

Apanhado* para as aulas de

Introdução à Relatividade

(ver também os acetatos em <http://w3.ualg.pt/~jlongras/pub-pedag.htm#IFQR>)

no âmbito da disciplina de Introdução à Física Quântica e à Relatividade
do **2º ano** dos cursos de Lic. em Física e Química e em Eng. Física
(2005-2006)

José Figueiredo

Departamento de Física

Faculdade de Ciências e Tecnologia

Universidade do Algarve

(<http://w3.ualg.pt/~jlongras/ensino.htm>; <http://w3.ualg.pt/~jlongras/fm.html>)

***Apanhado**^S s. m. resumo; sinopse; conjunto de elementos recolhidos de um ou mais livros com o fim de se obter um resultado geral ou esclarecedor;

Nota Prévía

Este apanhado destinam-se a alunos de cursos da área de Física da Universidade do Algarve. Não pretende ser enciclopédico nem se assumem como tendo a “papa toda”, mas também não é um conjunto de “acetatos”, e não dispensa ou substitui, aliás recomenda vivamente, a frequência das aulas e a consulta (sempre que sejam consideradas insuficientes ou ofereçam dúvida) de outras fontes, nomeadamente as citadas na bibliografia, ou da especialidade, servindo apenas para orientar o aluno no seu estudo. Apresentam-se exemplos de aplicação e problemas, para além dos fornecidos nos anos anteriores.

Na leccionação das matérias, no contexto dos programas, procuro apresentar os assuntos mostrando os avanços e recuos característicos do processo científico. Atalho no que respeita à “catequização” e ao “papagueio”, esforçando-me por promover atitudes conducentes à resolução de novos problemas, à **aprendizagem a partir do erro**. Tenho presente que “ensinar é apenas ajudar a aprender”, e que “ensinar não é função vital, porque não tem o fim em si mesma; a função vital é aprender”, e que para aprender é necessário *aprender a pensar*, e ler, ler muito, pois «quase todo o conhecimento está escrito», meditando sobre o que se lê, enquanto se lê e após se ter lido.

Dado que “saber não equivale a ser-se muito esperto”, o discernimento e a capacidade de utilizar e coordenar a informação são a chave para o êxito, sem desconsiderar que é a quantidade de informação a que vamos tendo acesso que alimenta o nosso progresso pessoal. Nesta óptica, procuro que as minhas aulas e os elementos didáticos que coloco à disposição dos alunos, não sejam apenas uma obra de copista, mas derivem de um processo de investigação, e correspondam a apanhados actualizados e dinâmicos, sempre abertos e sequiosos, numa expansão mais ou menos acelerada, prontos a receberem novas entradas, em particular, tendo em mente a possibilidade de os voltar a leccionar.

Espera-se que o aluno faça um trabalho sério, empenhado e seja um leitor atento. Após assistir às aulas, deve estudar todos os assuntos por si, tentar fazer os problemas, e, se necessário, voltar a ler os textos relevantes ao problema. Deve ter sempre presente que a aprendizagem ocorre pensando criticamente nos assunto e resolvendo problemas «antigos» e novos.

Convém referir que este apanhado pode conter (e têm com certeza) erros involuntários (de dactilografia, de “copiar e colar”, ou de outra natureza). Agradece-se a comunicação dos mesmos, bem como o envio de comentários, para jlongras@ualg.pt.

O autor agradece ao Professor Robertus Potting toda a colaboração prestada.

Bom trabalho!

Gambelas, Março de 2006

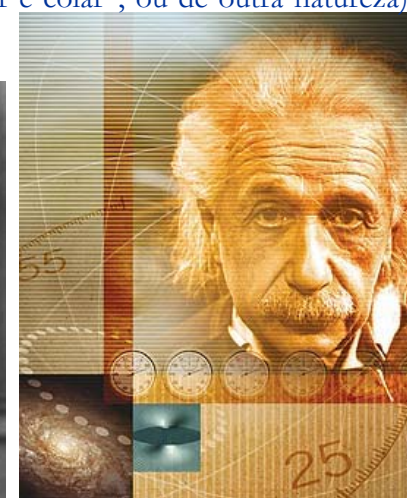
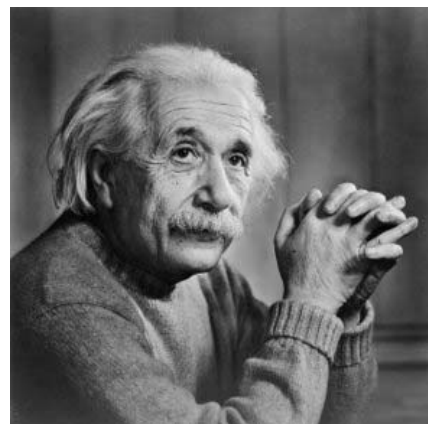
O docente,

José Figueiredo

Departamento de Física da Universidade do Algarve, Campus de Gambelas,
8000-117 FARO, Portugal.

URL: <http://w3.ualg.pt/~jlongras/>; <http://w3.ualg.pt/~jlongras/fm.html>;

E-mail: jlongras@ualg.pt



Introdução

Sendo a Introdução à Física Quântica e à Relatividade uma disciplina do 2º ano dos cursos de Física da Universidade do Algarve, onde se faz a primeira abordagem de temas de Física Moderna, procurar-se-á que o interesse *pragmático* dos assuntos seja valorizado, sem empalidecer a importância e o rigor dos valores científicos, de forma a dar uma visão de conjunto das principais teorias da Natureza do século XX, a Teoria da Relatividade e a Teoria Quântica, em particular o seu interesse prático e os limites das *estruturas* teóricas.

Em Física, a teoria da relatividade corresponde a uma axiomática físico-matemática formulada por Albert Einstein, físico alemão (1879-1955), que, alargando os conceitos de espaço, de tempo e de movimento, permite resolver as insuficiências da Mecânica Newtoniana, marcantes do final do século XIX, na interpretação de vários resultados experimentais. A teoria da relatividade restrita aborda a descrição dos fenómenos físicos para diferentes grupos de observadores em movimento relativo de translação uniforme. A teoria da relatividade geral trata da explicação dos fenómenos físicos para diferentes grupos de observadores em movimento relativo uniformemente acelerado.

A teoria da relatividade restrita é fundamental na formação de um físico, de um químico-físico e de um engenheiro especializado nos ramos mais modernos da engenharia e da tecnologia. Por seu lado, a teoria da relatividade geral, sendo uma ferramenta físico-matemática de elevada complexidade, é essencial *apenas* aos astrofísicos e cosmólogos, pois corresponde a uma teoria de gravitação que substitui a teoria de gravitação de Newton. Esta será abordada de forma curta, uma vez que é objecto de muita curiosidade por parte dos jovens estudantes e dos adultos que não se querem atolar numa cultura mediática na qual os valores históricos e científicos estão praticamente ausentes. Acresce, que é um dos campos mais activos e fascinantes da Física Moderna e, actualmente, faz parte dos conteúdos programáticos do ensino secundário. Devido à sua complexidade matemática, a relatividade geral será abordada apenas numa componente do ponto de vista de um físico experimental (que é o meu caso), sendo apenas apresentados os seus fundamentos e os fenómenos que põe à prova as suas conjecturas.

A abordagem dos diferentes temas privilegiará uma atitude reflexiva, evitando sempre que possível um tratamento mecanista. Pretende-se dar ênfase ao «processo de destilação do conhecimento científico» e ao desenvolvimento das teorias científicas que marcaram profundamente o século XX. Serão:

- Realçados os conflitos e as tentativas de solução,
- Abordadas as *resistências* à aceitação de novas ideias,
- Apresentados alguns dos numerosos *testes* experimentais,
- Enunciadas algumas das suas aplicações práticas.

O docente, e este apanhado, foi largamente inspirado e muitas vezes imitou as seguintes obras referidas na bibliografia:

- ***Teoria da Relatividade Especial*, Ramayana Gazzinelli, Editora Edgard Blücher, Brasil 2005.**
- *Subtil é o senhor - Vida e pensamento de Albert Einstein*, A. Pais, Gradiva 1993.
- *O Princípio da Relatividade*, H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, Fundação Calouste Gulbenkian, 1971.
- *O Annus Mirabilis* de Einstein - cinco artigos que revolucionaram a Física, John Stachel, Gradiva, 2005.
- *O passado e o presente do Comos*, Scientific America Brasil, Edição espacial nº1, 2003.
- *Tempo & Espaço*, Visual Ciências, Verbo, 1994.

Pressupostos da Mecânica Clássica

(“só não erra quem não faz”)

Bibliografia:

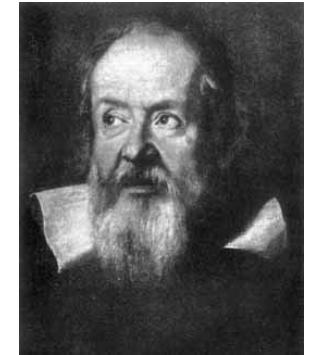
- *Teoria da Relatividade Especial*, Ramayana Gazzinelli, Editora Edgard Blücher, Brasil 2005.
- ‘O *Annus Mirabilis* de Einstein - cinco artigos que revolucionaram a Física’, John Stachel, Gradiva, 2005.
- *Physics for Scientists and Engineers*, R. A. Serway and J. W. Jewett, Jr., Thomson Brooks/Cole, 2004.

Espaço, tempo, leis, relatividade, referencial de inércia

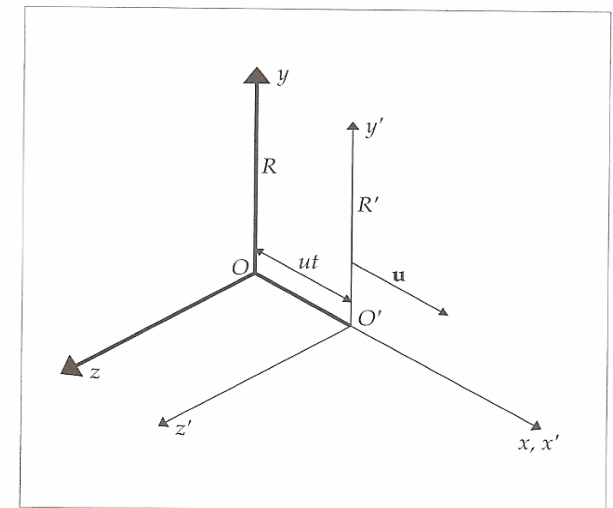


- Na visão newtoniana, o espaço e o tempo são absolutos:
 - - O tempo absoluto, verdadeiro e matemático, em si próprio, e por sua própria natureza flui igualmente sem consideração por nada externo [...]
 - - O espaço absoluto, por sua própria natureza, sem consideração por nada externo, permanece sempre igual e imóvel [...]
- Formulação matemática das leis da natureza. Sucesso sem precedentes: movimento dos planetas, marés, projecteis. O universo possui uma ordem matemática.
- Primeira grande unificação: leis terrestres e leis celestes são as mesmas!
- E a luz? Newton explicou o arco-íris e decompôs a luz branca com um prisma. Propôs a teoria corpuscular da luz.
- O espaço é absoluto, homogéneo, isotrópico e euclidiano
- O tempo é absoluto, homogéneo e isotrópico
- Leis da Mecânica (lei da inércia, $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, lei da acção – reacção) ($\mathbf{F} \equiv$ vector força)
- Paradigma da Mecânica Clássica: um fenómeno físico só é considerado completamente compreendido quando existe um modelo mecânico para representá-lo; uma lei física deve ter a forma dinâmica das leis da mecânica (uma equação diferencial); determinismo (Laplace).
- Na versão $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ da relação $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, porque é que m é considerada uma grandeza escalar?
- A descrição de um fenómeno físico depende do referencial em que é feita: por isso se fala em **relatividade**.
- Medir o tempo e a posição instantânea de um corpo. Considere-se:
 - Um Sistema de referência – Referencial [por exemplo o sistema de coordenadas cartesianas (a escolha da orientação dos eixos é arbitrária – porquê?)]
 - A métrica euclidiana (validade do teorema de Pitágoras)
 - Um qualquer fenómeno periódico pode ser adoptado como relógio para medir o tempo
- Referencial inercial: sistema de referência particular, onde é válida a lei da inércia

Transformação de Galileu



- Será um laboratório (referencial) fixo na Terra um «bom» referencial inercial?
 - Determinar a velocidade e a aceleração de um corpo na superfície da Terra relativamente ao centro da Terra
 - Determinar a velocidade e a aceleração da Terra relativamente ao Sol
 - Comparar os resultados obtidos com o valor da aceleração devida à gravidade
- Partícula ou corpo livre: partícula ou corpo onde não actuam forças
- Transformação de Galileu (TG)
 - Dada uma lei Física num referencial, como será a sua forma noutra referencial?
 - Como é que ela se transforma ao passarmos de um referencial para outro?
 - Se conservar a sua forma, a lei Física em questão diz-se invariante sob a transformação
- Configuração padrão: referenciais $R(x, y, z)$ e $R'(x', y', z')$ com eixos paralelos
 - R' move-se na direcção x com velocidade u em relação a R , sendo os dois sistemas coincidentes no instante inicial
 - Um fenómeno que ocorre no ponto do espaço (x, y, z) do referencial R , no instante t , é um evento, sendo referido como o evento (x, y, z, t) [em $R'(x', y', z', t')$]
 - Transformação de Galileu: $x = x' + ut$, $y = y'$, $z = z'$, e $t = t'$ (o tempo é absoluto)
 - Transformação das velocidades: $v_x = v_x' + u$, $v_y = v_y'$, $v_z = v_z'$



Princípio da relatividade de Galileu

- A primeira lei de Newton da Dinâmica é invariante sob a TG (porquê?)
- A massa e a força são grandezas físicas independentes do referencial (porquê?)
- A terceira lei de Newton da Dinâmica também é invariante sob a TG (porquê?)
- A segunda lei de Newton da Dinâmica também é invariante sob a TG (porquê?)
- Conclui-se que todas as leis da Mecânica Clássica são invariantes sob a TG (porquê?)

Princípio da relatividade de Galileu

As leis da Mecânica são invariantes sob a transformação de Galileu.

- Uma vez que não há mudança na forma da lei quando um fenómeno é examinado em diferentes referenciais inerciais, um movimento uniforme não altera o fenómeno.
- Enunciado alternativo do princípio da relatividade de Galileu: é impossível detectar por meio de uma experiência mecânica o movimento de um referencial inercial ... (este conceito foi descoberto por Galileu no séc. XVII, só recebendo o nome de *princípio da relatividade* no contexto da teoria da relatividade de Einstein)
- A Mecânica de Newton, a transformação de Galileu e o princípio da relatividade de Galileu são consistentes, isto é, formam um sistema de leis sem contradições internas.
- Este sistema de leis permaneceu válido, com imenso sucesso, até ao início do Sec. XX e, com algumas restrições, é utilizado até hoje: a quase totalidade da Mecânica planetária, a mecânica dos foguetes e dos satélites, e a dos corpos macroscópicos na Terra, podem ser analisados com este sistema de leis
- Contudo, falha quando se tenta encontrar um referencial absoluto para o electromagnetismo

Galileo Galilei introduz a **idealização**: podemos imaginar um fenómeno “puro”, e abstrairmo-nos das imperfeições experimentais, chegando assim a leis da natureza.

O princípio da relatividade de Galileu é descrito no seu livro “diálogos sobre dois sistemas máximos do mundo”:

... (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma

(desde que o movimento seja uniforme e não flutuante para um lado e para outro) não se perceberá a menor modificação dos efeitos mencionados, e nem de algum deles poderá concluir se o navio se move ou se está parado ...

Exemplo de aplicação do princípio da relatividade de Galileu

Galileu concluiu empiricamente que as leis da Mecânica conservam a sua forma quando transformadas de um referencial inercial para outro: não se pode determinar por meio de experiências de mecânica se um dado referencial inercial está ou não em movimento

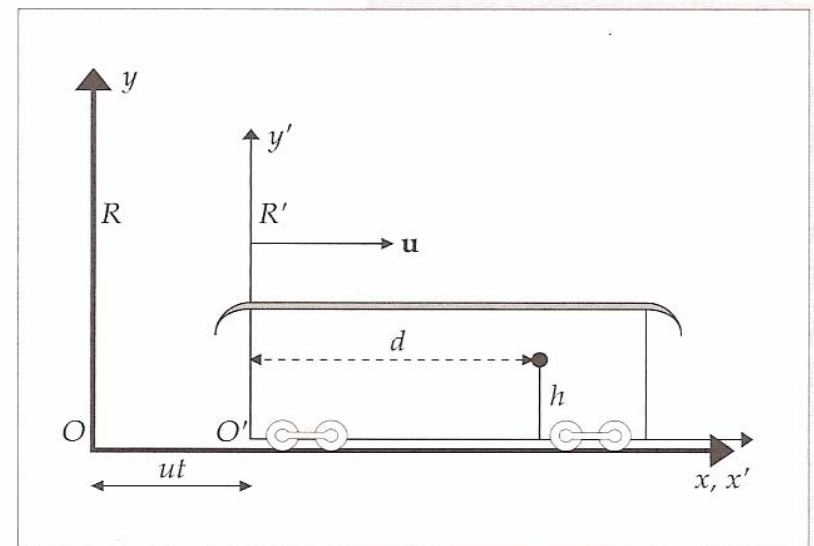
Exercício: um vagão move-se com velocidade uniforme u , em relação à plataforma da estação. Um passageiro deixa cair um objecto de uma altura h .

O passageiro observa que o objecto, durante a queda, obedece à segunda lei de Newton da Dinâmica. Mostre que para um observador na plataforma o objecto segue a mesma lei.

Seja R o referencial ligado à plataforma, fixo na Terra, e R' o referencial ligado ao vagão, fixo no vagão, movendo-se com velocidade u em relação a R (R e R' são considerados referenciais inerciais)

Da TG, $x=x'+ut$, $y=y'$, $z=z'$, e $t=t'$, obtém-se $v_x=v_x'+u$, $v_y=v_y'$, $v_z=v_z'$, e $a_x=a_x'=0$, $a_y=a_y'$, $a_z=a_z'=0$: a aceleração do objecto é invariante sob a TG (a força não depende do sistema de coordenadas; a massa é independente do sistema de coordenadas) – a equação $F=ma$ é invariante sob a TG.

Ter presente que a descrição das trajectórias dependem do referencial. Mostre que para R' o objecto cai na vertical, e que para R descreve uma parábola



Problemas propostos (1)

Problemas relacionados com a transformação de Galileu e a lei da adição das velocidades

IFQR 2005-2006

Apanhado para Introdução à Teoria da Relatividade; versão 001 (a melhorar)

1. Um jogador de bilhar é convidado para um torneio a bordo de um grande navio transatlântico. Aceita o convite e intensifica os treinos em sua casa. Não seria melhor treinar a bordo do navio?
2. Numa carrinha movendo-se a 10 m/s, uma bola é deixada cair da altura de 1 m em relação ao chão da carrinha. Indique as condições iniciais do movimento em cada um dos referenciais, a forma da trajectória e as grandezas que têm o mesmo valor nos dois referenciais.
3. Num dia de chuva, um passageiro num carro em repouso vê a chuva cair verticalmente. Quando o carro está em movimento, vê a chuva a incidir obliquamente no pára-brisas, observando que quanto maior é a velocidade do carro, mais obliquamente vê cair a chuva. Porquê?
4. Dentro de um barco, em movimento rectilíneo e uniforme, há uma mesa de bilhar. Nessa mesa, duas bolas sofrem uma colisão que se pode considerar perfeitamente elástica. Indique as afirmações correctas:
 - A) Apenas um observador em terra pode aplicar as leis de conservação.
 - B) Um observador no barco e um observador em terra dizem que o momento linear das bolas é igual antes e após a colisão e medem o mesmo valor.
 - C) Um observador no barco mede 400 J para a energia cinética do sistema das bolas antes e após a colisão e o observador em terra mede o mesmo valor, antes e após a colisão, mas diferente de 400 J.
 - D) Os observadores no barco e em terra medem o mesmo valor para o diâmetro das bolas.
5. Um praticante de remo consegue imprimir à canoa a velocidade de 3,0 km/h, em relação à água do rio que pretende atravessar, cuja largura é 1000 m. O praticante de remo parte do ponto A de uma das margens, supostas paralelas, pretendendo atingir a outra margem.
 - a) Se a água do rio não tivesse corrente, qual seria a melhor trajectória para o praticante de remo atravessar o rio no menor tempo possível?
 - b) Admitindo que a velocidade da corrente é de 2,0 km/h em relação à Terra, determine o tempo gasto pelo remador para atravessar o rio se mantiver a canoa: i) perpendicular às margens, indo atingir a outra margem no ponto C , à direita de A ; ii) a formar um ângulo com a recta AB , perpendicular às margens, indo atingir a outra margem no ponto B .

