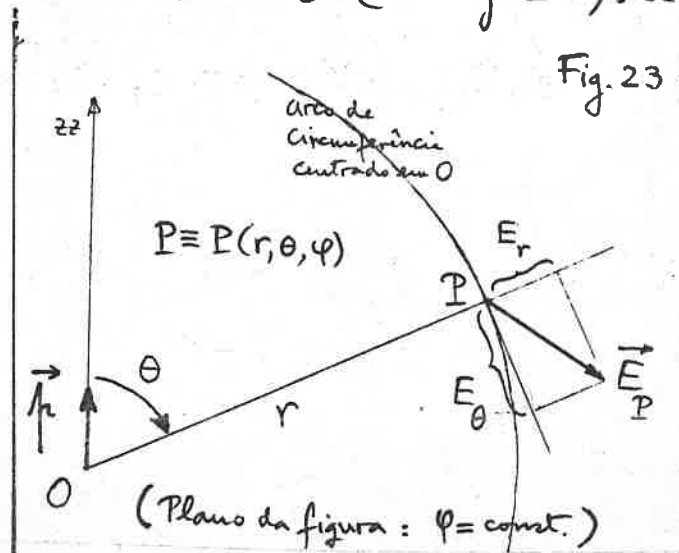
para extrair de (1.49') as componentes do campo eléctrico criado pelo dipolo de momento \vec{p} , localizado em O , para um observador localizado em $P(r, \theta, \varphi)$:

$$(1.51) \quad E_r^{\text{dip.}} = \frac{2k_0 p \cos \theta}{r^3}; \quad E_\theta^{\text{dip.}} = \frac{k_0 p \sin \theta}{r^3}; \quad E_\varphi^{\text{dip.}} = 0.$$

A partir de (1.51), a expressão de $\vec{E}^{\text{dip.}}$ reconstitui-se como

$$(1.50') \quad \vec{E}^{\text{dip.}} = E_r^{\text{dip.}} \vec{e}_r + E_\theta^{\text{dip.}} \vec{e}_\theta$$

utilizando os vectores unitários $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ correspondentes às



coordenadas esféricas r, θ, φ ($\vec{e}_r \equiv \text{vers } \vec{OP}$; \vec{e}_θ , vector unitário da tangente em P à circunferência centrada em O no plano da figura, com o sentido dos θ crescentes; \vec{e}_φ , vector unitário da normal ao plano da figura, para o fundo). É fácil verificar a equivalência entre (1.50) e (1.50'). O resultado (1.51) é susceptível de dois comentários: 1) O anulamento da componente em φ traduz o facto de que o campo criado pelo dipolo jaz no plano definido pelas suas duas cargas pontuais e pelo ponto de observação (ou por \vec{f} e P : plano da figura). Isto comprova-se por composição directa dos campos produzidos pelas duas cargas. 2) A independência de E_r^{dip} e E_θ^{dip} relativamente a φ , é mais um reflexo da simetria cilíndrica do campo em torno do eixo que passa por \vec{f} ; basta observar-se o que se passa num hemiplano partindo desse eixo, para dizer do comportamento do campo em todo o espaço — por revolução em torno do eixo. A Figura 24 ilustra bem todas estas considerações (dipolo orientado segundo o eixo dos zz ; linhas de força do campo representadas a cheio; secções das superfícies equipotenciais representadas a tracejado) e mostra mais uma vez as linhas de força como trajectórias ortogonais das equipotenciais em conformidade com $\vec{E} = -\text{grad}V$.

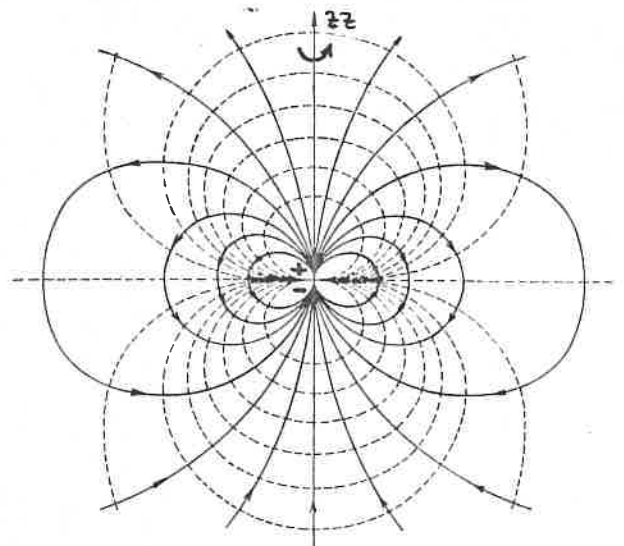


Figura 24

Note-se por fim que, diferentemente do que acontece com o campo de uma carga pontual, o módulo do campo produzido por um dipolo (bem como qualquer uma das componentes do campo), como se vê por (1.50) ou por (1.51), decresce com a distância, r , conforme o inverso do cubo; revela-se assim que o dipolo tem um alcance de mais curto alcance que uma carga — conclusão facilmente interpretável pelo efeito de compensação das acções individuais das duas cargas.

5-A. CAMPO PRODUZIDO POR UMA DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS

A GRANDE DISTÂNCIA DO OBSERVADOR

5-A.1 — Desenvolvimento multipolar do potencial

Consideremos uma distribuição de ^(partículas eletrizadas) cargas pontuais, q_i ($i=1, \dots, N$) localizadas nos pontos $O_i (x_i, y_i, z_i)$ ^{(dentro de uma região confinada do espaço com dimensões muito pequenas em face da distância a que se encontra o observador, em $P(x, y, z)$.)} Se for O um ponto arbitrário interior a essa região, tomado para origem das coordenadas, deve pois cumprir-se a condição genérica

$$(1.48-A) \quad |\vec{OO}_i| \ll |\vec{OP}| \quad (\text{q.q. } \underline{i}).$$

O potencial criado pela distribuição vale, no ponto P :

$$(1.49-A) \quad V_P = k_0 \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{O}_i P|}$$

Ora a condição (1.48-A) sugere que se dê a cada uma das funções

$$1/|\vec{O}_i P| = [(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2]^{-1/2} = f(x_i, y_i, z_i)$$

o desenvolvimento de Taylor em torno da origem $O(0,0,0)$:

$$(1.50-A) \quad f(x_i, y_i, z_i) = f(0,0,0) + \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \right)_{0,0,0} \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_i \partial \beta_i} \right)_{0,0,0} \alpha_i \beta_i + \dots$$

O 1º termo dá $1/r$, com $r = |\vec{OP}|$. O 2º termo, visto que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \right)_{0,0,0} = \left(-\frac{1}{|\vec{O}_i P|^2} \frac{\alpha_i - \alpha}{|\vec{O}_i P|} \right)_{0,0,0} = \frac{1}{r^2} \frac{\alpha}{r} \quad (r = |\vec{OP}|),$$

$$V_{\text{dip}} = k_0 \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = k_0 \frac{1}{r^2} \vec{p} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

49''

resulta

$$\frac{1}{r^2} \text{grad}_{\mathbf{P}} r \cdot \vec{00}_i$$

O potencial $V_{\mathbf{P}}$ fica portanto a poder ser calculado mediante um desenvolvimento que resulta de introduzir (1.50-A) em (1.49-A). Aproveitadas já as expressões que acabámos de encontrar para os dois primeiros termos de (1.50-A), teremos assim:

$$(1.51-A) \quad V_{\mathbf{P}} = k_0 \left\{ \frac{1}{r} \left(\sum_{i=1}^N e_i \right) + \frac{1}{r^2} \text{grad}_{\mathbf{P}} r \cdot \left(\sum_{i=1}^N e_i \vec{00}_i \right) + \dots \right\}$$

Dado que $\text{grad}_{\mathbf{P}} r$ é um vector unitário (orientação de \vec{OP}), independente de \underline{r} (depende apenas das restantes coordenadas esféricas do ponto \mathbf{P} , a saber, as coordenadas angulares θ e φ) vê-se que os dois termos explicitados em (1.51-A) variam com a distância r , a que se encontra o observador (relativamente a O), como as potências $1/r$ e $1/r^2$, respectivamente. O prosseguimento da análise dos subsequentes termos de (1.50-A) levaria facilmente à conclusão de que o desenvolvimento (1.51-A) de $V_{\mathbf{P}}$ se constitui de uma série de potências de $1/r$, com coeficientes independentes de \underline{r} (em geral dependentes de θ e φ).

Um tal desenvolvimento traduz um cálculo de $V_{\mathbf{P}}$ por aproximações sucessivas. Mostra-se que, se for a o máximo módulo dos vectores $\vec{00}_i$, ⁽¹⁾ ~~se~~ ⁽²⁾ comete-se neste cálculo um erro relativo cujo limite superior é de ordem n em a/r (note-se que $a/r \ll 1$, por (1.48-A)), quando se toma na série a soma dos n primeiros termos.

Repare-se agora que o 1.º termo do desenvolvimento (1.51-A) se identifica claramente com o potencial que seria

produzido em P por uma carga de valor $\sum_{i=1}^N e_i$, colocada no ponto O; mas o 2º termo se identifica com o potencial que seria produzido em P por um dipolo de momento $\sum_{i=1}^N e_i \vec{OO}_i$, colocado no ponto O. Pode avançar-se que o 3º termo, não explicitado em (1.51-A), se identifica com o potencial que seria produzido em P por um quadrípolo (com certo momento quadrípolar). E assim por diante. Note-se que tais identificações são feitas sempre com base na forma dos sucessivos termos, designadamente, na dependência formal que manifestam relativamente às coordenadas de P (por exemplo, as coordenadas esféricas); é o caso de $1/r$ no 1º termo, de $1/r^2 \text{ grad}_P r$ no 2º termo (confronte com (1.12') e com (1.49), respectivamente).

Ao mesmo tempo, essas identificações põem em evidência os sucessivos momentos multipolares que podem ser associados à distribuição de que estamos a observar o campo produzido a grande distância. Assim:

$$e = \sum_{i=1}^N e_i \quad \text{momento de ordem 0 (monopolo)}$$

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N e_i \vec{OO}_i \quad \text{momento de ordem 1 (dipolo)}$$

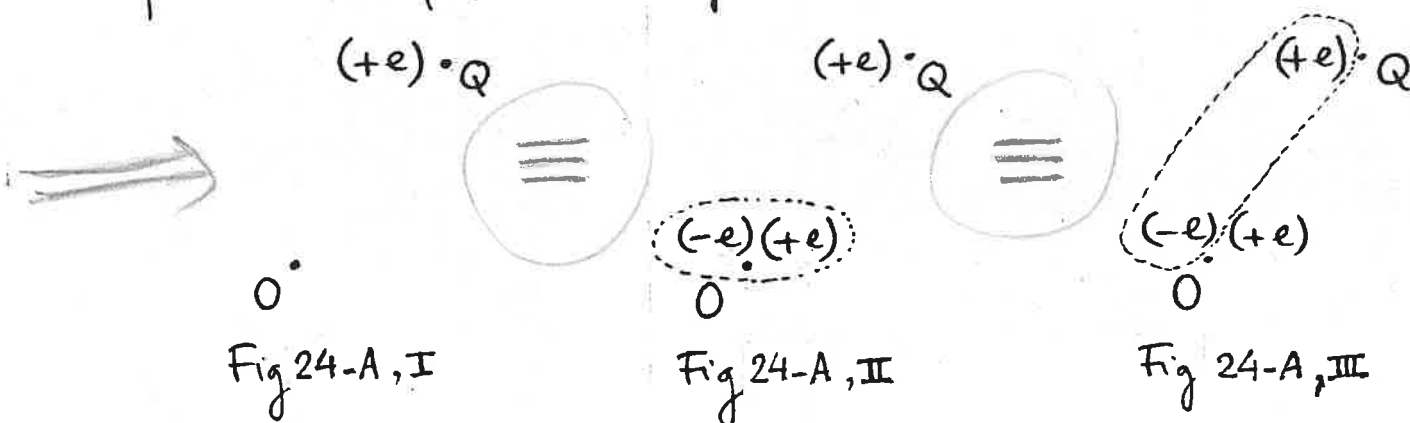
O momento de ordem 0, e , carga total da distribuição, é um escalar; o momento de ordem 1, \vec{p} , momento dipolar da distribuição referido ao ponto O, é um vector polar; o momento de ordem 2, i.e., o momento quadrípolar, revelar-se-ia como um tensor de ordem 2.

O desenvolvimento (1.51-A) é pois um desenvolvimento multipolar. Corresponde-lhe, bem entendido, um desenvolvimento multipolar para o campo produzido nas referidas circunstâncias.

5-A.2 — Interpretação física do cálculo do potencial pelo desenvolvimento multipolar

Ao cálculo do potencial efectuado mediante o desenvolvimento (1.51-A) pode dar-se uma interpretação física curiosa.

Na verdade, facilmente se admite que, a uma distância suficientemente grande, uma boa aproximação para V_P resulta precisamente de tomar o potencial produzido pelas cargas da distribuição suportas todas transportadas para um mesmo ponto O (muito vizinho de qualquer O_i , para um observador em P , sob a condição (1.48-A)) — e isso consiste o 1.º termo do desenvolvimento (1.51-A). Mas pode mostrar-se que o transporte de uma carga nessas circunstâncias se acompanha da criação de um dipolo: com efeito, é de todo o ponto equivalente ter a carga $(+e)$ no ponto Q (v. Fig 24-A, I) ou a carga $(+e)$ no ponto O acompanhada de um dipolo $[-e)$ em O , $(+e)$ em Q] (v. Fig 24-A, II), pois esta última situação resulta da primeira pelo simples facto de imaginarmos que se sobrepõem em O as duas cargas $(-e)$, $(+e)$ cujo efeito global é nulo em todos os pontos do espaço (v. Fig 24-A, II).



Assim, a primeira aproximação já realizada, deve agora acrescentar-se, para melhorar o cálculo, o potencial produzido pelos dipolos criados pelo transporte das cargas e_i para a

origem O , a partir das suas respectivas localizações O_i na distribuição ρ , ou seja, pelos dipolos $[(-e_i) \text{ em } O, (+e_i) \text{ em } O_i]$, de momento genérico $e_i \vec{OO}_i$; esse acréscimo necessário é o objectivo do 2.º termo do desenvolvimento (1.51-A). Porém, se é lícito tomar como potencial do dipolo $[(-e_i) \text{ em } O, (+e_i) \text{ em } O_i]$ a expressão

$$-k_0 (e_i \vec{OO}_i) \cdot \text{grad}_P \frac{1}{r}, \quad \text{na medida em que}$$

se cumpre a condição (1.48-A), já não é seguro que nestas circunstâncias seja lícito somar os momentos $e_i \vec{OO}_i$ dos diferentes dipolos, como se faz na expressão do 2.º termo do desenvolvimento (1.51-A), para obter a acção resultante do conjunto desses dipolos. Pode mostrar-se, com efeito, que a soma, pela regra do paralelogramo, dos momentos de dois dipolos se torna fisicamente viável mediante a criação de um quadrípolo. O potencial resultante da acção dos quadrípulos assim gerados deve por ser acrescentado ao cálculo de V_P e isso faz-nos passar ao 3.º termo do desenvolvimento (1.51-A). E assim por diante.

5-A.3 — Tipos de distribuições localizadas.

À luz do desenvolvimento de V_P que descrevemos aqui, é possível distinguir vários tipos de distribuições localizadas nas condições acima expostas.

5-A.3.1 — Distribuições monopolar

Se $\sum_{i=1}^N e_i \neq 0$, estamos em presença de uma distribuição monopolar. A parte principal de V_P é o 1.º termo do desenvolvimento e, de acordo com o exposto no § 5-A.1, podemos tomá-la para valor de V_P com um erro relativo de 2.ª ordem em a/r . Todavia, se escolhermos con-

venientemente a origem O (em princípio arbitrária) podemos minorar esse erro. Com efeito, se a nova origem \bar{O} for tal que

$$(1.52-A) \quad \sum_{i=1}^N e_i \vec{O\bar{O}}_i = 0$$

resulta imediatamente o anulamento do 2º termo em (1.51-A); e o erro relativo cometido, quando se toma para valor de V_P o novo 1º termo, é então de 3ª ordem em a/r , ou seja, em $(a/r)^3$. A nova origem \bar{O} , satisfazendo a condição (1.52-A), acha-se a partir da origem O arbitrária, inicialmente tomada, mediante a operação

$$(1.53-A) \quad \vec{O\bar{O}} = \frac{\sum_{i=1}^N e_i \vec{O\bar{O}}_i}{\sum_{i=1}^N e_i}$$

e diz-se centro de cargas (ou "baricentro" dada a analogia formal de (1.53-A) com a definição de baricentro ou centro de gravidade de um sistema mecânico). Assim, em resumo, para uma distribuição monopolar, o potencial num ponto P ,

sob a condição (1.48-A), é, a menos de um erro de 3ª ordem em a/r , o mesmo que seria criado por uma carga pontual de valor $\sum_{i=1}^N e_i$, colocada no centro de cargas da distribuição, \bar{O} :

$$V_P \approx k_0 \left(\sum_{i=1}^N e_i \right) / |\vec{O\bar{O}P}|$$

5-A.3.2 — Distribuições dipolar

Se $\sum_{i=1}^N e_i = 0$, mas $\sum_{i=1}^N e_i \vec{O\bar{O}}_i \neq 0$,

dizemos tratar-se de uma distribuição dipolar. A parte principal de V_P é agora o 2º termo do desenvolvimento (1.51-A): o potencial produzido em P , sob a condição (1.48-A) por uma distribuição dipolar é, a menos de um erro relativo de 1ª ordem em a/r , o mesmo que produziria em P um dipolo de valor $\vec{p} = \sum_{i=1}^N e_i \vec{O\bar{O}}_i$ colocado no ponto O .

Note-se que, para uma tal distribuição, o momento dipolar é obtido. $\vec{p} = \sum_{i=1}^N e_i \vec{r}_i$, o qual é independente da mudança da origem O , como pode facilmente mostrar-se. O momento dipolar eléctrico tem pois aqui um sentido físico intrínseco e caracteriza a distribuição dipolar.

Não havendo, para esta distribuição, centro de cargas, por ser $\sum_{i=1}^N e_i = 0$ (por (1.53-A), o centro de cargas da distribuição estaria no infinito), há no entanto lugar para definir, por um lado, centro de cargas positivas, e, por outro lado, centro de cargas negativas, adoptando a mesma definição (1.53-A) para cada um dos sub-conjuntos de cargas em que a distribuição se pode considerar repartida. Se designarmos por e_{m_α} ($\alpha = 1, \dots, N'$) as cargas negativas, tem-se para o centro de cargas negativas, A :

$$(1.54-A, I) \quad \vec{OA} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{N'} e_{m_\alpha} \vec{OO}_{m_\alpha}}{\sum_{\alpha=1}^{N'} e_{m_\alpha}} ;$$

se designarmos por e_{p_β} ($\beta = 1, \dots, N''$) (com $N' + N'' = N$) as cargas positivas, tem-se para o centro de cargas positivas, B :

$$(1.54-A, II) \quad \vec{OB} = \frac{\sum_{\beta=1}^{N''} e_{p_\beta} \vec{OO}_{p_\beta}}{\sum_{\beta=1}^{N''} e_{p_\beta}} .$$

Tem-se evidentemente $\sum_{\alpha=1}^{N'} e_{m_\alpha} + \sum_{\beta=1}^{N''} e_{p_\beta} = 0$

donde $\sum_{\alpha=1}^{N'} e_{m_\alpha} = -e$, $\sum_{\beta=1}^{N''} e_{p_\beta} = +e$, ($e > 0$).

Considerando agora o momento dipolar da distribuição, \vec{p} , podemos relacioná-lo com os dois centros de cargas definidos; tem-se

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N e_i \vec{OO}_i = \sum_{\beta=1}^{N''} e_{p_\beta} \vec{OO}_{p_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{N'} e_{m_\alpha} \vec{OO}_{m_\alpha} =$$

$$= \left(\sum_{\beta=1}^{N''} e_{p_{\beta}} \right) \vec{OB} + \left(\sum_{\alpha=1}^{N'} e_{m_{\alpha}} \right) \vec{OA} = e (\vec{OB} - \vec{OA}) = e \vec{AB}$$

Assim, o momento dipolar do sistema de cargas, \vec{p} , essa quantidade invariante que caracteriza uma distribuição com carga total nula ($\sum_{i=1}^N e_i = 0$), revela-se idêntica ao momento do dipolo que se constitui (mentalmente) por associação da carga total negativa ($\sum_{\alpha=1}^{N'} e_{m_{\alpha}} = -e$) concentrada e localizada no centro de cargas negativas, A, com a carga total positiva ($\sum_{\beta=1}^{N''} e_{p_{\beta}} = +e$) concentrada e localizada no centro das cargas positivas, B (v. Fig 25-A):

$$(1.55-A) \quad \vec{p} = e \vec{AB}$$

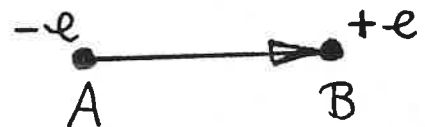


Fig 25-A

Como corolário deste teorema, pode afirmar-se que: a condição necessária e suficiente para que seja nulo o momento dipolar de um sistema de cargas com carga total nula (sistema neutro) é que o centro de cargas positivas coincida com o centro de cargas negativas. Em particular, se uma distribuição neutra tem centro de simetria, é nulo o seu momento dipolar.

[Dentro de certas aproximações, a distribuição das cargas eléctricas das diversas partículas constituintes de uma molécula (núcleos e electrões), pode assimular-se à distribuição estática (neutra) correspondente às posições médias dessas partículas. Nestas condições, moléculas cuja configuração de equilíbrio tem centro de simetria, como H_2 , O_2 , N_2 , CO_2 , CH_4 , CCl_4 , SF_6 , etc. não possuem momento dipolar (permanente). Moléculas cuja configuração de equilíbrio não tem centro de simetria, como ClH , CO , OH_2 , NH_3 , CH_2Cl , C_2H_5OH , etc., possuem em geral um momento dipolar (permanente) diferente de zero. Note-se que a acção de um campo eléctrico

exterior sobre uma molécula, considerada como globalmente fixa no espaço, provoca uma pequena perturbação (*) no estado da dinâmica interna do sistema das suas partículas constituintes; e isto traduz-se nomeadamente numa deformação das órbitas electrónicas. Assim, uma molécula imersa num campo eléctrico (que vamos supor uniforme à escala intramolecular) — apresentará uma distribuição das posições médias das suas partículas distinta da distribuição que apresenta quando isolada (na ausência de campo). Na medida em que é determinada pela presença de um campo axialmente simétrico, relativamente a uma orientação bem definida do espaço, essa nova distribuição estática das posições médias das partículas (continuando sempre a ser uma distribuição neutra) não possui certamente centro de simetria, mesmo quando a distribuição primitiva o possuía. Gera-se assim, portanto, um momento dipolar induzido (induzido pelo campo exterior).

Designadamente, no tocante às moléculas não-polares (de momento dipolar permanente nulo), o centro das cargas positivas (de soma q , vamos supor) localiza-se agora, na distribuição da molécula deformada, a uma distância l do centro das cargas negativas (de soma $-q$) e o momento dipolar actual iguala ql ($\vec{p}_{ind} \equiv ql$).

Nas moléculas polares (de momento dipolar permanente diferente de zero), consideradas globalmente fixas no espaço, a acção de um campo eléctrico exterior traduz-se numa modificação do momento dipolar pré-existente, resultando o momento dipolar actual da soma de um momento dipolar induzido com o momento dipolar permanente ($\vec{p}_{total} \equiv \vec{p}_0 + \vec{p}_{ind}$). O momento dipolar induzido depende essencialmente, por um lado, da estrutura da molécula e, por outro lado, depende do campo \vec{E} , da sua grandeza e da sua orientação relativamente aos eixos próprios da molécula (eixos de simetria).]

(*) Sendo os campos eléctricos intramoleculares da ordem de 10^{11} Volt/metro, compreende-se que os campos exteriores habituais não constituam senão uma pequena perturbação.

5-B.1. Accões exercidas sobre um dipolo eléctrico por um campo eléctrico exterior,

Consideremos um dipolo eléctrico que se acha imerso no campo eléctrico $\vec{E}(P)$ produzido por uma qualquer fonte exterior. Vamos admitir que o dipolo é uma distribuição intrinsecamente rígida — cargas imutáveis $[-e, \text{ em } A; +e, \text{ em } B]$, sendo $|\vec{AB}|$ uma distância invariável (infinitamente pequena). Além disso, não desejando sair do domínio da Electrostática, suporemos que, para os observadores de um referencial de inércia, o dipolo e a fonte do campo exterior se encontram fixos no espaço, naturalmente mediante a aplicação de ligações adequadas.

Nestas condições o conjunto de forças eléctricas geradas pela fonte exterior (ou produzidas por $\vec{E}(P)$) sobre o dipolo cinge-se a duas forças:

$$(1) \quad \vec{F}_A = -e \vec{E}(A) \quad ; \quad \vec{F}_B = +e \vec{E}(B)$$

aplicadas em A e B, respectivamente. Tratando-se o dipolo como um sistema invariável, as accões deste conjunto de forças podem reduzir-se à accão de uma força resultante (resultante do conjunto de forças), aplicada num ponto arbitrário O suposto rigidamente ligado ao sistema, combinada com a accão de um binário de forças cujo momento iguale o momento resultante do conjunto de forças em relação ao ponto O

Quanto à resultante, \vec{R} , ela tem sempre o mesmo valor qualquer que seja o ponto de aplicação O e calcula-se por:

$$(2) \quad \vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = -e \vec{E}(A) + e \vec{E}(B) = e d\vec{E}_{(\vec{AB})}$$

sendo $d\vec{E}_{(\vec{AB})}$ a variação do campo de A para B.

Como se trata de um campo contínuo, a sua variação entre dois pontos infinitamente próximos é infinitamente pequena; e pode então dar-se à expressão (2) outra forma:

$$(3) \quad \vec{R} = e (\vec{AB} \cdot \text{grad}) \vec{E} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E},$$

pois que sabemos acerca da possibilidade de aplicar o operador gradiente ao cálculo da variação infinitesimal de um campo vectorial para um deslocamento $d\vec{P}$ no domínio do campo (v. § 4.8, pág. 44).

Quanto ao momento do binário, $\vec{\Gamma}_O$, ele vai depender essencialmente, em geral, do ponto O em relação ao qual é definido o momento resultante do conjunto de forças; calcula-se por:

$$(4) \quad \begin{aligned} \vec{\Gamma}_O &= \vec{OA} \wedge \vec{F}_A + \vec{OB} \wedge \vec{F}_B = \\ &= -e \vec{OA} \wedge \vec{E}(A) + e \vec{OB} \wedge \vec{E}(B) = e (\vec{OB} - \vec{OA}) \wedge \vec{E}(A) + \vec{OB} \wedge \vec{R} \\ &= e \vec{AB} \wedge \vec{E}(A) + \vec{OB} \wedge \vec{R} = \underline{\vec{p} \wedge \vec{E}(A) + \vec{OB} \wedge \vec{R}} \end{aligned}$$

Estes resultados (3) e (4) admitem a seguinte interpretação física:

As acções do campo exterior $\vec{E}(P)$ sobre o dipolo tenderiam a produzir:

(a) por efeito da resultante \vec{R} , uma translação do dipolo rígido segundo a orientação e dependente

do módulo do vector polar (\vec{p} . grad) \vec{E} ;
 (b) por efeito do binário de momento $\vec{\Gamma}_0$,
uma rotação do dipolo rígido, em torno do eixo que
 passa por O segundo a orientação de $\vec{p} \wedge \vec{E}(A) + \vec{OB} \wedge \vec{R}$
 e dependente do módulo deste vector axial.

5.B.2 -

Caso particular do campo exterior uniforme

Os resultados discutidos acima simplificam-se
 notavelmente no caso de o campo produzido pela fonte
 exterior ser uniforme : $\vec{E}(P) = \vec{E}^0$, vector const.

Vem com efeito, imediatamente :

(i) em primeiro lugar, por (3) :

$$(5) \quad \vec{R}^0 = 0 \quad ;$$

(ii) e por consequência, e por (4) :

$$(6) \quad \vec{\Gamma}^0 = \vec{p} \wedge \vec{E}^0$$

sendo de notar desde logo que $\vec{\Gamma}^0$ deverá agora
 invariante a respeito do ponto em relação ao qual
 é calculado.

Neste caso particular, portanto, a accção
 do campo exterior traduz-se apenas por uma
 tendência a fazer rodar o dipolo rígido em torno
 de um eixo definido por $\vec{p} \wedge \vec{E}^0$, não se mani-
 festando qualquer tendência para um deslocamento
 translaccional. [Se o dipolo se encontrasse fixo
 ao referencial de inércia apenas por um ponto ao
 qual estivesse rigidamente ligado, C, então tal

rotação (instantânea) executar-se-ia em torno do eixo orientado segundo $\vec{p} \wedge \vec{E}^o$ e passando por C, com uma velocidade angular (instantânea) proporcional a $|\vec{p} \wedge \vec{E}^o|$.

5.B.3 -

Equilíbrio (electrostático) de um dipolo imerso num campo exterior uniforme. Discussão da estabilidade do equilíbrio.

No caso de campo exterior uniforme, como se infere do estudo precedente, as forças eléctricas actuantes sobre o dipolo conferem-lhe equilíbrio (electrostático), obviamente, quando se cumpre:

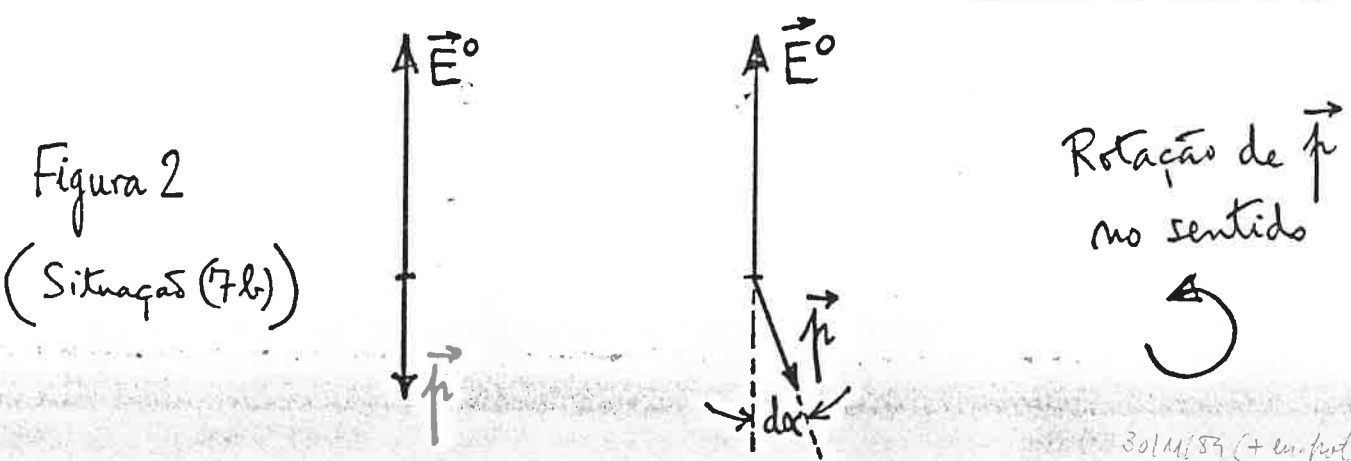
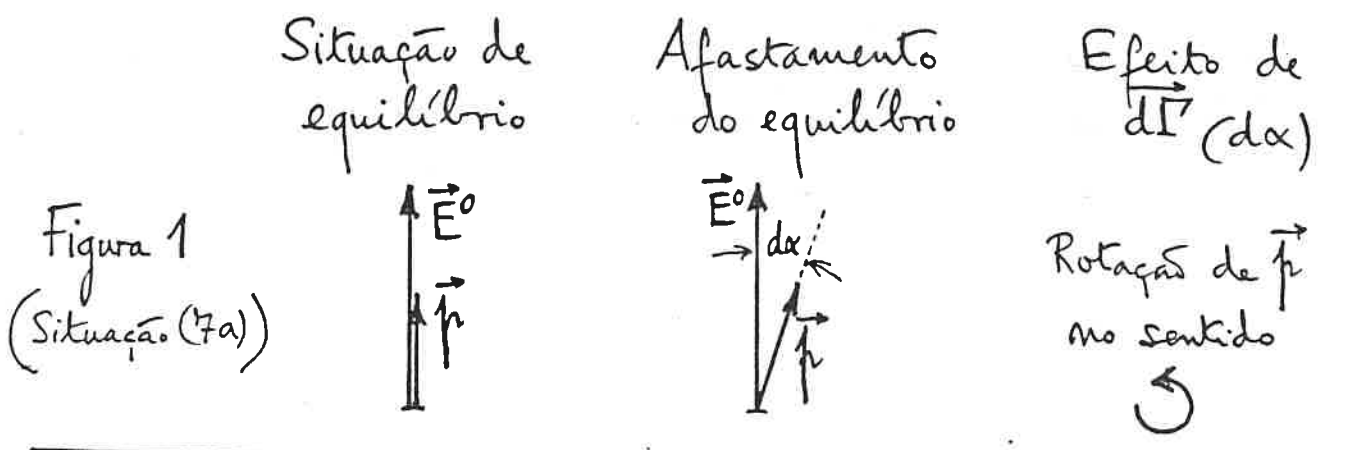
$$(7) \quad \vec{\Gamma}^o = \vec{p} \wedge \vec{E}^o = 0.$$

Reparemos que isto pode acontecer de duas maneiras distintas, a saber:

- (7a) \vec{p} com a mesma direcção e como mesmo sentido que \vec{E}^o (\vec{p} e \vec{E}^o "paralelos");
- (7b) \vec{p} com a mesma direcção mas com sentido contrário ao de \vec{E}^o (\vec{p} e \vec{E}^o dizem-se então "anti-paralelos").