Dificuldades da concepção Mecânica

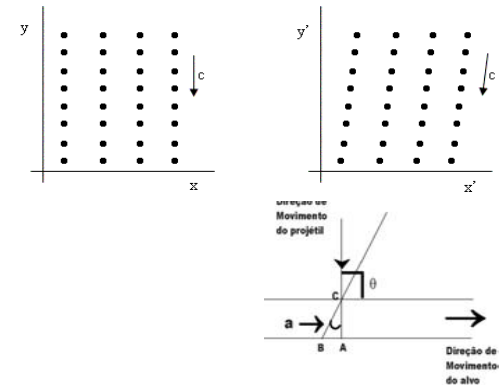
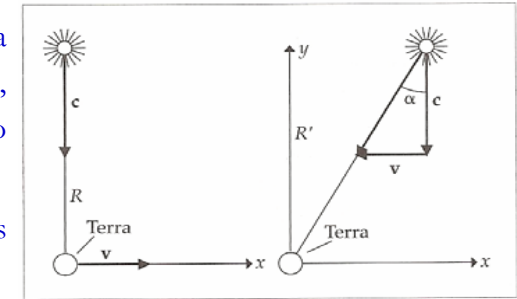
(“não se deve mudar um fusível sem saber porque é que ele queimou”)

Bibliografia:

- *Teoria da Relatividade Especial*, Ramayana Gazzinelli, Editora Edgard Blücher, Brasil 2005.
- *O Princípio da Relatividade*, H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski (Tradução do original alemão pelo Prof. Manuel dos Reis), Fundação Calouste Gulbenkian, 1971.
- *O Annus Mirabilis de Einstein* - cinco artigos que revolucionaram a Física, John Stachel, Gradiva, 2005.
- *Modern Physics*, P. A. Tripler and R. A. Llewellyn, W. H. Freeman and Company, 2002.
- *Tempo & Espaço*, Visual Ciências, Verbo, 1994.

Aberração da luz das estrelas e experiência de Fizeau-Fresnel

- O fenómeno da aberração da luz das estrelas foi descoberto por James Bradley em 1725, ao examinar a variação da posição aparente das estrelas no zénite da eclíptica durante o ano. Para compensar este efeito, era necessário inclinar o telescópio num ângulo $\alpha \approx 20''$. Bradley explicou este fenómeno como o resultado da combinação da velocidade da luz (finita) com a velocidade da Terra no seu movimento orbital.
- Este fenómeno é semelhante à variação da direcção de queda das gotas de chuva (sem vento) quando nos deslocamos com velocidade v relativamente à Terra
- Se a velocidade da Terra fosse nula relativamente à estrela (ou c fosse infinita), $\alpha \approx 0''$. Como a Terra se move com velocidade v relativamente à estrela e a luz tem velocidade finita, o ângulo sob o qual se deve observar a estrela é dado por: $\tan \alpha = v/c$ (determinar v)
- Este fenómeno mostra que o éter, que é estacionário no referencial R, não é arrastado pela Terra (referencial R'). Se fosse, não haveria aberração e o telescópio deveria ser direccionado na vertical



Experiência de Fizeau-Fresnel

- A experiência sobre o arrastamento do éter por um meio em movimento
- Segundo a teoria de Fresnel, verificada experimentalmente por Fizeau em 1853, a velocidade da luz v num meio de índice de refração n , que se desloca com velocidade u em relação ao observador, é dada por

$$v = \frac{c}{n} \pm \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)u \quad (4)$$

o sinal + aplica-se quando a luz tem o sentido do movimento do meio; o sinal - quando os movimentos são opostos

- Um tratamento rigoroso desta experiência deve ser feito usando a teoria electromagnética de Maxwell
- A equação (4) sugere que o éter é parcialmente arrastado pelo meio em movimento. O factor $(1-1/n^2)$ é o coeficiente de arrastamento de Fresnel, i.e., a fracção da velocidade u do meio com que o éter é arrastado. Contudo, pela TG, se o éter fosse totalmente arrastado pelo meio, a velocidade da luz seria dada por $v=c/n \pm u$

Estes dois fenómenos favorecem a hipótese de que o éter, que é estacionário no referencial R, não é arrastado pelos corpos materiais em movimento (referencial R'). Por exemplo, se fosse, não haveria aberração e o telescópio deveria ser orientado na vertical.

A velocidade da luz e a experiência de Michelson e Morley

IFQR 2005-2006

Apanhado para Introdução à Teoria da Relatividade; versão 001 (a melhorar)

- A partir das relações de Maxwell para o vácuo obtém-se a equação (1),

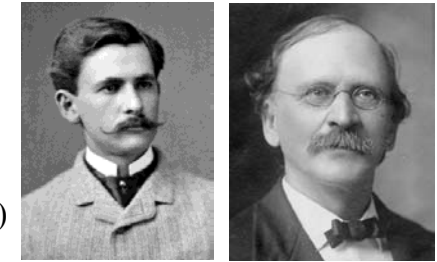
$$\nabla^2 f - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad \left(\text{segundo a componente } x: \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \right) \quad (1)$$

onde f representa o campo eléctrico ou o campo magnético

- Comparando esta equação com a equação (2) da mecânica clássica para uma onda a propagar-se na direcção x , conclui-se que a equação (1) pode ser interpretada como a equação de onda para os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} . Na equação (2), v representa a velocidade de propagação da onda, podendo-se concluir que a velocidade v da onda electromagnética é (3)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

$$v^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \quad (3)$$

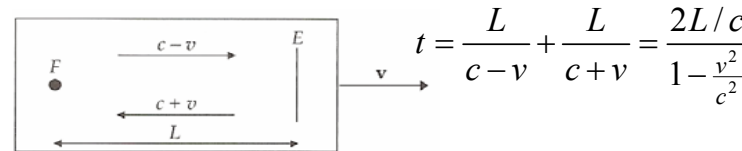


- A semelhança entre o valor obtido através da relação (3) e o valor da velocidade da luz conhecido na época, levou Maxwell a concluir que a luz seria uma onda electromagnética e, então, $v=c$

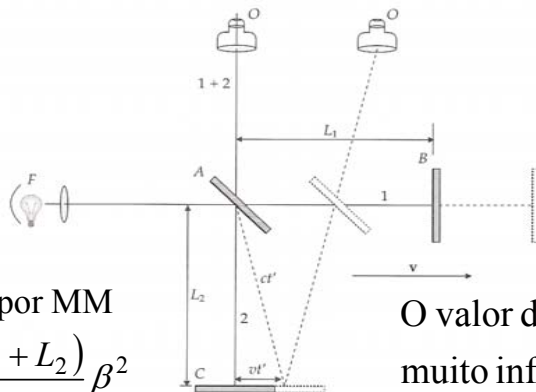
Questão: em relação a que referencial se deve medir c ?

- Segundo Maxwell, c deveria ser medida relativamente ao éter. (Renasce o éter, meio de suporte das ondas electromagnéticas: o éter deveria preencher todo o espaço, inclusive os corpos materiais, não ter massa, estar em repouso relativamente ao espaço absoluto, ser bastante rígido, e ser imperceptível. Assim, se medirmos a velocidade da luz num laboratório terrestre no mesmo sentido do movimento da Terra e no sentido contrário, os valores de velocidade obtidos serão diferentes. Se os valores obtidos forem iguais, conclui-se que o éter é arrastado pela Terra no seu movimento

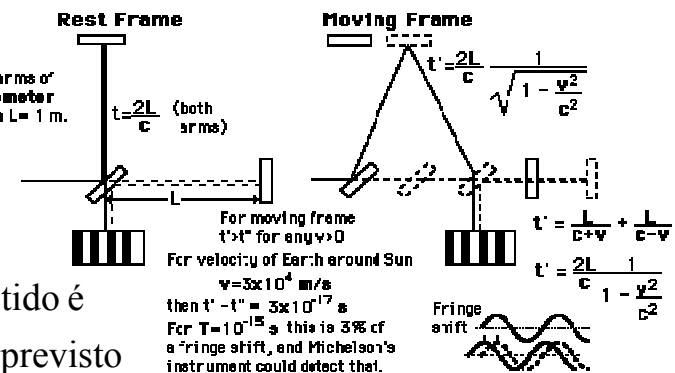
- Michelson e Morley procuraram responder a esta questão através da experiência. O resultado obtido foi negativo: concluíram que a velocidade da luz era a mesma em ambos os sentidos e não observaram qualquer movimento do éter relativamente à Terra (ver artigo de Michelson e Morley - MM)



Michelson Morley Experiment
A famous experiment which failed. (?*)
*Nobel Prize, 1907



O valor de ΔN obtido é muito inferior ao previsto



Deslocamento das franjas esperado por MM

$$\Delta N = \frac{c(\Delta t - \Delta t')}{\lambda} = \frac{2(L_1 + L_2)}{\lambda \sqrt{1 - \beta^2}} \approx \frac{(L_1 + L_2)}{\lambda} \beta^2$$

Problemas propostos (2)

Problemas relacionados com a interpretação clássica da experiência de Michelson-Morley

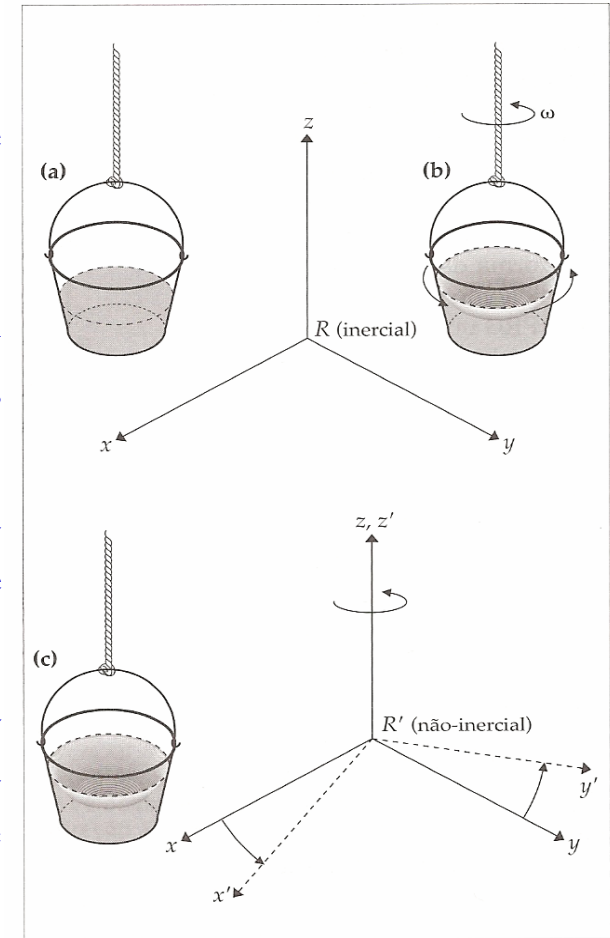
1. A bússola de um avião indica que ele voa na direcção S→N e o velocímetro indica uma velocidade de 200 km/h relativamente ao ar. O vento sopra a 80 km/h no sentido O→L.
 - a) Qual é a velocidade do avião em relação ao solo?
 - b) Em que direcção deve o piloto apontar o avião para atingir um objectivo a norte e qual será a sua velocidade relativamente ao solo?
2. Um rio de 100 m de largura *corre* para o norte com velocidade de 5 km/h; um homem rema uma canoa, cruzando o rio, com velocidade de 5 km/h perpendicularmente à corrente.
 - a) Qual é a velocidade da canoa relativa à margem?
 - b) Em que ponto, a norte de partida, a canoa atingirá a margem oposta?
 - c) Quanto tempo a canoa levará para atravessar o rio?
3. Um avião faz o trajecto de ida e volta entre as cidades A e B com velocidade u em relação ao ar estacionário. Calcule a diferença dos tempos de trajecto entre as situações em que há vento com velocidade v de A para B e perpendicular a AB.

Problemas relacionados com a interpretação da aberração da luz das estrelas

4. Gotas de chuva, que caem verticalmente, deixam «riscos» com inclinação de 30° , em relação à vertical, nas janelas dos vagões de um comboio, que viaja à velocidade de 20 km/h para leste.
 - a) Determine a componente horizontal da velocidade da gota em relação ao solo e em relação ao comboio.
 - b) Calcule a velocidade da gota em relação ao solo e em relação ao comboio. Sol: $v_s \sim 34,6$ km/h, $v_{tr} \sim 40$ km/h .
5. Um astrónomo observa uma estrela distante próxima ao plano da eclíptica da Terra. Qual é a figura desenhada pela estrela, devido ao fenómeno de aberração da luz e qual é a sua dimensão (ângulo de visão em segundos de arco)?
6. Justifique a seguinte afirmação: a experiência de aberração da luz das estrelas mostra que o referencial do Sol é um referencial inercial “melhor” do que o referencial da Terra.

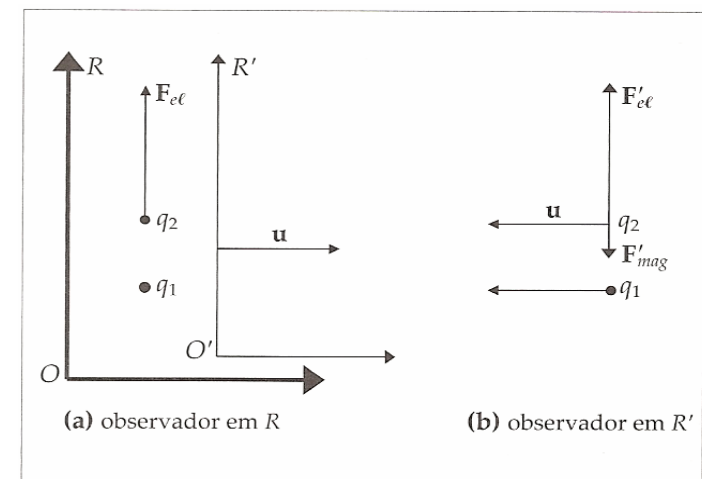
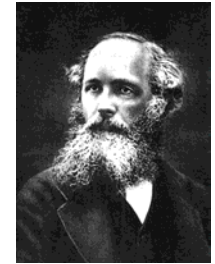
Aceleração absoluta e Princípio de Mach

- Críticos ao conceito de espaço absoluto: Huygens, ... Leibniz, ... Berkeley, ... Mach ...
- Será possível determinar o movimento absoluto?
- Newton acreditava que era possível determinar uma aceleração absoluta ... por causa das forças de inércia que «apareciam» nos movimentos acelerados
- Newton propôs a experiência do balde com água suspenso por uma corda: giremos várias vezes em torno do seu eixo, de modo a torcer a corda. Se o soltarmos de seguida, o balde inicia um movimento de rotação. O atrito vai fazer com que água acompanhe o movimento do balde, tornado a superfície da água concava.
- Segundo Newton, um observador no eixo do balde, girando com ele, conclui, a partir da forma da superfície da água, que o balde tem uma aceleração absoluta. Para Newton as forças inerciais que aparecem em referenciais em rotação uniforme, resultam de rotações absolutas
- Para Mach só existem movimentos relativos: na experiência do balde, o que o observador «vê» é a aceleração do balde em relação a todas as massas do Universo e não ao espaço absoluto: a concavidade seria observada igualmente se deixássemos o balde fixo e fizéssemos o conjunto de todas as massas do Universo girar em torno do balde.
- De acordo com Mach, a lei da inércia refere-se ao movimento ou repouso em relação ao centro de massa de todas as massas do Universo (referencial das estrelas)
- **Princípio de Mach (na formulação de Einstein): “A inércia mede a resistência de um ponto material à aceleração com respeito às massas de todos os corpos do universo, sendo, portanto, afectada por elas.”**



Não invariância das equações de Maxwell

- Electromagnetismo: equações de Maxwell (4 equações que relacionam os campos eléctrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} , a carga e a corrente eléctricas, e os fluxos dos campos) + a equação da continuidade
- As leis de Gauss para os campos eléctrico e magnético e a lei de Faraday foram formuladas a partir da experiência
- O segundo termo do segundo membro da equação da lei de Ampère-Maxwell, que representa a chamada corrente de deslocamento, foi introduzido por Maxwell num golpe de genial intuição, por simetria com a lei de Faraday
- As equações de Maxwell permitiram explicar os fenómenos eléctricos e magnéticos e prever novos fenómenos. A partir delas foi possível verificar que os fenómenos ópticos são fenómenos electromagnéticos e, assim, unificar a óptica e o electromagnetismo (Faraday, 1845: a direcção de polarização da luz pode ser alterada por aplicação de um campo magnético)
- **Pode-se estender o princípio da relatividade de Galileu às equações de Maxwell?**
- São as equações de Maxwell invariantes a uma transformação de Galileu?
- Considerem-se duas cargas eléctricas q_1 e q_2 iguais em repouso no referencial R . Um observador em R mede uma força electrostática F_e repulsiva actuando nas cargas, q_2 por exemplo. Um observador em R' «vê», no entanto, as cargas a moverem-se para a esquerda com velocidade u e, além da força electrostática F'_e , observa uma força magnética atractiva F'_m entre elas, porque para este observador, as duas cargas agem como duas correntes eléctricas no mesmo sentido. Aplicando a lei de Gauss em ambos os referenciais, como $|F'_e| > |F_e|$ conclui-se que $|E'| > |E|$, e, portanto, a lei de Gauss não pode ser válida nos dois referenciais (não é invariante sob a TG)

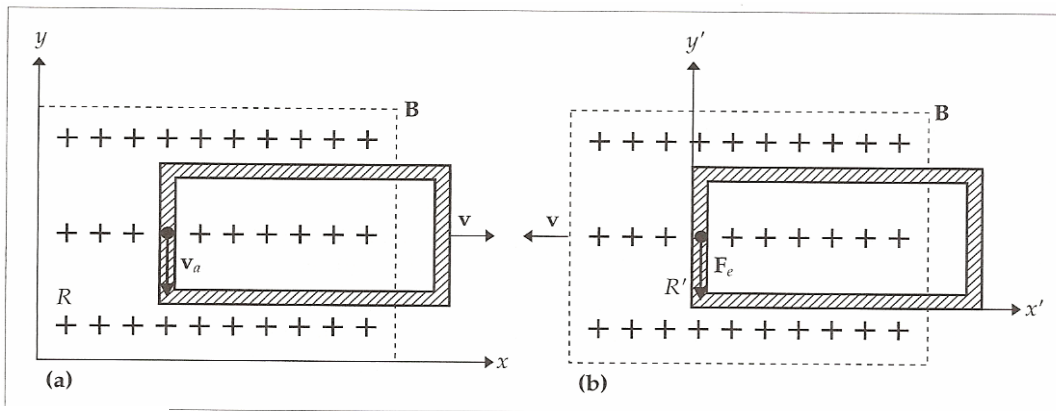


Assimetria na explicação dos fenómenos electromagnéticos

- Há também uma assimetria na explicação dos fenómenos electromagnéticos quando analisados em diferentes referenciais inerciais (referida na introdução do artigo de Einstein de 1905)
- Seja uma espira condutora que se desloca com velocidade \mathbf{v} para fora de uma região, onde há um campo magnético \mathbf{B} perpendicular ao plano da espira
- Para um observador em repouso em relação ao íman que cria \mathbf{B} (R), actua num electrão no centro do lado esquerdo da espira uma força $\mathbf{F}_L = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$: a fem na espira é de origem puramente magnética $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$
- Para um observador fixo no referencial R' na espira, o íman desloca-se com velocidade $-\mathbf{v}$ e o electrão está em repouso, observando que, da mesma forma que o observador em R , o electrão se desloca no sentido anti-horário na espira e mede a mesma fem
- No entanto, o observador em R' dá uma explicação diferente à dada pelo observador em R : para o observador em R' actua no electrão um campo eléctrico \mathbf{E} induzido na espira pelo movimento do íman (lei de Faraday) e a fem é dada por $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$
- Assim, dois observadores explicam de maneira diferente a origem da fem, embora calculem o mesmo valor para a fem (esta assimetria, uma das muitas dificuldades da Física Clássica, levou Einstein a propor a sua teoria da Relatividade)
- **Conclusão: a transformação de Galileu, o princípio da relatividade (estendido ao electromagnetismo) e as equações de Maxwell são incompatíveis.**

▪ **Existem três «saídas» possíveis:**

- O PRG não pode ser estendido ao electromagnetismo. Deve haver um referencial absoluto para o electromagnetismo
- O PRG pode ser estendido ao Electromagnetismo; a Mecânica e a TG são válidas. A formulação de Maxwell não é correcta (não é invariante sob a TG)
- O PRG pode ser estendido ao electromagnetismo (a formulação de Maxwell está correcta). A TG e a Mecânica de Newton devem ser modificadas



Dificuldades da concepção mecânica

IFQR 2005-2006

Apanhado para Introdução à Teoria da Relatividade; versão 001 (a melhorar)

- A ideia que todos os fenómenos podiam ser explicados mecanicamente começou a ser posta em causa após as descobertas:
 - Da electricidade «animal» (Luigi Galvani, 1780), e da pilha voltaica (Alessandro Volta, 1800)
 - Que a electricidade produz magnetismo (Oersted, 1820): a força exercida numa agulha magnética colocada no centro de uma espira é perpendicular ao plano da espira (desobedecendo à concepção mecânica que reduzia todas as acções a forças agindo ao longo da linha que liga os corpos que se atraem ou se repelem)
 - Que o magnetismo produz electricidade (Faraday, 1831): um íman aproximando-se/afastando-se de uma espira induz uma corrente na espira, tanto mais elevada quanto maior for a velocidade de aproximação /afastamento
 - A experiência de Rowland: uma esfera carregada de electricidade que se move ao redor de uma agulha magnética (a corrente na espira é substituída por uma carga eléctrica em movimento)
 - De que a deflexão da agulha e a intensidade de corrente eléctrica induzida aumentam com a velocidade da carga e do íman, isto é, a intensidade da força electromagnética depende da velocidade da carga e da velocidade do íman (quebrava-se a crença mecânica que os fenómenos electromagnéticos podiam ser explicados apenas em termos de força e distância)
 - Das ondas electromagnética, da verificação que estas se propagam à velocidade da luz e que são ondas transversais (Hertz): existe uma relação íntima entre os fenómenos ópticos e os electromagnéticos
 - Que as equações de Maxwell, que expressam as leis que regem o campo electromagnético, são locais, isto é, o campo aqui e agora depende do campo *na vizinhança imediata*, num tempo recém-passado. Estas equações permitem predizer o que acontecerá um pouco além no espaço, num tempo pouco depois, se soubermos o que acontece aqui e agora.
 - Na teoria mecânica apenas os pontos em que matéria está presente constituem o cenário das leis da mecânica. Por exemplo, a lei da gravitação implica acções à distância.
 - Nas equações de Maxwell não há actores materiais, o espaço inteiro é o cenário destas leis: as acções são locais.
 - O campo electromagnético transporta energia, que uma vez emitida pela fonte, mostra vida independente
 - Quando aplicada a corpos em movimentos, a electrodinâmica de Maxwell conduz a assimetrias que não parecem ser inerentes aos fenómenos
 - As experiências e os fenómenos sugerem que as leis da Óptica e da Electrodinâmica também são válidas nos referenciais onde são válidas as leis da

Mecânica

21-02-2006

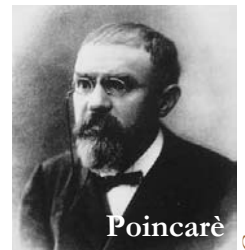
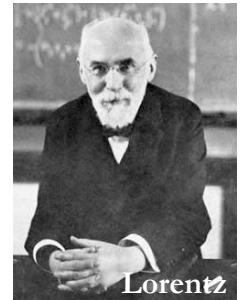
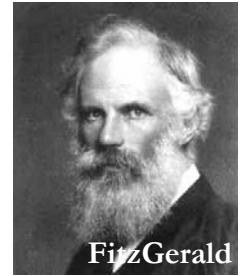
O «fim» da teoria do éter, do movimento e do repouso absolutos

Aplicar-se-á tanto aos fenómenos Mecânicos como aos fenómenos Ópticos e Electromagnéticos o princípio da relatividade de Galileu e a transformação de Galileu?

- i) Se admitirmos um oceano de éter com todos os sistemas de coordenadas assentes nele ou movendo-se em relação a ele, com base no princípio da relatividade de Galileu não podemos falar em movimento uniforme absoluto. A existência de movimento uniforme absoluto implica que existe um sistema de coordenadas no qual algumas leis da Natureza devem ser diferentes das que regem todos os outros sistemas de coordenadas, podendo um observador apreender se o seu sistema de coordenadas está em repouso ou em movimento pela comparação das leis nele válidas com as que só são válidas no sistema de coordenadas como monopólio de possuir o repouso absoluto. Sendo assim, a velocidade da luz depende do sistema de coordenadas.
- ii) Assumindo que o éter é arrastado pelos corpos em movimento e que as leis da mecânica são válidas no referencial ligado a eles, então a velocidade da luz depende da velocidade da fonte de luz ligada aos corpos em movimento: a luz terá velocidade maior se o movimento é na nossa direcção ou menor se é na direcção oposta. Se a nossa velocidade fosse maior que a velocidade da luz, poderíamos afastar-nos de um sinal luminoso, chegando antes das ondas luminosas emitidas: poderíamos ver coisas do passado.
- Não há qualquer indicação que estas coisas aconteçam. Todas as observações e demonstrações experimentais parecem indicar que a velocidade da luz é sempre a mesma em todos os sistemas de coordenadas, não dependendo do estado de movimento da fonte luminosa (da velocidade).
- Se existe um referencial especial fixo faz sentido falar em movimento absoluto e repouso absoluto. Assim, se o princípio da relatividade de Galileu é válido, então, o movimento através do éter não tem sentido. Não é possível conciliar as duas ideias.
- Todas as tentativas de tornar o éter uma realidade física falharam. De todas as propriedades do éter, apenas resta aquela para que fora proposto: a capacidade de transmitir as ondas electromagnéticas. Conclusão, se admitirmos que o espaço tem a propriedade de transmitir ondas electromagnéticas não necessitamos do conceito de éter.
- Resulta das experiências de electrodinâmica a relatividade da teoria de Maxwell, isto é, a descrição de um fenómeno electromagnético depende do referencial em que é feita.

Tentativas de explicar os resultados e manter o éter estacionário

- No final do séc. XIX foram apresentadas várias propostas para justificar o resultado negativo da experiência de Michelson e Morley e, ao mesmo tempo, manter a hipótese do éter estacionário
- FitzGerald (em 1889) e Lorentz (em 1892) propuseram que os corpos em movimento sofreriam uma contracção na direcção do seu movimento por um factor $\sqrt{(1-v^2/c^2)}$ – contracção FitzGerald-Lorentz (esta hipótese não foi bem aceite porque era *ad hoc*)
- Segundo esta hipótese, o braço do interferómetro de Michelson-Morley paralelo à velocidade da Terra contrair-se-ia justamente o necessário para explicar o resultado nulo da experiência
- Esta conjectura não resistiu aos teste experimentais (seria substituída pela proposta de Einstein, que explicava o insucesso da experiência de MM a partir de princípios muito gerais e de maior alcance)
- Pode-se concluir que a evidência experimental favorece a inexistência de um referencial absoluto, mesmo que localmente estacionário, como no caso do deslocamento do éter por um astro em movimento
- **Recordando os três caminhos possíveis para resolver o conflito da Física Clássica:**
 - O PRG não pode ser estendido ao electromagnetismo. Deve haver um referencial absoluto para o electromagnetismo
 - O PRG pode ser estendido ao Electromagnetismo; a Mecânica e a TG são válidas. A formulação de Maxwell não está correcta (não é invariante sob a TG)
 - O PRG pode ser estendido ao electromagnetismo (Maxwell estava correcto). A TG e a Mecânica de Newton devem ser modificadas
- Conclui-se que o primeiro está eliminado. O segundo exige a modificação da teoria de Maxwell
 - Numa proposta apresentada, *a teoria de emissão*, a electrodinâmica de Maxwell é modificada fazendo que a velocidade de uma onda luminosa esteja associada à da fonte e não a um referencial absoluto: a velocidade da luz num meio de índice n é c/n em relação à fonte emissora e independente do movimento do meio (embora esta hipótese explicasse o resultado nulo da experiência de MM, foi refutada pela análise da luz emitida por estrelas binárias eclipsantes, uma vez que a velocidade da luz emitida pelas duas estrelas deveria ser diferente). Assim, a segunda possibilidade foi abandonada em face dos sucessos da teoria de Maxwell (ver, por exemplo, <http://w3.ualg.pt/~jlongras/Wave.swf>).
- Resta o terceiro caminho, que estende o princípio da relatividade de Galileu ao electromagnetismo, mantendo a teoria electromagnética de Maxwell, e leva à correcção da Mecânica de Newton para que fique consistente com o princípio da relatividade. Este foi o caminho explorado por Einstein



Teoria da Relatividade Restrita

Cinemática

Bibliografia:

- *Teoria da Relatividade Especial*, Ramayana Gazzinelli, Editora Edgard Blücher, Brasil 2005.
- *O Princípio da Relatividade*, H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski (Tradução do original alemão pelo Prof. Manuel dos Reis), Fundação Calouste Gulbenkian, 1971.
- *O Annus Mirabilis* de Einstein - cinco artigos que revolucionaram a Física, John Stachel, Gradiva, 2005.
- *Modern Physics*, P. A. Tipler and R. A. Llewellyn, W. H. Freeman and Company, 2002.
- *Tempo & Espaço*, Visual Ciências, Verbo, 1994.

A resolução do impasse: Teoria da Relatividade Restrita

Eis os factos confirmados pela experiência, após a omissão do éter:

- i) a velocidade da luz no vazio tem o mesmo valor fixo, independente do movimento da fonte luminosa e do receptor da onda.
- ii) Em dois sistemas de coordenadas que se movem uniformemente em relação um ao outro, todas as leis da Natureza são exactamente idênticas, e não há meio de distinguir o movimento uniforme absoluto.
- iii) Princípios da transformação mecânica: posições e velocidades são transformadas de um sistema inercial para outro de acordo com a transformação de Galileu
- Não é possível conciliar as três ideias: a iii) está em contradição com a i). As teorias relativas ao movimento do éter requerem a alteração das duas primeiras tentativas. Contudo, a experiência não permite alterar as duas primeiras.
- Uma solução será a aceitação da suposição fundamental da validade das afirmações i) e ii), e a rejeição da afirmação iii).

Postulados da Teoria da Relatividade Restrita

A teoria da relatividade restrita de Einstein baseia-se nas duas suposições:

- i) Todas as leis da Natureza são as mesmas em todos os referenciais que se movam uniformemente uns em relação aos outros.
- ii) A velocidade da luz no vácuo é a mesma em todos os referenciais que se movam uniformemente uns em relação aos outros.
- Admitindo a universalidade das suposições acima, é possível construir uma electrodinâmica dos corpos em movimentos livre de contradições, sem necessidade de «um espaço em repouso absoluto», “nem de atribuir um vector velocidade a qualquer ponto do espaço vazio em que tenha lugar um processo electromagnético”
- O primeiro postulado estende o princípio da relatividade de Galileu a todas as leis da Física, isto é, as equações de Maxwell, como todas as leis físicas, devem permanecer invariantes quando se passa de um referencial inercial para outro
- Partindo dos enunciados dos postulados acima, Einstein chegou a uma lei de transformação pela qual posições e velocidades são transformadas de um referencial para outro (*recomenda-se a leitura da primeira parte do artigo de Einstein de 1905, ver sumário da 5ª aula T, 06-03-06*)
- **A teoria da relatividade restrita não promove o «relativismo» na Física. Pelo contrário, a teoria propõe-se justamente o contrário: procurar leis físicas «absolutas», que não dependam da escolha do referencial. De facto, Einstein começou por referir-se à teoria como *teoria da invariância*. Contudo, devido a Poincaré e a Planck, a designação *teoria da relatividade* tornou-se comum e acabou por ser adoptada por Einstein.**



Relatividade do conceito de simultaneidade

Dois eventos observados num dado referencial são considerados simultâneos se os sinais luminosos provenientes dos eventos atingem um observador equidistante no mesmo instante. A análise dos fenómenos naturais a partir dos postulados da relatividade força-nos a mudar as concepções de simultaneidade, de tempo e de espaço. Mas como se mede o tempo? O que é um relógio? O relógio objectiva o conceito de tempo: qualquer fenómeno físico periódico pode ser usado como relógio em qualquer região do espaço, admitindo o espaço homogéneo.

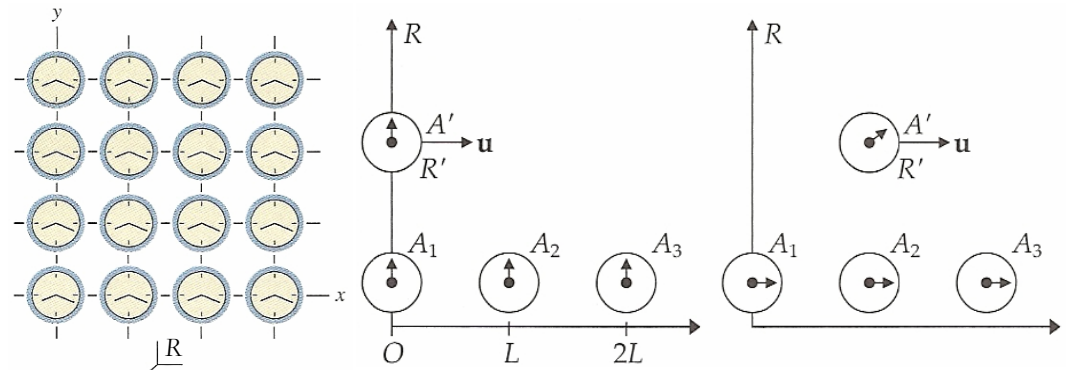
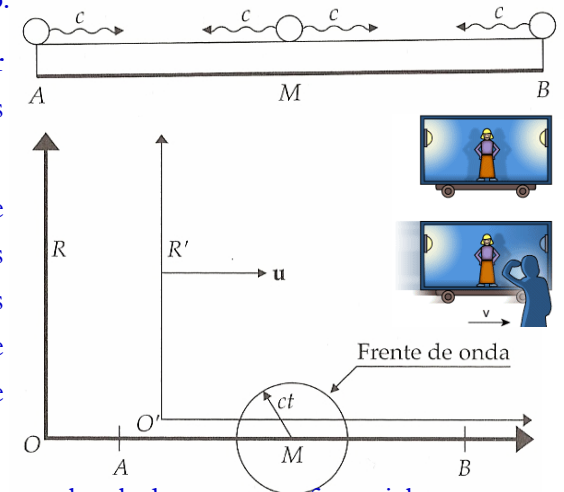
A definição de eventos simultâneos requer a sincronização de relógios. A sincronização pode ser feita por meio de sinais que se propagam à velocidade da luz. Se estivermos a igual distância de dois relógios podemos verificar a simultaneidade do fenómenos periódicos. (Podemos «acertar» os relógios.)

Na Física Clássica é suficiente um relógio para todos os observadores em todos os referenciais: o tempo e conceitos como «simultaneamente», «mais cedo», «mais tarde» têm significado absoluto; dois eventos ocorrendo ao mesmo tempo num referencial são necessariamente simultâneos em todos os outros referenciais. Partindo dos postulados da relatividade restrita, conclui-se que tal não é necessariamente verdade. Considerem-se dois eventos observados num referencial R em repouso, por exemplo, dois raios de luz a alcançarem dois detectores A e B colocadas a igual distância de uma fonte luminosa M : estes

eventos são simultâneos para o observador junto à fonte, mas não o são para um observador em repouso noutra local do mesmo referencial ou para um observador num referencial R' que se mova com velocidade u em relação ao referencial R .

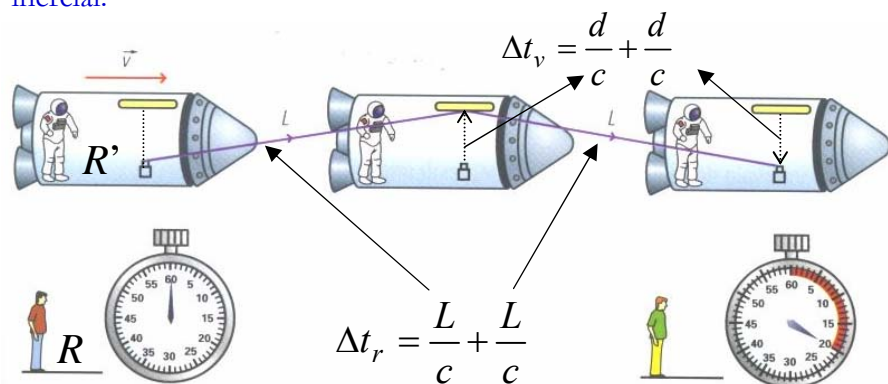
Os postulados da teoria da relatividade restrita leva-nos a abandonar o ponto de vista da universalidade da simultaneidade de dois eventos: dois eventos simultâneos num referencial podem não ser simultâneos em outro referencial. Usando o método dos sinais de luz pode-se averiguar o sincronismo entre relógios.

Uma vez dois relógios sincronizados, num dado referencial, é possível sincronizar tantos relógios quantos se quiser no mesmo referencial, com cada um determinar o decorrer do tempo na sua vizinhança. Faz sentido, então, falar em tempo de um referencial, que é o tempo indicado pelos relógios locais, previamente sincronizados com um relógio tomado como base como, por exemplo, o relógio colocado na origem do sistema de coordenadas.



Relatividade dos intervalos de tempo

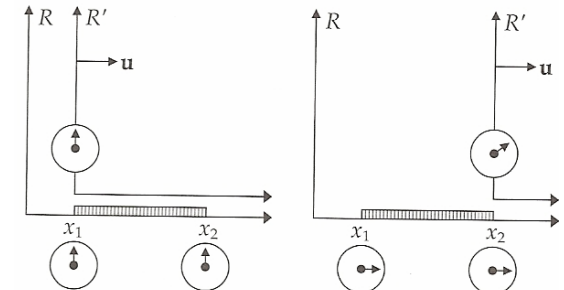
- Se numa experiência de Mecânica usarmos apenas um relógio, só as medidas feitas na vizinhança desse relógio tem significado. Não é conveniente usar apenas um relógio para estudar dois fenómenos em diferentes posições no espaço.
- Como garantir que relógios em posições diferentes do espaço, ambos em repouso, marcam exactamente o mesmo tempo?
- Se os relógios de um referencial estão todos em repouso relativamente ao referencial, são exactamente iguais e estão sincronizados, tem significado dizer que indicam simultaneamente o mesmo tempo (o mesmo decorrer do tempo). Assim, podemos, usando vários relógios sincronizados distribuídos no espaço do referencial, em vez de um só, julgar se dois eventos são ou não simultâneos num dado referencial: acontecimentos simultâneos num determinado referencial são eventos que ocorrem no mesmo instante de tempo indicado pelos relógios locais previamente sincronizados. Se dois eventos são simultâneos para um observador estacionário num referencial inercial, também o são para qualquer outro observador estacionário no mesmo referencial. Agora, faz sentido dizer que um dos acontecimentos ocorre ou não antes de outro.
- **Será que o intervalo de tempo entre dois eventos decorre da mesma forma para observadores em dois referenciais em movimento uniforme um relativamente ao outro, cada um com o seu conjunto de relógios sincronizados?**
- Seja um referencial em movimento uniforme relativamente a um outro. Em cada referencial há um observador e um relógio próprios sincronizados. Rigidamente fixo ao referencial em movimento está um sistema optoelectrónico formado por uma fonte luminosa, com um detector de luz adjacente, e um espelho afastado da fonte a distância d na direcção perpendicular ao movimento (ver figura). No momento em que os relógios locais na origem dos dois referenciais indicam o mesmo instante de tempo, a fonte de luz emite um “flash”. Como se comparam os intervalos de tempo entre dois eventos, a emissão e a detecção do impulso de luz, nos dois referenciais?
- Do postulado da constância da velocidade da luz, assumindo o espaço euclidiano, conclui-se que os intervalos de tempo entre a emissão e a detecção do impulso medidos por cada um dos relógios próprios são diferentes. Os intervalos de tempo medidos pelos dois grupos de relógios estão relacionados por: $\Delta t_r = \Delta t_v / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, onde t_r se refere ao referencial em repouso R e t_v ao referencial R' com velocidade v (ver demonstração, aula de 21-02-2006).
- O observador em R' vê os dois eventos a partir da mesma posição relativamente aos eventos (e mede o tempo entre eles usando o mesmo relógio): diz-se que o seu relógio mede o **tempo próprio** do observador (referencial). Para o observador no referencial R, o sinal parte da fonte numa dada posição e chega ao detector noutra local, sendo necessário usar dois relógios previamente sincronizados (os relógios locais das posições onde ocorrem os dois eventos). O intervalo de tempo próprio entre dois eventos será menor do que o intervalo de tempo entre os mesmos eventos, medido em qualquer outro referencial inercial.



- Do segundo postulado resulta que não é possível um observador inercial deslocar-se com velocidade igual à velocidade da luz no vácuo.
- Considere um observador com o relógio num referencial em repouso a monitorizar os processos periódicos (por exemplo, o “batimento” de outro relógio ou do coração, ou outros processos biológicos) que ocorrem num referencial em movimento relativamente a ele. Este observador verifica que os processos no referencial em movimento decorrem mais lentamente que idênticos processos no seu referencial. Por outro lado, um observador no referencial em movimento pode concluir que os processos no primeiro referencial decorrem mais lentamente, uma vez que todos os referenciais inerciais são equivalentes. [Ver «paradoxo» dos relógios (ou dos gémeos).]