A fim de discutir a natureza da estabilidade destas duas distintas situações de equilíbrio, convém admitir que o dipolo se acha submetido, por adequadas ligações mecânicas a poder tão-somente rodar em torno de um ponto C, fixo no referencial de inércia, e ao qual o dipolo esteja rigidamente ligado. Nestas condições, a natureza da estabilidade do equilíbrio pode analisar-se mediante

a idealização de um pequeno afastamento a partir da situação de equilíbrio — o que aqui se traduz obviamente por uma pequena rotação $d\alpha$ do dipolo. Então é fácil verificar, pelo exame da figura 1, que na situação (7a) — \vec{p} e \vec{E}^o "paralelos" — o afastamento $d\alpha$, a partir da situação de equilíbrio, gera um momento $d\vec{I}^c(d\alpha)$ estabilizador, i.e., que tende a fazer regressar \vec{p} à sua posição inicial. Esta situação é portanto de equilíbrio estável. Pelo contrário, na situação (7b) — \vec{p} e \vec{E}^o "anti-paralelos" — é fácil verificar, pelo exame da figura 2, que o afastamento $d\alpha$, a partir da situação de equilíbrio, gera um momento $d\vec{I}^c(d\alpha)$ que é desestabilizador, i.e., que tende a afastar ainda mais \vec{p} da sua posição inicial. Esta situação é portanto de equilíbrio instável.



5-C — Energia potencial de um dipolo eléctrico imerso num campo eléctrico (exterior)

1. O assunto da energia de um sistema electrostático trata-se mais adiante de modo sistemático (no § 10). Há todavia interesse em abordar desde já o problema indicado em epígrafe, pela sua conexão com o estudo precedente (§ 5-B).

Comecemos por fazer notar que o significado físico da função potencial (sob a condição $V_{\infty} = 0$), estabelecido no § 2.2., pág. 21, para o campo produzido por uma carga pontual — é extensível de modo geral a qualquer fonte electrostática no vácuo. Daí resulta que eV_Q representa o trabalho realizado pela força eléctrica, $\vec{F}_{\text{elect.}}$, no transporte de uma carga e , submetida ao campo produzido por uma dada fonte, desde o ponto Q até ao infinito, por qualquer percurso (designando por V a função potencial, com $V_{\infty} = 0$, correspondente a esse campo). Segue-se que a mesma quantidade eV_Q representa também o trabalho realizado pela força actuante, $\vec{F}_{\text{obser.}}$, de um observador que transporte a carga e desde o infinito até ao ponto Q , por qualquer percurso, nas condições idealizadas no § 2.4, pág. 23. — Tem-se, com efeito, em cada ponto do percurso: $\vec{F}_{\text{elect.}} = -\vec{F}_{\text{obser.}}$ — Ora este trabalho (de $\vec{F}_{\text{obser.}}$) pode encarar-se como o trabalho dispendido pelo observador para estabelecer o sistema (de uma carga e imersa num campo) e deve em consequência admitido o princípio de conservação da energia, permanecer no sistema como uma energia potencial (enquanto não se produzir qualquer alteração da situação electrostática criada). Em suma: A energia potencial da carga (pontual) e imersa

no campo de uma dada fonte (ao qual corresponde a função potencial V , com $V_{\infty} = 0$) é dada por eV_Q , sendo Q o ponto em que foi colocada a carga.

Estas considerações, até aqui referentes a uma carga (pontual) única, são extensíveis a um sistema composto de cargas imerso num campo (tal como o dipolo de que se ocupa o § 5-B), desde que tenhamos expressamente de lado as interações mútuas das cargas constituintes do sistema e não entremos portanto em linha de conta com a energia correspondente a estas interações.

A energia potencial de um sistema composto imerso num campo obter-se-á então aproveitando simplesmente a aditividade das energias potenciais das diversas cargas constituintes, imersas no campo — supondo que todas elas são transportadas, cada uma independentemente das outras, desde o infinito até às respectivas posições actuais. Continuaremos a admitir que este transporte se executa nas condições idealizadas no § 2.4, pág. 23. Para pôr de parte as interações mútuas, pode por exemplo pensar-se que se transporta o sistema mantendo sempre as cargas constituintes rigidamente, na configuração mútua que assumem actualmente.

2. Consideremos então um dipolo eléctrico rígido [$-e$, em A; $+e$, em B] e suponhamos que as duas cargas, sempre com a sua configuração mútua rigidamente mantida, são transportadas desde o infinito até às suas posições actuais, por qualquer percurso, vindo o dipolo a ficar imerso num dado campo eléctrico $\vec{E}(P)$ produzido por uma fonte exterior. Admitamos que este transporte se executa

nas condições idealizadas no § 2.4, pág. 23.

Seja $V(P)$ a função potencial (tal que $V_{\infty} = 0$) correspondente ao campo $\vec{E}(P)$. Como ficou justificado atrás, a energia potencial do dipolo no campo, W , acha-se mediante a expressão

$$(5-C.1) \quad W = -eV_A + eV_B$$

que se transforma sucessivamente em:

$$W = e(V_B - V_A) = e \int_A^B d\vec{P} \cdot \text{grad} V \approx e \vec{AB} \cdot \text{grad}_A V$$

por ser V função contínua e \vec{AB} um deslocamento que pode tomar-se como infinitamente pequeno. Resulta por fim

$$(5-C.2) \quad W = -\vec{p} \cdot \vec{E}_A$$

atendendo a que $\vec{E}_A = -\text{grad}_A V$ e utilizando a definição de momento do dipolo, $\vec{p} = e \vec{AB}$.

3. A expressão encontrada é susceptível de uma discussão interessante. Ela diz-nos que W varia com a disposição relativa dos vectores momento do dipolo, \vec{p} , e campo \vec{E}_A , sendo de assinalar que atinge um valor mínimo para \vec{p} e \vec{E}_A paralelos (mesma direcção e mesmo sentido) e um valor máximo para \vec{p} e \vec{E}_A anti-paralelos (mesma direcção e sentidos contrários). Ora, é bem sabido que a um mínimo da energia potencial de um sistema corresponde uma situação de equilíbrio estável e a um máximo, uma situação de equilíbrio instável. Há perfeita coerência entre estas conclusões e as que foram obtidas no § 5-B.3, por outra via.

6. CAMPO PRODUZIDO POR UMA DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA EM VOLUME

6.1 — Densidade volúmica de carga (eléctrica)

Continuando a tratar de distribuições idealizadas de cargas eléctricas, no vácuo, abordemos agora as distribuições contínuas em volume. Suponhamos que uma certa quantidade de electricidade e se encontra disseminada por todo o volume v de uma dada região do espaço, de tal modo que cada elemento de volume infinitesimal não contém mais que uma parcela de e infinitamente pequena, pelo menos da mesma ordem. Por outras palavras: considerando em torno de um qualquer ponto Q dessa região o elemento de volume circunvizinho genérico, Δv , e sendo Δe a carga contida em Δv , admitamos que existe sempre, e é finito, o limite

$$(1.52) \quad \rho_Q = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta e}{\Delta v}$$

supondo que Δv , ao tender para zero, se cerra sobre o ponto Q . Dir-nos-emos, nestas condições, em presença de uma distribuição contínua de carga eléctrica no volume v , para a qual se pode desde logo definir, em cada ponto Q (de v), a densidade de carga por unidade de volume ou densidade volúmica de carga, como a grandeza ρ_Q dada por (1.52). Quando Q bate todo o volume v obtém-se, de (1.52), uma função de ponto $\rho(Q)$, que admitiremos unívoca, finita e contínua em todo o ponto interior de v (podendo haver descontinuidade quando se atravessa a superfície limítrofe de v). Esta função $\rho(Q)$ caracteriza de modo completo a distribuição contínua de carga eléctrica em volume.

Suposta operada uma decomposição do volume v em elementos infinitamente pequenos, pode passar-se a encarar a distribuição contínua de carga eléctrica nesse volume como uma distribuição compacta de um número infinito de cargas pontuais infinitamente pe-

quenas dadas pela relação genérica

$$(1.53) \quad de = \rho(Q) dv,$$

que decorre de (1.52), sendo de a carga elementar (infinitamente pequena) contida no elemento de volume dv (infinitamente pequeno) circunvizinho ao ponto genérico Q . A carga total da distribuição vem dada pela soma (integração) das cargas elementares correspondentes à decomposição operada no volume v :

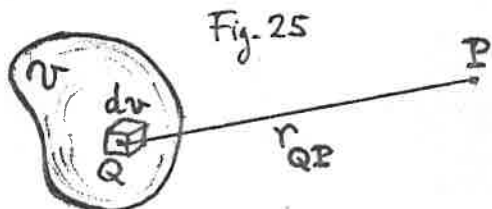
$$(1.53') \quad e = \int_v de = \int_v \rho(Q) dv.$$

Baseando-nos nesta assimilação, podemos agora aplicar às distribuições contínuas em volume os resultados obtidos, no estudo precedente, para o campo produzido pelas distribuições de cargas pontuais.

6.2 — Campo eléctrico e função potencial

Assim, por conveniente adaptação da relação (1.26') do § 3, obtém-se para o campo $\vec{E}(P)$, produzido no ponto P por uma distribuição contínua no volume v , com densidade $\rho(Q)$, a expressão (v. Figura 25):

$$(1.54) \quad \vec{E}(P) = k_0 \int_v \frac{\rho(Q)}{r_{QP}^2} \text{vers } \vec{QP} dv$$



A validade desta expressão do campo não suscita qualquer dúvida para o caso de P ser exterior ao volume da distribuição.

Mas no caso de ser P interior a v (coincidente com um determinado Q') deve-se resolver a dificuldade que surge pelo facto de haver um elemento de volume potenciante dv' , circunvizinho de $Q' \equiv P$, cuja contribuição é aparentemente indeterminada visto ser nula a distância $r_{Q'P}$. Esta aparente indeterminação levanta-se no entanto considerando que r_{QP} , quando $Q \rightarrow Q'$, é um infinitamente pequeno da ordem de uma di-

mensão linear, δl , do elemento de volume dv' , enquanto o próprio dv' é um infinitamente pequeno da ordem do cubo de uma sua dimensão linear, $(\delta l)^3$; e, em consequência disto, a contribuição do elemento potenciante dv' não cria obstáculo ao cálculo do integral. Em suma, a expressão (1.54) é válida quer para pontos exteriores quer para pontos interiores ao volume v . Repare-se que também

→ aqui é admissível a reformulação

$$(1.55-a) \quad \vec{E}(P) = -\text{grad}_P V$$

com uma função potencial $V(P)$ dada por

$$(1.55-b) \quad V(P) = k_0 \int_v \frac{\rho(Q)}{r_{QP}} dv$$

Mostra-se com efeito que este algoritmo reconstitui (1.54) e é válido quer para pontos exteriores, quer para pontos interiores (*). Note-se que, para P interior, a contribuição do elemento potenciante dv' , circunvizinho de $Q' \equiv P$, para o integral (1.55-b), aparentemente indeterminada, é na verdade desprezável (como acontece com (1.54)).

→ Pode mostrar-se que o campo produzido por uma distribuição volúmica, $\vec{E}(P)$, é contínuo em toda a parte (Ver, mais adiante, § 7.4). Por outro lado, sendo $\vec{E}(P)$ finito em cada ponto, $V(P)$ é uma função contínua em todo o espaço. Assim, nomeadamente quando se atravessa a superfície limítrofe do volume carregado, $V(P)$ e as suas primeiras derivadas ($\vec{E}(P)$) são funções contínuas, muito embora aí possa haver descontinuidade na densidade volúmica da distribuição, $\rho(P)$. Adiante veremos que $\rho(P)$ se liga com efeito, muito directamente, não a $V(P)$ ou às suas primeiras derivadas mas sim a uma composição de 2^{as} derivadas de $V(P)$ (Ver § 6.4.2 : $\text{lap}_P V = -\rho(P)/\epsilon_0$).

(*) Cf. A. da Silveira, Teoria da Electricidade - 1^a Parte, 21-27.
E. Durand, Electrostatique - I (1964), 313-317.

Deve observar-se que quer o campo $\vec{E}(\mathcal{P})$, quer o potencial dado por (1.55-b) tendem para zero quando o ponto potenciado \mathcal{P} se desloca para infinito, isto é, se afasta indefinidamente da distribuição de carga (semelhantemente ao que se passa com outras distribuições já estudadas). Tomando um ponto de referência, O , (fixo) no interior ou próximo da distribuição e designando por R a distância \overline{OP} que dele faz o observador (móvel), é importante salientar que: a) $V(\mathcal{P})$ tende para zero q̄ $R \rightarrow \infty$, constituindo um infinitamente pequeno da mesma ordem que $1/R$ (pelo menos) q̄ $R \rightarrow \infty$; diz-se que $V(\mathcal{P})$ é regular no infinito, com $1/R$. b) $\vec{E}(\mathcal{P})$ tende para zero q̄ $R \rightarrow \infty$, constituindo qualquer das suas componentes um infinitamente pequeno da mesma ordem que $1/R^2$ (pelo menos); diz-se que $\vec{E}(\mathcal{P})$ é um campo regular no infinito, com $1/R^2$. Com efeito, é fácil comprovar, a partir respectivamente de (1.55-b) e de (1.54), que $\lim_{R \rightarrow \infty} [R V(\mathcal{P})]$ e $\lim_{R \rightarrow \infty} [R^2 \vec{E}(\mathcal{P})]$ são ambos finitos, podendo anular-se em casos especiais.

6.3 — Propriedades integrais do campo

Baseando-nos ainda na mesma assimilação de toda a distribuição contínua em volume a uma distribuição compacta de cargas pontuais, façamos agora a transposição das duas propriedades essenciais do campo eléctrico analisadas primeiro nos §§ 2.4 e 2.5 para o caso de uma carga pontual única e generalizadas depois no § 3 para uma distribuição de cargas pontuais.

(i) A propriedade (1.27) transcreve-se como formalmente idêntica: o campo $\vec{E}(\mathcal{P})$ dado por (1.54) cumpre a condição

$$(1.56) \quad \oint_{[c]} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

qualquer que seja a curva fechada $[c]$. Esta equação traduz o

princípio de conservação da energia. Refere-se que, de acordo com o § 4.3, a propriedade (1.56) é equivalente à expressão (1.55-a).

(ii) No tocante ao teorema de Gauss, podemos adoptar a transcrição directa de (1.28') pois é lícito afirmar que no caso de uma distribuição contínua em volume, não há cargas assentes sobre qualquer superfície ainda mesmo que a superfície em causa corte a região (o volume) onde se localiza a distribuição (onde $\rho(Q) \neq 0$). (Com efeito, o integral de $\rho(Q)$ ao longo de um domínio de medida volumétrica nula é zero). Assim, para uma qualquer superfície fechada S , envolvendo um volume ω , escreve-se a partir de (1.28') :

$$(1.57) \quad \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\omega} \rho(M) \, d\omega$$

sendo M o ponto corrente no volume ω e $d\omega$ o elemento de volume que lhe é circunvizinho. Para o cálculo do integral do 2º membro (que representa a carga da distribuição que fica interior a S , de acordo com (1.28'))

só conta efectivamente o volume da intersecção de ω , volume carregado, com ω , volume envolvido por S .

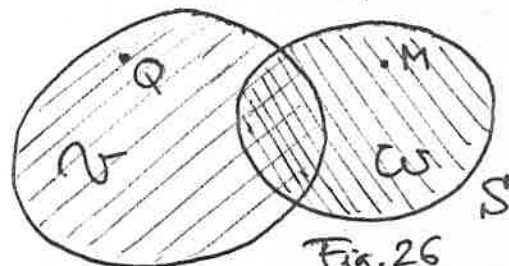


Fig. 26

Estas duas propriedades (i) e (ii), integrais (globais), porque são válidas, respectivamente para qualquer curva fechada $[c]$ em (1.56) e para qualquer superfície fechada S em (1.57), vão agora poder ser utilizadas para uma análise local do campo eléctrico, que se revela de um grande interesse e conduz à versão diferencial de (1.56) e (1.57).

6.4 — Formulação diferencial (local) das propriedades do campo produzido por uma distribuição volumétrica.

6.4.1 — Noção de divergência. A divergência de $\vec{E}(P)$. Equação de Poisson.

Reportemo-nos a um ponto N qualquer do espaço, exterior ou interior à distribuição volumica considerada. Começemos pela propriedade (ii) do § anterior. Consideremos uma superfície fechada S , muito pequena, genérica e compreendendo sempre o ponto N no seu interior; suponhamos que é Δv o volume envolvido por S e Δe a carga da distribuição volumica que eventualmente nele esteja contida. Então, pelo teorema de Gauss, eq. (1.57), vem:
$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \Delta e.$$

Dividamos ambos os membros por Δv e suponhamos depois que S se contrai sobre o ponto N (tendendo Δv ao mesmo tempo para zero). No limite, e por aplicação de (1.52), vem:

$$(1.58) \quad \lim_{\substack{S \rightarrow N \\ (\Delta v \rightarrow 0)}} \frac{\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS}{\Delta v} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_N$$

(da existência de limite no 2.º membro, infere-se que também existe o limite do 1.º membro). Relaciona-se assim genericamente o valor da densidade volumica no ponto N — grandeza caracterizadamente local — com uma análise local do campo eléctrico traduzida pelo limite explicitado no 1.º membro. Ora este limite é, por definição, a divergência do campo vectorial \vec{E} no ponto N , designada por $\text{div}_N \vec{E}$:

$$(1.59) \quad \text{div}_N \vec{E} = \lim_{\substack{S \rightarrow N \\ (\Delta v \rightarrow 0)}} \frac{\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS}{\Delta v}$$

com o significado físico que imediatamente transparece: $\text{div}_N \vec{E}$ é um escalar que dá o fluxo de \vec{E} que sai através de uma superfície fechada infinitamente pequena S , encerrando N , por unidade do volume envolvido por S . Introduce-se assim um operador que, actuando sobre um campo vectorial $\vec{E}(P)$, origina um campo escalar $\text{div}_P \vec{E}$; veremos tratar-se de um operador

diferencial, dado em representação cartesiana por (*)

$$(1.60) \quad \operatorname{div}_{\mathbf{P}} \vec{\mathbf{E}} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)_{\mathbf{P}}$$

Combinando (1.58) com (1.59) obtêm-se

$$(1.61) \quad \operatorname{div}_{\mathbf{N}} \vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{N})$$

Assim, no caso presente, o campo escalar $\operatorname{div}_{\mathbf{N}} \vec{\mathbf{E}}$, como uma consequência do teorema de Gauss (propriedade (ii)), identifica-se localmente com a densidade volumica de carga da distribuição, a parte o factor $1/\epsilon_0$. A equação diferencial (1.61) é designada por equação de Poisson. Ela constitui a tradução local do teorema de Gauss para as distribuições em volume, ou, se quisermos, a versão diferencial de (1.57). Note-se que nos pontos em que $\rho(\mathbf{P}) = 0$ (em particular, no espaço livre de cargas) temos $\operatorname{div}_{\mathbf{P}} \vec{\mathbf{E}} = 0$; e observe-se também que a função $\operatorname{div}_{\mathbf{P}} \vec{\mathbf{E}}$ é descontínua, em geral, ao atravessar-se a superfície limítrofe do volume carregado.

6.4.2 — Noção de rotacional. O rotacional de $\vec{\mathbf{E}}(\mathbf{P})$.

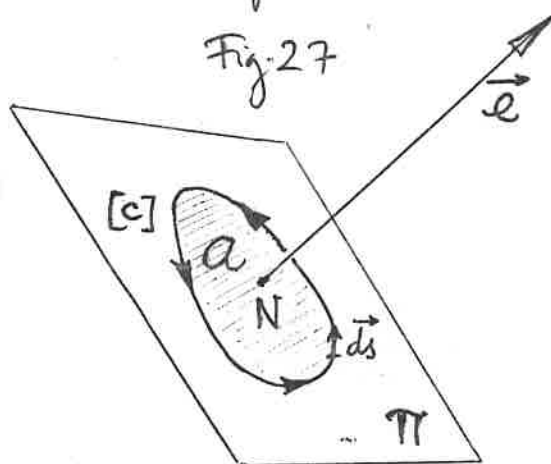
Carácter irrotacional do campo.

Reportando-nos ao mesmo ponto \mathbf{N} , passemos agora à propriedade (i) do § anterior. As operações de circulação permitem fazer um outro tipo, mais complexo, de análise local de um campo vectorial (**). Abstraindo por enquanto do nosso problema específico,

(**) A complexidade acrescida resulta do facto de que, diferentemente do que se passa com as superfícies fechadas S , às curvas fechadas $[c]$ vai ser possível atribuir diferentes orientações no espaço, obtendo-se assim resultados diferenciados, consoante a orientação, para a análise a que conduzem as circulações ao longo da, curvas $[c]$.

(*) Ver Apêndice : Propriedades do operador divergência.

suponhamos dado, de maneira geral, um campo vectorial $\vec{G}(P)$. Tomemos um eixo genérico passando por N , seja \vec{e} o vector unitário da sua orientação e designe Π o plano normal a \vec{e} e passando por N . Assente neste plano Π , consideremos genericamente uma curva fechada $[c]$, ^(muito pequena,) compreendendo sempre N no seu interior; seja a a área plana por ela limitada. (V. Figura 27). Calculemos a circulação de \vec{G} ao longo



de $[c]$ no sentido directo relativamente à orientação do eixo \vec{e} (*): $\oint_{[c]} \vec{G} \cdot d\vec{s}$. Suponhamos agora que a curva $[c]$, sempre no plano Π , se contrai sobre o ponto N , ao mesmo tempo que a tende para zero. A circulação $\oint_{[c]} \vec{G} \cdot d\vec{s}$, se \vec{G} é finito, como supomos, também tende

para zero e pode acontecer que constitua um infinitamente pequeno da mesma ordem que a . Supondo que assim é, existe o limite

$$(1.62) \quad \Gamma(\vec{e}) = \left\{ \lim_{\substack{[c] \rightarrow N \\ (a \rightarrow 0)}} \frac{\oint_{[c]} \vec{G} \cdot d\vec{s}}{a} \right\} \vec{e}$$

dependente da orientação das curvas $[c]$ no espaço, do plano Π , portanto de \vec{e} . E vamos admitir que se pode obter $\Gamma(\vec{e})$ desta maneira, genericamente (i. e. para qualquer eixo \vec{e}). Notando que $\Gamma(-\vec{e}) = -\Gamma(\vec{e})$, o conjunto dos valores $\Gamma(\vec{e})$ tem um sub-conjunto de valores positivos e, admitindo má-

(*) O sentido directo relativamente à orientação do eixo \vec{e} é o sentido de rotação que deve imprimir-se a um saca-rolhas, dirigido segundo o eixo, para ter progressão no sentido do eixo. É a regra do saca-rolhas, ou regra de Stokes.

ximo, ele é positivo. Seja $\vec{\sigma}$ a orientação para a qual o máximo é atingido: $\text{Máx} (\Gamma(\vec{e})) = \Gamma(\vec{\sigma})$. Para muitos tipos de campos vectoriais $\vec{G}(P)$ este máximo existe e é finito para cada ponto N , em geral; e, quando não é nulo, é atingido para uma única orientação $\vec{\sigma}$. Somos assim conduzidos a resumir os resultados desta análise mediante a introdução de um vector, o rotacional do campo vectorial \vec{G} no ponto N , designado por $\text{rot}_N \vec{G}$ e que se define como: $\text{rot}_N \vec{G} \equiv \Gamma(\vec{\sigma}) \vec{\sigma}$; ou seja:

$$(1.63) \quad \text{rot}_N \vec{G} = \text{Máx} (\Gamma(\vec{e})) \vec{\sigma} \quad (*)$$

com $\Gamma(\vec{e})$ dado genericamente por (1.62) e $\vec{\sigma}$ a orientação atrás definida. Pode atribuir-se-lhe o seguinte significado físico: $\text{rot}_N \vec{G}$ é um vector cujo módulo representa a máxima circulação por unidade de área que pode detectar um observador colocado em N , utilizando curvas fechadas infinitamente pequenas $[C]$, que encerram N e assentam sobre planos passando por N ; cuja direcção é perpendicular ao plano onde se atinge a referida máxima circulação por unidade de área; e cujo sentido se encontra relacionado pela regra de Stokes com o sentido de circulação correspondente à obtenção daquele valor máximo. Introduz-se assim um operador que, actuando sobre um campo vectorial $\vec{G}(P)$, origina um outro campo vectorial $\text{rot}_N \vec{G}$; veremos tratar-se de um operador diferencial, dado em repre-

(*) Deve notar-se que esta definição implica que o vector $\text{rot}_N \vec{G}$ resulta um vector axial (subentendido que \vec{G} é um vector polar): pressupõe a fixação prévia de uma axialidade do espaço ao estabelecer o sentido das circulações como o sentido directo relativamente ao eixo \vec{e} .

sentação cartesiana por (*)

$$(1.64) \quad \text{rot}_{\mathbf{P}} \vec{G} = \left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

→ Voltando agora ao nosso problema específico, vê-se facilmente que a propriedade (i) do § 6.3 — eq. (1.56), para qualquer curva fechada [c] — conduz necessariamente a

$$(1.65) \quad \text{rot}_{\mathbf{N}} \vec{E} = 0 \quad :$$

o rotacional de $\vec{E}(\mathbf{P})$ é nulo em todos os pontos do espaço (extérior ou interior à distribuição). A equação diferencial (1.65) constitui a tradução local do princípio de conservação da energia para as distribuições em volume, ou, se quisermos, a versão diferencial de (1.56). Note-se todavia que esta equação (1.65) é universal na Electrostatica, porque sabemos que em todas as situações e para todos os tipos de distribuições se cumpre sempre a equação integral (1.56), onde quer que o campo $\vec{E}(\mathbf{P})$ seja bem definido, e com qualquer curva fechada [c]. Um campo com rotacional nulo em todos os pontos do espaço diz-se um campo irrotacional. O campo eléctrico $\vec{E}(\mathbf{P})$ tem pois para as distribuições em volume um carácter irrotacional. E esta propriedade é universal na Electrostatica, se se excluírem os pontos de singularidade em que o campo não é definido.

Repare-se por fim que a eq. (1.65) pode ser vista também como uma consequência de (1.55-a), que de resto já foi observado ser equivalente a (1.56) (Ver § 6.3, (i)). Assim, $\vec{E} = -\text{grad} V$ implica $\text{rot} \vec{E} = 0$; pode mostrar-se que, reciprocamente, se $\text{rot}_{\mathbf{P}} \vec{E} = 0$ para todo o \mathbf{P} , então \vec{E} pode exprimir-se como gradiente de algum escalar.

(*) Ver Apêndice : Propriedades do operador rotacional.

6.4.3 — Equação diferencial para $V(\mathbf{P})$. Operador Laplaciano.

Sendo $\vec{E} = -\text{grad}_{\mathbf{P}} V$, isso leva a transcrever a eq. (1.61) como $(\text{div grad})_{\mathbf{P}} V = -1/\epsilon_0 \rho(\mathbf{P})$. Ora, a operação composta $(\text{div grad})_{\mathbf{P}} V$ constitui o laplaciano do escalar V no ponto \mathbf{P} , operador diferencial de 2ª ordem, que se designa por $\text{lap}_{\mathbf{P}} V$ e cuja representação cartesiana se exprime por

$$(1.66) \quad \text{lap}_{\mathbf{P}} V = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_{\mathbf{P}}$$

como resulta de combinar (1.60) com (1.35). A equação de Poisson, (1.61), assume pois a nova forma

$$(1.67) \quad \text{lap}_{\mathbf{P}} V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{P})$$

Esta é a equação diferencial a que obedece a função potencial $V(\mathbf{P})$.
 Comentários: (a) Conhecida a densidade $\rho(\mathbf{P})$ de uma dada distribuição volumétrica de carga, a resolução (integração) da eq. (1.67) permite obter a função potencial $V(\mathbf{P})$ como a solução física adequada, de entre as soluções matemáticas possíveis. Sabemos já que a expressão geral (1.55-b) traduz a resposta correcta a este problema. Mas a resolução (integração) de (1.67) constitui um método de determinar $V(\mathbf{P})$, alternativo do que se consubstancia no cálculo do integral (1.55-b). Consoante as características da distribuição dada, assim se recorre a um ou outro método. (b) Em sentido inverso, se se conhece $V(\mathbf{P})$, então, como é óbvio, a equação (1.67) fornece directamente a densidade $\rho(\mathbf{P})$, suposta desconhecida ou incompletamente conhecida.

Refere-se que se $\rho(\mathbf{P})$ apresenta descontinuidade quando se atravessa a superfície limítrofe do volume carregado, e' ao nível de $\text{lap}_{\mathbf{P}} V$ que ela se manifesta: também há descontinuidade pelo menos numa das 2ªs derivadas (não-cruzadas) de $V(\mathbf{P})$ (Confronte com as observações do § 6.2). Note-se enfim que nas regiões em que $\rho=0$ — espaço livre de cargas — cumpre-se $\text{lap} V = 0$ (Equação de Laplace).

6.4.4. — As "fontes" do campo. Referência ao teorema de Helmholtz (dos campos vectoriais)

Reunindo as duas equações diferenciais encontradas nos §§ 6.4.1 e 6.4.2, conclui-se que o campo de uma distribuição em volume de densidade $\rho(Q)$ deve satisfazer ao sistema

$$(1.68) \quad \begin{cases} \text{rot}_{\vec{P}} \vec{E} = 0 \\ \text{div}_{\vec{P}} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(P) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{em todo } P \\ \text{do espaço} \end{array} \right)$$

Para além do significado físico de cada uma das duas equações de per si, a importância deste sistema decorre ainda do facto de que as duas propriedades do campo aí postas, em evidência — $\text{rot}_{\vec{P}} \vec{E}$ e $\text{div}_{\vec{P}} \vec{E}$ — quando conhecidas em todo o ponto do espaço, como é aqui o caso, fornecem no seu conjunto uma informação completa em ordem à determinação do campo \vec{E} em qualquer ponto, sob a condição, efectivamente satisfeita, de ser \vec{E} regular no infinito, com $1/R^2$. A reconstituição do campo à custa do conhecimento dessas duas propriedades, como "fontes" do campo, é assegurada por um corolário do Teorema de Helmholtz (dos campos vectoriais), como veremos. ^(*)

Nessa perspectiva, o campo \vec{E} de que nos ocupamos aqui, por (1.68), não tem "fontes" de rotacional ou vórtices e tem "fontes" de divergência coincidentes (à parte o factor $\frac{1}{\epsilon_0}$) com a densidade da distribuição volumínica de carga, $\rho(Q)$.

7/12/89

7. CAMPO PRODUZIDO POR UMA DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA EM SUPERFÍCIE

7.1 — Densidade superficial de carga (eléctrica)

Abordemos agora as distribuições contínuas em superfície.

(*) Ver Apêndice : Teorema de Helmholtz (dos campos vectoriais)

Suponhamos que uma certa quantidade de electricidade e se encontra espraçada por toda uma superfície S , de tal modo que cada elemento de superfície, de área infinitesimal, não contém mais que uma parcela de e infinitamente pequena da mesma ordem. Por outras palavras: considerando em torno de um qualquer ponto N sobre S o elemento de superfície, ΔS , desse mesmo domínio e genericamente circunvizinho de N , e sendo Δe a carga contida em ΔS , vamos admitir que existe sempre, e é finito, o limite

$$(1.69) \quad \sigma_N = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta e}{\Delta S}$$

supondo que o elemento de superfície ΔS , cuja área tende para zero, se contrai sobre o ponto N . Dir-nos-emos, nestas condições, em presença de uma distribuição contínua de carga eléctrica na superfície S , para a qual se pode desde logo definir, em cada ponto N (de S), a densidade de carga por unidade de superfície (ou de área) ou densidade superficial de carga, como a grandeza σ_N dada por (1.69). Quando N bate toda a superfície carregada S , obtém-se, a partir de (1.69), uma função de ponto $\sigma(N)$ que admitiremos única, finita e contínua em todo o ponto sobre S (podendo haver descontinuidade quando se atravessa a curva limite de S). Esta função $\sigma(N)$ caracteriza de modo completo a distribuição contínua de carga eléctrica em superfície.

7.2 — A distribuição contínua em superfície como degenerescência de uma distribuição volumica.

Consideremos uma distribuição contínua em volume definida numa região em camada (região limitada por duas superfícies de forma quaseidêntica S e S' , de grandes dimensões face à espessura, quase uniforme, que as separa) — v. Figura 28; e dividamos a camada em cilindros do tipo do representado: de base ΔS , com geratriz normal

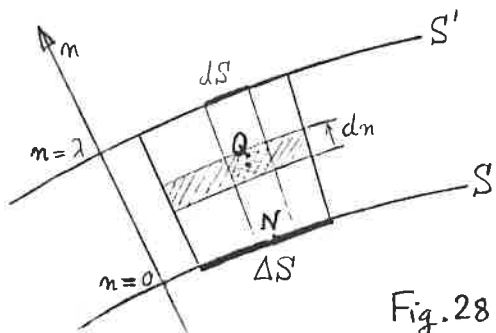


Fig. 28

a S e com volume $\Delta v = \lambda \Delta S$. Se fôr $\rho(Q)$ a densidade volúmica da distribuição, a carga contida em Δv valerá

$$(1.70) \quad \Delta e = \int_{\Delta v} \rho(Q) dv = \int_{\Delta S} \int_0^\lambda \rho(Q) dn dS$$

atendendo à decomposição em elementos de volume representada na Figura. Suponhamos agora que a camada se comprime progressivamente na direcção normal, aproximando-se S' de S até à coincidência (tendendo λ para zero, no cilindro genérico), mas sob a condição que a carga Δe contida em cada cilindro se conserve constante — para o que deveremos admitir que, neste processo, $\rho \rightarrow \infty$. No limite de tal evolução, a camada devém uma superfície e a distribuição de carga torna-se uma distribuição superficial, resultante da condensação da carga da distribuição volúmica original. Realizando, nessas condições, a passagem ao limite sobre a eq. (1.70), obtém-se

$$\Delta e = \int_{\Delta S} \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty}} \left[\int_0^\lambda \rho(Q) dn \right] dS$$

E, porque Δe representa agora a carga contida em ΔS , a definição (1.69) conduz a

$$(1.71) \quad \sigma(N) = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty}} \left[\int_0^\lambda \rho(Q) dn \right]$$

Esta fórmula traduz a degenerescência de uma distribuição volúmica para uma distribuição superficial e pode admitir-se que ela fornece um instrumento de projecção, sobre o segundo domínio, das propriedades válidas no primeiro. Permite em todo o caso assegurar que uma distribuição superficial de carga seja encarada, quando isso fôr conveniente, como uma distribuição no volume de uma camada de espessura muito pequena com uma densidade volúmica muito grande; assim se dissipam, no tratamento de algumas grandezas do campo, as descontinuidades que surgem sobre a superfície carregada, sendo substituídas por variações bruscas mas contínuas.

7.3 — Campo e potencial num ponto exterior à superfície.

Analogamente ao que foi feito para as distribuições em volume, vamos tentar aplicar às distribuições contínuas em superfície os resultados obtidos para o campo produzido por distribuições de cargas pontuais. Baseamo-nos para isso em que se pode passar a encarar uma distribuição contínua em superfície como uma distribuição compacta de um número infinito de cargas pontuais infinitamente pequenas dadas pela relação genérica

$$(1.72) \quad de = \sigma(N) dS$$

que decorre de (1.59), quando se supõe operada uma decomposição da superfície S em elementos de superfície infinitamente pequenos dS' , sendo de a carga elementar (infinitamente pequena) contida em dS' . (*)

Assim, para um ponto P exterior à distribuição, por conveniente adaptação da relação (1.26') do § 3, obtém-se para o campo $\vec{E}(P)$ produzido por uma distribuição contínua na superfície S , com densidade $\sigma(N)$, a expressão

$$(1.73) \quad \vec{E}(P) = k_0 \int_S \frac{\sigma(N)}{r_{NP}^2} \text{vers } \vec{NP} dS \quad \left(\begin{array}{c} P \\ \text{exterior} \end{array} \right)$$

e a validade desta expressão não suscita qualquer dúvida. Pode mostrar-se que este campo é contínuo enquanto o ponto P se mantém exterior à superfície carregada (ver § 7.5). Repare-se agora que a expressão (1.73) pode ser reformulada segundo

$$(1.74-a) \quad \vec{E}(P) = -\text{grad}_P V$$

e mediante a adopção de uma função potencial $V(P)$ dada por

$$(1.74-b) \quad V(P) = k_0 \int_S \frac{\sigma(N)}{r_{NP}} dS$$

como é fácil comprovar, visto que, sendo P exterior ao domínio S ,

(*) A carga total da distribuição virá dada pela soma (integração):

$$(1.72') \quad e = \int_S de = \int_S \sigma(N) dS$$

as operações grad_P e $\int_S \dots dS$ são permutáveis (a função integranda é finita e contínua no domínio S). Note-se que sendo o campo finito fica assegurado que $V(P)$ é função contínua para pontos exteriores.

Entretanto, para um ponto P sobre a distribuição superficial, recorrendo a uma análise do mesmo tipo que a do § 6.2 para as distribuições contínuas em volume, constata-se desta vez que não é viável estender a essa situação do ponto potenciado a adaptação de (1.26') do § 3. para o cálculo do campo. Com efeito, a contribuição do elemento de superfície potenciante dS' , circunvizinho do ponto N' com que coincide o ponto potenciado, é indeterminada visto ser nula a distância $r_{N'P}$; e tal indeterminação não se reduz a um infinitésimo: quando $N \rightarrow N'$, r_{NP}^2 é um infinitamente pequeno da mesma ordem que o próprio dS' . Existe assim um impasse ao cálculo do integral (1.73) e portanto não é possível definir, mediante essa expressão, o campo para um ponto P sobre a superfície carregada. Veremos no § seguinte que esta inviabilidade tem uma razão profunda: o campo não pode de facto definir-se sobre a superfície carregada visto que é descontínuo quando o observador (no ponto potenciado) atravessa a superfície. Pode no entanto mostrar-se que a função potencial num ponto P exterior, dada por (1.74-b), admite uma extensão analítica formalmente idêntica para quando P cai sobre S , e de tal modo que resulta contínua ao atravessar-se a superfície. (*) A expressão (1.74-b) é pois válida quer para os pontos exteriores quer para os pontos sobre S e $V(P)$ é contínua em todo o espaço (incluindo portanto os pontos sobre a distribuição).

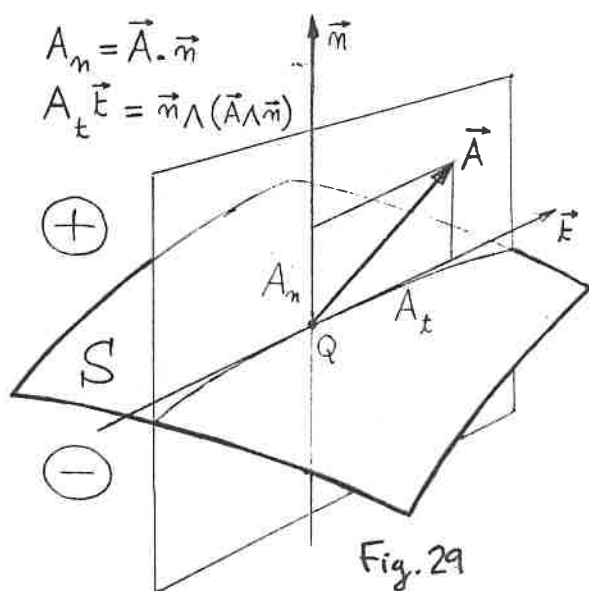
São inteiramente aplicáveis às distribuições em superfície as considerações feitas para as distribuições em volume a respeito do compor-

(*) Cf. A. da Silveira, Teoria da Electricidade - 1ª parte, 36-39.
E. Durand, Electrostatique - I (1954), 225-226.

tamento do campo e do potencial quando o ponto potenciado se desloca para infinito, isto é, se afasta indefinidamente da distribuição (ver § 6.2). Assim: a) $V(P)$ é regular no infinito, com $1/R$; b) $\vec{E}(P)$ é regular no infinito, com $1/R^2$.

7.4 — Descontinuidade do campo quando se atravessa uma superfície carregada (distribuição contínua)

Procedamos agora a uma análise local do que se passa sobre uma superfície carregada no tocante ao campo eléctrico produzido por esta distribuição. Seja Q um ponto sobre a superfície carregada S , Π o plano tangente a S em Q ; designemos por \oplus e \ominus as duas regiões do espaço separadas por S na zona aqui considerada; tomemos sobre a normal a S em Q o vector unitário dessa direcção orientado de \ominus para \oplus , \vec{n}



$$A_n = \vec{A} \cdot \vec{n}$$

$$A_t \vec{t} = \vec{n} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{n})$$

(ver Fig. 29). Qualquer vector \vec{A} aplicado no ponto Q define com \vec{n} um plano normal a S que corta Π segundo uma determinada tangente; seja \vec{t} um vector unitário dirigido segundo essa tangente. É evidente que \vec{A} admite a decomposição

$$\vec{A} = A_n \vec{n} + A_t \vec{t}$$

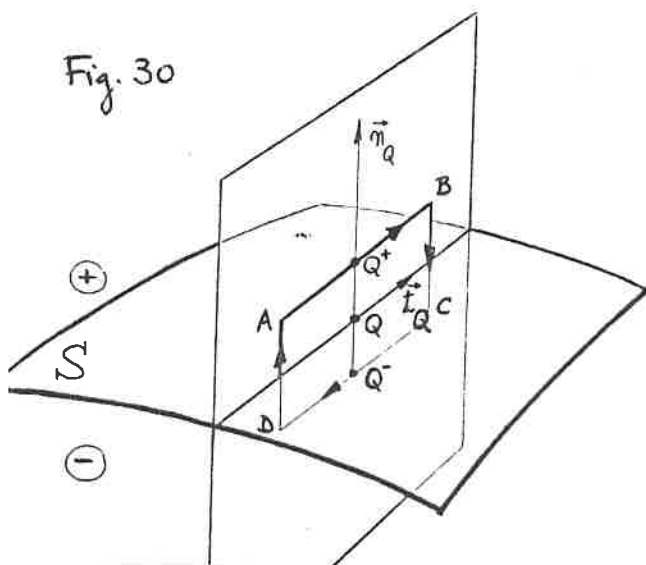
sendo A_n e A_t designadas por (respectivamente) componente normal e componente tangencial de \vec{A} , em relação a S em Q . (*) A análise local que vamos fazer incide justamente sobre as componentes normal e tangencial do campo eléctrico. Para levar a cabo esta análise, sempre com base

(*) Esta decomposição confunde-se com a que é traduzida pela identidade (1.75)
$$\vec{A} = (\vec{A} \cdot \vec{n}) \vec{n} + \vec{n} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{n}),$$
 com a identificação dada na legenda da Fig. 29.

na assimilação da distribuição contínua em superfície a uma distribuição compacta de cargas pontuais, utilizaremos as propriedades integrais do campo generalizadas no § 3. para as distribuições de cargas pontuais, a saber, as relações (1.27) e (1.28').

7.4.1 — Continuidade da componente tangencial.

Consideremos um qualquer plano normal a S em Q , intersectando Π segundo uma determinada tangente; designemos por \vec{t}_Q o vector unitário de uma orientação fixada sobre essa tangente. Sobre esse plano normal, com centro em Q e na sua vizinhança, descrevamos um rectângulo: com dois lados infinitamente pequenos, paralelos à tangente, um na região \oplus outro na região \ominus e passando respectivamente pelos pontos Q^+ e Q^- infinitamente próximos de Q sobre a normal; sendo os outros dois lados (dirigidos segundo a normal) infinitamente pequenos de ordem superior relativamente aos primeiros (ver Fig. 30). Calculemos a



circulação do campo ao longo deste rectângulo no sentido indicado na Figura; ela compõe-se de quatro circulações elementares, sendo as paralelas à normal desprezáveis em face das paralelas à tangente, pois os percursos respectantes às primeiras são infinitésimos de ordem superior relativamente aos outros dois e o campo \vec{E} é finito em todo o ponto exterior a S . As circulações paralelas à tangente somam (se for $|\vec{AB}| = |\vec{CD}| = dl$):

$$\vec{E}(Q^+) \cdot \vec{AB} + \vec{E}(Q^-) \cdot \vec{CD} = \vec{E}(Q^+) \cdot \vec{t}_Q dl + \vec{E}(Q^-) \cdot (-\vec{t}_Q) dl$$

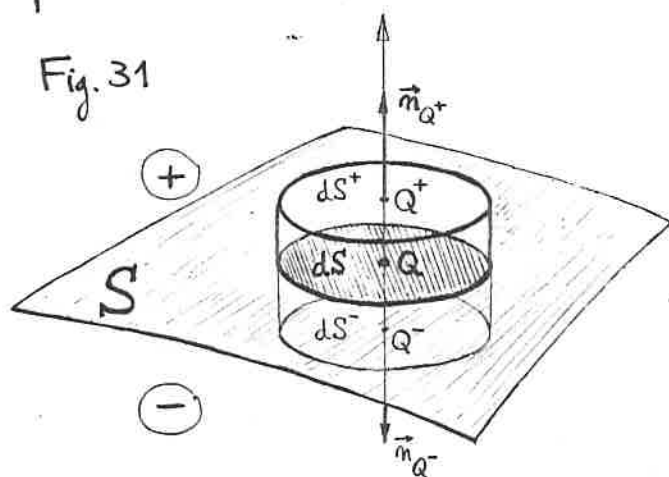
Então, se aplicarmos a relação (1.27) (o rectângulo é circuito fechado), se dividirmos por dl e se passarmos ao limite quando o rectângulo se contrai sobre o ponto Q , resulta:

$$(1.76) \quad (\vec{E}_Q^+ - \vec{E}_Q^-) \cdot \vec{t}_Q = 0 \quad ,$$

se designarmos por \vec{E}^+ e \vec{E}^- os limites do valor (vectorial) do campo quando se tende para Q (sobre S) caminhando pela região \oplus e caminhando pela região \ominus , respectivamente. (*) A relação obtida, (1.76), significa que qualquer componente tangencial do campo eléctrico não sofre descontinuidade quando o observador atravessa a superfície carregada.

7.4.2 — Descontinuidade da componente normal

Consideremos agora um elemento da superfície carregada, dS , circunvizinho a Q ; e, tomando o contorno de dS como directriz, descrevamos um cilindro de geratrizes paralelas à normal em Q e com bases paralelas ao plano tangente, uma na região \oplus , dS^+ , outra na região \ominus , dS^- , e passando respectivamente pelos pontos Q^+ e Q^- infinitamente próximos de Q sobre a normal (ver Fig. 31). Suponhamos que a altura do cilindro é um infinitésimo de ordem superior relativamente a qualquer dimensão linear das bases; nestas condições a área lateral é desprezável em face da área de qualquer das bases. A superfície limitrofe do cilindro (superf. lateral + bases) é uma superfície fechada



a que pode aplicar-se o teorema de Gauss, sob a forma (1.28').

[Com efeito, nenhuma carga existe sobre a superfície limitrofe do cilindro, nem mesmo no contorno de dS que é a sua intersecção com a superfície carregada S . Sendo o contorno um domínio linear (com área nula), é nula a carga de distribuição superficial nele contida.]
 Calculemos o fluxo de \vec{E} que sai através da superfície limitrofe do

(*) No cálculo da circulação $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$, os pontos em que o rectângulo furta a superfície S , de eventual descontinuidade para $\vec{E} \cdot d\vec{s}$, não contam para o integral.

cilindro. O fluxo através da superfície lateral é desprezável face aos fluxos através das bases, por ser desprezável a área lateral face a dS^+ ou dS^- e \vec{E} ser finito em todo o ponto exterior a S . (*)

Os fluxos que saem através das bases dS^+ e dS^- (fluxos elementares) valem, respectivamente, $\vec{E}(Q^+) \cdot \vec{n}_{Q^+} dS^+$ e $\vec{E}(Q^-) \cdot \vec{n}_{Q^-} dS^-$.

Por outro lado, a carga interior à superfície limítrofe do cilindro vale $\sigma(Q) dS$. Então, a aplicação do teorema de Gauss sob a forma (1.28') conduz a

$$\vec{E}(Q^+) \cdot \vec{n}_{Q^+} dS^+ + \vec{E}(Q^-) \cdot \vec{n}_{Q^-} dS^- = 1/\epsilon_0 \sigma(Q) dS.$$

Notando que $dS^+ = dS^- = dS$ (e estas quantidades podem suprimir-se da equação) e que $\vec{n}_Q = \vec{n}_{Q^+} = -\vec{n}_{Q^-}$, e se passarmos ao limite quando o cilindro se contrai sobre o ponto Q , vem:

$$(1.77) \quad (\vec{E}_Q^+ - \vec{E}_Q^-) \cdot \vec{n}_Q = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(Q),$$

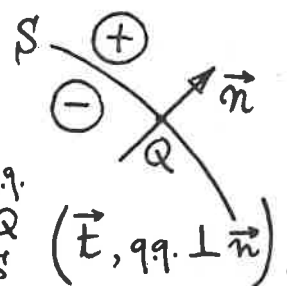
tendo \vec{E}^+ e \vec{E}^- o significado já atribuído no § 7.4.1.

A relação obtida, (1.77), significa que a componente normal do campo eléctrico sofre uma descontinuidade quando o observador atravessa a superfície carregada e que o valor local dessa descontinuidade é $1/\epsilon_0 \sigma(Q)$.

7.4.3 — Expressão geral da descontinuidade

As conclusões dos parágrafos precedentes, (1.76) e (1.77), podem ser reunidas num esquema geral, como segue:

$$(1.78) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\vec{E}^+ - \vec{E}^-) \cdot \vec{n} = \sigma/\epsilon_0 \\ (\vec{E}^+ - \vec{E}^-) \cdot \vec{t} = 0 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{num q.q.} \\ \text{ponto } Q \\ \text{sobre } S \end{array} \right. \left(\vec{E}, \text{ q.q. } \perp \vec{n} \right).$$



(*) No cálculo deste fluxo, o contorno de dS , que pertence ao domínio de integração, e é constituído de pontos onde eventualmente o campo é descontínuo, não conta todavia para o integral, por ser um domínio linear (de área nula).

Isto significa que: Embora qualquer componente tangencial seja sempre contínua, o campo eléctrico produzido por uma distribuição superficial é em geral descontínuo quando se atravessa a superfície, porque a componente normal o é em geral, apresentando uma descontinuidade proporcional, em cada ponto da superfície, à densidade superficial de carga nesse ponto, mediante o factor de proporcionalidade $1/\epsilon_0$. O campo é contínuo ao atravessar-se a superfície apenas nos pontos em que seja $\sigma = 0$. Pode escrever-se uma expressão global para a descontinuidade de \vec{E} sobre uma superfície carregada num ponto genérico Q : (*)

$$(1.79) \quad \vec{E}_Q^+ - \vec{E}_Q^- = \frac{\sigma(Q)}{\epsilon_0} \vec{n}_Q \quad \left(\vec{n}_Q : \begin{array}{c} \oplus \\ \uparrow \\ \ominus \end{array} \right)$$

(*) Uma alternativa para representar equivalentemente o comportamento de \vec{E} quando se atravessa a superfície é ainda a seguinte:

$$(1.80) \quad \begin{cases} (\vec{E}_Q^+ - \vec{E}_Q^-) \cdot \vec{n}_Q = 1/\epsilon_0 \sigma(Q) \\ (\vec{E}_Q^+ - \vec{E}_Q^-) \wedge \vec{n}_Q = 0 \end{cases},$$

em conformidade com a decomposição descrita por (1.75). [O anulamento da componente tangencial descrita por $\vec{n} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{n})$ é condição necessária e suficiente para o anulamento de qq. comp. tang. de \vec{A} .]

Como uma consequência da descontinuidade de \vec{E} , as linhas de força do campo têm, em geral, sobre uma superfície carregada, pontos singulares de interrupção (traduzindo a não existência de campo, pontualmente) que são ao mesmo tempo pontos angulosos (traduzindo o salto entre os valores (vectoriais) \vec{E}^- e \vec{E}^+). Tal comportamento é descrito como refracção das linhas de força. Como decorre claramente de (1.79), a não existência de descontinuidade na componente tangencial do campo determina que os dois limites \vec{E}_Q^+ e \vec{E}_Q^- assentem no mesmo plano normal, visto que fazem

uma diferença paralela a \vec{n}_Q ; e determina também que os dois limites tenham iguais componentes tangenciais (segundo q.q. orientação tangencial). É o

que mostra a Fig. 32, com um caso de $\sigma(Q) > 0$ (representa-se a tangente do mesmo

plano normal já referido, com um vector unitário \vec{t}_Q^* que é o vector de $\vec{n} \wedge (\vec{E}_Q^+ \wedge \vec{n})$, por ex.). Tais observações são úteis para o traçado das figuras de refração das linhas de força.

Recordando que as condições de descontinuidade (1.78) constituem uma tradução sobre a superfície carregada das duas propriedades fundamentais (1.27) e (1.28'), as quais se traduzem nas distribuições contínuas em volume por (1.68) — podemos inferir que as relações (1.68) se transformam nas relações (1.78) quando uma distribuição volumétrica em camada evolue por condensação da carga para uma distribuição em superfície (ver § 7.2). Por isso alguns autores apontam as relações (1.78) como a degenerescência das relações (1.68), na mesma perspectiva em que a distribuição contínua em superfície é vista como uma degenerescência da distribuição contínua em volume numa camada.

7.5 — Continuidade do campo nos pontos exteriores à distribuição superficial

Análises locais idênticas às que foram realizadas nos §§ 7.4.1 e 7.4.2 poderiam obviamente usaiar-se em qualquer ponto M exterior à distribuição superficial, utilizando uma superfície Σ_M puramente geométrica, a passar por M, como referência. No tocante ao § 7.4.1, a demonstração pode ser retida por inteiro. E a respeito do § 7.4.2, a inexistência de qualquer carga

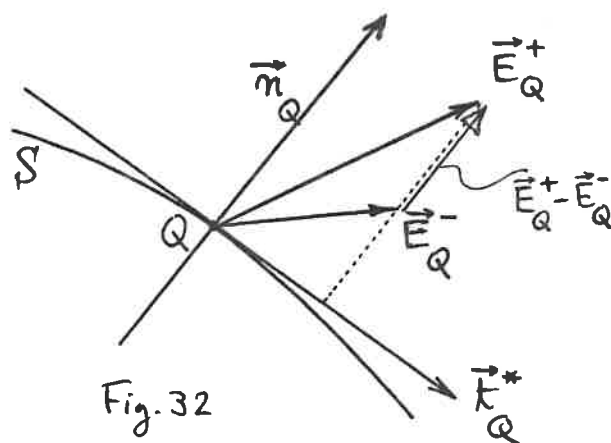


Fig. 32

superficial sobre a superfície auxiliar Σ_M acaba evidentemente por conduzir à continuidade do campo. (*) Justifica-se assim a afirmação do § 7.3, pág. 64.

(*) A mesma ideia pode aplicar-se às distribuições contínuas em volume, para pontos exteriores ou para pontos interiores à distribuição, indiferentemente, com a mesma conclusão de continuidade do campo. Com efeito, mesmo quando M é um ponto interior a uma distribuição volumica, a superfície auxiliar Σ_M nunca contém sobre ela qualquer carga superficial. Mais pormenorizadamente: recordando a demonstração do § 7.4.2, pode observar-se que a carga contida no interior de um cilindro análogo ao da Fig. 31 para a presente situação (de uma distribuição volumica) — tende para zero quando o cilindro se contrai sobre o ponto M . É claro que a demonstração do § 7.4.1 pode ser retida por inteiro, também aqui. Assim fica justificada a afirmação do § 6.2, pág. 52.

Deve por fim observar-se que em todo o ponto exterior à distribuição superficial, análogamente ao que se passa com uma distribuição volumica, o campo cumpre as equações diferenciais

$$(1.81) \quad \begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbf{P}} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{rot}_{\mathbf{P}} \vec{E} = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \mathbf{P}, \text{ ponto exterior} \\ \text{à distribuição} \end{array} \right)$$

que resultam aqui por uma análise idêntica à que foi feita para as distribuições em volume. Da transcrição destas equações no formalismo do potencial (mediante $\vec{E} = -\operatorname{grad}_{\mathbf{P}} V$ — expressão idêntica à 2ª eq. (1.81) —, que vai introduzir-se na 1ª eq. (1.81)) resulta mais uma vez $\operatorname{lap}_{\mathbf{P}} V = 0$. A equação de Laplace cumpre-se em todo o ponto \mathbf{P} exterior à distribuição — no espaço livre de cargas. 15/11/88
11/12/89

8. CONDUTORES NA ELECTROSTÁTICA

Vamos a partir de agora ocupar-nos das distribuições de carga eléctrica nos corpos materiais, aplicando-lhes os estudos precedentes sobre distribuições idealizadas. Começaremos pelas distribuições nos condutores em equilíbrio electrostático.

8.1 — Introdução. Electões livres e electões ligados.

Recorde-se a distinção entre condutores e isolantes, sugerida pelos diferentes comportamentos dos corpos nos fenómenos de electrização (§ 1.1 - II). Um corpo condutor caracteriza-se pela grande mobilidade que nele manifestam as cargas eléctricas, que lhe são comunicadas. Note-se no entanto que esta faculdade que a electricidade possui de se mover livremente se verifica na realidade apenas no interior do condutor; na superfície limitrofe só podem produzir-se livremente deslocamentos tangenciais ou dirigidos para o interior; as ligações existentes entre a matéria e a electricidade impedem os deslocamentos normais à superfície limitrofe, que levariam as cargas a sair do condutor para o vácuo. Entretanto, num corpo isolante, as cargas eléctricas não possuem mobilidade.

As propriedades reveladas experimentalmente pelos condutores, designadamente no tocante ao equilíbrio electrostático e à corrente eléctrica, podem ser razoavelmente interpretadas quando se tem em conta a constituição atómico-molecular da matéria e os comportamentos diversos, ao nível microfísico, que somos levados a adunir para as partículas elementares constituintes. (*)

(*) Deve fazer-se a reserva de que uma compreensão profunda dos fenómenos e uma interpretação minimamente rigorosa dos dados experimentais só podem atingir-se mediante o recurso ao tratamento dos sistemas atómicos-moleculares no âmbito da Mecânica Quântica, o que fica obviamente fora do alcance deste Curso.

Os átomos podem agregar-se entre si de modos muito diferentes na constituição da matéria. Assim, para um corpo no estado gasoso, os átomos encontram-se, em geral, agrupados em pequenos números constituindo edifícios mais complexos, as moléculas, com dimensões ainda da mesma ordem de grandeza que as dos átomos — 1 \AA . A distância média entre duas moléculas, em condições normais de pressão e temperatura, é da ordem de grandeza de 10^3 \AA , isto é, suficientemente elevada, face às dimensões das moléculas, para que estas se possam considerar isoladas, ou submetidas a interações muito fracas. Pode dizer-se portanto que, neste tipo de agregação atômico-molecular, os electrões apresentam um comportamento ditado só pela dinâmica interna da molécula a que pertencem. Entretanto no extremo oposto, para um corpo sólido, todos os átomos constitutivos se encontram muito mais próximos uns dos outros: a distância entre dois átomos vizinhos é, aí, da ordem de 1 \AA , ou seja, da própria dimensão dos átomos, ou ainda, da distância que separa os electrões do núcleo. Existe assim uma forte interação entre os átomos, que se reflecte macroscopicamente na coesão e nas conhecidas propriedades mecânicas dos sólidos. Mas essa forte interação também vai traduzir-se no facto de que os electrões num corpo sólido se podem comportar de maneira muito diferente da dos electrões de um corpo no estado gasoso. Com efeito, neste tipo de agregação atômico-molecular, os electrões, ainda submetidos à dinâmica interna do átomo a que estão originariamente adstritos, podem ser no entanto profundamente influenciados no seu comportamento pelas acções exercidas pelos átomos vizinhos, extremamente próximos. Isto é particularmente flagrante nos metais, dada a sua estrutura cristalina em que os átomos se agregam em arranjos regulares, especialmente periódicos, no interior de volumes com dimensões de 10^2 a 10^4 \AA , por sua vez agregáveis em estru-

turas mais amplas, e em que os núcleos ocupam posições sensivelmente fixas. Podemos esquematisar os comportamentos dos electrões na rede cristalina de um metal em duas categorias:

(i) Os electrões que, no átomo isolado, se encontram mais perto do núcleo, estão no metal submetidos ainda, preponderantemente à dinâmica interna do átomo e permanecem portanto na vizinhança próxima do núcleo. É o comportamento dos electrões ligados.

(ii) Os electrões que, no átomo isolado, se encontram mais afastados do núcleo (os periféricos), ficam no metal submetidos às acções eléctricas de todas as cargas que os envolvem; e, dada a regularidade da rede cristalina constituinte, os efeitos de tais acções podem ser quase perfeitamente compensados, de forma que alguns desses electrões deixam de estar localizados na vizinhança de um núcleo particular. Eles circulam então por todo o volume da estrutura cristalina a que pertencem. É o comportamento dos electrões livres.

Podem mostrar-se que o conjunto dos electrões livres se move no interior do metal segundo leis estatísticas semelhantes às que regem o movimento completamente desordenado das moléculas de um gás num recinto fechado. (*) É a existência deste "gás" de electrões livres em constante agitação completamente desordenada em torno dos núcleos e com capacidade para se moverem ao longo de toda a rede cristalina — que explica a fácil mobilidade das cargas eléctricas nos condutores.