Relatividade do comprimento na direcção do movimento

- Do postulado da constância da velocidade da luz, assumindo o espaço euclidiano, conclui-se que a distância entre dois pontos também depende do estado de movimento do observador, da mesma forma que o intervalo de tempo entre dois eventos.
- Considere-se uma **régua em repouso no referencial R**. Um observador, em repouso, no referencial R mede para o comprimento da régua $L_0 = x_2 - x_1$. Este é comprimento da régua medido em repouso, sendo por isso, designado **comprimento próprio** da régua.
- Se o referencial R' se desloca com velocidade u paralelamente à régua, em repouso no referencial R, qual é o comprimento da régua medido pelo observador em R'?
- O observador fixo no referencial R', deslocando-se da esquerda para a direita, vê uma extremidade da régua passar por ele e, algum tempo depois, vê a outra extremidade da régua e mede o intervalo de tempo Δt_u que decorre entre as duas passagens. O intervalo de tempo Δt_u é um intervalo de tempo próprio (é medido usando o mesmo relógio, o relógio do observador fixo em R'). O comprimento da régua no referencial R' é dado por $L_u = u \Delta t_u$.
- O observador em R mede o tempo de passagem Δt_0 do observador R' (relógio R') pelos pontos x_1 e x_2 , utilizando os relógios colocados em x_1 e x_2 , previamente sincronizados, e obtém $L_0 = u \Delta t_0$.
- Tendo em conta a relação $\Delta t_0 = \Delta t_u / \sqrt{1 - u^2/c^2}$, resulta $L_u = u \Delta t_u = u \Delta t_0 \sqrt{1 - u^2/c^2} = \sqrt{1 - u^2/c^2} L_0$ ou $L_u = \sqrt{1 - u^2/c^2} L_0$: o comprimento da régua medido no referencial em movimento é menor que o comprimento próprio da régua (medido no referencial onde a régua está em repouso).



Outra forma de analisar o problema: considere-se uma régua de comprimento L_u , paralela ao eixo x' **em repouso no referencial R'** que se move relativamente ao referencial R com velocidade u no sentido positivo do eixo xx . Numa extremidade da régua existe uma fonte luminosa com um detector adjacente e na ponta oposta está colocado um espelho.

(ver <http://w3.ualg.pt/~jlongras/length-contract.swf>)

- No referencial R', o intervalo de tempo entre a emissão de luz (evento 1) e a respectiva detecção (evento 2) é dado por $\Delta t_u = 2L_u/c$ (este é intervalo de tempo próprio, porque ambos os eventos ocorrem no mesmo ponto do referencial R').
- Segundo um observador em repouso no referencial R, a régua desloca-se para a direita com velocidade u , e o seu comprimento é L_0 .
- Seja Δt_{+u} o intervalo de tempo de propagação do feixe de luz entre a fonte e o espelho. Durante este intervalo de tempo a régua com a fonte, o detector e o espelho a ela fixos, deslocou-se a distância $u \Delta t_{+u}$. O comprimento total do percurso da luz desde a fonte ao espelho é $d_{+u} = L_0 + u \Delta t_{+u}$. Como a luz percorre este espaço com velocidade c , têm-se $d_{+u} = c \Delta t_{+u}$, obtendo-se $\Delta t_{+u} = L_0 / (c - u)$ (a distância que a luz percorre no referencial R é superior a L_0).
- Seja Δt_{-u} o intervalo de tempo entre a reflexão da luz no espelho e a detecção no outro extremo da barra. Agora a distância percorrida pela luz é $d_{-u} = L_0 - u \Delta t_{-u}$ ou $d_{-u} = c \Delta t_{-u}$, obtendo-se $\Delta t_{-u} = L_0 / (c + u)$ (a distância que a luz percorre no referencial R é agora inferior a L_0).
- O intervalo de tempo Δt_0 entre os dois eventos medido no referencial R é $\Delta t_0 = \Delta t_{+u} + \Delta t_{-u}$, ou seja: $\Delta t_0 = 2cL_0 / (c^2 - u^2) = 2L_0 / [c(1 - u^2/c^2)]$.
- Tendo presente que $\Delta t_0 = \Delta t_u / \sqrt{1 - u^2/c^2}$, têm-se $\Delta t_u / \sqrt{1 - u^2/c^2} = 2L_0 / [c(1 - u^2/c^2)]$ ou $L_0 = L_u \sqrt{1 - u^2/c^2}$: o comprimento da régua medido no referencial em repouso é menor que o comprimento próprio da régua (medido no referencial onde a régua está em repouso).

Problemas propostos (3)

1. A observação na superfície da Terra de partículas μ (muões) formadas na parte superior da atmosfera, como radiação secundária de raios cósmicos, constitui uma evidência experimental da relatividade dos intervalos de tempo. Os muões são partículas instáveis e decaem segundo a lei $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$, onde N_0 representa o número de muões formados na alta atmosfera e τ a vida média de um muão. No referencial próprio do muão, $\tau = 2,2 \mu\text{s}$ [21-02-2006]

Os muões são partículas com uma vida muito curta: apenas cerca de $2,2 \mu\text{s}$ no referencial em que se encontram em repouso. Criadas a partir da interação de raios cósmicos com a atmosfera, movem-se, relativamente à Terra, com velocidade de módulo $v = 0,998 c$. Que distância percorrem, medida no seu referencial? Estas partículas são criadas a cerca de 6 km da superfície da Terra e muitas conseguem atingi-la. Porquê?

O tempo indicado para a vida dos muões é um tempo próprio: $\Delta t_0 = 2,2 \times 10^{-6} \text{ s}$. A distância percorrida medida no referencial do muão é $x = v \Delta t_0 = 0,998 \times 3 \times 10^8 \times 2,2 \times 10^{-6} = 659 \text{ m}$ e, portanto, o muão não chegaria à superfície terrestre. Contudo, no referencial ligado à Terra o tempo de vida do muão é maior:

$$\Delta t = \frac{2,2 \times 10^{-6}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0,998c}{c}\right)^2}} = 3,48 \times 10^{-5} \text{ s}$$

Neste intervalo de tempo percorrerá a distância $x = 0,998 \times 3 \times 10^8 \times 3,48 \times 10^{-5} = 10,4 \text{ km}$. Portanto, o muão chega à Terra (Fig. 3.22).

(ver <http://w3.ualg.pt/~jlongras/length-contract.swf>)

2. Analise a experiência dos muões do ponto de vista de um observador no referencial do muão e explique porque os muões são detectados na superfície da Terra.

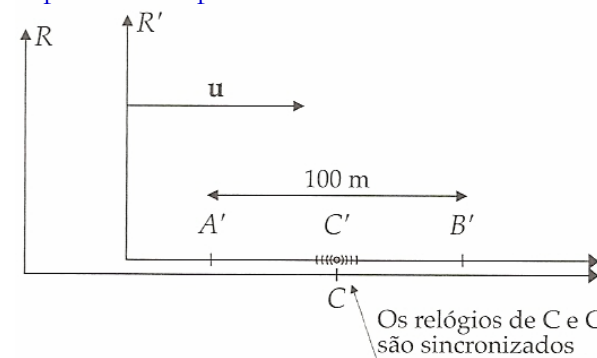
A Terra parece nos estar em repouso
 Mesão que se desloca a alta velocidade
 O relógio de mesão trabalha lentamente

O mesão atinge a Terra contrariando as leis de Newton
 Mesão estacionário
 A Terra precipita-se em direcção ao mesão

DEMONSTRAÇÃO POR MESÕES
 Os mesões são partículas criadas pelo impacto de raios cósmicos no topo da atmosfera. Os mesões «vivem» apenas por alguns microssegundos, tempo insuficiente para que cheguem a atingir o solo. Eles deslocam-se tão rapidamente que os seus «relógios» trabalham lentamente. Cada um dos seus microssegundos equivale a nove microssegundos na Terra, tendo um tempo nove vezes superior para fazerem a viagem. Para um mesão, a Terra encontra-se em movimento acelerado. O seu movimento é tão rápido que a atmosfera contrai-se para um nono da extensão que medimos e, como tal, eles só têm de percorrer um nono da distância. Até hoje os mesões têm sido detectados na Terra contrariando a lógica do senso comum!

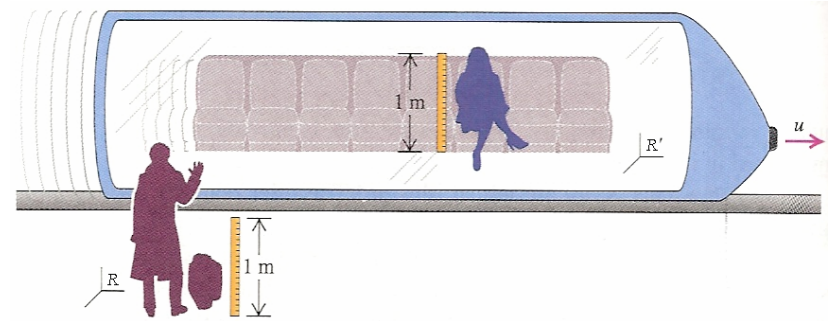
Fig. 3.22: Descrição no referencial do muão ($\Delta t_0 = 2,2 \times 10^{-6} \text{ s}$, 659 m) e descrição no referencial da Terra ($\Delta t = 3,48 \times 10^{-5} \text{ s}$, $10,4 \text{ km}$).

3. Paradoxo dos gémeos: Dois gémeos fazem a seguinte experiência: um deles parte da Terra numa nave espacial, com velocidade $v=0,8c$, com destino às estrelas mais próximas do sistema solar (sistema triplo [Alfa Centauri](#), a $\sim 4,2$ anos-luz do sistema solar), enquanto o outro permanece na Terra. Ao retornar, o gémeo astronauta reencontra o irmão e observa que ele está uns anos mais velho que ele. Como explica a observação do astronauta? Estime quanto tempo ficou mais velho o irmão do astronauta em relação a ele? Porque razão não é o astronauta que fica mais velho? (Resp: 4 anos; ano-luz: $9\ 460\ 536\ 207\ 068\ 016 \text{ m}$)



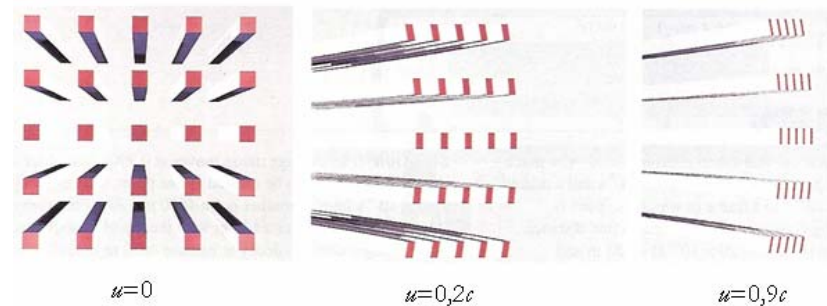
Comprimentos nas direcções perpendiculares ao movimento

- Na dedução da relação $\Delta t_0 = \gamma \Delta t_u$, onde $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$, considerou-se que ambos os observadores medem a mesma distância d . As medidas dos comprimentos nas direcções perpendiculares ao movimento não dependem do referencial, isto é, os observadores dos referenciais R e R' medem os mesmos valores.
- Considerem-se duas varas idênticas com 1 metro de comprimento, e graduadas em centímetros. Uma das varas está em repouso no referencial R e orienta-se segundo o componente positiva do eixo dos y , com uma extremidade coincidente com a origem do sistema de coordenadas de R . A outra vara está em repouso no referencial R' , e orienta-se partindo da origem segundo o sentido positivo do eixo y' . O referencial R' move-se relativamente a R com velocidade u no sentido positivo do eixo dos x .
- Os observadores em repouso nos referenciais R e R' , encontram-se junto à marca de 50 cm existente na vara fixa ao seu referencial. No instante em que as origens dos sistemas de coordenadas dos dois referenciais coincidem, as varas encontram-se lado a lado e os observadores marcam na outra vara a marca de 50 cm da sua vara.
- Admita-se que o observador em R vê a vara ligada a R' maior que a sua vara. Então, a marca que faz na vara R' encontra-se abaixo do centro desta vara. Neste caso, R' pensa que a vara de R ficou mais curta e, portanto, verá varas em movimento encolherem e R verá elas dilatarem-se. Contudo, isto leva a uma assimetria entre os dois referenciais que contradiz o postulada da relatividade que assegura a equivalência entre todos referenciais inerciais.
- Conclui-se, assim, que a consistência com o postulada da relatividade requer que ambos os observadores vejam as varas com o mesmo comprimento, mesmo que para cada observador uma esteja em repouso e outra esteja em movimento. Portanto, ambos os observadores medem os mesmos comprimentos nas direcções perpendiculares à direcção do movimento relativo dos referenciais.
- Considere-se um caso mais geral: seja uma vareta de comprimento L_0 , fixa ao referencial R' , fazendo um ângulo θ_0 com a direcção do movimento, medido no referencial em repouso. Um observador em R mede a componente do comprimento da vareta na direcção do movimento, como sendo $L_0 \cos \theta_0 \sqrt{1-u^2/c^2}$. Este observador não mede qualquer alteração na componente do comprimento da vareta perpendicular à direcção do movimento.



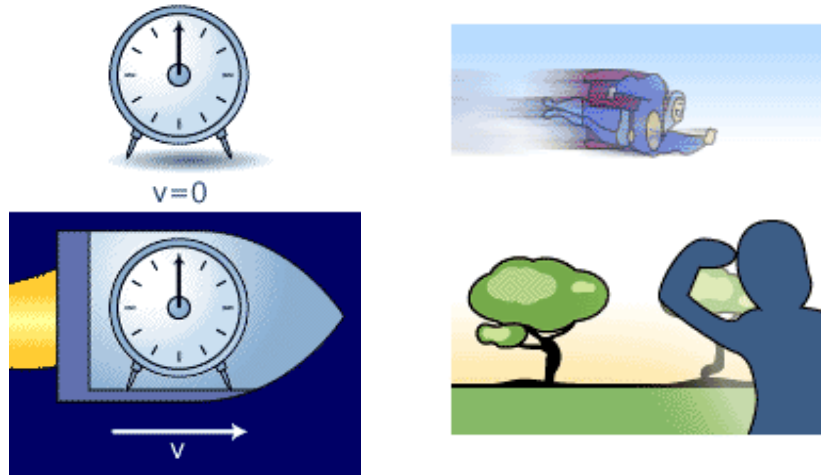
Interpretação da relatividade dos tempos e dos comprimentos

- Um observador verifica que o decorrer de um processo periódico usado para medir curso do tempo é mais lento quando o fenómeno periódico se encontra em movimento em relação ao observador. O intervalo de tempo medido entre dois eventos (por exemplo dois tiquetaque de um relógio ou do coração) consecutivos que ocorrem no mesmo ponto do espaço de um dado sistema de coordenadas (tempo próprio) é uma quantidade mais fundamental que o intervalo de tempo entre os mesmos eventos em diferentes posições.
- Embora um observador em movimento «verifique» a contracção dos corpos na direcção do movimento (ver <http://w3.ualg.pt/~jlongras/length-contract.swf>), esta contracção não têm a ver com diminuição das dimensões dos corpos. É uma consequência de o espaço e o tempo serem grandezas relativas. O fenómeno da «dilatação» do tempo implica a existência do fenómeno complementar da «contracção» do comprimento. A contracção têm uma explicação geométrica no «espaço-tempo» de quatro dimensões: tudo o que existe no espaço e no tempo tem um «comprimento» com quatro dimensões, a que se dá o nome de «**extensão**», «**intervalo**» ou «**distância**», determinado usando a versão a quatro dimensões do teorema de Pitágoras. A extensão é uma propriedade «fixa» do objecto: as componentes da extensão correspondentes a um comprimento a três dimensões e a um intervalo de tempo, depende da perspectiva do observador em movimento. (Voltaremos a este assunto; ver adiante espaço-tempo.)
- Analisemos a aparência visual de um objecto tridimensional em movimento. Se fosse possível ver as posições de todos os pontos do objecto simultaneamente, o objecto apareceria encolhido apenas na direcção do movimento. Contudo, não «podemos» ver todos os pontos simultaneamente: a luz dos pontos mais afastados demora mais tempo a chegar aos nossos olhos que a luz dos pontos mais próximos e, portanto, vemos os pontos mais afastados nas posições que eles tinham em tempos «mais anteriores».
- Considere-se um objecto, uma matriz de 25 varetas com secção quadrada, fixo no referencial R' . Considere a vareta central com as faces paralelas aos planos dos sistemas de coordenadas. Quando olhamos esta vareta vemos apenas a face virada para nós. Imagine-se agora que o conjunto se move para a direita, no plano do papel, a velocidade relativistas. Agora também poderemos ver a sua face esquerda, tendo em conta o exposto acima.
- Isto é, podemos ver pontos que não víamos quando a vareta estava em repouso porque agora a vareta se afasta do caminho da luz proveniente desses pontos. Da mesma forma, alguma da luz que chegava até nós quando a vareta estava em repouso é agora bloqueada pelo movimento da vareta. Por tudo isto, as varetas «parecem» rodadas e deformadas. No entanto, a contracção do comprimento relativista é invisível. Terrel mostrou, em 1959, que a contracção do comprimento, embora real, é invisível, porque os intervalos de tempo associados aos percursos da luz emitida por diferentes partes do objecto cancelam a contracção do comprimento. De acordo com o segundo postulado, os observadores em dois referenciais inerciais que se movem um relativamente ao outro devem medir a mesma velocidade de propagação de uma frente de onda esférica. Embora a medida simultânea do comprimento de um objecto mostre a contracção de comprimento, se observássemos o objecto com os olhos ou com uma câmara, não veríamos o objecto deformado (ver, por exemplo, <http://w3.ualg.pt/~jlongras/contract-Invisible.swf>).



Relatividade do tempo e do comprimento: efeitos e «demonstrações»

Ter sempre presente que as imagens abaixo representam situações que se referem a medidas de intervalos de tempo e de comprimentos, objectivas, em diferentes referenciais, e não são percepções sensoriais. Por exemplo, na figura do super-homem, o observador não «vê» o super homem contraído, mas mede uma “altura/comprimento” inferior à «altura própria» do super-homem; o mesmo se aplica ao automóvel.



A Terra parece-nos estar em repouso

Mesão que se desloca a alta velocidade

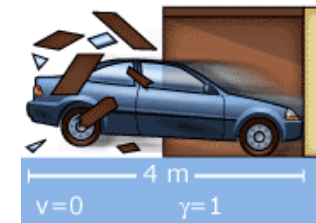
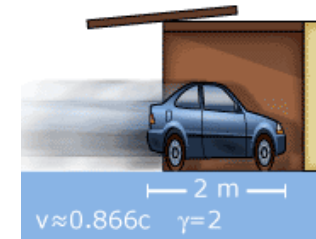
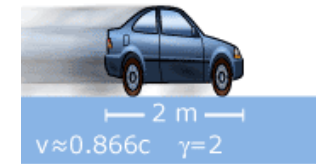
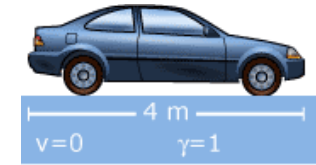
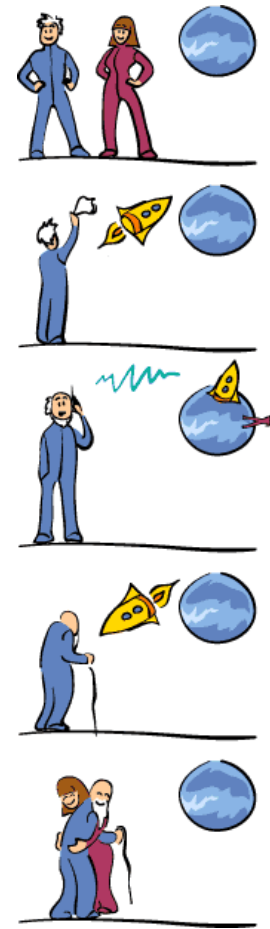
O relógio de mesão trabalha lentamente

O mesão atinge a Terra contrariando as leis de Newton

Mesão estacionário / A Terra precipita-se em direcção ao mesão

DEMONSTRAÇÃO POR MESÕES

Os mesões são partículas criadas pelo impacto de raios cósmicos no topo da atmosfera. Os mesões «vivem» apenas por alguns microssegundos, tempo insuficiente para que cheguem a atingir o solo. Eles deslocam-se tão rapidamente que os seus «relógios» trabalham lentamente. Cada um dos seus microssegundos equivale a nove microssegundos na Terra, tendo um tempo nove vezes superior para fazerem a viagem. Para um mesão, a Terra encontra-se em movimento acelerado. O seu movimento é tão rápido que a atmosfera contrai-se para um nono da extensão que medimos e, como tal, eles só têm de percorrer um nono da distância. Até hoje os mesões têm sido detectados na Terra contrariando a lógica do senso comum!