Os electrões livres não podem todavia abandonar o metal (através da superfície limitrofe) — isso requer um trabalho de extracção muito elevado (*). [Quando a temperatura se eleva ou quando sobre a superfície se criam campos muito intensos, mesmo a frio, consegue-se extrair electrões para fora de um metal, mas não

(*) Cf. Genthzen & Kneser, Física (trad. portug.), 1973, pg 240-241

consideraremos aqui tais experiências.]. Num bom condutor, a densidade volúmica em electrões livres — que difere de metal para metal — é sempre muito elevada (*). Admite-se, em contrapartida, que num isolante todos os electrões se comportam como electrões ligados, explicando-se assim a não existência de mobilidade para as cargas eléctricas. Os diversos materiais da Natureza, entre estas duas situações limites, justificam-se-iam como condutores da electricidade em maior ou menor grau consoante a sua densidade volúmica em electrões livres. [*] Ver Pág. anterior]

8.2 — Noção de condutor perfeito. Princípio de Poisson

A fim de facilitar o tratamento físico-matemático de abordagens às propriedades dos condutores, convém introduzir o conceito de Condutor perfeito, que é um conceito-limite do qual os condutores reais se aproximam assintoticamente. Pode definir-se condutor perfeito como um corpo homogéneo no interior do qual as cargas eléctricas têm a mais completa mobilidade (limitada apenas no tocante aos deslocamentos normais à superfície limítrofe que levariam as cargas a sair do condutor para o vácuo). Na perfeição do parágrafo precedente, um condutor perfeito constituiria um reservatório inesgotável de electrões livres. Do conceito de condutor perfeito decorre uma propriedade fundamental designada por Princípio de Poisson: Em todo o ponto interior de um condutor perfeito em equilíbrio electrostático, o campo eléctrico é nulo:

$$(1.82) \quad \underline{\vec{E}}_{\text{interior}} \equiv 0$$

Com efeito, se fosse $\vec{E} \neq 0$ nalgum ponto interior do condutor haveria aí uma força média significativa actuando sobre os electrões livres — presentes em qualquer elemento de volume — e estes deslocar-se-iam, o que contradiz a hipótese de equilíbrio electrostático. Veremos que deste Princípio decorre todo o presente estudo.

8.3 — Consequências imediatas do Princípio de Poisson

8.3.1 — A distribuição de carga num condutor em equilíbrio electrostático

Em conformidade com as considerações do § 8.1, a distribuição da electricidade num condutor deverá sem dúvida descrever-se, em tratamento macroscópico como uma distribuição contínua de cargas eléctricas em volume ou em superfície. (*) Mas, começando por inquirir da possível existência de uma efectiva distribuição em volume, o exam da equação de Poisson (1.61), aplicável nessa eventualidade, afasta decisivamente tal ideia. Com efeito, sendo nulo o campo no interior do condutor (pelo Princípio de Poisson), tem-se aí $\text{div } \vec{E} = 0$ e portanto $\rho = 0$. Quer dizer: em cada elemento de volume no interior do condutor, as cargas positivas e negativas das partículas (estatisticamente) nele existentes neutralizam-se entre si, de modo exacto. Então, forçosamente, a carga total de um condutor acha-se inteiramente repartida, em distribuição contínua, pela sua superfície limítrofe. Damos a seguir dois exemplos simples de distribuição.

(*) Com efeito, as mínimas dimensões sobre que incidem as experiências usuais da Electrostatica (macroscópicas) são muito grandes à escala atómica^(†) e cada elemento de volume de observação contém miríades de partículas constituintes da matéria com suas respectivas cargas (electrões, núcleos; ou: electrões livres, iões fixos na rede cristalina); mas isso significa que, à escala do observador (macroscópica), a estrutura granular da electricidade característica da constituição atómico-molecular da matéria, é completamente inobservável, deixando transparecer uma imagem de continuum, tal como acontece com a estrutura granular da própria matéria.

(†) Para se fazer uma ideia concreta: num sólido cristalino, sobre um comprimento de 1 μm , há um número de átomos da ordem de 10^4 .

Exemplo (1): Suponhamos um condutor carregado e isolado de quaisquer acções eléctricas exteriores. Uma vez que não há qualquer outra fonte, a distribuição da carga do condutor pela sua superfície limitrofe, descrita por uma função $\sigma(Q)$, há-de ser tal que produza (ela própria, por si só) um campo efectivamente nulo em todo o ponto interior. Torna-se evidente que a função $\sigma(Q)$, condicionada por essa exigência, vai depender essencialmente da forma geométrica da superfície limitrofe. Em particular, se se trata de um corpo esférico, a densidade superficial σ correspondente, deve, por razão de simetria, ser uniforme (com o mesmo valor sobre toda a superfície); e é fácil verificar que uma distribuição uniforme de carga numa superfície esférica produz efectivamente um campo nulo em todo o ponto interior.

Exemplo (2): Consideremos agora um condutor neutro, que é colocado num campo fixo, de valor $\vec{E}_0(P)$ em cada ponto P .

É de indagar por que processo físico vai o condutor atingir o equilíbrio electrostático. Os electrões livres presentes em toda a massa do corpo, submetidos agora ao campo $\vec{E}_0(P)$, tenderão naturalmente a mover-se na direcção e no sentido contrário do campo, indo acumular-se sobre determinadas regiões da superfície limitrofe do condutor (a qual constitui barreira para tais deslocamentos) e aí se gerará portanto uma densidade superficial de carga $\sigma < 0$; opera-se, ao mesmo tempo, necessariamente, uma rarefacção de electrões livres noutras regiões da superfície limitrofe, em que se gerará portanto uma densidade $\sigma > 0$.

Mas esta nova distribuição de cargas no condutor^(*) produz um novo campo que contraria e tende a equilibrar, em cada ponto, o campo pré-existente. Os movimentos efectivos dos electrões livres cessam quando, em cada ponto interior, o campo total for nulo.

O condutor adquire então a distribuição de equilíbrio electrostático, em que permanece. [(*) Um condutor neutro, isolado de quaisquer acções eléctricas, tem densidade de carga nula, em todos os pontos da superfície limitrofe.]

8.3.2 — Potencial de um condutor

Se $\vec{E} = 0$ em todo o ponto interior do condutor em equilíbrio electrostático (Princípio de Poisson), então a função potencial, que permite deduzir o campo pela operação $\vec{E} = -\text{grad } V$, é uma função constante no interior do condutor: $V = \text{const.}$. E, sendo a função potencial contínua mesmo sobre a distribuição (Ver § 7.3, pag 55), conclui-se que $V(P)$ tem, à superfície limítrofe do condutor, o mesmo valor constante que no interior. Então: A superfície limítrofe de um condutor em equilíbrio electrostático é uma superfície equipotencial. Mais: Um condutor em equilíbrio electrostático é uma região equipotencial. Sendo possível adoptar a convenção $V_\infty = 0$, como vamos supor^(*), pode dizer-se que o condutor eletrizado em equilíbrio electrostático possui um potencial bem definido, que passa a designar-se por potencial do condutor.

Repare-se agora que as superfícies equipotenciais infinitamente próximas do condutor, no exterior, têm, pela continuidade da função potencial, quase a mesma forma que a superfície limítrofe, ela própria equipotencial. Nestas condições (e como será adiante confirmado), o campo em pontos infinitamente próximos do condutor, por ser $\vec{E} = -\text{grad } V$, dirige-se necessariamente segundo a normal à superfície limítrofe nesse local; as linhas de força do campo partem do condutor ou terminam no condutor, com direcção normal à superfície limítrofe. (Note-se que no interior do condutor não se definem linhas de força, por ser $\vec{E} = 0$).

[^(*) Esta convenção só não pode adoptar-se quando a distribuição de cargas atinge regiões no infinito.]

8.3.3 — Campo num ponto exterior infinitamente vizinho de um condutor. Fórmula de Coulomb.

Porque a carga de um condutor se acha repartida, em distribuição contínua superficial, pela sua superfície limitrofe, o campo é descontínuo ao atravessar-se essa superfície (Ver § 7.4). Cumpre-se com efeito a relação (1.79) que neste caso assume a forma

$$\vec{E}_Q^{\text{ext}} - \vec{E}_Q^{\text{int}} = \frac{\sigma(Q)}{\epsilon_0} \vec{n}_Q$$

sendo: \vec{E}_Q^{ext} e \vec{E}_Q^{int} os limites do valor (vectorial) do campo quando se caminha para o ponto Q da superfície limitrofe, respectivamente, por fora e por dentro do condutor; e \vec{n}_Q o vector unitário da normal à superfície em Q , orientado de dentro para fora. Mas, pelo Princípio de Poisson, $\vec{E}^{\text{int}} = 0$ e daí resulta

$$(1.83) \quad \vec{E}_Q^{\text{ext}} = \frac{\sigma(Q)}{\epsilon_0} \vec{n}_Q, \text{ ou: } \begin{cases} (E_n^{\text{ext}})_Q = \frac{\sigma(Q)}{\epsilon_0} \\ (E_t^{\text{ext}})_Q = 0 \end{cases}$$

O que significa que o campo num ponto exterior infinitamente vizinho do condutor ($\vec{E}_Q^{\text{ext}} \equiv \vec{E}(Q^+)$) é normal à superfície limitrofe, orientado para fora ou para dentro do condutor consoante $\sigma(Q) > 0$ ou $\sigma(Q) < 0$ e tem uma intensidade dada em valor algebrico por $1/\epsilon_0 \sigma(Q)$. Este resultado confirma as conclusões do § precedente sobre as linhas de força e ainda permite avançar que: as linhas de força partem de pontos do condutor onde $\sigma > 0$ ou terminam em pontos onde $\sigma < 0$. (*)

Atendendo agora a que $\vec{E} = -\text{grad } V$, pode escrever-se, a partir

(*) Deve porém observar-se que uma determinada linha de força não pode emanar de um ponto de um condutor para ir terminar em outro ponto do mesmo condutor, com um trajecto exclusivamente no espaço livre entre os dois pontos. O potencial teria então que passar por um mínimo nalgum ponto intermédio, onde não há cargas, o que é impossível (Ver § 8.5.2, pag.).

de (1.83) :

$$(1.83') \quad \sigma(Q) = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial V}{\partial n_Q} \right)_{\text{ext}}$$

que é a fórmula de Coulomb : permite achar $\underline{\sigma}$ em cada ponto da superfície limitrofe do condutor desde que se consiga, por algum método, obter a função potencial e seja exequível o cálculo da derivada dirigida $\partial V / \partial n$, suposta conhecida a forma geométrica da superfície limitrofe.

12/12/85

8.4 — Outras consequências importantes

Ocupemo-nos agora de outras consequências importantes do Princípio de Poisson, as quais constituem no seu conjunto uma primeira abordagem do tratamento dos conhecidos fenômenos de influência electrostática. Já se reportam com efeito a alguns aspectos da interacção entre condutores.

8.4.1 — Teorema dos elementos correspondentes

Consideremos dois condutores eletrizados C_1 e C_2 em presença um do outro, em equilíbrio electrostático. Tomemos um tubo elementar de linhas de força partindo todas do condutor C_1 e terminando todas no condutor C_2 ; suponhamos que este tubo de linhas de força, T , delimita sobre C_1 uma área elementar dS_1 , sobre C_2 uma área elementar dS_2 (Ver Fig. 33); sejam σ_1 e σ_2 as densidades de carga sobre dS_1 e dS_2 , respectivamente.

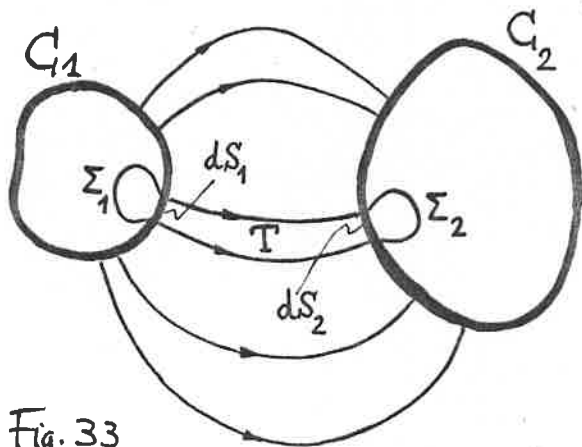


Fig. 33

Elementos de área assim delimitados em dois condutores por um mesmo tubo de linhas de força, tais como dS_1 e dS_2 , recobertos pelas cargas $\sigma_1 dS_1$ e $\sigma_2 dS_2$, — designam-se por elementos correspondentes. Imaginemos

agora duas calotes Σ_1 e Σ_2 apoiadas respectivamente nos contornos de dS_1 e dS_2 e interiores aos respectivos condutores G_1 e G_2 (V. Fig. 33). Com estas duas calotes e o tubo de linhas de força Γ , completa-se uma superfície fechada $\Gamma \equiv \Sigma_1 \cup \Gamma \cup \Sigma_2$, à qual podemos aplicar o teorema de Gauss. Ora o fluxo do campo eléctrico através da superfície fechada Γ é nulo, porque, por um lado, sobre as calotes, interiores aos condutores, o campo é nulo (Princípio de Poisson) e, por outro lado, sobre o tubo Γ o campo é tangencial (pela definição de linhas de força). Então, nula é também (teorema de Gauss) a soma das cargas eléctricas contidas no interior dessa superfície fechada Γ , ou seja, das cargas $\sigma_1 dS_1$ e $\sigma_2 dS_2$. Portanto:

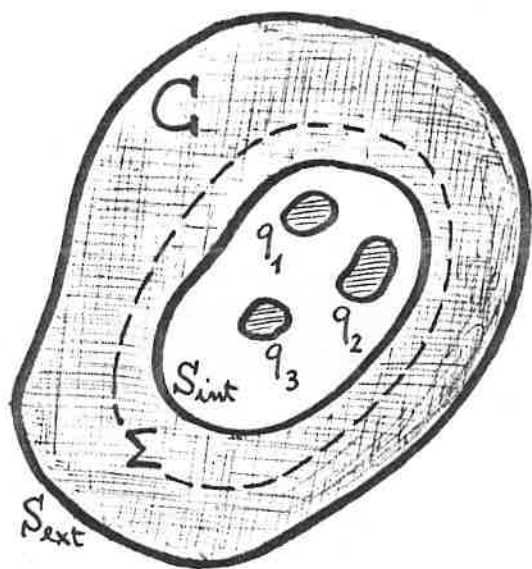
$$(1.84) \quad \sigma_1 dS_1 = -\sigma_2 dS_2 \quad ;$$

ou seja: as cargas que recobrem elementos correspondentes são iguais e de sinais contrários. É o teorema dos elementos correspondentes. Há assim uma interdependência bem precisa entre as distribuições de carga que recobrem os dois condutores G_1 e G_2 que se enfrentam mutuamente; tal interdependência constitui uma faceta quantitativa da interpretação teórica dos fenômenos de influência electrostática.

8.4.2 — Condutor com cavidade

Consideremos agora um condutor G possuindo no seu interior uma cavidade (uma região ôca) dentro da qual se encontram outros condutores eletrizados, isolados de G , com cargas genericamente designadas por q_k ($k = 1, \dots, n$), estando o conjunto em equilíbrio electrostático. Sejam S_{int} e S_{ext} as duas folhas da superfície limítrofe do condutor G (Ver Fig. 34). S_{int} é a superfície que delimita a cavidade do condutor G . A carga total de G , Q , encontra-se geralmente repartida sobre S_{int} (com um valor global Q_{int})

e sobre S_{ext} (com um valor global Q_{ext}), podendo eventualmente esta repartição ter um carácter algebrico: será sempre $Q = Q_{int} + Q_{ext}$ mas as quantidades Q_{int} e Q_{ext} poderão ser de sinais contrários. Vamos mostrar que a carga que recobre S_{int} (ou distribuída sobre S_{int}) é igual em módulo e de sinal contrário à soma das cargas situadas no interior da cavidade. Basta para isso aplicar o



teorema de Gauss a uma superfície fechada, Σ , toda ela no interior do condutor, envolvendo completamente a cavidade, sem tocar nem em S_{int} nem em S_{ext} (Ver Fig. 34). Ora, o fluxo através de Σ é nulo, porque em todo o ponto de Σ , interior ao condutor, o campo é nulo (Princípio de Poisson); nula é portanto também,

pelo teorema de Gauss, a soma das cargas contidas dentro de Σ , donde resulta

$$(1.85) \quad Q_{int} = - \sum_{k=1}^n q_k,$$

c.q.d.. Repare-se que este resultado é absolutamente independente do valor de Q_{ext} , portanto da carga total do condutor Q . Se se altera, por algum processo, a electrização de G e a sua carga total se modifica para $Q' = Q + \Delta Q$, então, deve modificar-se Q_{ext} da mesma quantidade ΔQ , porque Q_{int} permanece invariante a fim de que se cumpra sempre (1.85) com cargas q_k que entretanto não sofreram qualquer alteração. A relação (1.85) constitui uma nova faceta quantitativa da interpretação teórica dos fenómenos de influência electrostática. Descreve a influência mútua entre a superfície que delimita a cavidade, S_{int} , e os condutores que

estão situados no interior da cavidade. Note-se enfim que este resultado e o do § precedente não são independentes; na verdade, pode mostrar-se que (1.85) mais não é que o efeito global da aplicação formalizada do teorema (1.84) ao condutor com cavidade.

8.4.3 — Exemplos simples de influência electrostática

Apresentam-se exemplos de situações de influência electrostática aos quais se aplicam os resultados precedentes.

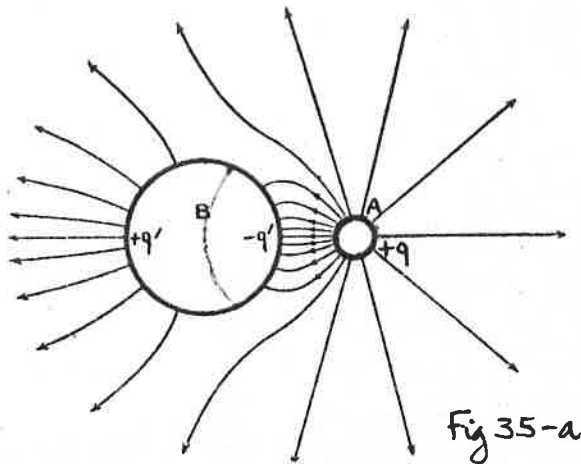


Fig 35-a

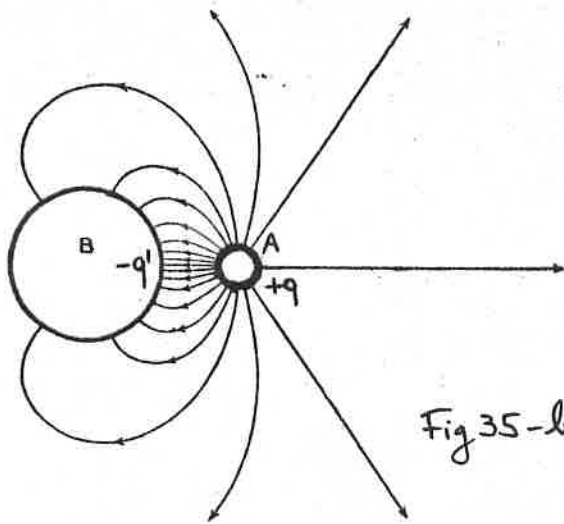


Fig 35-b

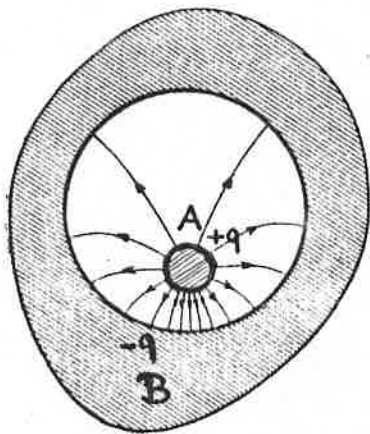


Fig 36

resulta que estas duas superfícies contêm cargas iguais e de sinais contrários, $+q$ em A gera $-q$ em B. É a situação descrita como de influência total, justificada por aplicação do teorema dos elementos correspondentes ou do estudo do condutor com cavidade.

A Fig 35-a descreve a influência entre um condutor A com carga $+q$ e um condutor B neutro, mantido isolado. A Fig 35-b descreve a influência entre os mesmos dois condutores, quando B passa a estar ligado ao solo (posto ao potencial zero).

Em ambos os casos, uma parte das linhas de força que partem do condutor A vai terminar ao condutor B em pontos que se recobrem de carga negativa, indo a parte restante perder-se no infinito. A zona da superfície de B carregada negativamente não corresponde senão a uma parte da superfície de A. Daqui resulta que a carga negativa global gerada sobre B ($-q'$) por influência é inferior em valor absoluto à carga contida em A ($+q$): $q' < q$.

Trata-se de uma aplicação do teorema dos elementos correspondentes. Seja agora o caso da Fig 36, em que um condutor A, carregado positivamente ($+q$), é completamente envolvido por um condutor B, neutro: então, todas as linhas de força partindo de A terminam forçosamente em B; pode fazer-se corresponder elemento por elemento a superfície interior de B à superfície exterior de A, donde

8.5 — Problema fundamental da Electrostatica

8.5.1 — Posição do problema

Consideremos, no vácuo, um sistema de N condutores eletrizados, isolados uns dos outros, em posições fixas no espaço e em equilíbrio electrostático. O sistema é suposto estar isolado no espaço, isto é, fora do alcance de qualquer acção produzida por fontes exteriores. Pelo Princípio de Poisson, $\vec{E} = 0$ no interior de cada condutor e pode afirmar-se não só que cada condutor vai estar a um determinado potencial mas também que as cargas dos condutores se localizam nas suas superfícies limítrofes, de tal modo que estamos em presença de uma distribuição superficial de carga sobre uma superfície complexa (pelo menos a N folhas). Tal situação esquemática representa, de forma generalizada, os fenómenos de influência mútua entre condutores em equilíbrio electrostático (ou: influência electrostática).

Preende-se achar o campo $\vec{E}(P)$ para todo o ponto exterior aos condutores (no espaço livre), na situação acima genericamente especificada. Adopta-se naturalmente a via de procurar uma função potencial $V(P)$ que satisfaça, de modo geral, às propriedades que lhe podem ser atribuídas no caso de uma distribuição contínua em superfície (§§ 7.3 e 7.5) e ainda, de modo particular, às condições que deve respeitar no domínio dos condutores na Electrostatica (§§ 8.3.2 e 8.3.3). Obtida a função $V(P)$, o campo virá dado pela operação $-\text{grad} V$.

Neste problema radica a resolução de muitos outros, importantes nas aplicações; alguns autores designam-no como Problema fundamental da Electrostatica.

Procurando sistematizar, pode dizer-se que o problema consiste em encontrar, no espaço livre, a função $V(P)$ (i) que seja solução da equação de Laplace (Cf. (1.81) e

suas implicações imediatas, pag 72) :

$$(1.86) \quad \text{lap } V = 0 \quad ; \quad e$$

(ii) que satisfaça as seguintes condições suplementares :

a) $V(P)$ deve ser função contínua, como potencial correspondente a uma distribuição contínua em superfície (Cf. § 7.3, pg 55) ; e em particular deve ter-se

$$(1.87) \quad \lim_{P \rightarrow P_\alpha} V(P) = V_\alpha \quad (\text{constante}) \quad (\alpha = 1, \dots, N)$$

sendo P_α o ponto genérico do condutor α e V_α o potencial do condutor α ($\alpha = 1, \dots, N$).

b) $V(P)$ deve ser regular no infinito com $1/R$ e $\text{grad}_P V$ deve ser regular no infinito com $1/R^2$, qm $R \rightarrow \infty$, se for R a distância de um ponto arbitrariamente fixado do sistema de condutores, ao ponto potencializado P .

c) $V(P)$ deve fornecer pela fórmula de Coulomb, (1.83'), a densidade superficial de carga $\sigma(Q_\alpha)$ em cada ponto Q_α da superfície limítrofe S_α do condutor α

$$(1.88) \quad \sigma(Q_\alpha) = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n_{Q_\alpha}} \quad (\alpha = 1, \dots, N)$$

sendo n_{Q_α} a coordenada da normal a S_α no ponto Q_α , orientada para o exterior. Em consequência disto, ter-se-á, se for Q_α a carga total do condutor α :

$$(1.89) \quad Q_\alpha = -\epsilon_0 \int_{S_\alpha} \frac{\partial V}{\partial n_{Q_\alpha}} dS_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, N)$$

(Note-se que as condições (1.88) são as de descontinuidade do campo sobre as superfícies dos condutores).

As condições (1.87) e (1.89) designam-se habitualmente por condições-fronteira: elas dizem respeito à fronteira entre o espaço livre e o sistema. Pode dizer-se que são estes dois conjuntos

de N condições cada, que acarretam para a resolução do problema grandezas ligadas à especificação concreta de uma situação electrostática no sistema dos N condutores: os seus potenciais V_α e as suas cargas totais q_α . [As condições (1.88) são a esse respeito uma alternativa, aliás mais complexa, às cond. (1.89); e as restantes condições, a que $V(P)$ deve satisfazer, são independentes da especificação concreta da situação electrostática do sistema.]

8.5.2 — Unicidade da solução

A experiência revela que se estabelece no sistema atrás descrito um estado de equilíbrio electrostático bem definido: (a) sempre que se carregam os diversos condutores com dadas cargas; ou (b) sempre que os diversos condutores são mantidos a dados potenciais; ou ainda (c) sempre que se carregam com dadas cargas alguns dos condutores e se mantêm os restantes a dados potenciais. Pode provar-se teoricamente que em qualquer destas hipóteses de trabalho, (a), (b) ou (c), o problema fundamental da Electrostática, que atrás foi posto, tem efectivamente uma única solução.

Isso significa que, fixados (dados) os valores de N determinadas grandezas, escolhidas de entre os V_α ($\alpha = 1, \dots, N$) e os q_α ($\alpha = 1, \dots, N$) consoante a hipótese adoptada (a), (b) ou (c), — haverá uma única solução para $V(P)$ e, em consequência, um único valor para o campo em cada ponto do espaço, $\vec{E}(P)$, e um valor bem determinado para cada uma das grandezas intervenientes no problema, como decorre do § 8.5.1. Assim, para cada um dos conjuntos ordenados dos valores dados das N grandezas escolhidas, vai haver um estado de equilíbrio electrostático bem definido.

Num mesmo sistema de N condutores, perfeitamente caracterizado do ponto de vista geométrico, basta mudar os valores dados das mesmas

referidas N grandezas para passar a outro estado de equilíbrio electrostático, em geral distinto, com uma outra solução única para $V(\mathcal{P})$.

18/12/59

8.5.3 — Princípio de sobreposição de estados de equilíbrio

Podem pois ser estabelecidos num sistema tantos estados de equilíbrio electrostático quantos se queira, em geral distintos uns dos outros, em correspondência com os diferentes conjuntos ordenados de valores dados das referidas N grandezas, que arbitrarmos.

Consideremos então dois desses estados de equilíbrio electrostático, supostos distintos; designemo-los por I e II, e seja $V^I(\mathcal{P})$ [seja $V^{II}(\mathcal{P})$] a função potencial, única, válida para o estado I [para o estado II] ; o valor de qualquer outra grandeza interviniente no problema, para um certo estado de equilíbrio, obtém-se a partir da respectiva função potencial.

Imaginemos agora uma função $V^{III}(\mathcal{P})$ construída mediante a composição linear

$$(1.93) \quad V^{III}(\mathcal{P}) = \lambda_I V^I(\mathcal{P}) + \lambda_{II} V^{II}(\mathcal{P})$$

(em que λ_I e λ_{II} são coeficientes constantes arbitrários), e construamos as grandezas V_α^{III} , e_α^{III} e $\sigma(Q_\alpha)$ à custa das suas homólogas para os estados I e II e mediante composições lineares idênticas a (1.93) (portanto com os mesmos coeficientes λ_I e λ_{II}). Podemos dizer que estamos a construir assim uma composição linear de dois estados de equilíbrio, ou, numa linguagem mais corrente, a realizar uma sobreposição de dois estados de equilíbrio.

Ora, tendo em conta o carácter linear da equação de Laplace (eq. diferencial (1.86)), tendo em conta também o carácter linear das operações de passagem ao limite, das operações de derivação e das operações de integração envolvidas nas

condições suplementares a), b) e c) (da pag 86), e tendo em conta ainda o carácter homogéneo de todas as relações matemáticas que intervêm no processo, em $V(P)$, V_α , e_α e $\sigma(Q_\alpha)$ — pode afirmar-se que, para a mesma geometria do sistema, a função $V^{III}(P)$ bem como as grandezas V_α^{III} , e_α^{III} e $\sigma^{III}(Q_\alpha)$, todas definidas por composições idênticas, do prototipo (1.93), respeitam o complexo de condições do problema (contido na pag. 86) e caracterizam, em consequência, um novo estado de equilíbrio no mesmo sistema. Então: Fixada a geometria do sistema, a composição linear de dois estados de equilíbrio conduz a um novo de estado de equilíbrio. É o Princípio de sobreposição de estados de equilíbrio, que constitui uma ferramenta muito expedita e eficaz na investigação de soluções para o Problema fundamental da Electrostatica e seus derivados. Obviamente, este princípio é correntemente utilizado no sentido da decomposição do estado de equilíbrio em estudo noutros estados mais simples, de soluções conhecida.

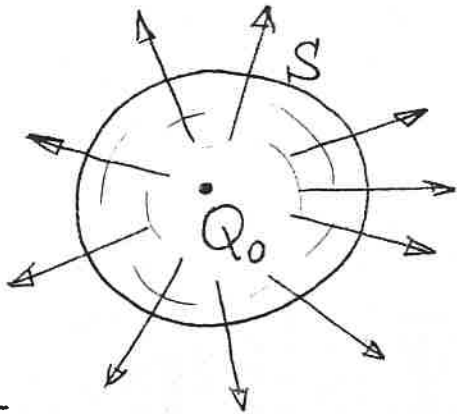
8.5.4 — Importante propriedade da função $V(P)$

A função potencial no espaço livre de um sistema de condutores, da qual nos temos vindo a ocupar, $V(P)$, goza de uma importante propriedade, de que faremos uso nos parágrafos subsequentes. Convém estudá-la desde já. Essa propriedade pode apresentar-se sob a seguinte forma geral:

A função potencial do campo electrostático não pode ter máximos nem mínimos numa região onde não há cargas eléctricas.

A demonstração baseia-se obviamente nas propriedades do campo; vamos fazê-la pelo método de redução ao absurdo. Supo-

nhamos, com efeito, que a função potencial era máxima num ponto Q_0 da região em que não há cargas eléctricas. Então para todo o ponto Q numa vizinhança suficientemente pequena de Q_0 , tem-se $V(Q) < V(Q_0)$: a função potencial decresce a partir de Q_0 , qualquer que seja a direcção tomada pelo observador.



[Vectores do campo na vizinhança de Q_0]

Figura 38

Daqui resulta que o campo nos pontos em torno de Q_0 (ver Figura) se orienta sempre para fora (diverge a partir de Q_0) — porque o campo se orienta sempre no sentido das equipotenciais decrescentes ($\vec{E} = -\text{grad } V$). Em consequência, se considerarmos uma superfície fechada S suficientemente pequena, envolvendo Q_0 no seu interior (ver Figura), o fluxo de \vec{E} para fora de S é essencialmente positivo por ser $\vec{E} \cdot \vec{n} > 0$ em todos os pontos de S . Então, pelo teorema de Gauss deveria ser positiva a carga eléctrica interior a S , o que é manifestamente absurdo por não haver cargas eléctricas na região. O absurdo resulta de ter-se suposto a existência de um máximo para $V(P)$. Analogamente para um mínimo.

8.6 — Relações entre as cargas e os potenciais de um sistema de condutores

8.6.1 — Linearidade das relações

Recapitulando os resultados da análise precedente do Problema fundamental da Electrostática (§§ 8.5.1, 8.5.2, 8.5.3) podemos afirmar que: (i) — dados os potenciais, V_α , a função $V(P)$ fica bem definida em todo o ponto do espaço — e é única — e as cargas, Q_α , serão então univocamente determinadas por (1.89); e

(ii) - dadas as cargas, e_α , a função $V(P)$ fica bem definida em todo o ponto do espaço - e é única - ... potenciais, V_α , serão então unívocamente determinados por (1.87). Assim, entre os potenciais dos condutores, V_α , e as suas cargas totais, e_α , têm que existir relações biunívocas bem definidas, as quais podem escrever-se na forma:

$$(1.96) \quad V_\alpha = f_\alpha(e_1, \dots, e_N) \quad (\alpha = 1, \dots, N)$$

ou na forma (absolutamente equivalente):

$$(1.97) \quad e_\alpha = g_\alpha(V_1, \dots, V_N) \quad (\alpha = 1, \dots, N)$$

sendo as N funções f_α [as N funções g_α] (além de unívocas e bem definidas) sempre as mesmas para todo e qualquer estado de equilíbrio - ou seja: independentes dos estados de equilíbrio - . Esta última afirmação fundamenta-se em que, na análise acima referida, verifica-se ser sempre o mesmo o conjunto complexo de operações matemáticas que faz corresponder as cargas (e_1, \dots, e_N) aos potenciais (V_1, \dots, V_N) ou vice-versa, quaisquer que sejam os valores dos dados. Ora bem: É com base nesta independência dos estados de equilíbrio e como uma consequência do Princípio de sobreposição dos estados de equilíbrio (§ 8.5.3) que se pode ainda mostrar que as relações (1.96) e (1.97) são relações lineares e homogêneas. Elas podem pois escrever-se, respectivamente, sob a forma

$$(1.107) \quad V_\alpha = \sum_{\beta=1}^N C^{\alpha\beta} e_\beta \quad (\alpha = 1, \dots, N)$$

$$(1.108) \quad e_\alpha = \sum_{\beta=1}^N C_{\alpha\beta} V_\beta \quad (\alpha = 1, \dots, N)$$

com coeficientes $C^{\alpha\beta}$ e $C_{\alpha\beta}$ uns e outros independentes dos e_α ou dos V_α , quer dizer, independentes dos estados de equilíbrio (diz-se por vezes: independentes do estado eléctrico do sistema de condutores). Estudaremos em seguida estes coeficientes.

Os coeficientes $C^{\alpha\beta}$ são os coeficientes de potencial, $C_{\alpha\beta}$ os coeficientes de capacidade (ou de influência) de circuitos de N condutores dados ($\alpha, \beta = 1, \dots, N$). Para os $C_{\alpha\beta}$ é corrente fazer a distinção entre coeficientes de capacidade própria, para $\alpha = \beta$, e coeficientes de capacidade mútua, para $\alpha \neq \beta$. Como a cada dado grupo de valores (e_1, \dots, e_N) corresponde um e um só grupo de valores (V_1, \dots, V_N) , a matriz $\{C^{\alpha\beta}\}$ é regular (não-singular, $\det\{C^{\alpha\beta}\} \neq 0$) e $\{C_{\alpha\beta}\}$ é a sua inversa:

$$(1.109) \quad \{C_{\alpha\beta}\} = \{C^{\alpha\beta}\}^{-1}$$

Atendendo a que os coeficientes $C^{\alpha\beta}$ e $C_{\alpha\beta}$ são independentes do estado de equilíbrio, podemos estudá-los através de uma expressão válida somente quando todos os e_α sejam diferentes de zero, a qual vamos agora deduzir. Tomemos como potencial do condutor α , V_α , a expressão que dá, por cálculo directo, o potencial criado por todos os condutores, num ponto do condutor α , P_α :

$$(1.110) \quad V_\alpha = k_0 \sum_{\beta=1}^N \int_{S_\beta} \frac{\sigma_\beta dS_\beta}{r_{\alpha\beta}} \quad (\alpha = 1, \dots, N)$$

em que $r_{\alpha\beta}$ (abreviatura de $r_{P_\alpha P_\beta}$) designa a distância do elemento potenciante $\sigma_\beta dS_\beta$ (em que σ_β representa $\sigma(P_\beta)$) ao ponto potenciado P_α (Cf. 1.74-b, pag 54). Multipliquemos ambos os membros de (1.110) por $\sigma_\alpha dS_\alpha$ ($\sigma_\alpha \equiv \sigma(P_\alpha)$) e integremos em seguida sobre toda a superfície S_α do condutor α . Tem:

$$V_\alpha e_\alpha = k_0 \sum_{\beta=1}^N \int_{S_\alpha} \int_{S_\beta} \frac{\sigma_\alpha \sigma_\beta dS_\alpha dS_\beta}{r_{\alpha\beta}}$$

ou ainda, se todos os e_α forem diferentes de zero, como estamos a admitir,

$$(1.111) \quad V_\alpha = \sum_{\beta=1}^N e_\beta \left[\frac{k_0}{e_\alpha e_\beta} \int_{S_\alpha} \int_{S_\beta} \frac{\sigma_\alpha \sigma_\beta dS_\alpha dS_\beta}{r_{\alpha\beta}} \right]$$

Donde se extrai, por identificação de (1.111) com (1.107) :

$$(1.112) \quad C^{\alpha\beta} = \frac{\kappa_0}{\epsilon_\alpha \epsilon_\beta} \int_{S_\alpha} \int_{S_\beta} \frac{\sigma_\alpha \sigma_\beta dS_\alpha dS_\beta}{r_{\alpha\beta}}$$

A expressão (1.112) mostra que os coeficientes de potencial, e portanto também os coeficientes de capacidade, de um dado sistema de N condutores, dependem da forma, das dimensões e das posições relativas dos condutores, quer dizer, daquilo a que poderemos chamar globalmente configuração geométrica do sistema. (~~Note-se porém que os coeficientes de potencial próprio dependem apenas da forma e das dimensões do condutor em causa, mas isto já assim não acontece com os coeficientes de capacidade próprio~~)

A mesma expressão (1.112), insensível a uma troca de α com β , revela ainda que $C^{\alpha\beta} = C^{\beta\alpha}$ para $\alpha \neq \beta$, isto é, que as matrizes $\{C^{\alpha\beta}\}$ e $\{C_{\alpha\beta}\}$ são matrizes simétricas.

Outras propriedades destes coeficientes se extraem ainda aproveitando o facto de que eles não dependem do estado de equilíbrio e examinando certos estados de equilíbrio extremamente simples. Esse é o objecto dos próximos parágrafos.

8.6.3 — Propriedades específicas dos coeficientes de potencial, $C^{\alpha\beta}$

Consideremos o estado de equilíbrio simples caracterizado por $\epsilon_\alpha = 1$; $\epsilon_\beta = 0$ com $\beta = 1, \dots, \alpha-1, \alpha+1, \dots, N$.

As relações (1.107) dão neste caso :

$$(1.113) \quad V_\alpha = C^{\alpha\alpha} ; V_\beta = C^{\beta\alpha} \quad \text{com } \beta = 1, \dots, \alpha-1, \alpha+1, \dots, N.$$

Somos assim conduzidos a dizer que, de uma maneira geral, $C^{\beta\alpha}$ mede o potencial a que fica o condutor β quando se carrega com uma unidade de carga eléctrica o condutor α , tendo todos os outros condutores cargas totais nulas. É este o seu

significado físico. Mas isso quer dizer que toda a informação que conseguirmos obter para os potenciais dos condutores neste estado de equilíbrio se traduz directamente numa informação sobre os coeficientes de potencial — e universalmente válida, porque os coeficientes não dependem dos estados de equilíbrio. Averiguemos então que relações podem ser estabelecidas entre os potenciais neste estado de equilíbrio.

Ora, por aplicação do teorema de Gauss a uma superfície fechada envolvendo completamente um condutor β ($\beta = 1, \dots, \alpha-1, \alpha+1, \dots, N$), de carga total nula, deve haver perfeita compensação entre o fluxo dos tubos de linhas de força do campo eléctrico que partem deste condutor e o fluxo dos tubos de linhas de força que nele terminam. Mas as linhas de força de \vec{E} orientam-se de regiões onde o potencial é mais elevado para regiões onde o potencial é mais baixo. Então o potencial do condutor β estará compreendido entre os valores mais altos e os valores mais baixos do potencial. Por outro lado, não havendo máximos nem mínimos fora dos condutores, sendo nulo o potencial no infinito e certamente positivo o potencial a uma distância suficientemente grande da distribuição (que tem carga global $+1$), resulta que $V(P)$ é positivo por toda a parte com valor máximo no condutor α , único carregado. Então, todo o V_β é positivo, mas nenhum é maior que V_α . Em conclusão, por (1.113), podemos enunciar as seguintes propriedades dos coeficientes de potencial:

$$(1.114) \quad \begin{cases} C^{\alpha\beta} > 0 & (q.q^s \alpha \neq \beta) \\ C^{\alpha\beta} \leq C^{\alpha\alpha} & (\beta \neq \alpha) \end{cases}$$

, ou seja:

Todos os coeficientes de potencial são positivos, mas nenhum coeficiente mútuo é maior que qualquer dos próprios que lhe são correlativos (da mesma linha ou coluna na matriz)

$C^{\alpha\beta} = C^{\beta\alpha}$



8.6.4 — Propriedades específicas dos coeficientes de capacidade, $\hat{C}_{\alpha\beta}$

Consideremos o estado de equilíbrio simples caracterizado por $V_\alpha = 1$; $V_\beta = 0$, com $\beta = 1, \dots, \alpha-1, \alpha+1, \dots, N$.

As relações (1.108) dão neste caso:

$$(1.115) \quad e_\alpha = C_{\alpha\alpha} ; e_\beta = C_{\beta\alpha} \quad \text{com } \beta = 1, \dots, \alpha-1, \alpha+1, \dots, N.$$

Somos assim conduzidos a dizer que, de uma maneira geral, $C_{\beta\alpha}$ mede a carga total contida no condutor β quando se eleva ao potencial unidade o condutor α , ficando todos os outros ao potencial zero. É este o seu significado físico. Mas isso quer dizer (semelhantemente ao caso do § 8.6.3) que toda a informação que conseguirmos obter para as cargas totais dos condutores neste estado de equilíbrio se traduz directamente numa informação sobre os coeficientes de capacidade — e universalmente válida porque os coeficientes não dependem dos estados de equilíbrio. Averiguemos então que relações podem ser estabelecidas entre as cargas neste estado de equilíbrio.

Em primeiro lugar, nenhuma linha de força pode partir de um condutor β ($\beta = 1, \dots, \alpha-1, \alpha+1, \dots, N$), ao potencial zero; isso significaria, com efeito, haver um decréscimo de $V(P)$ a partir do condutor β e acarretaria a existência de um mínimo fora dos condutores para que $V(P)$ voltasse a atingir o valor zero no infinito ou sobre outro condutor

β' , ou o valor 1 sobre o condutor α . Então, as linhas de força do campo, que partem todas do condutor α , único a potencial positivo, ou atingem os outros condutores, ou vão perder-se no ∞ (Ver Fig 39).

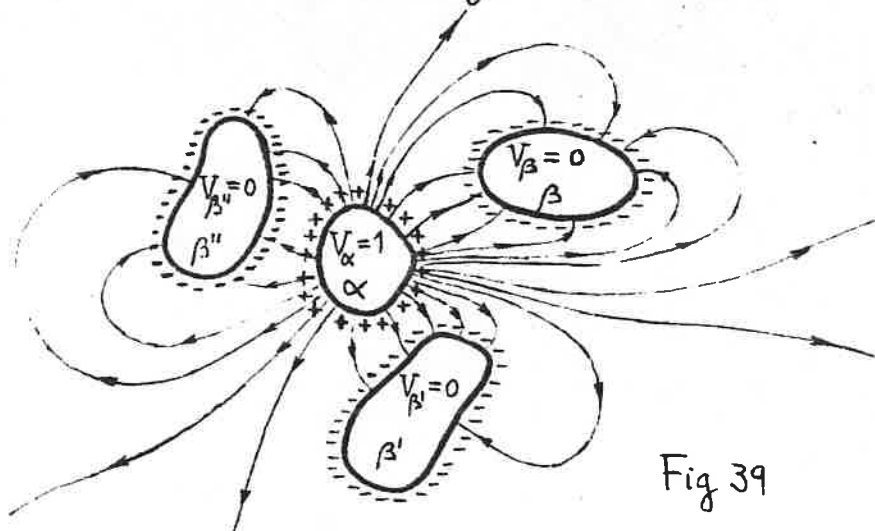


Fig 39

Portanto, o condutor α está carregado positivamente^(*) ($q_\alpha > 0$, que, por (1.115) conduz a $C_{\alpha\alpha} > 0$) e os restantes estão carregados negativamente^(*) ($q_\beta < 0$, que por (1.115) conduz a $C_{\beta\alpha} < 0$, para $\beta \neq \alpha$). Se lembrarmos agora o Teorema dos elementos correspondentes (§ 8.4.1), veremos que a soma das cargas negativas de todos os condutores β ($\beta = 1, \dots, \alpha-1, \alpha+1, \dots, N$), que estão todos influenciados pelo condutor α neste estado de equilíbrio, é menor do que a carga positiva do condutor α , em valor absoluto. Esta diferença compreende-se pelo facto de existirem tubos de força que partem de α e se vão perder no infinito, não atingindo qualquer condutor β . Mas no caso de um condutor envolver completamente outro (exemplo importante, a que voltaremos adiante) são iguais e de sinais contrários as cargas totais neles contidas, se o condutor envolvente está ao potencial zero (é o caso da influência total). Em suma teremos que as cargas cumprem a relação $q_\alpha \geq - \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N q_\beta$, no presente estado de equilíbrio. Relação que, por (1.115), se pode escrever para os coeficientes, mas então com validade geral.

Em conclusão podemos enunciar as seguintes propriedades dos coeficientes de capacidade: (*) (*)

$$(1.116) \quad \begin{cases} C_{\alpha\alpha} > 0 & ; & C_{\alpha\beta} < 0 & (\beta \neq \alpha) \\ C_{\alpha\alpha} \geq - \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N C_{\beta\alpha} & & & (\text{Sinal } =, \text{ no caso} \\ & & & \text{de influência total}) \end{cases}$$

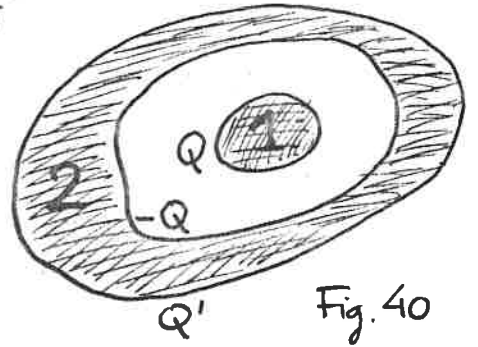
(*) (*) Entre as propriedades (1.116) e (1.114), existe evidentemente a interdependência que decorre do facto de serem as matrizes $\{C_{\alpha\beta}\}$ e $\{C^{\alpha\beta}\}$ inversas uma de outra. Prova-se facilmente a desigualdade da 2ª linha em (1.116), combinando (1.114) com a relação $\{C_{\alpha\beta}\} \times \{C^{\alpha\beta}\} = \mathbb{1}$.

(*) Cf. § 8.3.3, pag 80.

8.7 — Condensadores

Consideremos um sistema de dois condutores, sendo um deles completamente envolvido pelo outro (v. Fig. 40). As relações (1.108) entre as cargas e os potenciais escrevem-se aqui como:

$$(1.117) \quad \begin{cases} e_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2 \\ e_2 = C_{21} V_1 + C_{22} V_2 \end{cases}$$



Mas nós sabemos já que $C_{12} = C_{21}$ (cf. § 8.6.2); e, por outro lado, por (1.116), vem $C_{11} = -C_{12}$ (porque há influência total relativamente ao condutor 1, completamente envolvido) e $C_{22} > -C_{21}$ (porque há influência total relativamente ao condutor 2).
 Donde resulta que (1.117) passa a escrever-se:

$$(1.118) \quad \begin{cases} e_1 = C_{11} (V_1 - V_2) = Q \\ e_2 = -C_{11} (V_1 - V_2) + (C_{22} - C_{11}) V_2 = -Q + Q' \end{cases}$$

A 1ª eq. de (1.118) evidencia que há proporcionalidade directa entre Q e $V_1 - V_2$, grandezas do mesmo sinal ($C_{11} > 0$). Na 2ª eq. pôs-se em evidência a carga total Q' que recobre a superfície exterior do condutor 2, visto que, pelo teorema do condutor com cavidade, a superfície interior do condutor 2 se recobre sempre de uma carga total $-Q$ (igual e de sinal contrário à carga total do condutor 1) — cf. 8.4.2. Tem-se portanto $Q' = (C_{22} - C_{11}) V_2$, o que evidencia haver proporcionalidade directa entre Q' e V_2 , grandezas que são do mesmo sinal ($C_{22} > C_{11} \Rightarrow C_{22} - C_{11} > 0$). Em

resumo:

$$(1.118') \quad \begin{cases} Q = C_{11} (V_1 - V_2) \\ Q' = (C_{22} - C_{11}) V_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} C_{22} &> -C_{21} \\ C_{21} &= C_{12} \\ C_{11} &= -C_{12} \end{aligned}$$

Pode considerar-se que são estas as equações que regem os estados eléctricos do sistema. Uma alteração qualquer de Q' produz uma alteração proporcional de V_2 ; mas não pode alterar Q , carga total do condutor 1, isolado de 2; V_1 alterar-se-á da mesma quantidade que V_2 , de modo a que $V_1 - V_2$ permaneça inalterado, como Q ; e inalterada fica também a carga total, $-Q$, da superfície interior do condutor 2, que continua a enfrentar a carga Q do condutor 1. [Pode mesmo mostrar-se que as duas distribuições de carga, separadas pelo volume do condutor 2 — região de campo nulo —, são completamente independentes uma da outra. Igualmente independentes entre si são os campos nas duas regiões, interior e exterior, separadas pelo condutor 2. Uma alteração do campo exterior pode, quando muito, modificar uniformemente o potencial no interior, mas não o campo no interior — e não afecta, em particular, a diferença de potencial $V_1 - V_2$. O condutor 2 constitui um 'écran' eléctrico.]

O sistema de dois condutores aqui considerado diz-se um condensador. A superfície do condutor 1 e a superfície interior do condutor 2, que se enfrentam mutuamente, chamam-se armaduras do condensador. Cargas totais Q e $-Q$, respectivamente na armadura interna e na armadura externa, enfrentam-se mutuamente em influência total sob uma diferença de potencial $V_1 - V_2$ (d.d.p. entre as armaduras) proporcional e do mesmo sinal que Q . Diz-se que o condensador armazena a carga Q , ou que Q é a carga do condensador (ou: carga armazenada pelo condensador). A grandeza $C = C_{11}$ chama-se capacidade do condensador (com a significação física de:

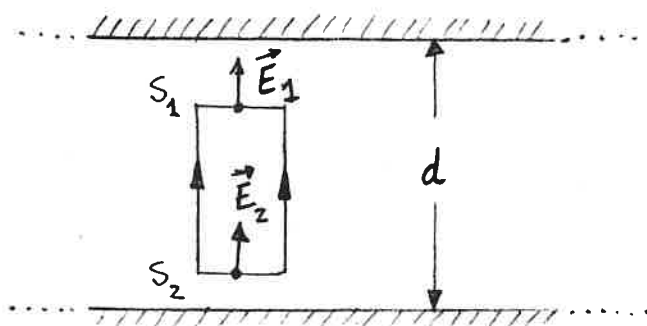
carga armazenada para uma d. d. p. entre as armaduras igual a uma unidade de potencial). Tem-se :

$$(1.119) \quad Q = C (V_1 - V_2)$$

De uma maneira mais geral, mesmo se um dos corpos não envolve completamente o outro, pode ainda dizer-se que há influência total de um condutor (1) sobre um condutor (2), se todas as linhas de força do campo que partem do 1.º vão ter ao 2.º. Nesta situação mais geral, verifica-se ainda que as cargas globais das superfícies dos dois condutores, que se enfrentam mutuamente, são iguais e opostas, Q e $-Q$, e isto por força do teorema dos elementos correspondentes. Estes sistemas assim concebidos constituem também condensadores (o condensador plano é um típico exemplo disso). As considerações precedentes, as definições acima feitas e a fórmula (1.119) são ainda válidas e geralmente aplicáveis.

8.7.2. Condensador plano

As armaduras do condensador plano são limitadas por superfícies planas, paralelas, uma em face da outra, e a uma distância d muito menor que as suas dimen-



sões. Seja Q a carga do condensador; teremos, pois, numa das armaduras a carga $+Q$ (armadura positiva) e na outra a carga $-Q$ (armadura negativa).

Por razões de simetria o campo elétrico na região central do condensador é perpendicular às armaduras; entã, se considerarmos o tubo de forças representado na figura, dado que as linhas de força do campo

são paralelas entre si (perpendiculares às armaduras), as áreas das secções, S_1 e S_2 , que limitam o tubo de força são iguais: $S_1 = S_2 = S$.

Se calcularmos o fluxo do campo eléctrico que sai da superfície Σ constituída pelo tubo de força e pelas secções consideradas teremos:

$$\phi = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds = E_1 S - E_2 S ;$$

o teorema de Gauss diz-nos que este fluxo é nulo, logo:

$$E_1 = E_2$$

isto é, o campo entre as armaduras é uniforme, pois as secções S_1 e S_2 são duas quaisquer secções (rectas), do tubo de força, do espaço entre as armaduras. Seja então, E , o valor do campo no espaço entre as armaduras; teremos

$$E = \sigma / \epsilon_0$$

(σ , densidade superficial de carga eléctrica na armadura fronteira do condensador), pois sabemos ser este o valor do campo eléctrico num ponto exterior, muito próximo, dum condutor em equilíbrio electrostático.

A diferença de potencial entre as armaduras do condensador, V , será dada por:

$$V = E \times d$$

e a carga Q do condensador será igual a:

$$Q = \sigma A$$

onde A é a área das armaduras. A capacidade do condensador, C , será dada por:

$$(1.120) \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma A}{\sigma d / \epsilon_0} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

onde se vê, que a capacidade de um condensador plano é directamente proporcional à área das suas armaduras e inversamente proporcional à distância entre elas.

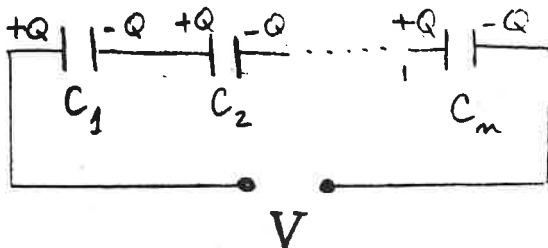
Nota: Ao efectuar estes cálculos desprezamos a perturbação do campo eléctrico (e portanto de σ) nas extremidades das armaduras; dado que a distância entre estas, d , é muito menor que as suas dimensões lineares, este efeito é na verdade muito pequeno; foi calculado que a uma distância dos bordos, igual à distância entre as armaduras, o campo é apenas perturbado de ordem de 10^{-4} .

21/12/59

8.7.3. Leis de associação de condensadores

a) Associação em série

Chama-se associação em série à associação representada na figura. Sejam C_1, C_2, \dots, C_n as capacidades dos n condensadores associados. Vamos calcular qual a capacidade, C , do condensador equiva-



lente a esta associação, isto é, do condensador que carregado com a mesma carga Q , fica submetido à mesma diferença de potencial V entre as suas armaduras; essa capacidade C satisfará, portanto a

$$(1.121) \quad Q = C V$$

É evidente que se for $+Q$ a carga fornecida à primeira armadura do condensador 1, na segunda armadura deste condensador aparecerá, por influência, a carga $-Q$, o que faz com que a primeira armadura do condensador 2 (que constitui em si a segunda do condensador 1 em um sistema isolado) fique carregada com a carga $+Q$; estendendo este raciocínio aos restantes condensadores é fácil concluir que todos eles ficam carregados com a mesma carga Q . Se for V_1 a diferença de potencial entre as armaduras do condensador 1, V_2 a d.d.p. entre as armaduras do condensador 2, etc., teremos:

$$Q = C_1 V_1 \quad , \quad Q = C_2 V_2 \quad \dots \quad Q = C_n V_n$$

Teremos, por outro lado,

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n \quad , \quad \text{ou seja}$$

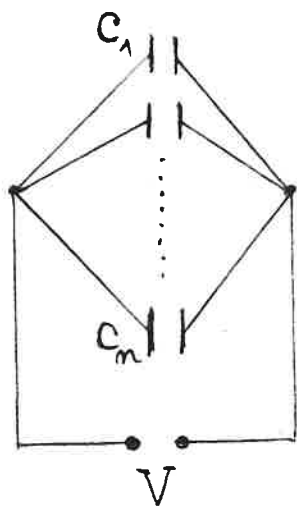
$$V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} = Q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

o que, comparando com a expressão (1.121) permite escrever:

$$(1.122) \quad \frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

b) Associação em paralelo

Chama-se associação em paralelo à associação representada na figura. Como é evidente, a diferença de potencial entre as armaduras dos n condutores tem o mesmo valor V ; será, então:



$$Q_1 = C_1 V, \quad Q_2 = C_2 V \dots \dots Q_n = C_n V.$$

Por outro lado, a carga Q fornecida ao sistema de condutores vai distribuir-se entre eles, verificando-se necessariamente a relação:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n ;$$

teremos, pois:

$$Q = C_1 V + C_2 V + \dots + C_n V = \left(\sum_{i=1}^n C_i \right) V$$

expressão que comparada com (1.121) permite escrever:

$$(1.123) \quad C = \sum_{i=1}^n C_i$$

A capacidade C do conjunto dos n condutores associados em paralelo é portanto igual à soma das capacidades dos n condutores.

8.8 — Resultante eléctrica. Pressão electrostática na superfície limitrofe de um condutor.

Vimos já que o campo eléctrico gerado por uma distribuição contínua de carga em superfície, $[S]$, não é definido para um observador sobre a superfície carregada, S , acusando aí uma descontinuidade bem caracterizada (veja § 7.4.3 expressões (1.78) ou (1.79)). Para uma hipotética carga de prova idealmente localizada sobre S , não pode pois pensar-se em medir a força que sobre ela deveria actuar por efeito da distribuição superficial $[S]$, porque tal força não ficaria aí fisicamente bem definida.

Problema radicalmente distinto deste é, entretanto o de averiguar qual a força que actua sobre uma carga elementar σdS , que faz parte integrante da distribuição, por efeito de todas as restantes cargas de $[S]$. É deste problema que nos ocuparemos no presente estudo.

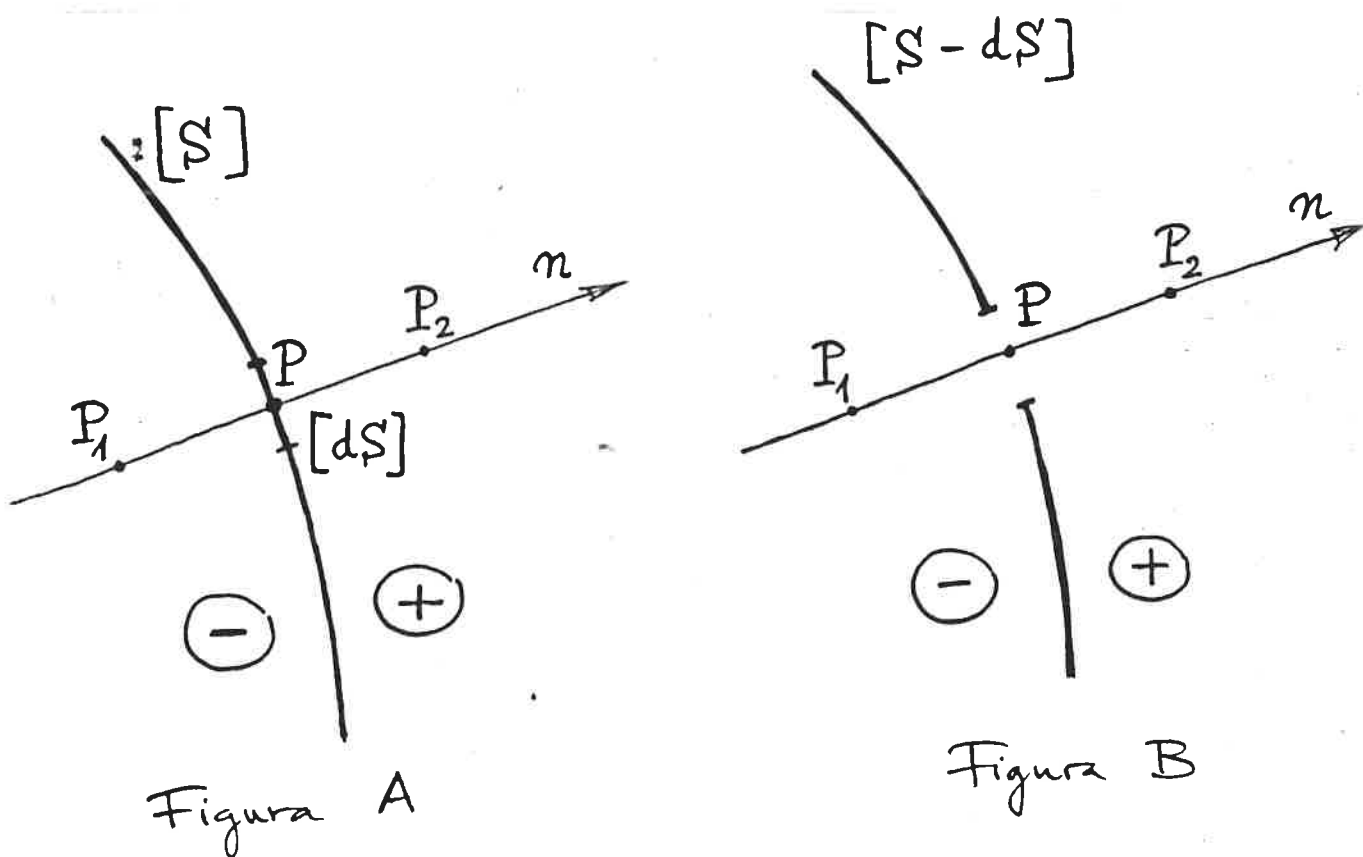
8.8.1 — Resultante eléctrica numa distribuição superficial idealizada de carga (no vácuo).

Seja P um ponto qualquer da superfície S , dS um elemento de área circunvizinho de P , σdS a carga que nele reside; consideremos a normal a S em P , \underline{n} , e seja \vec{n} o vector unitário desta direcção orientado da região \ominus para a região \oplus (regiões separadas por S) — veja Figura A. Imaginemos, por outro lado a distribuição que resulta de supor que se subtrai, à distribuição dada sobre S , o elemento de carga σdS — veja Figura B. Tal distribuição, $[S - dS]$,

produz no ponto P , que lhe é exterior, um campo bem definido; designemo-lo por $\vec{E}_P[S-dS]$. A força que actua sobre σdS , por efeito de todas as restantes cargas de S , obtém-se então por

$$(8.8-a) \quad d\vec{R}_P = \sigma dS \times \vec{E}_P[S-dS]$$

e chama-se resultante eléctrica (em P).



8.8.2 — Expressão geral da resultante eléctrica em termos dos valores limites do campo, devido a $[S]$, sobre S .

Vamos mostrar que $d\vec{R}$, definida por (8.8-a), se pode exprimir, de um modo geral, à custa dos valores limites \vec{E}^+ e \vec{E}^- que já utilizámos para caracterizar a descontinuidade do campo devido a $[S]$ sobre S (Confronte (1.79) e o texto em que se insere

esta expressão no § 7.4.3).

Para isso, tomemos dois pontos P_1 e P_2 sobre a normal \underline{n} , na região \ominus e na região \oplus , respectivamente, e equidistantes de P — veja as Figuras A e B. O campo eléctrico produzido pela distribuição $[S]$, quer em P_1 , quer em P_2 , é bem definido pelo facto de qualquer destes pontos ser exterior a $[S]$ e pode calcular-se mediante uma conveniente decomposição do domínio carregado ($[S] \equiv [S-dS] \cup [dS]$) pelas expressões seguintes, respectivamente:

$$(8.8 - b.1) \quad \vec{E}_{P_1}[S] = \vec{E}_{P_1}[S-dS] + \vec{E}_{P_1}[dS]$$

$$(8.8 - b.2) \quad \vec{E}_{P_2}[S] = \vec{E}_{P_2}[S-dS] + \vec{E}_{P_2}[dS]$$

em que $\vec{E}[\dots]$ representa o campo produzido pelo domínio carregado $[\dots]$.