(ver, por exemplo, <http://w3.ualg.pt/~jlongras/TwinParadox.swf>).

Transformação de Lorentz

IFQR 2005-2006

Apunhado para Introdução à Teoria da Relatividade; versão 001 (a melhorar)

- A Mecânica Newtoniana, a transformação de Galileu (TG) e o princípio da relatividade de Galileu são compatíveis (uma equação sujeita é transformação de Galileu preserva a sua forma, satisfazendo o princípio da relatividade de Galileu). Contudo, quando a transformação de Galileu é aplicada às equações de Maxwell a sua forma não é preservada, porque as equações não são invariantes sob a transformação de Galileu). Três caminhos são possíveis para sanar o conflito:
 - O princípio da relatividade não pode ser estendido ao electromagnetismo. Nesse caso, existirá um referencial absoluto para o electromagnetismo.
 - A Mecânica de Newton e a transformação de Galileu estão correctas e o princípio da relatividade pode ser estendido ao electromagnetismo. Nesse caso, a formulação de Maxwell não está correcta (não é invariante sob a TG) e exige modificação.
 - O princípio da relatividade pode ser estendido ao electromagnetismo e a formulação de Maxwell está correcta. Nesse caso, a transformação de Galileu e a Mecânica de Newton não estão correctas e devem ser modificadas.
- As experiências de Michelson-Morley, a aberração das estrelas e a experiência de Fresnel-Fizeau contrariam a ideia da existência de um éter electromagnético, que poderia servir como referencial absoluto. Tal significa que o princípio da relatividade pode ser estendido ao electromagnetismo. O electromagnetismo não tinha sido posto em causa pela experiência, tendo permitido a previsão de novos fenómenos e possibilitado a interpretação dos fenómenos ópticos como sendo de natureza electromagnética.
- Através da teoria da relatividade espacial, Einstein opta pelo terceiro caminho: o princípio da relatividade é aplicável a toda a Física e a formulação de Maxwell está correcta. Esta opção fez com que Einstein, partindo de dois postulados simples, procurasse uma nova transformação sob a qual as equações de Maxwell seriam invariantes. Sob a nova transformação, as leis da Mecânica deixariam de ser invariantes, sendo necessário propor uma nova Mecânica, invariante sob a nova transformação para que o princípio da relatividade seja verificado para toda a Física. Contudo, e uma vez que a Mecânica de Newton é válida para os fenómenos «mundanos» comuns, deve ser uma aproximação da nova mecânica para velocidades muito inferiores à velocidade da luz, ficando preservada a compatibilidade da Mecânica Newtoniana com a transformação de Galileu e o princípio da relatividade quando aplicados aos fenómenos macroscópicos «ordinários». Recordar que a Mecânica de Newton continua a ser a ferramenta utilizável, por exemplo, na determinação das orbitas dos satélites e nos deslocamentos dos corpos macroscópicos à superfície da Terra.
- A transformação que conserva invariantes as equações de Maxwell ao passar de um referencial inercial a outro designa-se transformação de Lorentz. Seguindo a sugestão de Einstein, vamos deduzir as equações da transformação de Lorentz que asseguram que a velocidade da luz é a mesma em dois referenciais inerciais, um movendo-se relativamente ao outro com velocidade u .

06-03-2006

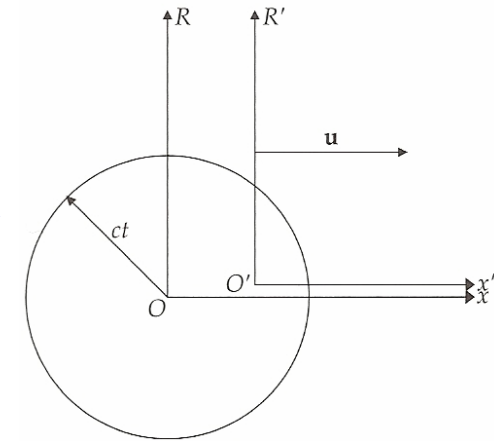
<http://w3.ualg.pt/~jlongras/ensino.htm> 29

Equações da transformação de Lorentz

IFQR 2005-2006

Apêndice para Introdução à Teoria da Relatividade; versão 001 (a melhorar)

- Consideremos a configuração padrão: o referencial R' move-se com velocidade constante u relativamente a R , na direcção Ox , e que as origens coincidem no instante $t=t'=0$. Assumindo-se que os eixos permanecem paralelos, as coordenadas y e z não se alteram com o movimento segundo Ox .
- Consideremos a configuração padrão: o referencial R' move-se com velocidade constante u relativamente a R , na direcção Ox , e que as origens coincidem no instante $t=t'=0$. Assumindo-se que os eixos permanecem paralelos, as coordenadas y e z não se alteram com o movimento segundo Ox . Seja uma fonte de luz, na origem do referencial R , que emite uma onda esférica no instante $t'=t=0$. Um observador em R vê, no instante t , uma onda esférica de raio ct , propagando-se a partir de O .
- Um observador em R' vê, no instante t' , uma onda esférica a propagar-se a partir de O' com raio ct' . As equações das frentes de onda nos dois referenciais tomam a forma: $x^2+y^2+z^2=(ct)^2$, equação (1), e $x'^2+y'^2+z'^2=(ct')^2$, equação (2), respectivamente.
- Se aplicarmos a transformação de Galileu ($x'=x-ut$, $y'=y$, $z'=z$, $t'=t$) à equação da frente de onda (2), para transformá-la na equação da frente de onda (1), obtém-se: $x^2-2xut+u^2t^2+y^2+z^2=(ct)^2$, que é formalmente distinta de (1). A transformação que se procura deve manter a equação da frente de onda invariante quando se passa de um referencial inercial a outro, e reduzir-se à transformação de Galileu quando $u/c \rightarrow 0$. A transformação deve ser tal que y e z não sofram modificações e ser linear em x e t porque a frente de onda esférica se propaga com velocidade uniforme.
- Seja a transformação $x'=\xi(x-ut)$, $y'=y$, $z'=z$, $t'=\xi(t+kx)$, onde ξ e k são parâmetros a determinar. Transformando a frente de onda no referencial R' , equação (2), para o referencial R , tem-se: $\xi^2x^2-2\xi^2xut+\xi^2u^2t^2+y^2+z^2=\xi^2(ct)^2+2\xi^2c^2kxt+(\xi ckx)^2$. Os termos em xt cancelam-se fazendo $k=-u/c^2$, obtendo-se: $\xi^2x^2(1-u^2/c^2)+y^2+z^2=\xi^2(ct)^2(1-u^2/c^2)$ (3).
- A igualdade formal entre (1) e (3) implica que $\xi=1/\sqrt{1-u^2/c^2}$, de ora avante representada por γ , resultando: $x^2+y^2+z^2=(ct)^2$ [≡eq. (1)].
- As equações da transformação de Lorentz de R para R' são, portanto,
- $x'=\gamma(x-ut)$, $y'=y$, $z'=z$ e $t'=\gamma(t-ux/c^2)$, com $\gamma=1/\sqrt{1-u^2/c^2}$.



José Figueiredo, DF-FCT-ULAG

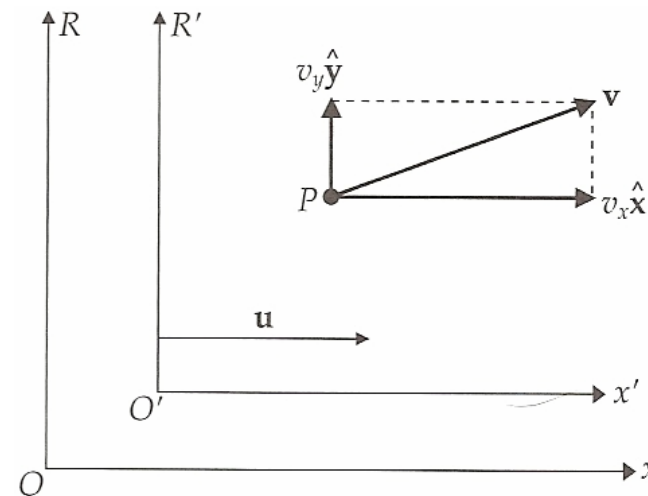
Transformação das velocidades

Imaginemos que conhecemos a velocidade $\mathbf{v}=(v_x, v_y, v_z)$ de uma partícula no referencial inercial R , e queremos saber a velocidade da partícula no referencial R' , que se desloca com velocidade uniforme \mathbf{u} relativamente a R , segundo Ox . No referencial, o deslocamento da partícula no intervalo de tempo Δt é $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$. Usando a transformação de Lorentz, obtemos os deslocamentos e o intervalo de tempo no referencial R' . As componentes da velocidade no referencial R' , $\mathbf{v}'=(v'_x, v'_y, v'_z)$, são dadas por:

$$v'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - u\Delta t)}{\gamma(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x)} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - u}{1 - \frac{u}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \quad \left[v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \right]$$

$$v'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x)} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\gamma(1 - \frac{u}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t})} = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{u}{c^2} v_x)} \quad \left[v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1 + \frac{u}{c^2} v'_x)} \right]$$

$$v'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \frac{\Delta z}{\gamma(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x)} = \frac{\frac{\Delta z}{\Delta t}}{\gamma(1 - \frac{u}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t})} = \frac{v_z}{\gamma(1 - \frac{u}{c^2} v_x)} \quad \left[v_z = \frac{v'_z}{\gamma(1 + \frac{u}{c^2} v'_x)} \right]$$



Exemplos de aplicação:

- 1. A luz tem velocidade c no referencial R . Qual é a velocidade da luz no referencial R' , que se desloca relativamente a R com velocidade u na mesma direcção e sentido da luz? **Res:** Usando a transformação de Lorentz, tendo presente que $v_x=c$, então $v'_x=(c-u)/(1-uc/c^2)=c$, como seria de esperar de acordo com o segundo postuludo da teoria da relatividade especial de Einstein.
- 2. Fresnel deduziu, utilizando argumentos clássicos, determinou a velocidade da luz num meio de índice de refração n que se flui com velocidade u em relação a um observador em repouso (experiência de Fresnel-Fizeau): $v=c/n \pm (1-1/n^2)u$. Faça a sua dedução, muito mais simples, usando a teoria da relatividade especial para o caso de as velocidades do meio e da luz terem sentidos opostos.
- Res:** Usando a transformação de Lorentz, tendo presente que $v'=c/n$ (velocidade da luz em relação ao meio), então $v=(v'+u)/(1+uv'/c^2)=(c/n+u)/(1+u/n\hat{c}) \sim (c/n+u)/(1-u/n\hat{c}) \sim c/n+(1-1/n^2)u$, desprezando termos de ordem ou superior $(u/c)^2$. (Esta demonstração foi feita, em 1907, por Max von Laue – prémio Nobel 1914 pela descoberta da difracção dos raios-x – um dos primeiros físicos a aceitar a teoria da relatividade especial.

Consequências das equações da transformação de Lorentz (1)

IFQR 2005-2006

Apanhado para Introdução à Teoria da Relatividade; versão 001 (a melhorar)

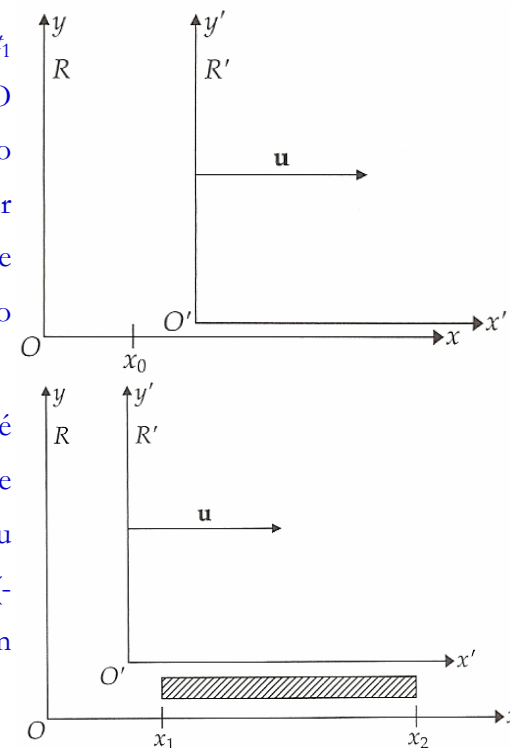
▪ A transformação $x' = \gamma(x - ut)$, $y' = y$, $z' = z$ e $t' = \gamma(t - ux/c^2)$, com $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$, transformação de Lorentz (TL), mantém invariante a equação da onda electromagnética na passagem do referencial inercial R para o referencial inercial R', deslocando-se relativamente a R com velocidade u segundo os eixos Ox. O resultado obtido, demonstrado para um caso particular, é válido para todas as leis do electromagnetismo. A transformação de Lorentz conserva invariantes as leis do electromagnetismo na passagem de um referencial inercial para outro. A transformação inversa, de R' para R, é obtida tendo em conta que R se move com velocidade $-u$ relativamente a R': x, y, z e t são trocados com x', y', z' e t' , e u por $-u$. As equações de Maxwell, a transformação de Lorentz e o princípio da relatividade são consistentes. Contudo, a Mecânica Newtoniana, a TL e o princípio da relatividade são inconsistentes. Porém, convém ter presente que a transformação de Lorentz tende para a transformação de Galileu quando $u \ll c$: a Mecânica Clássica permanece válida quando as velocidades envolvidas são muito menores c . Os fenómenos mecânicos com velocidade da ordem da velocidade da luz devem ser tratados por uma nova mecânica, cujas leis sejam invariantes sob a transformação de Lorentz. (ver, por exemplo, <http://w3.ualg.pt/~jlongras/TimeDilation.swf>).

▪ **«Dilatação» do tempo:** sejam dois eventos que ocorrem na mesma posição x_0 do referencial R nos instantes t_1 e t_2 . Para o observador no referencial R', os eventos ocorrem nos instantes $t'_1 = \gamma(t_1 - ux_0/c^2)$ e $t'_2 = \gamma(t_2 - ux_0/c^2)$. O intervalo de tempo entre os dois eventos medido pelo relógio de R' é dado por: $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1) = \gamma \Delta t_0$, sendo Δt_0 o intervalo de tempo medido em R pelo relógio colocado na posição x_0 , i.e., Δt_0 é o tempo próprio. Ter presente que como R' se move, os eventos ocorrem em posições diferentes de R' e, portanto, o intervalo de tempo $\Delta t'$ é medido usando dois relógios. Conclusão: o intervalo de tempo próprio entre dois eventos é menor do que o intervalo de tempo entre os dois eventos medido em qualquer outro referencial.

▪ **«Contração» do comprimento:** seja uma régua em repouso no referencial R cujo comprimento próprio é $L_0 = x_2 - x_1$. Um observador em R' mede o comprimento da régua e obtém $L' = x'_2 - x'_1$, onde $x'_1 = \gamma(x_1 - ut_1)$ e $x'_2 = \gamma(x_2 - ut_2)$. Contudo, para que a medição de R' seja correcta, deverá fazer as medidas no mesmo instante, ou seja, $t'_2 = t'_1$, evitando o erro associado ao seu deslocamento entre as medidas, obtendo $L' = \gamma L_0 + \gamma u(t_2 - t_1) = \gamma L_0 + \gamma u(-uL_0/c^2) = \gamma L_0(1 - u^2/c^2) = L_0/\gamma$, ou seja, $L' = L_0/\gamma$. Como $\gamma > 1$, verifica-se que o comprimento da régua medido em qualquer referencial que não seja o referencial próprio, será menor que o comprimento próprio da régua.

▪ **Resolva os problemas anteriores usando a transformação de Lorentz.**

07-03-2006



José Figueiredo, DF-FCT-ULAG

Consequências das equações da transformação de Lorentz (2)

▪ Vimos anteriormente que é fácil sincronizar relógios pertencentes um dado referencial e que relógios sincronizados num dado referencial inercial não estão necessariamente sincronizados para um observador noutro referencial inercial que se mova relativamente ao primeiro.

▪ **Relatividade da simultaneidade:**

▪ Sejam dois eventos que ocorrem nos pontos x_1 e x_2 no referencial R , nos instantes t_1 e t_2 (com $t_2 \geq t_1$), medidos pelos relógios sincronizados situados em x_1 e x_2 . Um observador em R' observará os eventos nos instantes $t'_1 = \gamma(t_1 - ux/c^2)$ e $t'_2 = \gamma(t_2 - ux/c^2)$. Para ele, o intervalo de tempo entre os eventos é dado por

▪ $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma[(t_2 - t_1) - u\Delta x/c^2] = \gamma[(t_2 - t_1) - uL_0/c^2]$, onde $L_0 = x_2 - x_1$ é a distância própria entre os relógios localizados em x_1 e x_2 .

▪ Se os eventos forem simultâneos em R , $\Delta t = 0$, obtém-se: $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = -\gamma uL_0/c^2$ (1).

▪ Dois eventos simultâneos em R , só são simultâneos em R' , se $u/c = 0$.

▪ **Nota:** ter presente que $\Delta t'$ dado pela equação (1) é o intervalo de tempo entre dois eventos medidos no relógio de R' . (ver, por exemplo, <http://w3.ualg.pt/~jlongras/Simultaneity.swf>).

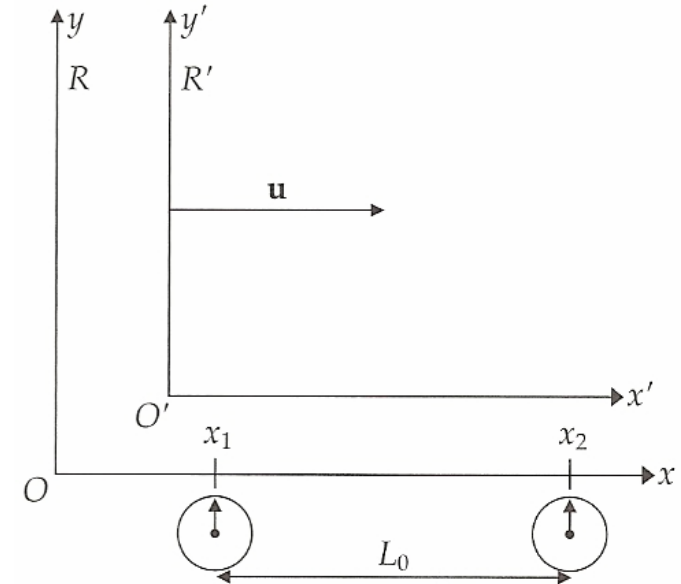
▪ **Diferença de sincronização de relógios situados em x_1 e x_2 para o observador em R' :**

▪ Do ponto de vista do observador R' , o intervalo de tempo medido por ele é dilatado por um factor γ em relação ao intervalo de tempo medido no referencial R , que se move em relação a ele, i.e., $\Delta t' = \gamma \Delta t$. Este intervalo de tempo entre os eventos medido nos relógios de R é, portanto,

▪ $\Delta t = \Delta t' / \gamma = -uL_0/c^2$.

▪ Tendo presente que os eventos são simultâneos em R , Δt mede a diferença de sincronização dos relógios em R para o observador R' . Note que

$\Delta t = t_2 - t_1 < 0$ ou $t_2 < t_1$, isto é, para o observador em R' , o evento «ocorre» primeiro no relógio situado em x_2 , ou seja, o relógio em x_2 está adiantado em relação ao relógio em x_1 .



Conceito de espaço-tempo e diagramas espaço-tempo

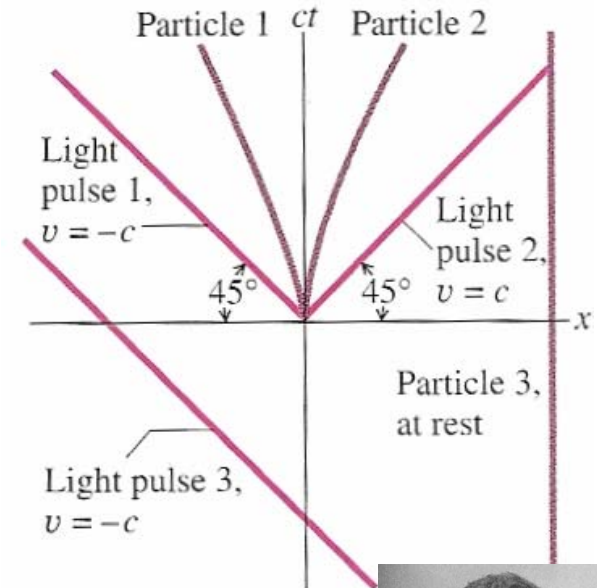
▪ Sabemos da cinemática clássica, que a representação gráfica torna os conceitos menos abstractos e condensam informação útil. Por exemplo, um gráfico $t-v$ para além de indicar a velocidade de uma partícula em cada instante, permite determinar a aceleração e obter o deslocamento da partícula no mesmo instante. Um evento, fenómeno físico localizado no espaço e no tempo, é representado pelas três coordenadas espaciais (x, y, z) e pelo instante de tempo t em que ocorre, i.e., (x, y, z, t) . Para visualizarmos um evento poderemos usar um sistema de dois eixos ortogonais num plano, o eixo vertical representa a coordenada temporal t e o eixo horizontal as três coordenadas espaciais (x, y, z) . Hermann Minkowski (1864-1909) explicou a teoria da relatividade restrita introduzindo o conceito de um espaço-tempo com quatro dimensões: o tempo é a quarta dimensão, descrevendo ângulos rectos com as três dimensões do espaço. Nos diagramas espaço-tempo de Minkowski, a passagem do tempo e o movimento através do espaço são representados nos eixos vertical e horizontal, respectivamente, de um sistema de eixos (x, ct) , onde x representa as três coordenadas espaciais (x, y, z) . A convenção usual na relatividade restrita é representar ct , em vez de t , no eixo vertical. (Usa-se ct para que as escalas dos dois eixos tenham as mesmas unidades). Um gráfico do tipo (x, ct) corresponde a um diagrama espaço-tempo.

▪ A «trajetória» de uma partícula no espaço-tempo designa-se **linha do mundo** ou **linha do universo** da partícula. Uma linha vertical, paralela ao eixo ct representa um estado estacionário de, por exemplo, uma partícula material (partícula em repouso num dado local). Na representação de Minkowski, uma partícula que se desloque entre duas posições x_A e x_B durante um intervalo de tempo $t_B - t_A$ «descreve» uma linha do mundo que liga os «locais» (x_A, t_A) e (x_B, t_B) . Em qualquer ponto, o declive da linha do mundo de uma partícula com velocidade v é $d(ct)/d(x) = c/v$: a linha do mundo de uma partícula em repouso é vertical (tem declive infinito); a linha do mundo de um impulso de luz tem declive ± 1 (faz um ângulo de 45° com as direcções $\pm x$). Uma vez que a velocidade de partículas materiais é sempre inferior a c , a linha do mundo de uma partícula material tem uma inclinação sempre superior a 45° em relação às direcções $\pm x$, isto é, nada material conhecido tem uma linha do mundo com declive entre -1 e 1. A figura ao lado mostra seis linhas do mundo num diagrama espaço-tempo de Minkowski, três relativas a feixes luminosos e três associadas a partículas materiais. As partículas 1 e 2 partem da posição $x=0$ no instante $t=0$, acelerando a partir do repouso em direcções opostas. A partícula 3 está em repouso na posição x ; os raios de luz são representados como linhas do mundo fazendo um ângulo de 45° com o eixo horizontal (eixo x). As linhas do mundo de partículas materiais com ângulos menores que 45° com o eixo $\pm x$ indicam um movimento mais rápido que o da luz, o que não é possível segundo a teoria da relatividade de Einstein.

▪ **O intervalo ou distância s_{12} entre dois eventos no espaço-tempo de Minkowski é definido(a)**

como: $(s_{12})^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta l^2$,

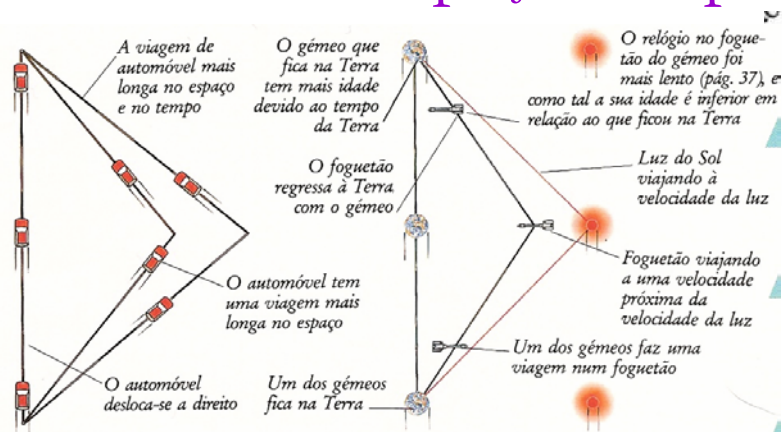
onde $c\Delta t$ e Δl representam, respectivamente, as separações temporal e espacial dos dois eventos.



Descrição de eventos no espaço-tempo

▪ **Espaço versus espaço-tempo:** Um automóvel deslocando-se em linha recta demora menos tempo do que se percorrer os lados dos triângulos. No espaço-tempo não é necessariamente assim.

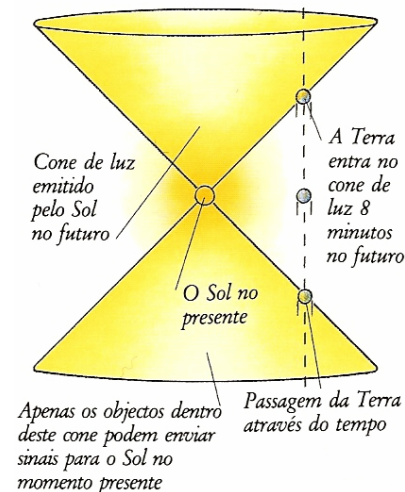
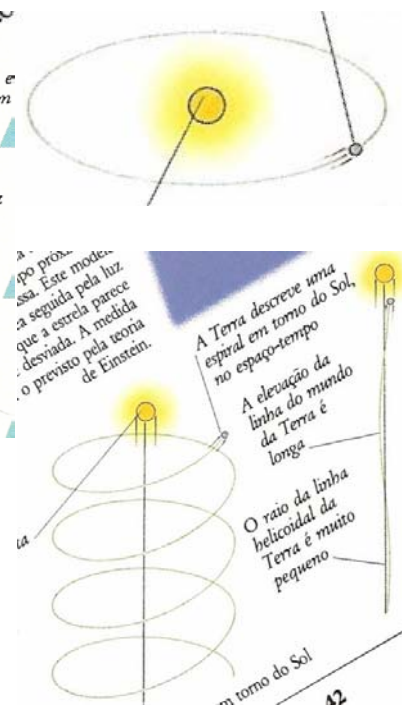
▪ **Paradoxo dos gémeos:** no diagrama de Minkowski, um dos gémeos fica na Terra (linha do mundo vertical). Outro gémeo segue num foguetão percorrendo os lados do triângulo no espaço-tempo. O tempo medido num relógio que se encontra na Terra é superior ao tempo medido num relógio que se encontra na foguetão.



(ver, por exemplo, <http://w3.ualg.pt/~jlongras/TwinParadox.swf>).

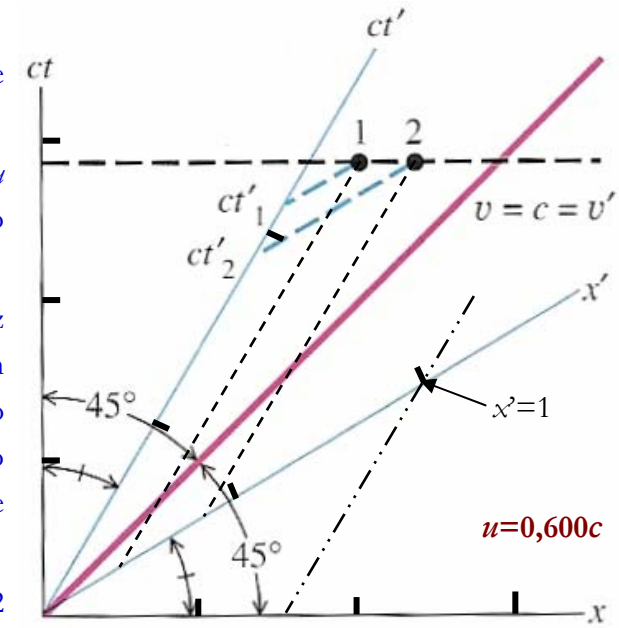
▪ **Linhas do mundo da Terra e do Sol:** A Terra encontra-se a ~150 milhões de km do Sol. No espaço «clássico», a Terra descreve uma órbita fechada, uma elipse de pequena excentricidade, em torno do Sol, uma vez por ano. Em intervalos de tempo característicos dos fenómenos humanos, o Sol, embora tenha um movimento de rotação em torno do seu eixo, permanece sensivelmente no mesmo lugar no espaço relativamente ao centro da Galáxia. No espaço-tempo, a linha do mundo do Sol é praticamente uma linha recta vertical nos intervalos de tempo característicos dos movimentos planetários, porque o Sol permanece sensivelmente na mesma posição no espaço. À medida que a Terra e o Sol se movem na dimensão do tempo do espaço-tempo, a órbita da Terra parece «esticar». A linha do mundo da Terra «estica» a elipse numa espiral em torno da linha do mundo do Sol (figura ao lado). A «órbita» helicoidal da Terra no espaço-tempo encontra-se tão esticada (figura à direita) que a «elevação», a distância percorrida pela Terra para «a frente» numa revolução, é cerca de 63 000 vezes maior que o raio da espiral.

▪ **Cone de luz:** Como referido acima, a Terra encontra-se a 8,2 minutos-luz do Sol. Pode considerar-se que a Terra não se move, no espaço, relativamente ao Sol, figura da direita. Num digrama espaço-tempo centrado no Sol, a linha do mundo da Terra pode considerar-se vertical. A linha do mundo da luz emitida pelo Sol define um **hipercone** no espaço-tempo a quatro dimensões que, por conveniência, se designa simplesmente por **cone de luz**, cuja «geratriz» no diagrama espaço-tempo $x-ct$ faz um ângulo de 45° com o eixo dos x . Assim, a luz emitida pelo Sol «só» afecta a Terra oito minutos depois de ser emitida, isto é, quando a Terra se «move» 8 min no futuro e entra no cone de luz do Sol.



Eventos nos diagramas espaço-tempo dos referenciais R e R'

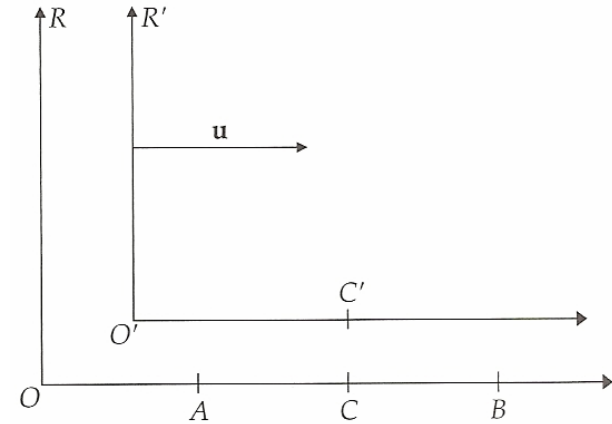
- Como se «passa» do diagrama espaço-tempo $ct-x$ para o diagrama espaço-tempo $ct'-x'$?
- Assume-se, como anteriormente, que $x'=0$ coincide com $x=0$ quando $t=t'=0$, e que R' se move relativamente a R com velocidade u segundo x .
- **eixo ct' :** Como $x'=0$ ao longo do eixo ct' , $x'=0$ e ct' têm a mesma linha do universo com declive c/u no diagrama espaço-tempo $ct-x$. Por exemplo, se $u=0,600c$, o eixo ct' faz com o eixo x um ângulo cujo $\arctan(1/0,600)=59^\circ$, ou $90^\circ-59^\circ=31^\circ$ com o eixo ct .
- **eixo x' :** Como $ct'=0$ (e, portanto, $t'=0$) ao longo do eixo x' , da equação da transformada de Lorentz que relaciona t' com t e x , resulta que $(t-ux/c^2)=0$ ou $ct=(u/c)x$ para eixo x' . Ou seja, o eixo x' tem declive u/c no diagrama espaço-tempo $ct-x$. Para $u=0,600c$, o eixo x' faz com o eixo x um ângulo cujo $\arctan(0,600)=31^\circ$, ou $90^\circ-31^\circ=59^\circ$ com o eixo ct . Isto é, o eixo x' faz com o eixo x o mesmo ângulo que o eixo ct' faz com o eixo ct . O linha do universo de um feixe de luz partindo de $x'=x=0$ no instante $t'=t=0$ com velocidade $+c$ bissecta o ângulo entre os dois sistemas de eixos.
- **Simultaneidade no diagrama espaço-tempo:** Um observador no referencial R vê os eventos 1 e 2 como ocorrendo simultaneamente nas posições x_1 e x_2 , com $x_1 > x_2$, do referencial R.
- Um observador que se mova segundo x relativamente ao observador no referencial R, vê o acontecimento 2 ocorrer antes do acontecimento 1. Usemos o diagrama espaço-tempo ao lado: Eventos simultâneos em R têm a mesma coordenada temporal. Tracemos então uma linha perpendicular ao eixo ct (e, portanto, paralela ao eixo x) – linha a tracejado (t constante). Marquemos nessa linha os eventos 1 (posição x_1) e 2 (posição x_2), ter presente que $x_1 > x_2$. Para determinarmos espacialmente os eventos 1 e 2 no diagrama espaço-tempo $ct'-x'$, desenham-se linhas paralelas ao eixo ct' passando pelos eventos 1 e 2. Para a determinação temporalmente dos eventos 1 e 2 no diagrama espaço-tempo $ct'-x'$, desenham-se linhas paralelas ao eixo x' passando pelos eventos 1 e 2 (ver na figura as linhas a tracejado paralelas ao eixo x'): a intercepção destas linhas com o eixo ct' , ct'_1 e ct'_2 , identifica os instantes de tempo t'_1 e t'_2 em que ocorreram os eventos para observadores no referencial R'. Verifica-se, portanto, que $t'_1 > t'_2$: os eventos não são simultâneos no referencial R', observando-se que o evento 2 ocorre antes do evento 1 para um observador em R'.
- Como se referiu o intervalo ou distância s_{12} entre dois eventos no espaço-tempo de Minkowski, $(s_{12})^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2$, é um absoluto, isto é, é um invariante de Lorentz: $(s_{12})^2 = (s'_{12})^2$ ou seja $c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2$.
- Diz-se que uma grandeza é um absoluto quando é um invariante de Lorentz. Uma vez que o intervalo entre dois eventos quaisquer é um absoluto, conclui-se que o espaço-tempo é absoluto, apesar de serem relativos o espaço e o tempo.



As escalas dos eixos R e R' são diferentes.

Problemas propostos (4)

1. Na Figura ao lado, um observador C no referencial R coloca relógios nas posições A e B, distantes uma da outra 10 minutos-luz. Junto ao observador C, localizado à mesma distância de A e de B, existe uma lâmpada. Um observador C' em repouso no referencial R', move-se juntamente com o referencial R' com velocidade $u=0,6c$, relativamente a R e paralelamente ao eixo Ox. Quando C' passa por C, ambos os observadores accionam os seus relógios e, nesse momento, a lâmpada localizada em C, emite dois impulsos luminosos para sincronizar os relógios localizados em A e B.



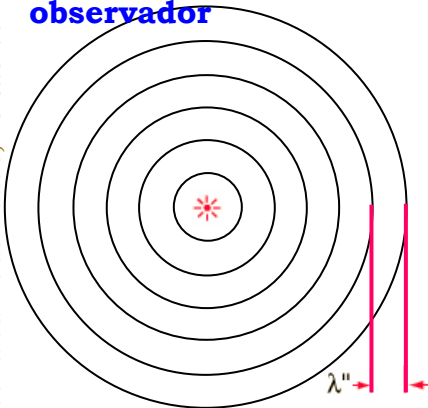
- Qual a distância entre os relógios A e B medida pelo observador C'?
 - Indique os instantes de tempo segundo o relógio de C', em que luz chega às posições A e B?
 - Qual é o intervalo de tempo medido pelo relógio em C e pelo relógio em C', entre a recepção dos impulsos luminosos em A e em B.
 - Quanto tempo o relógio A está adiantando ou atrasado em relação ao relógio B, segundo o observador C'? [Sol: a) 8 minutos-luz; b) 10 min; c) 0 min e -7,5 min; 6 min]
- Dois homens, situados nas extremidades A e B de uma nave espacial, deslocando-se relativamente a uma plataforma espacial com velocidade $c/5$, cujo comprimento próprio é 60 m, disparam uma arma um contra o outro. Uma testemunha na nave diz que eles dispararam simultaneamente. O que observa uma testemunha situada na plataforma quanto à ordem dos tiros e ao intervalo entre eles (refira-se ao homem da frente e ao da traseira da nave na sua resposta)? [Sol: O homem da frente foi o primeiro a disparar, cerca de 40,8 ns antes do homem na retaguarda]
 - Um observador numa plataforma espacial, cujo comprimento próprio é 100 m, mede a velocidade de uma nave espacial que passa por ele como sendo $c/2$. Por meio de um arranjo experimental que permite medir as posições das extremidades da nave simultaneamente, determina que a nave tem 60 m de comprimento. a) Qual é o comprimento próprio da nave? b) Qual é o comprimento da plataforma para o piloto da nave? c) Qual é o intervalo de tempo no relógio da nave entre as duas medidas realizadas pelo observador na plataforma espacial? d) Para o observador na plataforma, quanto tempo leva a nave a passar por ele? e) Para o piloto, quanto tempo leva a plataforma a passar por ele? [Sol: b) 86,6 m; c) 0,115 us; e) 0,46 us]
 - Um observador vê duas partículas a moverem-se em sentidos opostos, ambas com velocidade $0,99c$ em relação a ele. Qual é a velocidade de uma partícula em relação à outra? Comente esse resultado.
 - Uma partícula que se move com velocidade $c/2$ no referencial R do laboratório emite um fóton na direcção e sentido de sua trajectória. a) Calcule a velocidade do fóton, em módulo e direcção, no referencial R' da partícula. b) Repita o cálculo para o caso em que o fóton é emitido numa direcção perpendicular à trajectória da partícula. [Sol: b) $v=c$, $\theta=60^\circ$]
 - Demonstre que na transformação do referencial R para o referencial R', na configuração usual dos referenciais, $x^2 - ct^2 = x'^2 - ct'^2$ (esta expressão é um invariante de Lorentz, muito útil na resolução de problemas).
 - Mostre que o intervalo s_{12} entre dois eventos é um invariante de Lorentz. Sugestão: escreva a equação de $(s_{12})^2$ no referencial R, e use a transformação de Lorentz para o referencial R', mostrando que é uma relação formalmente idêntica à que escreveria no referencial R'.

Efeito Doppler (*longitudinal*) relativista



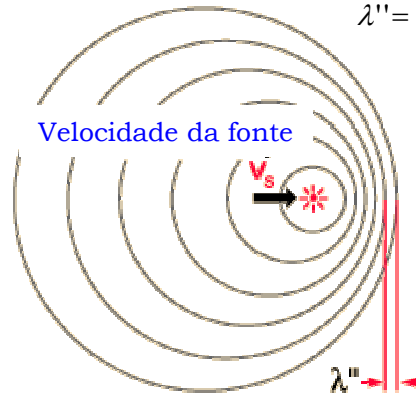
No efeito Doppler para as ondas sonoras, a alteração de frequência depende se é a fonte ou o receptor, ou ambos, que se está a mover relativamente ao meio, porque existe um meio relativamente ao qual os movimentos tomam lugar (rever efeito de Doppler para o som, no caso em que a fonte e o observador se movem em relação ao meio de propagação). No caso da luz, a propagar-se no vácuo, a distinção entre o movimento da fonte ou do observador não pode ser feita. O que interessa é o movimento relativo entre a fonte e o observador. Como consequência do segundo postulado de Einstein, a expressão da Física Clássica para o efeito Doppler não se aplica à luz. Sejam ν , T e λ , respectivamente, a frequência, o período e o comprimento de onda da luz emitida pela fonte num referencial ligado à fonte (referencial R'). Sejam ν'' , T'' e λ'' , respectivamente, velocidade, a frequência, o período e o comprimento de onda da luz emitida pela fonte medidos num referencial em repouso relativamente à fonte (referencial R). [Relembrar que o comprimento de onda (λ) é a distância ou «espaço» de propagação durante um período T .]