Ora, os 2^{os} termos dos 2^{os} membros de (8.8-b.1) e (8.8-b.2) satisfazem obviamente a

$$(8.8 - c) \quad \vec{E}_{P_1}[dS] = - \vec{E}_{P_2}[dS]$$

(por razões de simetria, dada a equidistância $\overline{P_1P} = \overline{P_2P}$)
 Donde resulta que eles cancelam entre si na soma de (8.8-b.1) com (8.8-b.2) e isso permite escrever

$$(8.8 - d) \quad \vec{E}_{P_2}[S] + \vec{E}_{P_1}[S] = \vec{E}_{P_2}[S-dS] + \vec{E}_{P_1}[S-dS]$$

Se suposermos agora que os observadores P_1 e P_2

vão ambos tender para P , deslocando-se segundo a normal \bar{n} e mantendo-se sempre equidistantes de P então a relação (8.8-d) verifica-se constantemente e pode tomar-se como válida na situação limite. Ora, em conformidade com as notações do § 7.4.3,

$$(8.8-e) \quad \begin{cases} \lim_{P_2 \rightarrow P} \vec{E}_{P_2}[S] = \vec{E}_P^+ \\ \lim_{P_1 \rightarrow P} \vec{E}_{P_1}[S] = \vec{E}_P^- \end{cases}$$

tendo os valores limites \vec{E}_P^+ e \vec{E}_P^- o significado que lhes foi atribuído nesse mesmo § 7.4.3. Entretanto, como a Figura B ajuda a compreender tem-se que:

$$(8.8-f) \quad \lim_{P_2 \rightarrow P} \vec{E}_{P_2}[S-dS] = \lim_{P_1 \rightarrow P} \vec{E}_{P_1}[S-dS] = \vec{E}_P$$

sendo $\vec{E}[S-dS]$ o campo bem definido (como já foi acima P sublinhado) que a distribuição $[S-dS]$ produz no ponto P , que lhe é exterior; as relações (8.8-f) são, com efeito, uma afirmação da continuidade do campo produzido por uma distribuição superficial em pontos exteriores (recordar o § 7.5). Assim, na situação limite, combinando (8.8-e) e (8.8-f), teremos, a partir de (8.8-d):

$$(8.8-g) \quad \vec{E}_P^+ + \vec{E}_P^- = 2 \vec{E}_P[S-dS]$$

E a resultante eléctrica, no ponto P , vale, em

consequência (introduzindo (8.8-g) em (8.8-a)) :

$$(8.8-h) \quad d\vec{R}_P = \frac{1}{2} (\vec{E}_P^+ + \vec{E}_P^-) \sigma_P dS.$$

8.8.3 — Pressão electrostática na superfície limítrofe de um condutor

O resultado obtido no § precedente, assume, no caso particular dos condutores (cujas cargas efectivas, como se sabe, constituem distribuições superficiais) uma simplificação muito interessante. Com efeito, pelo §§ 8.2 e 8.3 (pelas expressões (1.82) e (1.83)), teremos aí $\vec{E}_P^- \equiv \vec{E}_P^{\text{int}} = 0$ e $\vec{E}_P^+ \equiv \vec{E}_P^{\text{ext}} = \frac{\sigma_P}{\epsilon_0} \vec{n}$ (\vec{n} aponta para o exterior do condutor) donde se segue que (8.8-h) se particulariza para:

$$(8.8-i) \quad d\vec{R}_P = \frac{\sigma_P^2}{2\epsilon_0} dS \vec{n}.$$

Assim, a resultante eléctrica que actua sobre o elemento de carga (genérico) σdS na superfície de um condutor orienta-se sempre segundo a norma exterior ($\sigma_P^2 > 0$) e é directamente proporcional ao elemento de área orientado $d\vec{S} \equiv dS \vec{n}$. Esta proporcionalidade directa permite definir, em cada ponto da superfície do condutor, uma pressão electrostática, dada, como um escalar positivo

$$(8.8-j) \quad p_P = \frac{\sigma_P^2}{2\epsilon_0}.$$

9. CAMPO ELECTROSTÁTICO NA PRESENÇA DE DIELECTRICOS

9.1 — Polarizações dos dieléctricos

Um corpo perfeitamente isolante e neutro não manifesta de per si qualquer acção eléctrica. Mas a experiência mostra que, quando se coloca um tal corpo na presença de corpos electrizados, aparecem modificadas as propriedades do campo electrostático pré-estabelecido por esses corpos electrizados. (As experiências esquematicamente representadas na Fig. 9-1 são disso exemplificativas.) Tais factos levam a pensar que o corpo isolante, neutro, se torna ele próprio fonte de uma acção eléctrica suplementar quando colocado sob a acção de corpos electrizados. E concluímos que devem verificar-se alterações na constituição eléctrica de um isolante quando ele é imerso num campo electrostático. Isso pode ser razoavelmente entendido quando se tem em conta a estrutura atómico-molecular da matéria.

Vimos já que num isolante ideal não há electrões livres; todos os electrões se comportam como electrões ligados, portanto, sem capacidade para constituírem suporte a um deslocamento efectivo de cargas à escala macroscópica. (Cf. § 8.1). Colocado um isolante num campo exterior, não é pois de esperar que as forças eléctricas, determinadas pelo campo sobre as cargas das partículas elementares constituintes do isolante, vão produzir qualquer deslocamento de cargas finito, à escala macroscópica. (Não é assim de esperar que os isolantes manifestem fenómenos de influência electrostática tão espectaculares como os dos condutores — as experiências esquematizadas nas Fig: 9-2; 3 ilustram isso.)
É no entanto de admitir que essas forças eléctricas, de

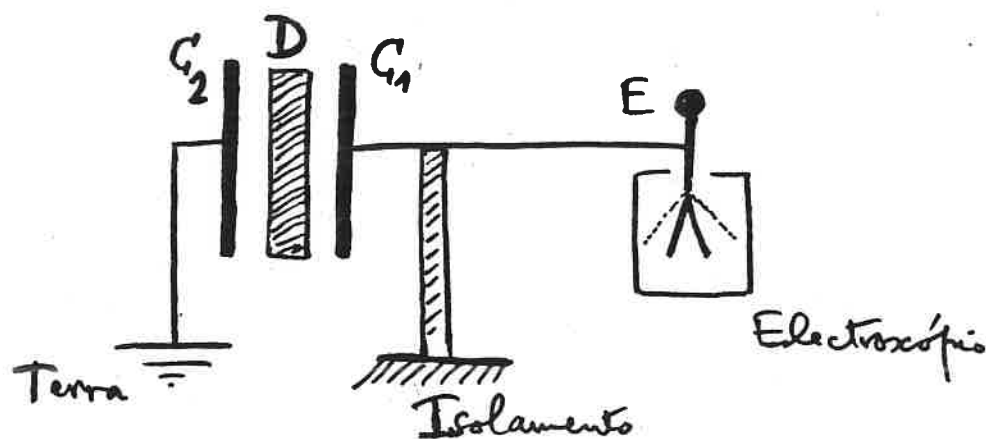
acção do campo sobre o isolante, provoquem uma modificação nos estados de movimento das partículas constituintes, conduzindo, naturalmente, a uma nova distribuição das suas posições médias, dentro de cada elemento de volume infinitamente pequeno (macroscópico). Na ausência de campo, um corpo isolante no estado neutro concebe-se como apresentando, em cada elemento de volume, uma distribuição das posições médias das suas partículas constituintes tal que se verifica, em geral, serem coincidentes os centros de cargas negativas e de cargas positivas; a distribuição tem assim, em cada elemento de volume, não só carga total nula, mas também um momento dipolar nulo (Cf. § 5A.3, pag 49^{VIII}). Ora, a nova distribuição das posições efectivas (médias) das cargas dentro de cada elemento de volume dV , produzida quando o dieléctrico é imerso num campo exterior, implica em geral que deixem de coincidir os centros de cargas positivas e de cargas negativas para passarem a apresentar uma separação $\vec{\delta}$, infinitamente pequena, dentro de dV ; surge assim para a distribuição dentro de dV , que continua a ter carga total nula, um momento dipolar significativo, de valor $e\vec{\delta}$, se for e a carga positiva global dentro de dV . Em cada elemento de volume infinitamente pequeno do dieléctrico se gera assim, por acção do campo exterior, um dipolo eléctrico de momento $d\vec{p}$ ($= e\vec{\delta}$) infinitamente pequeno com dV .

O dieléctrico revela-se pois como tendo adquirido, por acção do campo, em que está imerso, uma distribuição contínua de dipolos infinitamente pequenos. É o fenómeno de polarização de um dieléctrico. O dieléctrico diz-se polarizado.

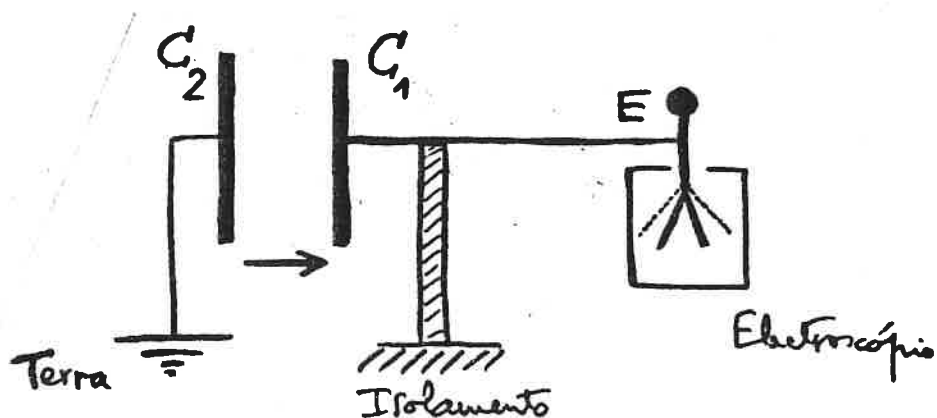
9.2 — Experiências ilustrativas

9.2.1 — Placa dielétrica introduzida no espaço entre as armaduras de um condensador plano.

A experiência esquematizada na Fig 9-1 (I) permite pôr em evidência o facto de que a interposição de uma placa de



material isolante inicialmente neutra, entre as armaduras de um condensador, provoca a modificação das propriedades do campo aí pré-estabelecido. A inserção da placa D (sem mais) tem por efeito diminuir o potencial da armadura C_1 , efeito este acusado pelo electoscópio E (ligado a C_1 por um fio condutor). Estando C_2 sempre ao potencial zero, esta diminuição do potencial de C_1 comprova bem que a inserção da placa dielétrica provoca uma modificação do campo entre as armaduras do condensador. [Como termo de comparação, é interessante considerar a experiência esquematizada na Fig 9-1 (II) em que o

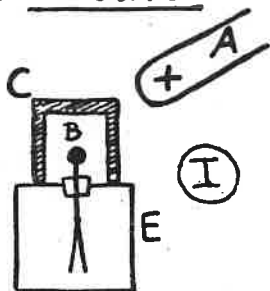


espaço entre as armaduras é simplesmente o vácuo. A redução da distância entre C_1 e C_2 provoca um efeito equiparável ao da inserção da placa D em (I). Sendo constante, em ambas as experiências, a carga contida no conjunto (C_1, E), que se encontra isolado, e estando além disso C_2 sempre ao potencial zero, a diminuição de potencial acusada pelo electrosópio E interpreta-se obviamente, em ambos os casos, como um aumento da capacidade do condensador.]

9.2.2 — Distinção entre os comportamentos de um condutor e de um dieléctrico, sob a acção de um campo.

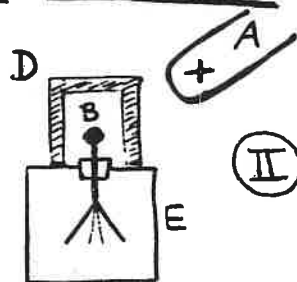
As experiências esquematizadas na Fig 9-2 (I e II) permitem pôr em evidência de modo flagrante que um condutor e um isolante se comportam de maneiras radicalmente diferentes sob a acção de um campo exterior. Em (I), a acção eléctrica produzida pelo corpo electrizado A não se exerce sobre a pequena esfera B — o electrosópio E fica insensível — e isso é devido à interposição do copo C, de material condutor. Em (II), a acção eléctrica produzida pelo corpo electrizado A atinge a esfera B — o electrosópio acusa um potencial bem apreciável — apesar da interposição do copo D, de material dieléctrico. Assim, uma ca-

C: CONDUTOR



Campos nulos em B

D: DIÉLECTRICO



Campos não nulos em B

Figura 9-2

mada fechada de isolante envolvendo uma cavidade (experiência (II)) não produz efeito de écran eléctrico para os corpos dentro da cavidade — efeito esse bem conhecido para o caso de a camada fechada ser condutora (experiência (I)).

Sabe-se que na existência de um efeito de écran eléctrico desempenha um papel proeminente o facto de que a camada condutora fechada (experiência (I)) constitui uma região de campo nulo. E sabe-se também que, por seu turno, este facto se acha essencialmente ligado à grande mobilidade dos electrões livres, suporte de toda a distribuição de cargas num condutor.

Porque se não produz, no caso da experiência (II), efeito de écran eléctrico, é de esperar que a camada fechada isolante (como D) não constitua uma região de campo nulo. Mas isso comprova que, face a um corpo electrizado influenciante, a modificação da constituição eléctrica de um isolante polarizado é radicalmente distinta da que se produz num condutor. A alteração da repartição das posições médias das cargas constituintes de um dieléctrico (ao contrário do que se passa com um condutor) é estritamente local visto ser fundada nas modificações dos estados de movimento dos electrões ligados.

9.2.3 — Inseparabilidade das cargas induzidas num dieléctrico polarizado

Comecemos por recordar a experiência esquematizada na Fig. 9-3 (I). Os dois condutores C_1 e C_2 inicialmente neutros são postos em contacto um com o outro constituindo assim um

Influência electrostática em condutores

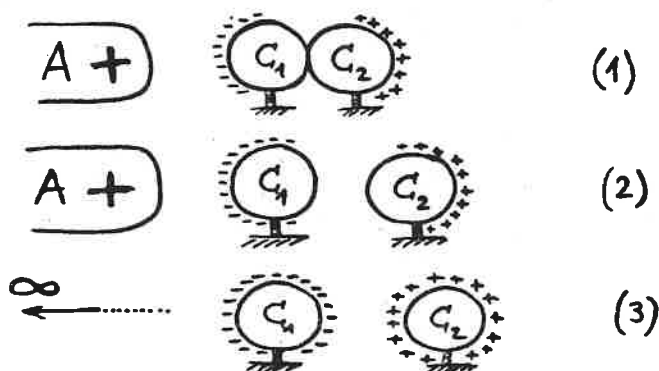


Figura 9-3 (I)

conjunto-condutor que vai ser submetido à influência electrostática do corpo A , carregado positivamente. [Situação (I)-(1)]
Surgem cargas negativas na região mais próxima de A (que pertence a C_1) e cargas

positivas na região mais afastada de A (que pertence a C_2). Separados em seguida os dois condutores C_1 e C_2 na presença do corpo influenciante A [situações (I) - (2)], e afastado depois o corpo A para muito longe (a distância infinita) [situações (I) - (3)], então os dois condutores manifestam-se carregados com cargas de sinais contrários (C_2 com carga do mesmo sinal que A, C_1 com carga de sinal contrário à de A) — como pode verificar-se pela sua acção sobre pêndulos eletrizados. Isto significa que os condutores C_1 e C_2 , aquando da sua separação em presença de A, levam consigo as cargas geradas por influência electrostática nas respectivas regiões do conjunto — condutor e conservam depois essas cargas quando a acção influenciante deixa de existir (quando o corpo A é afastado para muito longe). As cargas de influência, positivas e negativas, geradas num condutor são susceptíveis de se localizar em regiões muito afastadas, à escala macroscópica, dentro do condutor e podem em consequência ser separadas umas das outras mediante processos similares aos descritos acima. (Mais uma vez, é o gás de electrões livres o suporte desta movimentação).

Descrevamos agora a experiência esquematizada na Fig. 9-3 (II), em que se procura repetir, agora com um corpo dieléctrico em vez de um condutor, a experiência (I) atrás referida. Um bloco dieléctrico, (de parafina dura, por exemplo) inicialmente neutro, também se electriza sob a influência do corpo A, i. e., também vê modificada a sua constituição eléctrica (situações (II) - (1)). Um electroscópio que se aproxime,

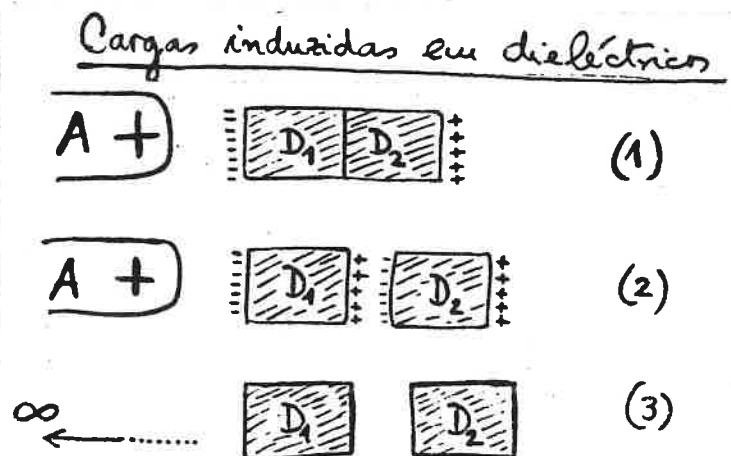


Figura 9-3 (II)

por ex., de D_2 , acusa a existência de cargas induzidas no bloco dielétrico. Seccione-se agora o bloco em duas partes D_1 e D_2 , ainda na presença do corpo influenciante A : em ambas se continua a detectar a existência de cargas induzidas (situações (II)-(2)). No entanto, quando se afasta o corpo A para uma distância infinita (situações (II)-(3)), então cada um dos blocos D_1 e D_2 se volta a manifestar como corpo neutro. Isto é flagrantemente distinto do que se passa com os condutores, na experiência (I) — e não pode deixar de significar que se reduzem mutuamente (a zero) as cargas induzidas que surgiram em cada um dos blocos dielétricos. Verifica-se assim que as cargas induzidas cuja presença se manifesta num dielétrico polarizado, umas positivas outras negativas, são inseparáveis; e é fácil compreender que esta inseparabilidade esteja directamente relacionada com a incapacidade de tais cargas se deslocarem de modo a que as positivas se distanciem apreciavelmente das negativas — de harmonia com a conclusão do parágrafo precedente (§ 9.2.2).

9.3 — Mecanismos de polarização

O fenómeno de polarização de um dielétrico pode ser razoavelmente compreendido com base na teoria atómico-molecular da estrutura da matéria. Esquemmatizando, podem apresentar-se dois mecanismos de polarização essencialmente distintos:

- (1) por deformação das camadas electrónicas de cada molécula constituinte da substância;
- (2) por orientação dos dipolos permanentes das moléculas constituintes, dentro de cada elemento de volume do dielétrico.

9.3.1 — Deformação das camadas electrónicas

O campo eléctrico exterior actua sobre os electrões de cada átomo ou molécula constituinte do dieléctrico (electrões ligados, como deve supor-se) e a modificação naturalmente produzida por essa acção nos estados de movimento dos electrões provoca uma deformação das camadas electrónicas. Origina-se, em consequência, um dipolo induzido (Cf. § 5A.3, pag 49^{IX}).

Este mecanismo é particularmente flagrante no caso em que as moléculas constituintes do dieléctrico não possuem momento dipolar permanente (moléculas não-polares), por ex. gases raros, hidrogénio, oxigénio, azoto, anidrido carbónico, ...

Mas de facto pode dizer-se que se trata de um efeito micro-físico fundamental que se processa ao nível intramolecular e ocorre em todos os sistemas atômico-moleculares, embora possa tornar-se menos relevante (ou mesmo ofuscar-se) diante de um outro efeito mais forte, no caso em que as moléculas possuem momento dipolar permanente (moléculas polares).

[Apenas nos reportamos aqui a uma polarização electrónica; mas um mecanismo algo semelhante, de deformação molecular, pode ocorrer num cristal iónico, em que o campo exterior provoca um deslocamento dos iões (+) e (-), em sentidos contrários, falando-se então de polarização iónica.]

9.3.2 — Orientação dos dipolos permanentes

O segundo mecanismo intervém quando as moléculas constituintes de um dieléctrico gasoso ou líquido são dotadas de momento dipolar permanente (moléculas polares), por exemplo ClH , CO , OH_2 , NH_3 ,

As miríades de moléculas contidas dentro de um elemento

de volume dv (infinitamente pequeno) acham-se aí em agitação térmica (caótica); e os seus momentos dipolares eléctricos, todos com o mesmo módulo, têm, na ausência de campo exterior, orientações distribuídas inteiramente ao acaso. É, assim, igualmente provável encontrar uma molécula com momento dipolar orientado segundo uma qualquer dada orientação. Nestas condições, é nulo (estatisticamente nulo) o momento dipolar globalmente resultante para cada elemento de volume dv (calculado pela média estatística sobre as miríades de moléculas presentes em dv).

A actuação de um campo exterior, \vec{E} , tem por efeito exercer sobre cada dipolo molecular, \vec{p}_0 , um binómio, de momento $\vec{\Gamma} = \vec{p}_0 \wedge \vec{E}$, tendente a orientar o dipolo paralelamente ao campo (situação de equilíbrio estável no campo). Esta tendência é contrariada pelas colisões, de agitação térmica; ela vai, no entanto, determinar uma modificação da média estatística que conduz ao momento dipolar globalmente resultante para dv , tornando-o agora diferente de zero. Assim se origina um momento dipolar médio diferente de zero, em cada dv .

Trata-se portanto de um efeito estatístico, que se processa ao nível intermolecular (nas colisões, entram em jogo forças intermoleculares) e que depende essencialmente da temperatura (visto que a orientação dos dipolos permanentes é contrariada pela agitação térmica).

[A dependência da temperatura caracteriza o efeito do segundo mecanismo em contraste com o que se passa no primeiro mecanismo, cujo efeito é obviamente independente da temperatura, dada a sua natureza puramente intramolecular. Este

diferente comportamento, relativamente à variação da temperatura, constitui uma base para a distinção e a separação experimentais dos dois efeitos, permitindo realizar medições diversas, conducentes, por um lado, a valores da polarizabilidade das moléculas individuais (que intervêm no primeiro mecanismo) e, por outro lado, a valores do momento dipolar permanente molecular, \vec{p}_0 (que intervêm no segundo mecanismo).] 5/190

9.4 — Acção de um dieléctrico polarizado em pontos exteriores

9.4.0 — Vector polarização

Um dieléctrico polarizado apresenta-se-nos, pois, como uma distribuição contínua de dipolos em volume (no volume V do dieléctrico). Em cada ponto Q do dieléctrico, tomando o elemento de volume dv que o cerca e o dipolo \vec{dp} gerado nesse dv , pode definir-se uma grandeza vectorial — dita vector polarização ou simplesmente polarização, e designada por \vec{P} — mediante a relação

$$(1.124) \quad \vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv}$$

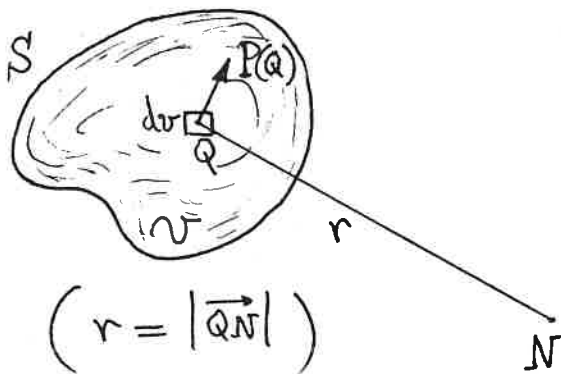
A função de ponto $\vec{P}(Q)$ caracteriza o estado do dieléctrico polarizado. A grandeza \vec{P} tem o significado de uma densidade volumínica: representa o momento dipolar gerado no volume dv circunvizinho de Q , por unidade de volume.

9.4.1 — Potencial e campo em pontos exteriores

No elemento de volume dv circunvizinho do ponto interior genérico, Q , do dieléctrico está contido um dipolo de momento $d\vec{p} = \vec{P}(Q) dv$, pela expressão (1.124).

Para estudar a acção global do dieléctrico, pode pois recorrer-se à expressão do potencial produzido por um dipolo (V. § 5) e proceder em seguida por aditividade dos potenciais.

Suponhamos que o observador se encontra num ponto N exterior ao volume do dieléctrico (V. Figura). O potencial



$$(r = |\vec{QN}|)$$

produzido por $(d\vec{p})_Q$ vale:

$$dV_N^{(d\vec{p})} = -k_0 d\vec{p} \cdot \text{grad}_N \frac{1}{r}$$

E não oferece qualquer dúvida escrever para o potencial produzido pelo dieléctrico polarizado, V_N ,

a expressão:

$$(1.125) \quad V_N = -k_0 \int_V \vec{P}(Q) \cdot \text{grad}_N \frac{1}{r} dv$$

ou seja:

$$(1.125') \quad V_N = k_0 \int_V \vec{P}(Q) \cdot \text{grad}_Q \frac{1}{r} dv$$

O campo virá imediatamente dado por $\vec{E} = -\text{grad} V$.

9.4.2 — Distribuições fictícias equivalentes

Uma transformação matemática correntemente utilizada para integrações deste tipo, vai agora permitir obter uma outra expressão para V_N , susceptível de interessante interpretação física.

Para isso, lancemos mão da identidade diferencial

$$\text{div}_Q \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) = \frac{1}{r} \text{div}_Q \vec{P} + \vec{P} \cdot \text{grad}_Q \frac{1}{r}$$

que, introduzida em (1.125'), conduz a

$$\text{⊗ } dv \quad V_N = -k_0 \int_V \frac{1}{r} \text{div}_Q \vec{P} dv + k_0 \int_V \text{div} \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) dv ;$$

e, tratando em seguida o 2.º integral pelo teorema de fluxo-divergência, vem:

$$(1.126) \quad V_N = k_0 \int_V \frac{-\operatorname{div}_Q \vec{P}}{r_{QN}} dv + k_0 \int_S \frac{(\vec{P} \cdot \vec{n})_R}{r_{RN}} dS$$

sendo S a superfície limítrofe de v , i. e., a superfície limítrofe do dieléctrico; e \vec{n} o vector unitário da normal orientada para o exterior de v num ponto corrente (R) pela superfície limítrofe S . Ora, os dois últimos integrais representam potenciações bem conhecidas. Assim, a expressão (1.126) de V_N mostra claramente que o potencial produzido por um dieléctrico polarizado — com polarização $\vec{P}(Q)$ no ponto genérico Q do seu volume — é idêntico ao que seria produzido pela justaposição de duas distribuições contínuas de carga eléctrica: uma em volume, com densidade volumica $\rho'(Q) = -\operatorname{div}_Q \vec{P}$, ocupando o volume v do dieléctrico (v. o 1.º integral em (1.126)); outra em superfície, com densidade superficial $\sigma'(R) = (\vec{P} \cdot \vec{n})_R$, estabelecida sobre a superfície limítrofe do dieléctrico, S (v. o 2.º integral em (1.126)).

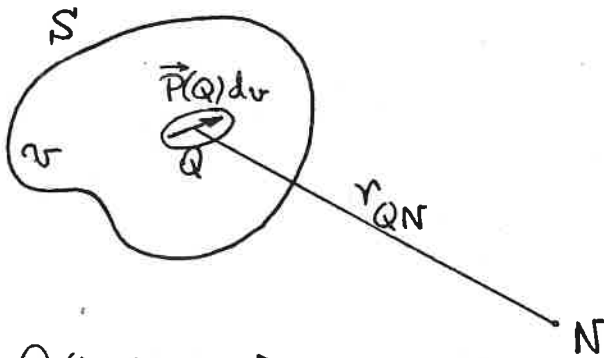
A distribuição contínua de dipolos que caracteriza o dieléctrico polarizado — a distribuição que temos por real — é assim equivalente à justaposição de duas distribuições contínuas (de monopolos) fictícias, uma em volume e a outra em superfície, com densidades, respectivamente:

$$(1.127) \quad \begin{cases} \rho'(Q) = -\operatorname{div}_Q \vec{P} \\ \sigma'(R) = (\vec{P} \cdot \vec{n})_R \end{cases} \quad \begin{array}{l} Q, \text{ ponto corrente do volume} \\ \quad v \text{ do dieléctrico} \\ R, \text{ ponto corrente da superfície} \\ \quad S, \text{ limítrofe do dieléctrico} \end{array}$$

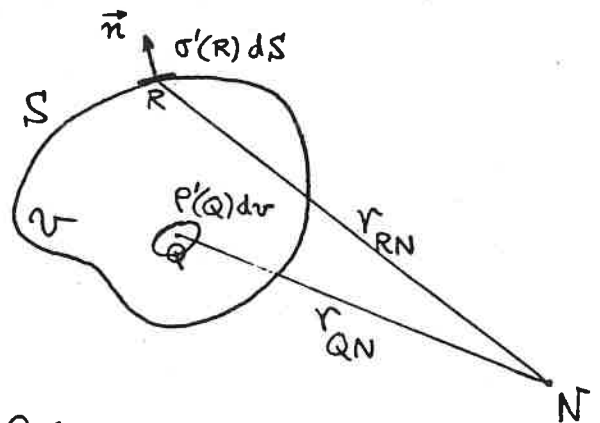
Pode portanto escrever-se

$$(1.128) \quad V_N = k_0 \int_V \frac{\rho'(Q)}{r_{QN}} dv + k_0 \int_S \frac{\sigma'(R)}{r_{RN}} dS$$

como expressão equivalente a (1.125). (V. Figura abaixo)



Cálculo de V_N mediante a expressão (1.125)



Cálculo de V_N mediante a expressão (1.128)

As cargas fictícias $\rho' dv$ e $\sigma' dS$ dizem-se cargas de polarização. Facilmente se prova que é nula a carga total do conjunto das duas distribuições, i. e.:

$$(1.129) \quad \int_V \rho'(Q) dv + \int_S \sigma'(R) dS = 0$$

como era de esperar, dada a sua equivalência a uma distribuição de dipolos (que tem, obviamente, carga total nula).

30/11/88

9.4.3 — Cargas de polarização — Cargas induzidas no dieléctrico

Fomos levados a designar por fictícias as distribuições das cargas de polarização porque elas até aqui são meramente o resultado de uma transformação matemática da expressão de V_N . A verdade porém é que se torna possível compreendermos as densidades $\rho'(Q)$ e $\sigma'(R)$ na base de argumentos puramente físicos, o que permite atribuir-lhes significado real. Vejamos como.

Em primeiro lugar, tomemos o caso muito simples, esquematizado na Fig 9-5, de uma polarização $\vec{P}(Q)$ com distribuição uniforme ou quase uniforme em toda a massa do dieléctrico (de tal modo que será nula ou quase nula a densidade $\rho'(Q) = -\text{div}_Q \vec{P}$, da qual não nos ocupamos agora).

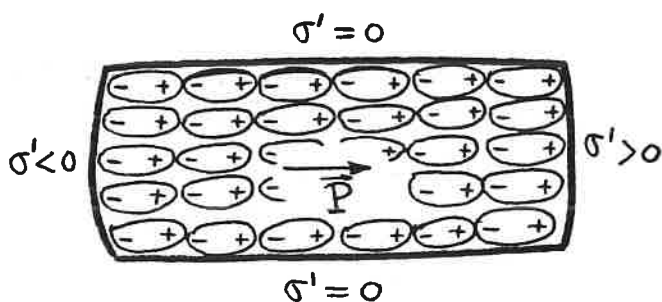


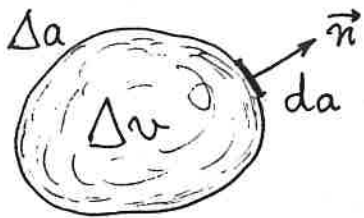
Fig 9-5
(Representação esquemática de polarização uniforme)

Torna-se evidente pela Fig 9-5 que, nas secções da superfície limítrofe paralelas ao vector polarização, as cargas positivas e negativas deslocadas por efeito da polarização se compensam mutuamente (como acontece de modo geral no interior do corpo). Entretanto, nas secções da superfície limítrofe inclinadas sobre o vector polarização (em que $\vec{P} \cdot \vec{n} \neq 0$), desenvolvem-se cargas não-compensadas, constituídas pelas extremidades (todas com o mesmo sinal) de dipolos elementares semelhantemente orientados. Isto permite compreender que, de maneira geral, exista uma carga induzida distribuída pela superfície limítrofe do dielétrico; e um cálculo simples mostra que a densidade superficial desta carga induzida vale, em cada ponto R , $(\vec{P} \cdot \vec{n})_R$ — identificando-se assim com a densidade superficial de cargas de polarização, $\sigma'(R)$ (cf eq.(1.127)).