Fonte em repouso em relação ao observador Fonte aproximando-se do observador



Física Clássica

- Fonte em repouso relativamente ao observador:
 $\nu = \nu_s = 0$ e $\lambda'' = cT'' = c/\nu$
- Fonte aproximando-se do observador:
 $\nu = +\nu_s$ e $\lambda'' = c/\nu'' = (c-\nu_s)T'' = (c-\nu_s)/\nu$
- Fonte afastando-se do observador:
 $\nu = -\nu_s$ e $\lambda'' = c/\nu'' = (c+\nu_s)T'' = (c+\nu_s)/\nu$



Relatividade restrita

- Fonte em repouso relativamente ao observador:
 $\nu = \nu_s = 0$ e $\lambda'' = c/\nu'' = cT'' = c/\nu$ (ν é a frequência da fonte – frequência própria)
- Fonte aproximando-se do observador:
 $\nu = +\nu_s$ e $\lambda'' = c/\nu'' = (c-\nu_s)T'' = (c-\nu_s)T/\gamma_v = (c-\nu_s)/\nu\gamma_v$
- Fonte afastando-se do observador:
 $\nu = -\nu_s$ e $\lambda'' = c/\nu'' = (c+\nu_s)T'' = (c+\nu_s)T/\gamma_v = (c+\nu_s)/\nu\gamma_v$

$$\lambda'' = (c - v_s)T'' = \frac{(c - v_s)T_s}{\sqrt{1 - \frac{v_s^2}{c^2}}} \Leftrightarrow \frac{c}{\nu''} = \frac{(c - v_s)c}{\sqrt{1 - \frac{v_s^2}{c^2}}\nu} \Leftrightarrow \nu'' = \frac{\sqrt{1 - \beta_{v_s}^2}}{(1 - \beta_{v_s})}\nu = \nu \sqrt{\frac{1 + \beta_{v_s}}{1 - \beta_{v_s}}}$$

(ver, por exemplo, <http://w3.ualg.pt/~jlongras/DopplerEffect.swf>).



Para uma fonte afastando-se do observador obtém-se:

$$\nu'' = \frac{\sqrt{1 - \beta_{v_s}^2}}{(1 + \beta_{v_s})}\nu = \nu \sqrt{\frac{1 - \beta_{v_s}}{1 + \beta_{v_s}}}$$

Exercício: obtenha estas expressões usando a transformação de Lorentz (ver bibliografia).

Efeito Doppler *transversal*

A teoria da relatividade restrita prevê também um efeito de Doppler transversal. Este efeito é puramente relativista e corresponde a uma alteração da frequência (comprimento de onda) da luz emitida na direcção perpendicular ao movimento da fonte, em consequência de o tempo fluir de forma diferente nos referenciais ligados ao emissor e ao observador. Na discussão anterior considerou-se que o movimento relativo da fonte e do observador ocorria segundo o eixo x . Se considerarmos que a fonte se move segundo o eixo x , mas que o observador vê a luz segundo um ângulo θ com o eixo x , obtém-se:

$$\lambda'' = (c - v_s \cos \theta) T'' = \frac{(c - v_s \cos \theta) T_s}{\sqrt{1 - \beta_{v_s}^2}} \Leftrightarrow \nu'' = \frac{\sqrt{1 - \beta_{v_s}^2}}{(1 - \beta_{v_s} \cos \theta)} \nu$$

Quando $\theta=0$ obtém-se o resultado anterior para uma fonte aproximando-se do observador. Quando $\theta=\pi$, obtém a expressão para uma fonte em recessão. Contudo, se $\theta=\pi/2$, i.e., quando o observador vê a luz na direcção perpendicular ao movimento da fonte verifica que ocorre uma alteração de frequência, que se designa efeito de Doppler transversal, dada por $\nu'' = \nu/\gamma_v$. Ter em atenção que neste caso se verifica sempre que $\nu'' < \nu$. Este efeito é também muitas vezes chamado efeito de Doppler de segunda ordem, e é o resultado da «dilatação» do tempo.

Verificações experimentais do efeito Doppler relativista

O efeito Doppler relativista só depende da velocidade relativa entre o emissor e o observador. Este efeito foi verificado até segunda ordem em β^2 por H. E. Ives e G. R. Stilwell (em 1938 e 1941) usando feixes atómicos de hidrogénio. As experiências consistiam na formação de átomos de hidrogénio excitados a partir de iões moleculares acelerados por campos eléctricos elevados até atingirem velocidades da ordem de $0,005c$. Verificou-se, usando técnicas espectroscópicas, que a luz emitida no decaimento dos átomos para o estado fundamental sofria um desvio devido ao efeito Doppler em resultado do movimento dos átomos em relação ao observador. As riscas de emissão destes átomos era comparada com a luz emitida por átomos de hidrogénio numa ampola fechada cuja velocidade era muito inferior a $0,005c$. Considerando o comprimento de onda da luz desviada pelo efeito de Doppler como a média dos comprimentos de onda da luz emitida pelos átomos do feixe no mesmo sentido e no sentido oposto ao seu movimento, obtiveram o resultado: $\lambda'' = \lambda_s / \sqrt{1 - \beta^2}$. O valor experimental $\lambda'' - \lambda_s \approx 0,0074$ nm. O resultado previsto pela teoria da relatividade restrita é $\approx 0,0074$ nm. Pode concluir-se que o grau de concordância é bastante elevado. Estas experiência constituíram a primeira verificação experimental da teoria da relatividade restrita até à segunda ordem em β , em particular, da previsão da dilatação do tempo entre referenciais inerciais, tendo um papel análogo ao das experiências de Michelson-Morley em relação ao comprimento.

A descoberta do efeito de Mössbauer em 1958 permitiu realizar experiências que verificavam as previsões da relatividade restrita relativas aos dois efeitos de Doppler com muito maior precisão.

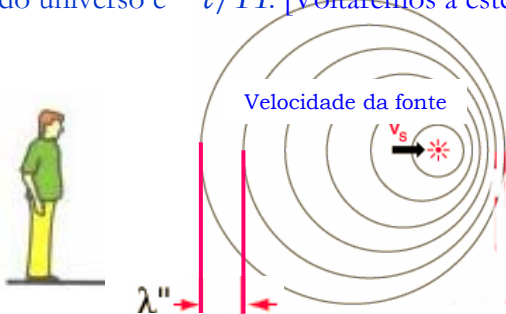
A predição do efeito de Doppler transversal foi verificado quantitativamente por Kunding em 1962, seguindo uma sugestão de Einstein de 1907, verificando uma diferença inferior a 1% entre o valor previsto e o valor medido para valores de velocidade da fonte da ordem de 400 m/s.

Aplicações do efeito de Doppler em cosmologia

IFQR 2005-2006

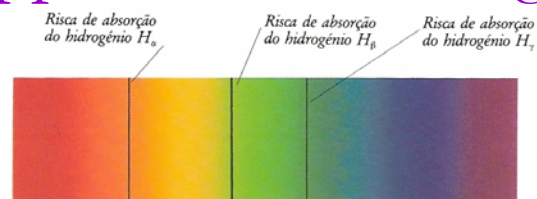
Apanhado para Introdução à Teoria da Relatividade; versão 001 (a melhorar)

O sistema solar faz parte da Via Láctea. Para além da nossa galáxia existem milhões de outras galáxias. Os objectos mais distantes visíveis nos nossos telescópios são tão remotos que a luz emitida por eles demora mais de 10 000 milhões de anos a alcançar a Terra. Os astrónomos analisam a luz proveniente de galáxias distantes «decompondo-a» em diferentes comprimentos de onda, formando o espectro de emissão. As bandas ou riscas escuras que aparecem nesses espectros são devidas à absorção de parte da luz por elementos químicos existentes nas atmosferas estelares. Quando comparadas com as riscas de absorção do Sol, por exemplo, verifica-se que estas bandas estão desviadas na direcção de maior comprimento de onda, ou estão deslocadas no sentido do vermelho. Verifica-se que quanto mais distante se encontra a galáxia maior é o desvio, o que significa que as galáxias mais distantes se afastam mais rapidamente da Terra que as mais próximas. Pode-se determinar a recessão das estrelas e das galáxias (e a respectiva distância) em relação à Terra usando o efeito de Doppler: mede-se o deslocamento para o vermelho das linhas espectrais da luz emitida em relação a galáxias idênticas próximas de nós. Este efeito foi verificado em 1917 por Vesto Slipher. Apoiando-se neste efeito e nos trabalhos de Slipher, Hubble e A. Friedmann (1922), G. Lemaître conjecturou, em 1927, que o Universo se encontrava em expansão, tendo surgido de um *átomo primordial*. A velocidade de uma galáxia é proporcional à sua distância ao observador: $v = H \cdot d$, onde H representa o parâmetro de Hubble ($\sim 15 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} / 10^6 \text{ anos-luz}$); o raio do universo é $\sim c/H$. Voltaremos a este assunto mais tarde.]



13-03-2006

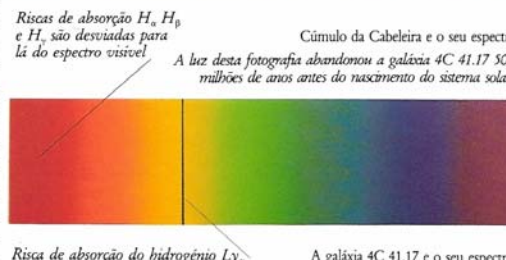
DESLOCAMENTO DA ANDRÓMEDA
Como o Universo se encontra em expansão (pág. 43), a luz de corpos distantes é desviada durante a sua viagem até nós, movendo-se em direcção ao vermelho do espectro, fenómeno a que se dá o nome de «deslocamento para o vermelho». No entanto este fenómeno não se verifica no caso da galáxia Andrómeda, uma vizinha da Via Láctea.



GALÁXIAS DO CÚMULO
As galáxias do cúmulo, que se encontram a uma distância de 350 milhões de anos-luz, aparecem nos nossos telescópios como gotas. O valor do seu deslocamento para o vermelho, 0,022, é proporcional à distância a estas galáxias. Uma galáxia com o dobro do deslocamento para o vermelho está duas vezes mais longe.



DESLOCAMENTO DA 4C 41.17
A galáxia 4C 41.17 é tão distante que o seu deslocamento para o vermelho é de 3,8, o que equivale a uma distância de 10 000 milhões de anos-luz. Para deslocamentos superiores a 0,3, a regra da proporcionalidade deixa de se poder aplicar, e neste caso os astrónomos utilizam cálculos baseados nas teorias de Einstein.



Tempo & Espaço, Visual Ciências, Verbo.

Quando a fonte se afasta do observador: $\lambda'' = (c + v_s) T'' = \frac{(c + v_s) T_s}{\sqrt{1 - \beta_v^2}} = \frac{(c + v_s) \lambda_s / c}{\sqrt{1 - \beta_v^2}} = \frac{(1 + \beta_v)}{\sqrt{1 - \beta_v^2}} \lambda_s$

Os astrónomos caracterizam o desvio em comprimento de onda pelo parâmetro z:

$$z_{recede} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_s} = \frac{\lambda'' - \lambda_s}{\lambda_s} = \sqrt{\frac{1 + \beta_v}{1 - \beta_v}} - 1 \quad \left(\beta_v = \frac{(z + 1)^2 - 1}{(z + 1)^2 + 1} \right)$$

Exercício 1: Na série de Balmer do hidrogénio, o comprimento de onda mais longo corresponde a 656 nm. Na luz emitida por uma galáxia, a mesma risca corresponde ao comprimento de onda 1458 nm. Determine a velocidade de recessão da galáxia relativamente à Terra. **Res:** Seja v a velocidade de recessão da galáxia. Como $\lambda'' > \lambda_s$, conclui-se que a galáxia se afasta da Terra. Neste caso: $z_{recede} = (1458 - 656) / 656 = 1,22$. Fazendo $(1,22 + 1)^2 = (1 - v/c) / (1 + v/c)$, e resolvendo em ordem a v , obtém-se $v = 0,663c$.

Exercício 2: Mostre que o quasar 2000-330 se afasta da Terra com velocidade de $0,91c$, sabendo que $z = 3,78$.

<http://w3.ualg.pt/~jlongras/ensino.htm>

Teoria da Relatividade Restrita

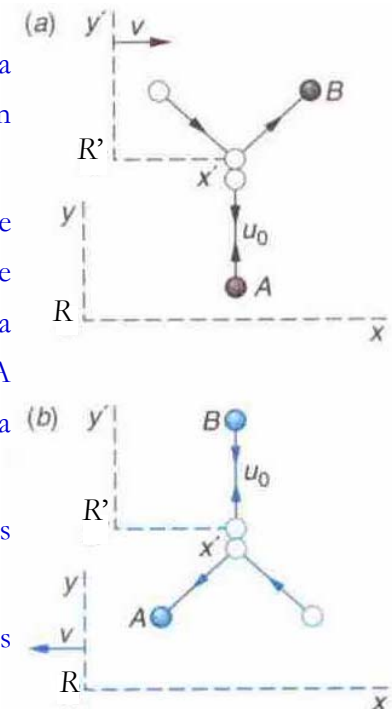
Dinâmica

Bibliografia:

- *Teoria da Relatividade Especial*, Ramayana Gazzinelli, Editora Edgard Blücher, Brasil 2005.
- *O Princípio da Relatividade*, H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski (Tradução do original alemão pelo Prof. Manuel dos Reis), Fundação Calouste Gulbenkian, 1971
- *O Annus Mirabilis* de Einstein - cinco artigos que revolucionaram a Física, John Stachel, Gradiva, 2005.
- *Modern Physics*, P. A. Tipler and R. A. Llewellyn, W. H. Freeman and Company, 2002.

Insucesso da definição clássica de momento

- Segundo a Física clássica, as leis de Newton têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais, isto é, as leis devem ser invariantes (não mudam). Em particular a segunda lei da dinâmica $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ deve ser invariante. O momento clássico de um corpo $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, onde m e \mathbf{v} representam, respectivamente, a inércia e a velocidade do corpo relativamente a um referencial R, sob a transformação de Lorentz é inconsistente com o princípio da conservação de momento na colisão de partículas livres. O princípio da conservação do momento «afirma» que quando dois corpos livres, num referencial inercial, interagem, o momento total do sistema formado pelos dois corpos mantém-se constante. Se o princípio da conservação do momento é uma lei física válida num dado referencial inercial, tem de ser válida em todos os referenciais inerciais. Tanto quanto se sabe, num processo físico (uma transformação) no Universo verificam-se sempre os princípios de conservação da energia, do momento, e do momento angular. Como veremos, a substituição da transformação de Galileu pela transformação de Lorentz obriga à redefinição dos conceitos de momento e energia.
- Seja um observador no referencial R com uma bola A e um observador no referencial R' com uma bola B, idêntica à bola A. (R' move-se com velocidade v relativamente a R) Cada observador atira a sua bola na direcção y com velocidade u_0 (medida no seu referencial) de forma que as bolas colidem frontalmente. Assume-se que o choque é perfeitamente elástico, e que cada observador vê a sua bola ricochetear com a velocidade u_0 .
- Se o momento total se conserva, a sua componente y deve ser zero porque o momento de cada bola é invertido pela colisão. Contudo, se considerarmos as transformações relativistas das velocidades, conclui-se que a quantidade mu_y não tem o mesmo valor para cada bola vista por um dos observadores.
- Considere-se a colisão vista pelo observador no referencial R (fig. a: colisão entre duas bolas “vista” em R). Neste referencial, a bola A move-se ao longo do eixo y com velocidade $u_{yA} = u_0$. A componente x da velocidade da bola B é $u_{xA} = v$ e a componente y é $u_{yB} = u'_{yB}/\gamma = -u_0\sqrt{1-v^2/c^2}$, que resulta das igualdades $u'_{yB} = -u_0$ e $u'_{xB} = 0$ (a componente y da velocidade da bola B em R é u_0/γ , se for u_0 em R'). Verifica-se que a componente y da velocidade da bola B é menor que a da bola A. (A quantidade $\sqrt{1-\beta^2}$ resulta do efeito da dilatação do tempo: o tempo necessário para a bola B percorrer uma dada distância ao longo da direcção y em R é superior ao tempo medido em R' para a bola percorrer a mesma distância.)
- Assim, no referencial R, a componente y do momento total clássico não é zero. Uma vez que as componentes y das velocidades são invertidas numa colisão elástica, o momento definido como $\sum mu$ não é conservado em R.
- A análise deste problema no referencial R' leva à mesma conclusão (fig. b: a mesma colisão vista em R'), uma vez que os papéis de A e B são simplesmente invertidos. Neste referencial a bola A tem velocidade segundo y igual a u_0/γ .



Momento relativista

IFQR 2005-2006

Apanhado para Introdução à Teoria da Relatividade; versão 001 (a melhorar)

- A definição relativista de momento \mathbf{p} deve ter as seguintes propriedades:
 - \mathbf{p} conserva-se nas colisões de partículas livres
 - \mathbf{p} tende para o limite clássico $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ quando v/c tende para zero.
- O falhanço da definição clássica de momento não deve resultar da velocidade, uma vez que usamos a transformação das velocidades obtida a partir da transformação de Lorentz. O problema da definição clássica deve ter a ver com a definição de massa de uma partícula em movimento.
- Seja uma partícula material em repouso com massa m_0 . O momento relativista da partícula material com velocidade \mathbf{v} relativamente ao referencial em que foi medida a sua massa em repouso m_0 é dado por $\mathbf{p} = \gamma_{\mathbf{v}} m_0 \mathbf{v}$, com $\gamma_{\mathbf{v}} = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$.
- A grandeza m_0 , massa da partícula *em repouso*, é um invariante de Lorentz, isto é, é invariante sob a transformação de Lorentz (é a mesma para todos os referenciais inerciais). Por vezes, designa-se m_0 como a **massa invariante** da partícula.
- A grandeza $m(v) = \gamma_{\mathbf{v}} m_0$, **massa relativista** da partícula não é um invariante de Lorentz, porque $\gamma_{\mathbf{v}}$ não é um invariante de Lorentz.
- Da definição de momento relativista pode concluir-se que nenhuma partícula material com massa em repouso não nula pode ser acelerada até atingir a velocidade da luz no vácuo, pois o seu momento seria infinito e, portanto, seria necessário «transferir infinita energia» para a partícula. Várias experiências corroboram esta afirmação.
- Assim, a velocidade da luz no vácuo é a velocidade máxima com que se pode transmitir energia, quer seja por processos electromagnéticos quer usando partículas materiais. Convém referir que o limite máximo é a velocidade da luz no vácuo. Num meio transparente à radiação electromagnética com índice de refração n , a velocidade da luz é c/n , sendo neste caso possível que uma partícula material se propague com uma velocidade superior à velocidade da luz no meio. Um fenómeno devido à propagação de partículas materiais num dado meio com velocidade superior à velocidade da luz nesse meio é o efeito Cherenkov, que será analisado mais tarde.
- Com a definição relativista de momento, a segunda lei de Newton da Dinâmica mantém a forma usada por Newton quando da formulação da Mecânica Clássica: $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, onde \mathbf{p} representa o momento relativista.
- **Ter em atenção que, em geral, a força \mathbf{F} que actua numa partícula e a sua aceleração não são colineares!**

Energia relativista

- O carácter fundamental do princípio da conservação da energia leva-nos a procurar uma definição relativista da energia total de um sistema que preserve a invariância desta lei de conservação sob a transformação de Lorentz, isto é, entre referenciais inerciais.
- A definição relativista de energia deve satisfazer as duas condições seguintes:
 - **A energia total de um sistema isolado qualquer conserva-se**
 - **A energia tende para o limite clássico quando v/c tende para zero.**
- Define-se energia cinética de uma partícula E_C como o trabalho realizado por uma força sobre a partícula para a acelerar do repouso até à velocidade \mathbf{v} (a variação da E_C de uma partícula é igual ao trabalho realizado pela força que actua na partícula).
- Seja E_C a energia cinética relativista de uma partícula que acelera, partindo do repouso, até à velocidade \mathbf{v} : $E_C = \int_0^{\mathbf{v}} \mathbf{F} d\mathbf{s} = \int_0^{\mathbf{v}} d\mathbf{p}/dt \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{\mathbf{v}} d\mathbf{s}/dt \cdot d\mathbf{p} = m_0 \int_0^{\mathbf{v}} \mathbf{v} (d\mathbf{v}_v + \mathbf{v} d\mathbf{v}_v) = m_0 \int_0^{\mathbf{v}} (1/2 \mathbf{v}_v d(v^2) + v^2 d\mathbf{v}_v)$, tendo em conta que $d(v^2) = d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2\mathbf{v} d\mathbf{v}$. Pode-se escrever $v^2 = c^2(1 - \mathbf{v}_v^{-2})$, resultando $d(v^2) = 2c^2 \mathbf{v}_v^{-3} d\mathbf{v}_v$. Voltando ao cálculo de E_C , obtém-se: $E_C = m_0 \int_0^{\mathbf{v}} [c^2 \mathbf{v}_v^{-2} d\mathbf{v}_v + c^2(1 - \mathbf{v}_v^{-2}) d\mathbf{v}_v] = m_0 c^2 \int_0^{\mathbf{v}} d\mathbf{v}_v = m_0 c^2 (\mathbf{v}_v - 1)$ ou de forma equivalente $m_0 c^2 + E_C = m_0 c^2 \mathbf{v}_v$, ou ainda $E = E_0 + E_C$. A grandeza $E = m_0 c^2 \mathbf{v}_v$ corresponde à energia total da partícula com velocidade \mathbf{v} .
- A quantidade $E_0 = m_0 c^2$ designa-se energia da partícula em repouso ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$). A massa inercial de um corpo é uma medida do seu conteúdo energético (ver a seguir o artigo de Einstein: *A inércia de um corpo depende do seu conteúdo energético?*) Na teoria da relatividade restrita, a energia potencial armazenada num sistema aparece como massa em «repouso». Sempre que a energia de um corpo aumenta de uma quantidade ΔU , a sua inércia aumenta de $\Delta m = \Delta U/c^2$.
- A matéria tem duas propriedades distintas ligadas pela relação $E_0 = m_0 c^2$: a inércia, medida pela massa em repouso m_0 , e a energia em repouso E_0 . A radiação, que pode ser considerada uma forma de matéria, *pode* transferir inércia entre os corpos que a emitem e a absorvem. A acumulação de energia num ponto do espaço, devido, por exemplo, a um campo, é acompanhada por criação de inércia naquele ponto.
- Uma vez que $E_0 = m_0 c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ e $\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v} / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, se eliminarmos v^2 nas duas equações obtém-se $E^2 = p^2 c^2 + E_0^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2$.
- Se uma partícula não tem «existência em repouso», como é o caso do fóton, que se propaga sempre com velocidade c , então $m_0 = 0$, e, portanto, $E = pc$.
- Segundo a teoria da relatividade restrita não se pode falar na conservação da massa de forma independente da da energia, ao contrário do que acontece na Mecânica Clássica. Os princípios de conservação da massa e da energia são substituídos por um princípio unificador: **a lei de conservação de conservação de massa-energia**, que se exprime na conservação da quantidade $E_C + m_0 c^2 = m_0 c^2 \mathbf{v}_v$. Num processo físico qualquer, como, por exemplo, na colisão de partículas, a totalidade ou parte da massa em repouso pode ser transformada em energia e vice-versa. A conservação da massa-energia em processos relativistas é verificada em inúmeras experiências de colisão de partículas ou nos processos de desintegração nuclear.