Examinemos agora o que se passa no interior do dielétrico com uma qualquer distribuição do vector polarização $\vec{P}(\mathcal{Q})$ (não uniforme, em geral). Consideremos a distribuição das posições médias das cargas positivas (os núcleos) e designemos por $\rho^+(\mathcal{Q})$ a sua densidade volumica em observação macroscópica; consideremos a distribuição das posições médias das cargas negativas e seja analogamente $\rho^-(\mathcal{Q})$ a densidade volumica correspondente. Na ausência de campo exterior, tem-se

$$(1.130) \quad \rho_0^+(\mathcal{Q}) + \rho_0^-(\mathcal{Q}) = 0$$

Na presença de um campo exterior, pelo fenómeno da polarização, produz-se em cada elemento de volume Δv uma separação $\vec{\delta}$ entre os centros de cargas positivas e negativas, ou seja, a carga $\rho_0^+ \Delta v$ sofre um deslocamento $\vec{\delta}^+$ enquanto a carga $\rho_0^- \Delta v$ sofre um deslocamento $\vec{\delta}^-$, com $\vec{\delta}^+ - \vec{\delta}^- = \vec{\delta}$. Seja então um bem determinado pequeno volume, Δv , do dieléctrico, limitado por uma superfície Δa . No pro-



cesso de polarização do dieléctrico, por efeito dos deslocamentos de cargas positivas e negativas dos diversos elementos de volume infinitamente pequenos que compõem Δv , haverá cargas que extravazam de Δv ou que penetram em Δv , através de Δa ; e nós podemos fazer o cômputo global destas trocas de cargas, de Δv com os volumes seus circunvizinhos. Sendo $\rho_0^+ \vec{\delta}^+ \cdot \vec{n}$ da (ver Figura) a carga que atravessa um elemento de área da da superfície limitrofe Δa , então o ganho em carga positiva para o volume Δv vale

$$- \int_{\Delta a} \rho_0^+ \vec{\delta}^+ \cdot \vec{n} da$$

e análogamente o ganho em carga negativa será

$$- \int_{\Delta a} \rho_0^- \vec{\delta}^- \cdot \vec{n} da$$

Donde resulta que o ganho efectivo de carga atingido no volume Δv (balanço entre os ganhos de carga positiva e de carga negativa) será, se já se utiliza (1.130):

$$- \int_{\Delta a} (\rho_0^+ \vec{\delta}^+ + \rho_0^- \vec{\delta}^-) \cdot \vec{n} da = - \int_{\Delta a} \rho_0^+ (\vec{\delta}^+ - \vec{\delta}^-) \cdot \vec{n} da$$

Como, na ausência de campo, Δv possuía carga global nula,

a última expressão traduz a carga actual induzida no volume Δv , por efeitos da polarização. Designemo-la por $\Delta e'$. Mas o cômputo acima feito é válido para qualquer volume Δv , por mais pequeno que seja. Pode dividir-se por Δv e passar ao limite quando $\Delta v \rightarrow 0$, cerrando-se sobre um ponto fixo Q :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta e'}{\Delta v} &= \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \left[- \int_{\Delta a} \rho_0^+ (\vec{s}^+ - \vec{s}^-) \cdot \vec{n} da \right] \\ &\text{(densidade de carga)} \\ &\text{induzida} \\ &= - \operatorname{div}_Q \left[\rho_0^+ (\vec{s}^+ - \vec{s}^-) \right] = - \operatorname{div}_Q \vec{P} \end{aligned}$$

(Fácilmente se verifica, com efeito, que $\vec{P} = \rho_0^+ (\vec{s}^+ - \vec{s}^-)$.)

Isto significa bem que a densidade de carga induzida se identifica com a densidade de carga de polarização, ambas por unidade de volume. (Cf. eq. (1.127)).

As cargas de polarização, previamente definidas como cargas fictícias que substituem a distribuição de dipolos no dieléctrico, manifestam-se assim identificáveis com cargas induzidas no dieléctrico pelo fenómeno de polarização. Deve fazer-se a observação importante de que estas cargas induzidas nos dieléctricos resultam sempre — como ressaltá dos cálculos acima — de não-compensações bem localizadas de deslocamentos de cargas internos aos elementos de volume infinitamente pequenos e associados a comportamentos de electrões ligados face ao campo polarizante. Não são originadas por deslocamentos finitos, a grande escala, como acontece com as cargas de influência nos condutores, associadas à movimentação de electrões livres (Cf. §§ 9.2.2 e 9.2.3).

[NOTA: Não obstante a reflexão feita neste parágrafo, continuaremos a reservar a designação habitual de cargas verdadeiras para as cargas eléctricas dos corpos eletrizados, produzidas por atrito ou comunicadas por contacto, e para as cargas geradas nos condutores por influência electrostática.]

9.5 — Campo produzido por cargas verdadeiras na presença de dieléctricos

Estamos agora em condições de estudar, dentro de uma suficiente generalidade, o campo electrostático na presença de corpos dieléctricos. Depois de tratar da expressão do campo nas regiões exteriores aos dieléctricos (§ 9.5.1), partiremos daí para a definição do campo no interior de um dieléctrico e a discussão do seu significado físico (§ 9.5.2). Ocupar-nos-emos, em seguida, das propriedades gerais do campo assim obtido (§ 9.5.3).

9.5.1 — Campo nas regiões exteriores aos dieléctricos

Consideremos um conjunto de corpos materiais isolantes e idealizemos que uma distribuição geral de cargas verdadeiras em volume e/ou superfície é implantada em regiões exteriores e/ou interiores aos dieléctricos. Suponhamos que já foi atingido o equilíbrio electrostático resultante das influências mútuas entre as diferentes fontes de acções eléctricas (nas quais devemos incluir os próprios isolantes).

Sejam $\rho(M)$ e/ou $\sigma(S)$, respectivamente, as densidades genéricas, volumica e/ou superficial, das cargas verdadeiras actualmente definidas nos diferentes pontos do espaço. Seja, por outro lado, $\vec{P}(Q)$ o vector polarização actualmente definido no ponto genérico dos espaços ocupados pelos dieléctricos.

Para calcular o campo global produzido por este sistema complexo de distribuições de fontes de acções eléctricas, nas regiões exteriores aos dieléctricos, vamos tirar partido do estudo feito no § 9.4 e designadamente da equivalência estabelecida no § 9.4.2 entre a distribuição contínua de

dipolos que caracteriza um dielétrico polarizado e as distribuições de cargas de polarização que lhe correspondem. Tendo em atenção a expressão (1.128) de V_N para cada um dos dielétricos e as conhecidas expressões dos potenciais devidos a distribuições de cargas verdadeiras em volume e/ou superfície (§§ 6.2 e 7.3) — as quais são formalmente idênticas a (1.128) — resulta que o potencial global será escrito como

$$(1.131) \quad V_N = k_0 \int_{\omega} \frac{\rho + \rho'}{r} dv + k_0 \int_{\Sigma} \frac{\sigma + \sigma'}{r} dS$$

sendo ω a união dos volumes carregados e dos volumes dielétricos e Σ a união das superfícies carregadas e das superfícies limítrofes dos dielétricos (por carregado, entende-se aqui, com cargas verdadeiras). Em (1.131), r representa como habitualmente a distância genérica entre o ponto potenciado N e o ponto potenciante genérico em dv (no 1.º integral) ou em dS (no 2.º integral). As densidades ρ e σ são supostas dadas, acima; as densidades ρ' e σ' são, em cada ponto de cada dielétrico, conhecidas mediante as expressões (1.127) em função do vector polarização $\vec{P}(Q)$, suposto dado. Note-se que a adopção da expressão (1.131) significa que estamos a tomar como fontes do campo, em pé de igualdade para este cálculo, quer as cargas verdadeiras quer as cargas de polarização — como se ambos os tipos de distribuições estivessem a considerar-se "imersos" no vácuo. Este procedimento encontra-se legitimado pela equivalência do § 9.4.2 e ao mesmo tempo põe em foco a grande vantagem da sua utilização: todo o problema de Electrostatica com dielétricos se reduz, neste domínio das regiões exteriores aos dielétricos, a um problema de Electrostatica no vácuo.

O campo, obviamente, deriva-se a partir da expressão (1.131) de V_N pela operação $-\text{grad}$:

$$(1.132) \quad \vec{E}_N = -\text{grad}_N V \quad (V \equiv V(N)),$$

resultando :

$$(1.133) \quad \vec{E}_N = k_0 \int_{\omega} \frac{\rho + \rho'}{r^2} \text{grad}_N r \, dv + k_0 \int_{\Sigma} \frac{\sigma + \sigma'}{r^2} \text{grad}_N r \, dS \quad (*)$$

E podem transplantar-se para este domínio as propriedades do campo estabelecidas em Electrostática no vácuo.

Deve observar-se que o campo assim definido, para as regiões exteriores aos dieléctricos, tem exactamente o mesmo significado físico que lhe conhecíamos em Electrostática no vácuo: representa em cada ponto a força eléctrica que actua sobre uma partícula de prova colocada nesse ponto por unidade de carga da partícula. Do mesmo modo, o potencial definido por (1.131) tem o significado físico preciso de representar em cada ponto o trabalho realizado pelo campo no transportê de uma carga unitária positiva desde esse ponto até o infinito, por qualquer percurso dentro das regiões exteriores aos dieléctricos.

9.5.2 — Campo no interior de um dieléctrico

Retomando a última observação do parágrafo precedente, digamos que seria natural procurar-se definir, nas regiões interiores aos dieléctricos, um campo eléctrico com o mesmo significado físico.

Vemo-nos no entanto forçados a abandonar esta perspectiva por que se lhe depara uma dificuldade que não pode ser removida:

(*) [A única reserva que não pode deixar de fazer-se a esta expressão do campo é bem conhecida: o campo não é definido sobre as superfícies carregadas, tendo aí uma descontinuidade bem caracterizada (Cf. § 7.4)]

com efeito, a força eléctrica que solicita uma partícula de prova no interior de um dieléctrico não é determinada de maneira unívoca, como adiante se revela.

Começemos por fazer notar que as expressões (1.131) e (1.133) são válidas exclusivamente para pontos exteriores aos dieléctricos porque só aí está legitimada a introdução das distribuições fictícias ρ' e σ' a substituírem as distribuições dipolares dos dieléctricos. Nestas condições, qualquer extensão das referidas expressões (1.131) e (1.133) aos pontos interiores aos dieléctricos deve ser precedida de uma adequada análise de convergência. Com o fim de expor esta análise, consideremos um dieléctrico apenas e, para simplificar, suponhamos que as fontes de cargas verdadeiras se encontram fora do dieléctrico.

Seja o ponto Q interior ao dieléctrico; cavemos um alvéolo em torno de Q , com volume v' e limitado pela superfície S' (v. Fig. 9-7). Por Q se ter assim tomado um ponto exterior ao volume polarizado, $v-v'$, é válido aplicar as fórmulas (1.131) e (1.133) ao dieléctrico contanto que o integral de superfície inclua no seu domínio de integração, além de S , também S' , e que o integral de volume seja tomado sobre $v-v'$ (no tocante ao dieléctrico, sobre $v-v'$).

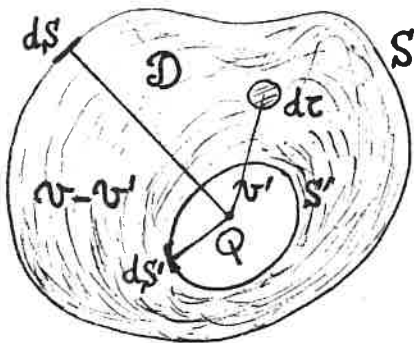


Figura 9-7

Passemos em seguida ao limite quando o alvéolo se contrai sobre Q (e o volume v' se reduz a zero), reconstituindo-se assim a situação em causa.

A condição de convergência é que o resultado deste processo seja finito e independente da forma do alvéolo. ^{Podemos mostrar-se} Ora acontece que a condição de convergência é satisfeita por (1.131) — para o potencial — mas não é satisfeita por (1.133) — para o campo —

$$\lim_{v' \rightarrow 0} \int_{S'} \frac{\rho'}{r} ds' \rightarrow 0$$

visto que o integral ao longo de S' tende, neste caso, para um valor que depende da forma da classe de alvéolos tomada na passagem ao limite. Para dar apenas os três exemplos de classes com as quais o cálculo desse limite se realiza muito facilmente: (a) o limite é nulo quando o alvéolo tem a forma de um cilindro muito alongado (agulha) com geratrizes paralelas ao vector-polarização \vec{P} no ponto Q ; (b) o limite vale $\frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}$ quando o alvéolo tem a forma de um cilindro muito achatado (disco) com geratrizes paralelas a $\vec{P}(Q)$; e (c) o limite vale $\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}$ se o alvéolo é esférico e centrado em Q . [Cf., por ex., Durand, Electrostatique, Tome I].

Repare-se agora que esta análise coincide ponto por ponto com a tentativa de encontrar a força eléctrica que actuará sobre uma partícula de prova no interior de um dieléctrico (*). Esta força resulta, pois, não determinada de maneira unívoca, mas sim função das condições da experiência que permite medi-la, designadamente da forma e da orientação do "recinto" que encerra a partícula de prova utilizada na medição. A força eléctrica não pode assim servir para a definição do campo, como força por unidade de carga.

(*) Em ordem à determinação da força que actua sobre uma carga idealizadamente colocada num ponto interior do dieléctrico, deve imaginar-se que se esvazia de matéria polarizada (de dieléctrico) um alvéolo cavado em torno da carga. A esta necessidade conceptual sobrepõe-se na prática uma exigência material: a introdução de uma partícula de prova dentro de um dieléctrico só é efectivamente praticável mediante a realização de uma cavidade (no caso dos dieléctricos sólidos) ou por deslocamento de massa fluida com criação de um alvéolo (no caso dos dieléctricos fluidos).

Entretanto revela-se útil adoptar, convencionalmente, noções de potencial e de campo eléctrico, no interior do dieléctrico, como funções de ponto bem definidas e unívocas, cujo significado físico será ulteriormente esclarecido.

Para o potencial, baseamo-nos em que, na análise atrás exposta, a expressão (1.131) satisfaz a condição de convergência em qualquer ponto interior ao dieléctrico; pode mostrar-se além disso que a função finita, assim fornecida por (1.131), é contínua e diferenciável. Estes factos permitem aproveitar a expressão (1.131), adoptando-a, por convenção, como definição do potencial mesmo no interior dos dieléctricos. Reportando-nos já à situação mais geral admitida no início do § 9.5.1, tem-se

$$(1.131)' \quad V_Q = k_0 \int_{\omega} \frac{\rho + \rho'}{r} dv + k_0 \int_{\Sigma} \frac{\sigma + \sigma'}{r} dS$$

sendo Q o ponto genérico do interior de um q.q. dieléctrico do sistema.

Quanto ao campo eléctrico, convém obviamente que seja definido como

$$(1.132)' \quad \vec{E}_Q = -\text{grad}_Q V, \quad (V \equiv V(Q)),$$

a partir do potencial V_Q de (1.131)', função diferenciável como já se disse. Mas isto equivale exactamente a adoptar, por convenção, a própria expressão (1.133) como definição do campo mesmo no interior dos dieléctricos:

$$(1.133)' \quad \vec{E}_Q = k_0 \int_{\omega} \frac{\rho + \rho'}{r^2} \text{grad}_Q r dv + k_0 \int_{\Sigma} \frac{\sigma + \sigma'}{r^2} \text{grad}_Q r dS$$

referida também à situação mais geral admitida no início do § 9.5.1, e escrita para o ponto Q genérico acima indicado. (*)

(*) Deve fazer-se aqui a mesma reserva que é feita para \vec{E}_N
 ... →

Fixando a nossa atenção sobre o dielétrico D a que pertence o ponto Q (como ponto interior) é importante sublinhar que, quer em (1.131)', quer em (1.133)', no integral de volume $\int_{\omega} \dots$ intervém o volume completo v_D do dielétrico, e no integral de superfície $\int_{\Sigma} \dots$ intervém somente a superfície limitrofe S_D do dielétrico — quer dizer: os cálculos realizam-se sem qualquer intervenção do volume v' ou da superfície limitrofe S' do alvéolo em torno de Q (v. Fig 9-7), que aqui já se não utiliza.

[Que esta definição convencional (1.133)', para o campo, tem por si própria sentido — revela-o a análise de convergência atrás exposta: é este o limite obtido quando o alvéolo da Fig 9-7 se fecha sobre o ponto Q , através de uma classe de alvéolos em forma de cilindro alongado de geratrizes paralelas a $\vec{P}(Q)$. Com efeito, o limite do integral de superfície ao longo de S' (superfície limitrofe do alvéolo) tende para zero — é o exemplo (a) — e por outro lado $\lim_{v' \rightarrow 0} \int_{v-v'} \dots = \int_v \dots$; de modo que, o limite global coincide com \vec{E}_Q de (1.133)'.
Em suma: \vec{E}_Q representa a força por unidade de carga quando o alvéolo infinitamente pequeno que envolve a carga tem a forma de um cilindro alongado segundo $\vec{P}(Q)$.]

Diversos argumentos militam a favor da adopção da definição convencional do campo (e do potencial) que acabamos de apresentar; destacamos três deles.

na nota da pág. 120", acrescentando-se que o campo \vec{E}_Q , de (1.133)', não será também definido, porque descontínuo, sobre as superfícies limitrofes dos dielétricos, "carregadas" com cargas de polarização σ' .

(1) O campo assim definido no interior, \vec{E}_Q , é o prolongamento analítico do campo no exterior, \vec{E}_N , cuja definição já vinha de trás fisicamente bem fundamentada. Embora haja uma "ruptura" no significado físico, quando se passa do exterior para o interior, a verdade é que, com a convenção adoptada, passamos a dispor de uma expressão formalmente idêntica para o campo nas regiões exteriores e nas regiões interiores, com as vantagens daí resultantes para o tratamento matemático de vários problemas de Electrostatica com dieléctricos.

(2) Pode mostrar-se que o campo, que assim se exprime por uma única função (1.133) - (1.133)' nos diferentes pontos do espaço em que é definido, conduz a um tratamento simples da energia armazenada num sistema de condutores e de isolantes — utilizando-se em consequência na determinação, decorrente desse tratamento, das forças generalizadas que actuam sobre os diversos elementos de um tal sistema de condutores e de isolantes.

(3) Imaginemos um dieléctrico perfeito, isotrópico e homogêneo (*), preenchendo todo o espaço e uniformemente polarizado. Consideremos nele imersa uma esfera condutora muito pequena, carregada com uma carga (verdadeira) e . Mostra-se que se exerce sobre esta esfera uma força \vec{F} dada por $\vec{F} = e \vec{E}_Q$, sendo \vec{E}_Q o campo definido no dieléctrico. Assim, o campo convencionalmente definido no interior do dieléctrico assume, embora nestas circunstâncias muito especiais, o significado físico habitual de força por unidade de carga de uma partícula de prova.

(*) Adiante se dará o significado destas especificações (v. § 9.6).

9.6 — Propriedades do campo electrostático na presença de dieléctricos

Pelo estudo feito nos parágrafos precedentes, o potencial e o campo na Electrostática com dieléctricos podem ser considerados como o potencial e o campo que seriam produzidos no vácuo pelas distribuições de densidades volúmicas ρ e ρ' e superficiais σ e σ' , isto é, pelas cargas verdadeiras que caracterizam a electrização das fontes, adicionadas das cargas de polarização que se podem definir sobre os diversos dieléctricos presentes. Daqui resulta que se torna muito simples deduzir as propriedades válidas para o campo da Electrostática com dieléctricos a partir das propriedades do campo estabelecidas para a Electrostática no vácuo. Tudo o que é necessário fazer é considerar, em todas estas últimas propriedades, a incidência simultânea das cargas verdadeiras e das cargas de polarização, tratadas em pé de igualdade como fontes do campo, — e como se ambas as distribuições estivessem imersas no vácuo.

É então legítimo escrever, como equações fundamentais do campo na presença de dieléctricos, as seguintes:

(1) em todo o ponto G interior a regiões de continuidade:

$$(1.134-a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot}_G \vec{E} = 0 \end{array} \right.$$

$$(1.134-b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div}_G \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_G + \rho'_G) \end{array} \right.$$

(2) em todo o ponto M sobre uma superfície S de descontinuidade (de entre as superfícies carregadas e/ou superfícies limitrofes dos dieléctricos):

$$(1.135-a) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\vec{E}_M^+ - \vec{E}_M^-) \cdot \vec{t}_M = 0 \end{array} \right.$$

$$(1.135-b) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\vec{E}_M^+ - \vec{E}_M^-) \cdot \vec{n}_M = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_M + \sigma'_M) \end{array} \right.$$

sendo \vec{n}_M e \vec{t}_M , respectivamente, o vector unitário da normal a S em M e o vector unitário de uma tangente arbitrária em M .

Mediante a substituição de ρ'_G e σ'_M pelas suas expressões (1.127) (pág. 115), podemos exprimir as propriedades acima, directamente, à custa do vector polarização \vec{P} definido nos diferentes pontos dos dieléctricos. Em particular, a eq. (1.134-b) transforma-se em

$$(1.134-b)' \quad \text{div}_G (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_G \quad ;$$

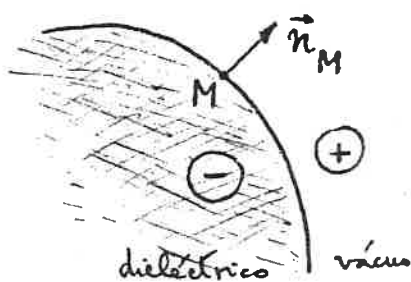
mas isto sugere a introdução de um novo vector, \vec{D} , que se define por

$$(1.136) \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

e que permite re-escrever (1.134-b)' na forma:

$$(1.137) \quad \text{div}_G \vec{D} = \rho_G$$

Esta reformulação da eq. (1.134-b) traduz, como ela, o teorema de Gauss, mas sem fazer referência directa às cargas de polarização. O vector \vec{D} chama-se deslocamento eléctrico, podendo designar-se também por indução eléctrica. Trata-se de um vector auxiliar na descrição da Electrostatica com dieléctricos, cuja introdução conduz a simplificações formais do tipo da realizada em (1.137). Passando à eq. (1.135-b), suponhamos que o ponto M pertence à superfície limítrofe de um dieléctrico face ao vácuo, sobre a qual existe também uma elec-



trização de carga verdadeira (de densidade σ_M); entã, mediante a utilização de (1.127), pág. 115, essa equação transforma-se em:

$$[\epsilon_0 \vec{E}_M^+ - (\epsilon_0 \vec{E}_M^- + \vec{P}_M^-)] \cdot \vec{n}_M = \sigma_M$$

(tendo em atenção que $\sigma'_M = \vec{P}_M^- \cdot \vec{n}_M$, v. Figura); e a introdução do vector \vec{D} , definido por (1.136), conduz a:

$$(1.138) \quad (\vec{D}_M^+ - \vec{D}_M^-) \cdot \vec{n}_M = \sigma_M$$

(deve notar-se que $\vec{P}_M^+ = 0$, por a região \oplus ser de vácuo). Esta reformulação da eq. (1.135-b) traduz, como ela, o teorema de Gauss sobre uma superfície de descontinuidade do campo, mas sem fazer referência directa às cargas de polarização.

É susceptível de uma reformulação semelhante a versão de (1.134-b) sob forma integral — que também se pode considerar a transcrição, para a Electrostática com dieléctricos, do teorema de Gauss expresso por (1.57), § 6.3 — a saber:

$$(1.139) \quad \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} (\epsilon_{int} + \epsilon'_{int})$$

em que S é uma superfície fechada (regular); ϵ_{int} representa a soma das cargas verdadeiras interiores a S e ϵ'_{int} a soma das cargas de polarização interiores a S . (*)

Mostra-se facilmente que, em todos os casos, se torna possível introduzir o vector \vec{D} (após utilização de (1.127)) para reformular a eq. (1.139) de modo a não fazer referência directa às cargas de polarização. Resulta:

$$(1.140) \quad \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \epsilon_{int}$$

Entretanto as equações (1.134-a) e (1.135-a) ficam obviamente incólumes à reformulação operada. O mesmo pode dizer-se da versão de (1.134-a) sob forma integral — transcrição, para a Electrostática com dieléctricos, da propriedade

(*) Note-se que a superfície S não deve conter qualquer região de área significativa em comum com distribuições superficiais de cargas verdadeiras nem com superfícies de descontinuidade da polarização (superfícies limítrofes de dieléctricos), porque sobre essas superfícies o campo é descontínuo.

fundamental expressa por (1.56), § 6.3 — a saber:

$$(1.141) \quad \oint_{[c]} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad ,$$

ao longo de qualquer curva fechada $[c]$.

Conclui-se assim que em todo o formalismo das propriedades do campo na Electrostatica com dieléctricos, as cargas de polarização podem ser omitidas em troca da utilização do vector polarização \vec{P} , sendo este por sua vez incluído implicitamente em \vec{D} . A descrição da Electrostatica com dieléctricos exige necessariamente a utilização de duas grandezas vectoriais fundamentais: o campo \vec{E} e a polarização \vec{P} , que descreve o comportamento dos materiais isolantes.

Verifica-se todavia que a utilização do par de vectores $(\vec{E}; \vec{D})$ em alternativa ao par de vectores $(\vec{E}; \vec{P})$, mediante a relação de substituição (1.136), conduz a um formalismo mais simples e mais cómodo.

Em resumo, com as simplificações formais (1.137) e (1.138), as propriedades locais do campo (1.134-a,b) e (1.135-a,b) re-escrevem-se como:

(1) nos pontos interiores às regiões de continuidade:

$$(1.142-a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = 0 \\ \text{div } \vec{D} = \rho \end{array} \right.$$

(2) nos pontos sobre superfícies de descontinuidade:

$$(1.143-a) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\vec{E}^+ - \vec{E}^-) \cdot \vec{t} = 0 \\ (\vec{D}^+ - \vec{D}^-) \cdot \vec{n} = \sigma \end{array} \right.$$

Estas equações não podem deixar de ser acompanhadas da relação

$$(1.136) \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

que por isso aqui se recapitula — equações de ligação de \vec{D} a \vec{E} ou equações de ligação entre o campo e a indução (campo eléctrico, indução eléctrica). Também são de retomar neste resumo as versões sob forma integral das propriedades locais (1.142-a, b) — (1.141) e (1.140). Convém chamar a atenção para o facto de que a eq. (1.143-a) traduz a continuidade da componente tangencial de \vec{E} sobre qualquer superfície de descontinuidade; e a eq. (1.143-b) traduz a descontinuidade da componente normal de \vec{D} sobre as distribuições superficiais de carga verdadeira, sendo o valor desta descontinuidade justamente dado por σ (entretanto, a componente normal de \vec{D} , pela mesma eq. (1.143-b) é contínua nas superfícies de descontinuidade desprovidas de cargas verdadeiras).

As equações que acabamos de apresentar para as propriedades do campo da Electrostática com dieléctricos — (1.142), (1.143), (1.141) e (1.140) — generalizam evidentemente as correspondentes equações da Electrostática no vácuo — (1.68), (1.78), (1.56) e (1.57), respectivamente. Para passar das primeiras às segundas basta fazer $\vec{P} = 0$ em todos os pontos, ou seja, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$.

Confrontando os dois conjuntos de equações, facilmente nos damos conta de que, ao passar da Electrostática no vácuo para a Electrostática com dieléctricos, enquanto o campo \vec{E} mantém o seu carácter irrotacional, o deslocamento eléctrico \vec{D} surge, nas expressões do teorema de Gauss, a substituir o campo eléctrico \vec{E} (ou melhor: a substituir $\epsilon_0 \vec{E}$), mantendo-se as expressões do referido teorema com uma forma idêntica, designadamente, com a intervenção pura e simples das cargas verdadeiras — como no vácuo. Isto,

porque o vector deslocamento eléctrico escamoteia as cargas de polarização nas equações que traduzem as propriedades do campo.

9.7 — Dieléctricos perfectos

A polarização de um dieléctrico inicialmente neutro resulta não só da acção eléctrica devida às fontes exteriores mas também da própria acção eléctrica produzida pelo dieléctrico polarizado. A situação de equilíbrio electrostático efectivamente estabelecida (*) caracteriza-se por um vector-polarização $\vec{P}(Q)$ em cada ponto do dieléctrico, que descreve o estado de polarização do dieléctrico, e por um campo $\vec{E}(M)$ definido em cada ponto do espaço, M , que descreve a globalidade das acções eléctricas, em conformidade com o tratamento apresentado nos §§ 9.5.1 e 9.5.2.

Pondo de parte os meios que manifestam fenómenos de histerese dieléctrica, admitamos que deve existir entre aquelas duas grandezas \vec{P} e \vec{E} , em cada ponto do dieléctrico, uma relação de dependência, a ser encontrada por via experimental

$$(1.144) \quad \vec{P}_Q = f(\vec{E}_Q)$$

A polarização depende também das propriedades das moléculas constituintes do isolante e do seu estado de agregação, a nível microscópico (Cf. § 9.3); essas dependências, características de cada meio, reflectem-se naturalmente na forma da relação

(*) Passa-se aqui algo de semelhante ao que ocorre no caso de um condutor sob influência de fontes eléctricas exteriores: o equilíbrio electrostático finalmente estabelecido é caracterizado por um campo global resultante da sobreposição da acção eléctrica das fontes exteriores com a acção eléctrica da distribuição das cargas de influência geradas no condutor.

(1.144), que rege o comportamento dieléctrico do meio material, numa perspectiva macroscópica.

Ora acontece que, para grande número de meios materiais isolantes, a experiência revela ser a relação (1.144) uma simples relação de linearidade, desde que o campo não atinja intensidades muito elevadas. Mais precisamente:

- (a) para meios isotrópicos, uma simples relação de linearidade entre \vec{P}_Q e \vec{E}_Q ;
- (b) para meios anisótropos, simples relações de composição linear entre as componentes de \vec{P}_Q e as de \vec{E}_Q .

Tais meios isolantes designam-se por dieléctricos perfeitos; têm um comportamento dieléctrico linear e também se dizem dieléctricos lineares.

Para os dieléctricos perfeitos e isotrópicos a relação (1.144) pode escrever-se:

$$(1.145) \quad \vec{P}_Q = \epsilon_0 \chi(Q) \vec{E}_Q$$

em que $\chi(Q)$ é um escalar, positivo, independente de \vec{E}_Q que faz de (1.145) uma relação de proporcionalidade directa entre \vec{P}_Q e \vec{E}_Q . [Com ϵ_0 em evidência na constante de proporcionalidade $\epsilon_0 \chi(Q)$, a grandeza $\chi(Q)$ fica adimensional.] (*)

Para os dieléctricos perfeitos e anisótropos a relação (1.144) pode escrever-se:

(*) O facto de se verificar que grande número de meios isolantes podem ser considerados dieléctricos perfeitos, sendo o seu comportamento regido por uma lei tão simples como (1.145) ou (1.146), entre \vec{P}_Q e \vec{E}_Q , constitui um outro argumento favorável à definição convencional adoptada para o campo no interior de um dieléctrico (§ 9.5.2, pág 120^v - 120ⁱⁱⁱ).

$$(1.146) \quad (P_\alpha)_Q = \epsilon_0 \sum_\beta \chi^{\alpha\beta}(Q) (E_\beta)_Q \quad (\alpha = x, y, z)$$

sendo P_α e E_β ($\alpha, \beta = x, y, z$) as componentes cartesianas dos vectores \vec{P} e \vec{E} , respectivamente e os coeficientes $\chi^{\alpha\beta}(Q)$ são independentes de \vec{E} : as componentes de \vec{P}_Q são composições lineares das componentes de \vec{E} . [Pode dar-se, de (1.146), a versão compacta

$$(1.146') \quad \vec{P}_Q = \epsilon_0 \{\chi\}_Q \vec{E}_Q$$

em que $\{\chi\}$ designa o tensor (de 2ª ordem) de que a matriz $\{\chi^{\alpha\beta}\}$ ($\alpha, \beta = x, y, z$) constitui a representação cartesiana].

A grandeza escalar χ , que surge na relação (1.145) para um meio isotrópico, em geral com carácter local (i.e., podendo variar de ponto para ponto do dieléctrico) — encerra os efeitos, macroscopicamente resultantes, da dependência da polarização relativamente às propriedades das moléculas constituintes do isolante e ao seu estado de agregação, a nível microscópico. [O mesmo pode dizer-se da grandeza tensorial $\{\chi\}$, que surge na relação (1.146') para um meio anisotrópico.]

χ chama-se susceptibilidade eléctrica; [$\{\chi\}$ designa-se por tensor de susceptibilidade eléctrica.]

Da relação de dependência entre \vec{P} e \vec{E} para dado dieléctrico, (1.144), segue-se, por (1.135), uma relação bem definida entre \vec{D} e \vec{E} , em cada ponto do dieléctrico:

$$(1.147) \quad \vec{D} = g(\vec{E})$$

Para os dieléctricos perfeitos e isotrópicos, resulta, em particular

$$(1.148) \quad \vec{D}_Q = \epsilon_0 [1 + \chi(Q)] \vec{E}_Q$$

ou seja $\vec{D}_Q = \epsilon(Q) \vec{E}_Q$, com $\epsilon(Q) = \epsilon_0 [1 + \chi(Q)]$.

Então, nestes meios, \vec{D}_Q é directamente proporcional a \vec{E}_Q ,

sendo $\epsilon(Q)$ a constante de proporcionalidade, cujas características decorrem directamente das de $\chi(Q)$: $\epsilon(Q)$ é uma grandeza escalar, função de ponto, independente de \vec{E}_Q , satisfazendo $\epsilon(Q) > \epsilon_0$ (porque $\chi(Q) > 0$). $\underline{\epsilon}$, da mesma natureza física que ϵ_0 (poder indutor específico do vácuo) designa-se por poder indutor específico do dieléctrico. (*) Para um dieléctrico perfeito e isotrópico imerso no vácuo, juntapondo a relação (1.148) à relação $\vec{D}_N = \epsilon_0 \vec{E}_N$ que se verifica para todo o ponto fora do dieléctrico (no vácuo), pode escrever-se uma relação única estendida a todo o espaço:

$$(1.149) \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

com $\epsilon \equiv \epsilon_0$ ($\chi = 0$) no vácuo (ponto genérico N) e $\epsilon \equiv \epsilon(Q)$ no dieléctrico (ponto genérico Q). É fácil ver que a relação (1.149) é generalizável a um sistema de isolantes desse mesmo tipo, ainda que na presença de condutores.

[Considerações semelhantes poderiam ser feitas para os meios dieléctricos perfeitos e anisótropos, conduzindo à introdução de uma grandeza tensorial (tensor de 2ª ordem) $\{\epsilon\}$, função de ponto, independente de \vec{E}_Q , designada por tensor de permissividade (ou tensor de poder indutor específico do dieléctrico).

A relação (1.149) é então substituída por

$$(1.150) \quad \vec{D} = \{\epsilon\} \vec{E}$$

com $\{\epsilon\} \equiv \epsilon_0 \{\mathbb{1}\}$ no vácuo e $\{\epsilon\} \equiv \{\epsilon\}_Q$ no dieléctrico].

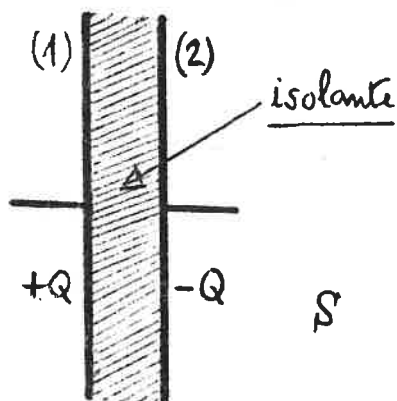
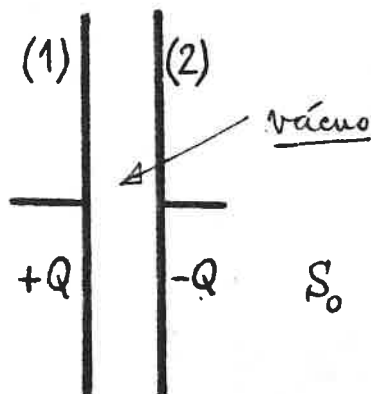
Se um dieléctrico perfeito isotrópico [anisótropo] for homogéneo, então $\underline{\chi}$ e $\underline{\epsilon}$ [$\{\chi\}$ e $\{\epsilon\}$] são uniformes (ou: constantes), i.e., não variam de ponto para ponto do dieléctrico. Nesse caso, torna-se muito adequada, para $\underline{\epsilon}$, a designação de

(*) Também se designa por permissividade ou permissividade.

constante dielétrica do meio. [Adequada é entã também a designação de constantes dielétricas principais atribuída às componentes do tensor dielétrico $\{\epsilon\}$ na sua forma diagonal, a que é sempre redutível por ser um tensor simétrico, como se pode mostrar.]

A constante dielétrica de um meio dielétrico perfeito isotrópico e homogêneo é susceptível de determinação experimental por um método muito simples cujo fundamento teórico vamos agora encarar como um exemplo de aplicação dos conhecimentos do presente Capítulo.

Utiliza-se um condensador plano (Cf. § 8.7.2) de dimensões fixas (A , área das armaduras; d , distância entre as armaduras; com $d \ll$ q.q. dimensão linear de A). Procede-se à comparação entre a capacidade C do condensador quando o isolante sob ensaio preenche todo o espaço entre as armaduras (situação S) e a capacidade C_0 do mesmo condensador quando esse espaço é o vácuo (situação S_0) (V. Figura 9-9).



Sabido já que $C_0 = \epsilon_0 A/d$ (Cf. (1.120), § 8.7.2) procuremos agora relacionar C com ϵ , constante dielétrica do isolante sob ensaio. Para isso, começemos por admitir que na situação S se deve definir a capacidade do condensador por uma relação formalmente idêntica com (1.119), § 8.7.1, a saber, como

$$C = Q/(V_1 - V_2).$$

Ora, dadas as características do dielétrico (linearidade, isotropia e homogeneidade), as considerações de

simetria que fundamentaram o cálculo de C_0 no § 8.7.2 são ainda válidas na situação S e aplicam-se aqui quer ao campo vectorial \vec{E} , quer ao campo vectorial \vec{D} ; extrai-se daí a conclusão de que, com um elevado grau de aproximação (que leva a considerarem-se desprezáveis os efeitos nas extremidades das armaduras), ambos os campos são uniformes e perpendiculares às armaduras. Então:

(a) Q pode calcular-se mediante (1.140), dando:

$$Q = |\vec{D}| A \quad ;$$

(b) $V_1 - V_2$ pode calcular-se mediante (1.132)',

como $\int_{(1)}^{(2)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$, e isso dá:

$$V_1 - V_2 = |\vec{E}| d$$

Utilizemos por fim (1.148), escrevendo $|\vec{D}| = \epsilon |\vec{E}|$.

Resulta:

$$(1.151) \quad C = \epsilon A / d$$

A razão C/C_0 fornece portanto ϵ/ϵ_0 ($\equiv \epsilon_r$, constante dielétrica relativa) ou seja uma medida de ϵ , tomando como unidade ϵ_0 . Para determinar experimentalmente o valor de C/C_0 , pode medir-se o valor de $V_1 - V_2$, primeiro na situação S_0 e depois na situação S , sob a condição de que, ao passar de uma situação à outra, se mantenha isolada a armadura (1) para que a carga Q permaneça constante (de um modo semelhante ao da experiência esquematizada na Fig 9-1 (I)). Tem-se então:

$$\frac{C}{C_0} = \frac{(V_1 - V_2)_{S_0}}{(V_1 - V_2)_S}$$

10. ENERGIA DE UM SISTEMA ELECTROSTÁTICO

10.1 — Introdução

Em todos os ramos da Física, as relações energéticas constituem um precioso auxiliar na resolução de grande número de problemas ou para a compreensão e descrição de muitas situações. Vamos abordar aqui alguns aspectos do tratamento da energia na Electrostática — porque são importantes em si mesmos e, também, porque preparam o estudo das questões energéticas no Electromagnetismo em geral.

Para realizar uma dada distribuição de cargas eléctricas, criando um campo eléctrico, é necessário dispendir trabalho. Mas a experiência mostra que, uma vez atingido o equilíbrio electrostático, se todas as cargas ficarem perfeitamente isoladas e se não se alterarem os condicionamentos existentes, o sistema vai ^{conservar-se} manter-se nesse estado e a ^{manutenção} conservação do campo eléctrico criado não exige qualquer novo dispêndio de trabalho.

Suponhamos que a electrização é efectuada mediante um transporte de cargas que se realiza (i) na ausência de quaisquer forças dissipativas, portanto sem libertação de calor, e (ii) reversivelmente, i. e., com quase infinita lentidão, de modo a haver equilíbrio em cada instante. Então, o Princípio de conservação da energia leva-nos a afirmar que o trabalho dispendido na criação do campo, nestas condições conceptuais, se deve encontrar no sistema sob a forma de energia potencial, de natureza puramente eléctrica. Assim se chega à ideia de uma energia electrostática que se atribue ao sistema pelo seu estado de electrização e que nele permanece enquanto esse estado de electrização se mantiver.

Qualquer modificação num dado estado de electrização, idealizada sob as mesmas condições conceptuais para o transporte das cargas, vai traduzir-se num balanço energético, a saber, entre o trabalho dispendido (ou recolhido) pelo observador e o aumento (ou diminuição, respectivamente) da energia electrostática contida no sistema. Quando se concebe, porém, nas mesmas condições, um transporte de cargas cíclicas, i.e., tal que o sistema é reconduzido a uma situação final ponto por ponto idêntica à situação inicial — então, como já antecipámos no § 2.4, uma das propriedades fundamentais do campo na Electrostática ($\text{rot } \vec{E} = 0$) assegura não haver, no cômputo global, nem dispendio nem recolha de trabalho, por parte do observador: a energia electrostática do sistema conserva-se quando é reassumida a situação electrostática inicial.

Este Princípio garante-nos que, ao estabelecer-se uma dada distribuição de cargas eléctricas, a energia armazenada pelo sistema não deve depender do processo ou dos percursos de electrização. Podemos então idealizar sempre, for ratas de simplicidade, o seguinte processo de electrização: — Imaginamos que os diferentes elementos de carga eléctrica do sistema se encontram inicialmente todos no infinito e infinitamente afastados uns dos outros (estado inicial) — Transportamo-los então, desde o infinito, por um percurso qualquer, para as posições que actualmente ocupam (estado actual). (Supomos obviamente que este transporte se submete às condições conceptuais acima descritas). —

Notemos que, encontrando-se, no estado inicial, os diferentes elementos de carga infinitamente afastados uns dos outros, são nulas as interacções electrostáticas neste estado,

e será por isso natural admitir como nula a energia electrostática do sistema nesse estado inicial do processo de electrizações. Daí resulta que o trabalho dispendido na electrizações iguala a energia electrostática do sistema no estado actual, desde que se siga o processo de electrizações acima.

Para calcular o trabalho que é necessário dispendir no estabelecimento de uma dada distribuição de cargas, segundo o processo de electrizações acima idealizado, vamos servir-nos do significado físico do potencial num ponto (cf. § 2.2). O potencial num ponto representa com efeito o trabalho a dispendir contra o campo eléctrico para transportar a unidade de carga eléctrica desde o infinito até o ponto considerado, por qualquer percurso. Assim, ao transportar desde o infinito para um ponto onde o potencial é V a carga δe teremos que dispendir o trabalho $V \cdot \delta e$.

10.2 — Energia potencial de uma distribuição discreta de cargas pontuais, no vácuo

Consideremos um sistema de N cargas pontuais, e_i , colocadas respectivamente nos pontos Q_i ($i = 1, \dots, N$), no vácuo. Procedamos ao cálculo da energia potencial desta distribuição segundo a via preconizada em 10.1.

O transporte da 1ª carga para a sua posição não exige dispendio de qualquer trabalho, obviamente (num campo nulo). De modo que a energia potencial electrostática das duas cargas e_1 em Q_1 , e_2 em Q_2 encontra-se por qualquer uma das duas seguintes expressões

$$(10-1) \quad W_{12} = e_2 V^{(1)}(Q_2) = e_1 V^{(2)}(Q_1)$$

sendo $V^{(1)}(Q_2)$ [$V^{(2)}(Q_1)$] o potencial produzido pela carga e_1

no ponto Q_2 [pela carga e_1 no ponto Q_2] ; ou ainda pela evidente expressão alternativa

$$(10-2) \quad W_{12} = k_0 \frac{e_1 e_2}{r_{12}} \quad \left(r_{12} = |\vec{Q}_1 Q_2| \right).$$

Note-se que, a partir de (10-1), se pode dar a W_{12} uma outra forma simetrizada:

$$(10-3) \quad W_{12} = \frac{1}{2} \left[e_1 V^{(2)}(Q_1) + e_2 V^{(1)}(Q_2) \right].$$

Se se transporta agora a carga e_3 desde o infinito até a sua posição Q_3 , a energia potencial suplementar adquirida pelo sistema (a somar depois com W_{12}) é dada por:

$$(10-4) \quad e_3 \frac{q}{3} V^{(12)}(Q_3) = k_0 \frac{e_1 e_3}{r_{13}} + k_0 \frac{e_2 e_3}{r_{23}}$$

sendo $V^{(12)} = V^{(1)} + V^{(2)}$, $r_{13} = |\vec{Q}_1 Q_3|$ e $r_{23} = |\vec{Q}_2 Q_3|$.

A soma de (10-4) com (10-2) dá:

$$(10-5) \quad W_{123} = k_0 \frac{e_1 e_2}{r_{12}} + k_0 \frac{e_1 e_3}{r_{13}} + k_0 \frac{e_2 e_3}{r_{23}}$$

É fácil ver que (10-2), (10-5) admitem uma expressão generalizável à distribuições de N cargas para obter a energia potencial do sistema, W :

$$(10-6) \quad W = k_0 \sum_{j < k}^{1 \text{ a } N} \frac{e_j e_k}{r_{jk}} \quad \left(r_{jk} = |\vec{Q}_j Q_k| \right)$$

em que o duplo somatório sobre os índices j e k (de 1 a N) tem a restrição $j < k$. Mas, olhando ao carácter simétrico do termo genérico, em j, k , pode dar-se a (10-6) uma forma diferente

$$(10-7) \quad W = \frac{1}{2} k_0 \sum_{j \neq k}^{1 \text{ a } N} \frac{e_j e_k}{r_{jk}} = \frac{1}{2} k_0 \sum_j^{1 \text{ a } N} e_j \sum_{k (\neq j)}^{1 \text{ a } N} \frac{e_k}{r_{jk}}$$

Ou seja :

(10-8)

$$W = \frac{1}{2} \sum_j^{1aN} e_j V_j'(Q_j)$$

sendo $V_j'(Q_j)$ o potencial, no ponto Q_j , devido a todas as cargas excepção feita da carga e_j . Vê-se bem que o resultado (10-8) generaliza (10-3) e poderia obter-se directamente pelo prosseguimento da via que conduziu a (10-3).

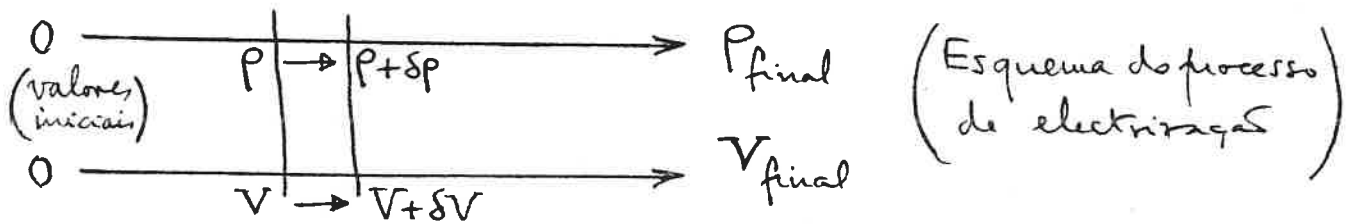
10.3 — Energia electrostática de uma distribuição contínua, no vácuo

Suponhamos agora que se trata de estabelecer, no vácuo, uma distribuição contínua de cargas eléctricas, em volume — para fixar ideias. O resultado será imediatamente extensível a uma distribuição contínua em superfície.

Idealizemos uma electrização que se processa de uma forma contínua, transportando desde o infinito cargas infinitamente pequenas que vão preenchendo progressivamente os diferentes elementos de volume, todos simultaneamente considerados, de modo a ir aumentando em cada um deles a sua carga até se atingir em cada ponto a densidade de carga ρ_f (valor final) que caracteriza nesse ponto a distribuição em causa. À medida que se processa esta electrização contínua, o potencial resultante da distribuição de cargas que se vai estabelecendo aumenta progressivamente, também de uma forma contínua até atingir em cada ponto o valor (final) V_f que caracteriza nesse ponto o estado eléctrico do sistema em causa.

Detenhamo-nos na análise de um estágio intermédio deste processo: uma parte das cargas ocupa já as posições actuais e a parte restante encontra-se ainda no infinito; i.e., efectuou-se

já uma electrização parcial caracterizada pela densidade de carga ρ no elemento de volume genérico, e que determina no ponto do espaço genérico um potencial V . Vamos supor que prossequimos a electrização passando para um estágio infinitamente próximo que se atinge mediante o transporte, desde o infinito, de cargas infinitamente pequenas que vão aumentar em cada ponto a densidade ρ para um valor $\rho + \delta\rho$, fazendo variar concomitantemente o potencial V no ponto genérico do espaço para $V + \delta V$ (Ver esquema).



O trabalho dispendido no transporte da carga $\delta\rho \cdot dv$, que se vai acrescentar ao elemento de volume genérico dv , iguala, a menos de um infinitamente pequeno de ordem superior, o valor $V \cdot \delta\rho \cdot dv$, de acordo com a última nota do § 10.1. Portanto, para todo o volume da distribuição de cargas, \underline{v} , o trabalho global dispendido nesta electrização elementar ($\rho \rightarrow \rho + \delta\rho$) será dado por:

$$(10-9) \quad \delta L = \int_{\underline{v}} V \cdot \delta\rho \cdot dv$$

Mas, porque entretanto V aumenta para $V + \delta V$, a energia potencial das cargas já existentes no sistema, aumenta, em consequência, da quantidade $\delta V \cdot \rho \cdot dv$ em cada elemento de volume, dv ; e portanto para todo o volume das cargas, \underline{v} , aumentada de:

$$(10-10) \quad \delta U = \int_{\underline{v}} \delta V \cdot \rho \cdot dv$$

como um resultado global da mesma electrização elementar. Ora, nas condições a que obedece o transporte das cargas (Cf.

§ 10.1), o trabalho dispendido deve igualar o aumento concomitante da energia potencial do sistema; então, a menos de infinitamente pequenos de ordem superior, cumpre-se

$$(10-11) \quad \delta L = \delta U$$

É este valor comum, que traduz o acréscimo da energia electrostática do sistema, e que designaremos por δW , pode obter-se por uma expressão simetrizada; com efeito

$$\delta W = \delta L = \delta U = \frac{1}{2} (\delta L + \delta U)$$

ou seja:

$$(10-12) \quad \delta W = \frac{1}{2} \int_v (V \cdot \delta \rho + \delta V \cdot \rho) dv$$

Aproveita-se este artifício para levar por diante o cálculo:

$$(10-13) \quad \delta W = \frac{1}{2} \int_v \delta (V \rho) dv = \delta \left[\frac{1}{2} \int_v V \rho dv \right]$$

Isto permite passar imediatamente ao acréscimo total (para todo o processo de electrização, desde $\rho=0$ a $\rho=\rho_f$); com efeito, visto que δW é por (10-13) uma diferencial exacta da função (do estágio genérico da electrização) dada por $\frac{1}{2} \int_v V \rho dv$, então:

$$(10-14) \quad W_f - W_0 = \frac{1}{2} \int_v V_f \rho_f dv,$$

visto que no estágio inicial $\rho=0$ e $V=0$. Como, porém, já convencionámos ser nula a energia do sistema na situação correspondente ao estágio inicial da electrização, porque nessa situação as cargas se encontram todas infinitamente afastadas umas das outras, com interacções nulas — resulta $W_0=0$ e

$$W_f = \frac{1}{2} \int_v V_f \rho_f dv. \text{ Em resumo, a energia electrostática de uma distribuição contínua, em volume, no vácuo, com uma densidade } \rho(Q) \text{ em cada ponto } Q \text{ do volume carregado,}$$

sendo $V(Q)$ o potencial no mesmo ponto genérico, escreve-se

$$(10-15) \quad W = \frac{1}{2} \int_v \rho(Q) V(Q) dv$$

Tratando-se de uma distribuição contínua em superfície, de densidade $\sigma(Q)$ sobre uma superfície S , facilmente se conclui que toda a demonstração pode ser decalada da que acabámos de fazer, vindo análogamente:

$$(10-16) \quad W = \frac{1}{2} \int_S \sigma(Q) V(Q) dS$$

como expressões da energia electrostática W da distribuição.

A expressão (10-16) é imediatamente aplicável a um sistema de condutores em equilíbrio electrostático no vácuo (cf. § 8.6, para as notações). Trata-se de facto de uma distribuição superficial de cargas sobre uma superfície a , pelo menos, N folhas, podendo portanto escrever-se:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \int_{S_{\alpha}} \sigma_{\alpha}(Q_{\alpha}) V_{\alpha}(Q_{\alpha}) dS_{\alpha}$$

e porque $V_{\alpha}(Q_{\alpha})$ é constante sobre toda a superfície S_{α} do condutor α e, por outro lado, $\int_{S_{\alpha}} \sigma_{\alpha}(Q_{\alpha}) dS_{\alpha} = e_{\alpha}$, carga total do condutor α , resulta:

$$(10-17) \quad W = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N e_{\alpha} V_{\alpha}$$

(V_{α} é o potencial do condutor α). Quando se utilizam as relações entre as cargas e os potenciais (cf. § 8.6), a expressão (10-17) revela que a energia electrostática de um sistema de condutores em equilíbrio é uma função quadrática e homogênea dos potenciais (ou das cargas). 23/11/88

Note-se que as expressões (10-15) e (10-16) poderiam também inferir-se do resultado (10-8) do § 10.2. 411190

As expressões (10-15) e (10-16) admitem ainda as seguintes versões imediatas, para as situações a que se referem:

$$(10-15)' \quad W = \frac{1}{2} \int_v \int_{v'} \frac{\rho(Q) \rho(Q')}{r_{QQ'}} dv' dv$$

$$(10-16)' \quad W = \frac{1}{2} \int_S \int_{S'} \frac{\sigma(Q) \sigma(Q')}{r_{QQ'}} dS' dS$$

com uma estrutura idêntica à da expressão (10-7).

10.4 — Expressão da energia na concepção de Maxwell (para um sistema no vácuo)

Vejamus agora que a energia electrostática de um sistema de cargas, em distribuições contínuas em volume, no vácuo, se pode exprimir exclusivamente à custa do campo $\vec{E}(P)$ produzido pela distribuição de cargas (em todo o espaço); esse resultado pode estender-se a uma distribuição contínua em superfície e daí a um sistema de condutores, sem dificuldade. Note-se que se faz aqui a restrição, natural, de que a distribuição é confinada no espaço (não podendo haver cargas no infinito). Poem-se também de parte distribuições de cargas pontuais ou distribuições contínuas em linha, para as quais o campo apresenta singularidades infinitas.

Tomemos então uma distribuição contínua em volume no vácuo e partamos da expressão (10-15) para a energia deste sistema. Recordemos as propriedades do campo para esta situação (cf. § 6.4.4)

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = 0 & (\vec{E} = -\text{grad } V) \\ \text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \end{cases}$$

e utilizemo-las para transformar (10-15). Tem-se:

$$\rho V = \epsilon_0 V \operatorname{div} \vec{E} = \epsilon_0 [\operatorname{div}(V \vec{E}) - \vec{E} \cdot \operatorname{grad} V] =$$

$$= \epsilon_0 [\operatorname{div}(V \vec{E}) + \vec{E}^2]$$

Integramos em volume para todo o espaço (domínio Ω).

Para o 1º membro, resulta:

$$\int_{\Omega} \rho V \, dv = \int_v \rho V \, dv$$

porque a integranda só não é nula onde $\rho \neq 0$, i.e., no volume v .

Para a 1ª parcela do 2º membro, tem-se:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(V \vec{E}) \, dv = \int_{\Sigma_{\infty}} V \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

pelo teorema do fluxo-divergência e pelas conhecidas condições de regularidade no infinito de V e de \vec{E} (cf. § 6.2, pag 53), que se verificam quando não há cargas no infinito. A expressão (10-15) transforma-se portanto em

$$(10-18) \quad W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\Omega} \vec{E}^2 \, dv$$

Deve sublinhar-se que este integral se estende a todo o espaço — domínio Ω — excluindo-se obviamente as regiões em que \vec{E} for nulo; no caso de um sistema de condutores, estende-se ao espaço livre (cf. § 8.5.1).

Esta expressão (10-18) sugere uma nova concepção para a localização e distribuição da energia, que é a concepção de Maxwell: a energia reparte-se pelo espaço onde exista o campo eléctrico \vec{E} ; em cada elemento de volume dv onde \vec{E} esteja definido com valor significativo, aí se localiza uma quantidade de energia, que é sempre

(*) A expressão (10-15) sugeria que a energia se distribui pelos espaços voluminosos ou superficiais que são ocupados pelas cargas.

positiva, $\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 dv$. Há portanto uma distribuição contínua de energia, por todo o espaço "preenchido" pelo campo, com uma densidade volumétrica $\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2$. Tratando-se, em particular, de um sistema de condutores, a energia, segundo a concepção de Maxwell, não reside sobre os condutores — ela distribui-se por todo o espaço livre.

Esta concepção resulta apenas de uma leitura admissível da expressão (10-18); ela não constitui uma interpretação que se nos imponha necessariamente. Não pode com efeito asseverar-se fisicamente a existência de uma repartição espacial da energia electrostática: o que tem significado seguro é falar-se da energia global (em todo o espaço), definida como uma função da configuração do sistema. (Não podemos estar certos da exactidão da expressão de balanço energético $\delta W = \delta \left[\frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\Omega} \vec{E}^2 dv \right]$ senão quando estendida à totalidade do campo.)

No entanto, a localização da energia no espaço onde actua o campo, com considerável acumulação de energia nas regiões dos valores elevados do campo, parece intuitivamente razoável; e a ideia de uma densidade de energia com a expressão $\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2$, como sugere (10-18), estendida depois ao electromagnético em geral, veio a revelar-se de utilização muito conveniente, desempenhando um papel de grande importância em todos os desenvolvimentos da Teoria de Maxwell.

10.5 — Energia electrostática em dieléctricos

As expressões estabelecidas nos §§ precedentes para a energia electrostática de um sistema no vácuo não são, em geral, imediatamente extensíveis às situações de campos electrostáticos na presença de dieléctricos. Isso deve-se

as factos de que o processo de electrizaçãõ idealizado no § 10.1 e depois aplicado, mediante o transporte das cargas (que sãõ obviamente cargas verdadeiras) desde o infinito para as suas posições actuais, — se acompanha agora da polarizaçãõ dos dielétricos. Surge assim um outro deslocamento de cargas — o que leva, numa perspectiva macroscópica, à criaçãõ de um dipolo dentro de cada elemento de volume; a esse deslocamento de cargas corresponde um trabalho não contabilizável pelo mesmo método (porque a separaçãõ das cargas positivas e negativas se realiza dentro de cada elemento de volume a partir dos primitivos centros de cargas em coincidência). Este trabalho de criaçãõ dos dipolos nos próprios locais em que eles surgem traduz-se numa energia que fica contida nos dielétricos; pode calcular-se por um método adequado e deve tomar-se em consideraçãõ em todo o balanço energético, de uma maneira geral.

No entanto, se continuarmos a interessar-nos expressamente pela energia potencial das cargas verdadeiras no campo em que se encontram (agora não só o campo das interações mútuas, mas também o resultante da polarizaçãõ dos dielétricos), nós poderemos prescindir do cálculo da energia que vai ficar contida nos dielétricos — a fim de atingir mais facilmente o nosso objectivo.

Suponhamos que se trata de estabelecer, na presença de um dado dielétrico, uma distribuiçãõ contínua de cargas eléctricas, em volume, para fixar ideias. Idealizemos uma electrizaçãõ contínua do mesmo tipo que a considerada no § 10.3 e decaiquemos para aqui a análise aí desenvolvida.

O trabalho elementar, despendido no transporte das cargas δp do que constitui a electrizaçãõ elementar $p \rightarrow p + \delta p$.

continua a ser dado por (10-9) e fornece, aqui como lá, o acréscimo δW da energia potencial do sistema de cargas transportadas, ou seja, no nosso caso, do sistema das cargas verdadeiras:

$$(10-9)' \quad \delta W = \int_V V \delta \rho \, dv$$

Entretanto a energia δU fornecida por (10-10) não é mais, nas circunstâncias presentes, igual a δL (como em (10-11)); e o método seguido no § 10.3 tem que ser abandonado.

Mas pode prosseguir-se o cálculo, a partir de (10-9)', por uma outra via, utilizando desde já as propriedades do campo (cf. 1.142-a, b)

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = 0 & (\vec{E} = -\text{grad } V) \\ \text{div } \vec{D} = \rho \end{cases}$$

e elaborando um tratamento semelhante ao seguido no § 10.4 (para estabelecer (10-18) a partir de (10-15)).

Tem-se sucessivamente:

$$(1) \quad \delta \rho = \delta(\text{div } \vec{D}) \implies \delta \rho = \text{div}(\delta \vec{D})$$

$$(2) \quad \begin{aligned} V \text{div}(\delta \vec{D}) &= \text{div}(V \delta \vec{D}) - \text{grad } V \cdot \delta \vec{D} = \\ &= \text{div}(V \delta \vec{D}) + \vec{E} \cdot \delta \vec{D} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \int_{\Omega} V \delta \rho \, dv = \int_V V \delta \rho \, dv$$

$$(4) \quad \int_{\Omega} \text{div}(V \delta \vec{D}) \, dv = \int_{\Sigma_{\infty}} V \delta \vec{D} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

Com repetição das justificações dadas no § 10.4. A expressão (10-9)' transforma-se portanto em

$$(10-19) \quad \delta W = \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \delta \vec{D} \, dv$$

sendo este integral estendido a todo o espaço — domínio Ω —.

Passando ao acréscimo total (i.e., para todo o processo de eletrização, desde o estado inicial com $\rho=0$ até o estado final com $\rho=\rho_f$), vem:

$$(10-20) \quad W = \int_0^f \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \delta \vec{D} \, dv$$

ou ainda:

$$(10-21) \quad W = \int_{\Omega} \left[\int_0^{\vec{D}} \vec{E} \cdot \delta \vec{D} \right] dv$$

Esta é a expressão geral procurada para a energia de um sistema de cargas (verdadeiras) na presença de um dielétrico.

Se considerarmos agora, em particular, o caso de o (os) dielétrico(s) serem) perfeito(s) e isotrópico(s), então, num ponto genérico do espaço cumpre-se $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ (Cf 1.149) e daí resulta sucessivamente: (1) $\delta \vec{D} = \epsilon \delta \vec{E}$;

$$(2) \quad \vec{E} \cdot \delta \vec{D} = \epsilon \vec{E} \cdot \delta \vec{E} = \epsilon \delta \left(\frac{1}{2} \vec{E}^2 \right) = \delta \left(\frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 \right) = \delta \left(\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \right);$$

$$(3) \quad \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \delta \vec{D} = \int_{\Omega} \delta \left(\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \right) = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$$

Então, na presença de dielétricos perfeitos e isotrópicos:

$$(10.22) \quad W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{D} \, dv$$

sendo este integral estendido a todo o espaço — domínio Ω —. É a expressão da energia, na concepção de Maxwell, para um sistema electrostático na presença de dielétricos perfeitos.

Pode mostrar-se, por um tratamento semelhante ao que foi seguido no § 10.4 (para estabelecer (10-18) a partir de (10-15)), mas em sentido inverso, que (10.22) é transformável em

$$(10.23) \quad W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho V \, dv \quad \left(\begin{array}{l} \text{na presença de} \\ \text{dielétricos} \\ \text{perfeitos e isotrópicos} \end{array} \right)$$

sendo Ω o volume carregado (com cargas verdadeiras).

Cap II)
§ 10.) Sol'

Energia electrostatica