Artigo de Einstein: *A inércia de um corpo depende do seu conteúdo energético?* (1)

A inércia de um corpo depende do seu conteúdo energético?

Os resultados de uma investigação electrodinâmica recentemente publicada por mim nesta revista¹⁴ conduzem a uma conclusão muito interessante, que será aqui deduzida.

Baseei essa investigação nas equações de Maxwell-Lorentz para o espaço vazio, conjuntamente com a expressão de Maxwell para a energia electromagnética do espaço, e também no princípio seguinte:

As leis segundo as quais os estados dos sistemas físicos se alteram são independentes de qual dos dois sistemas de coordenadas (assumidos como estando em movimento uniforme de translação paralela em relação um ao outro) é utilizado para descrever essas alterações (princípio da relatividade).

Com base neste fundamento¹⁵, deduzi o resultado seguinte, entre outros (*loc. cit.*, sec. 8).

¹⁴ A. Einstein, *Ann. d. Phys.*, 17 (1905), 891. [Ver artigo 3]

¹⁵ O princípio da constância da velocidade da luz aí utilizado está evidentemente contido nas equações de Maxwell.

•Extraídos de O *Annus Mirabilis* de Einstein, John Stachel, Gradiva, 2005.

Suponhamos que um sistema de ondas luminosas planas tem uma energia l em relação ao sistema de coordenadas (x, y, z) ; suponhamos que a direcção dos raios (a normal à onda) faz um ângulo φ com o eixo x do sistema. Se introduzirmos um novo sistema de coordenadas (ξ, η, ζ) , que está em movimento uniforme de translação paralela em relação ao sistema e cuja origem se move ao longo do eixo x a uma velocidade v , então esta quantidade de luz — medida no sistema (ξ, η, ζ) — tem a energia

$$l^* = l \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

onde V representa a velocidade da luz. Vamos utilizar este resultado no que se segue.

Considere-se um corpo em repouso no sistema (x, y, z) , cuja energia em relação a esse sistema é E_0 . Seja H_0 a energia do corpo em relação ao sistema (ξ, η, ζ) , que se move à velocidade v como anteriormente.

Suponhamos que este corpo emite ondas luminosas planas de energia $L/2$ (medida em relação a (x, y, z)), numa direcção que forma um ângulo φ com o eixo x e que emite simultaneamente uma quantidade igual de luz no sentido oposto. O corpo permanece em repouso em relação ao sistema (x, y, z) durante este processo, o qual tem de satisfazer o princípio da conservação da energia e ser válido (segundo o princípio da relatividade) em relação a ambos os sistemas de coordenadas. Se E_1 e H_1 representarem a energia do corpo após a emissão de luz, medida em relação aos sistemas (x, y, z) e (ξ, η, ζ) , respectivamente, obteremos, utilizando a relação acima indicada,

$$E_0 = E_1 + \left[\frac{L}{2} + \frac{L}{2} \right],$$

Artigo de Einstein: *A inércia de um corpo depende do seu conteúdo energético?* (2)

ARTIGO 4

183

$$H_0 = H_1 + \left[\frac{L}{2} \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} + \frac{L}{2} \frac{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \right]$$

$$= H_1 + \frac{L}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Subtraindo, obtemos a partir destas equações

$$(H_0 - E_0) - (H_1 - E_1) = L \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

Ambas as diferenças da forma $H - E$ que ocorrem nesta expressão têm significados físicos simples. H e E são os valores energéticos do mesmo corpo em relação aos dois sistemas de coordenadas em movimento relativo, estando o corpo em repouso num dos sistemas (sistema (x, y, z)). Assim, é evidente que a diferença $H - E$ pode diferir da energia cinética K do corpo em relação ao outro sistema (sistema (ξ, η, ζ)) apenas por uma constante aditiva C , que depende da escolha das constantes aditivas arbitrárias para as energias H e E . Podemos pois fazer

$$H_0 - E_0 = K_0 + C$$

$$H_1 - E_1 = K_1 + C,$$

uma vez que C não se altera durante a emissão de luz. Assim, obtemos

$$K_0 - K_1 = L \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

184

O ANNUS MIRABILIS DE EINSTEIN

A energia cinética do corpo em relação a (ξ, η, ζ) diminui, em resultado da emissão de luz, uma quantidade que é independente das propriedades do corpo. Além disso, a diferença $K_0 - K_1$ depende da velocidade da mesma forma que a energia cinética de um electrão (*loc. cit.*, sec. 10).

Desprezando grandezas de quarta ordem e de ordem superior, podemos obter^[1]

$$K_0 - K_1 = \frac{L}{V^2} \frac{v^2}{2}.$$

A partir desta equação, podemos concluir imediatamente que:

Se um corpo emite a energia L sob a forma de radiação, a sua massa diminui L/V^2 . Aqui, não é obviamente essencial que a energia extraída do corpo se transforme em energia radiante. Somos assim levados à conclusão mais geral:

A massa de um corpo é uma medida do seu conteúdo energético; se a energia muda de L , a massa altera-se-á no mesmo sentido de $L/9 \cdot 10^{20}$, sendo a energia medida em ergs e a massa em gramas.

Não se exclui que venha a revelar-se possível testar esta teoria, utilizando corpos cujo conteúdo energético seja extremamente variável (por exemplo, sais de rádio).

Se a teoria estiver de acordo com os factos, então a radiação transporta inércia entre corpos emissores e absorventes.

(*Annalen der Physik*, 187 [1905], 639-641)

NOTAS EDITORIAIS

^[1] Einstein utilizou o limite newtoniano da energia cinética do corpo, de forma a avaliar a alteração da sua massa em repouso.

Experiências que «comprovam» a mecânica relativista

IFQR 2005-2006

Apanhado para Introdução à Teoria da Relatividade; versão 001 (a melhorar)

- Da mesma forma que redefinimos os conceitos mecânicos de energia e momento, tornando-os invariantes sob a TL, podem-se redefinir todos os outros conceitos de mecânica, tornando-os invariantes sob a TL, e tendem para os conceitos clássicos para velocidades muito inferiores à da luz no vazio. A nova formulação da mecânica relativista, as equações de Maxwell, a TL e o princípio da relatividade de Einstein são consistentes.

Produção e aniquilação de pares electrão-positrão

- A existência do positrão, anti-partícula do electrão (mesma massa m_e em repouso e carga simétrica), foi previsto por Paul Dirac em 1930, sendo descoberto por Carl Anderson em 1932 em raios cósmicos em resultando de um processo em que era produzido um par electrão-positrão. Desde então, este processo tem sido observado em resultado da interacção de fotões de alta energia, raios gama, com a matéria. Na formação do par electrão-positrão é necessário que haja conservação de energia-massa e de momento. É necessário ainda que a energia do raio gama seja superior a $2m_e c^2$. A condição de conservação de momento exige a intervenção de outra partícula para além do fotão gama, em geral, um núcleo atómico que recuará com o momento necessário para compensar o momento do fotão $p=E/c$, assegurando a conservação de momento. Ter em atenção que o recuo do núcleo atómica exige que a energia do fotão gama seja superior a $2m_e c^2$. Pode-se mostrar que o limiar de energia do fotão para que o processo de criação do par electrão-positrão ocorra na vizinhança de um núcleo atómico de massa M é $E_L=2m_e c^2(1+m_e/M)$.

- Na aniquilação do par electrão-positrão, um electrão e um positrão vão perdendo energia por interacções várias, e quando próximos um do outro, começam a orbitar em torno do centro de massa dos sistema por eles formado, formando um «átomo hidrogenóide» designado positrónio, cujo tempo de vida é da ordem de 100 ps. Ao fim deste tempo, o electrão e o positrão recombina-se sendo emitidos dois fotões em sentidos opostos, assegurando a conservação de momento. Embora a emissão de um único fotão não seja possível, por vezes corre a emissão de três fotões. No caso da emissão de dois fotões, a energia de cada um deles deve ser 0,511 MeV (o equivalente energético da massa do electrão). Assim, o comprimento de onda máximo do fotão é 2,4 pm (banda dos raios gama). Esta emissão de dois fotões pode ser detectada (como ocorre em medicina, no exame imagiológico Tomografia de Emissão de Positrões ou PET – ver página seguinte).

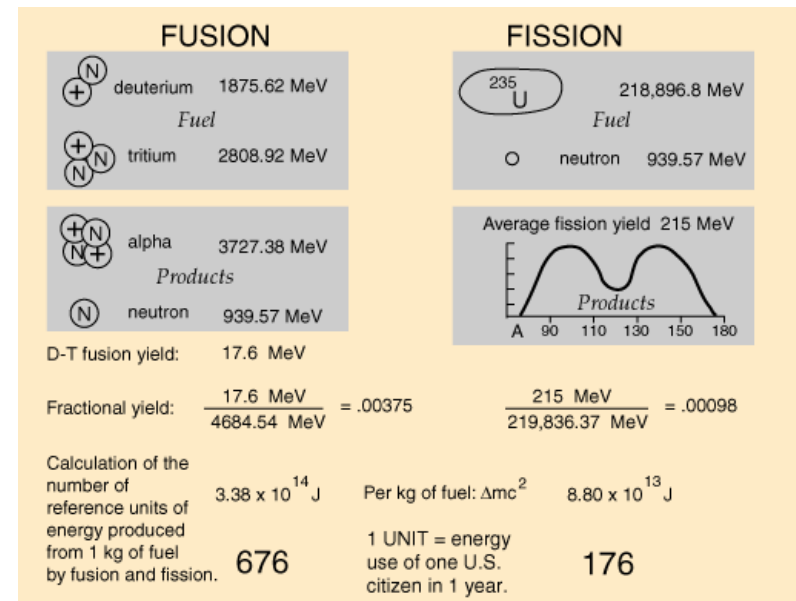
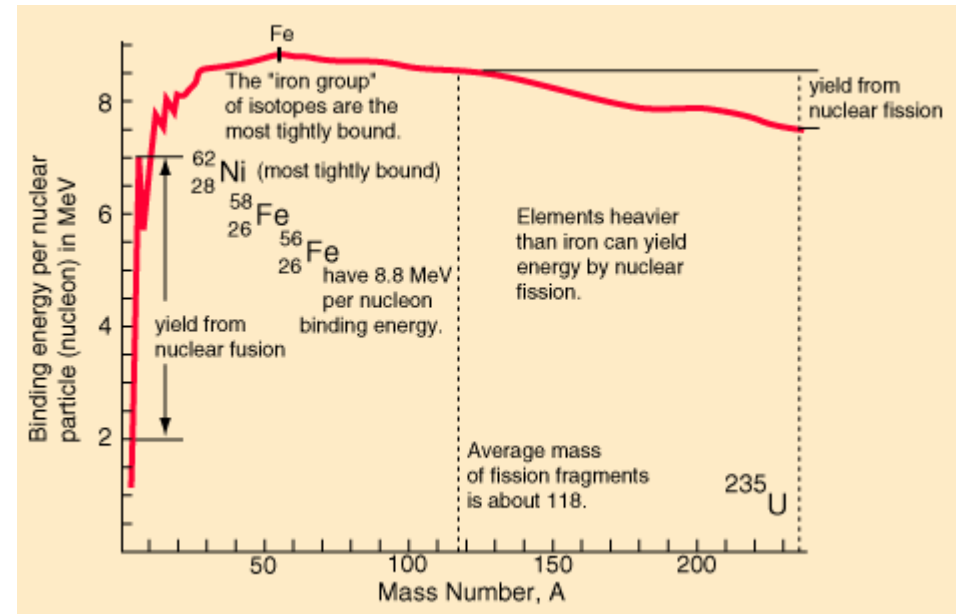
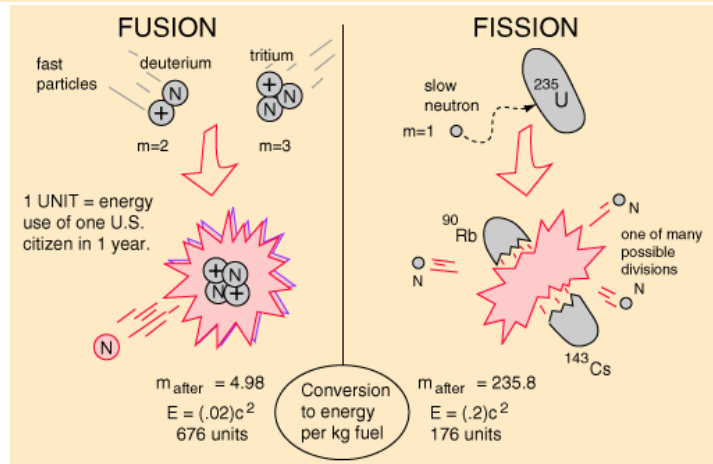
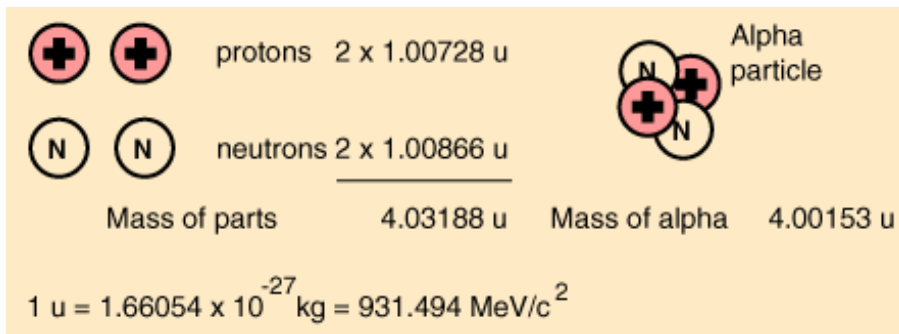
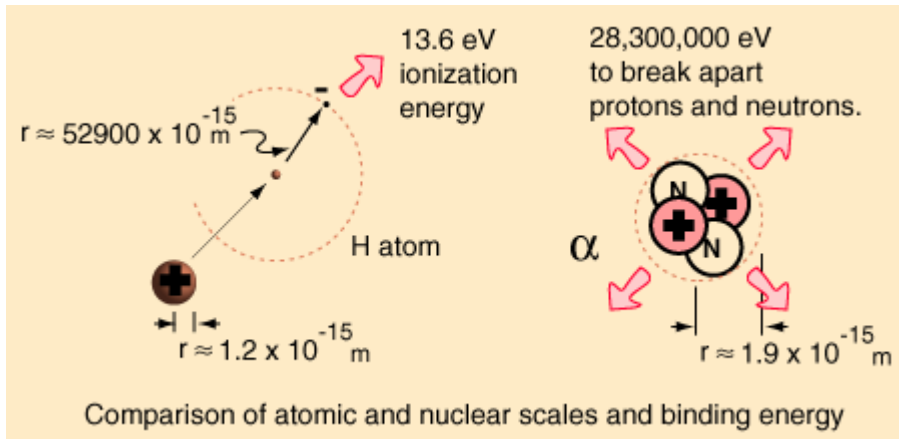
Reacções nucleares e estabilidade nuclear

- Se as partículas de um sistema estão ligadas por forças atractivas, será necessário fornecer um dada energia para as separar. Considere-se por exemplo, a energia de ligação de um núcleo de massa M , formado por Z protões e N neutrões. Pelo princípio da conservação da energia-massa, a energia de ligação é a diferença entre a soma das massas das partículas separada a uma distância infinita e a massa do sistema ligado, multiplicada por c^2 :

- $E_L = \Delta m c^2 = (Zm_p + Nm_n - M)c^2$, onde m_p e m_n são as massas em repouso do protão e do neutrão, respectivamente. O termo $\Delta m = \sum m_i - M$ designa-se **defeito de massa**. Em geral, pode dizer-se que um núcleo é *absolutamente* estável se o defeito de massa é positivo com respeito às partículas constituintes ou em relação à soma dos defeitos de massa dos núcleos produtos possíveis da sua desintegração. Neste caso, a massa do núcleo não é suficiente para «formar» as massas das partículas constituintes ou dos núcleos da desintegração, e o núcleo não pode desintegrar-se nelas.

- A energia Q_L libertada numa reacção nuclear do tipo $A+B \rightarrow C+D+Q_L$ é dada por $Q_L = [(M_A + M_B) - (M_C + M_D)]c^2$.

Reacções nucleares e estabilidade nuclear



Efeito (radiação) de Cherenkov

- Quando uma partícula, com carga eléctrica, atravessa um meio transparente com velocidade maior do que a velocidade da luz nesse meio, $v > c/n$, emite um cone de luz, ver figuras, de forma semelhante ao cone de som («onda de choque») de um avião supersónico ao «quebrar a barreira do som». Um tratamento adequado usando a teoria electromagnética mostra que o comprimento de onda dessa radiação está na região do azul, sendo vista como um brilho azulado quando há um feixe intenso de partículas como, por exemplo, em volta do caroço de um reactor nuclear tipo piscina. A radiação de Cherenkov foi observada por Pavel A. Cherenkov em 1934, quando investigava o que acontecia quando um material radioactivo era colocado num fluido (por ex. água).
- A radiação de Cherenkov é uma das técnicas mais usadas na identificação de partículas subatómicas (ex. neutrinos): as suas propriedades permitem que seja utilizada para medir a velocidade de partículas relativistas. Medindo o ângulo ϕ entre feixe de partículas e a radiação emitida obtém-se a velocidade da partícula no meio, uma vez que:

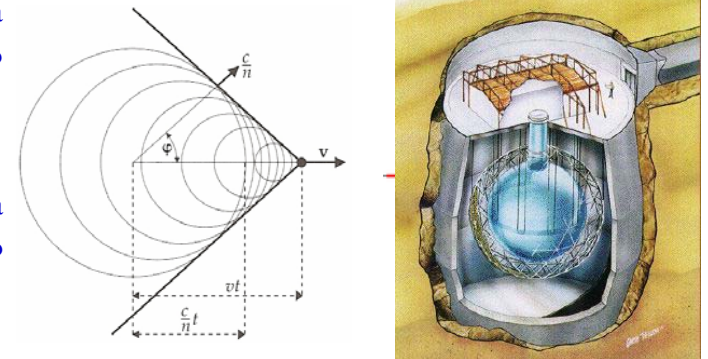
$$\cos\phi = (ct/n)/(vt) = c/nv \text{ e } v = c/n\cos\phi.$$

- Tenha em atenção, que embora uma partícula se possa deslocar com velocidade superior à velocidade da luz num meio material, a velocidade de uma partícula com massa em repouso não nula não pode ser igual ao maior que velocidade da luz no vácuo ($\sim 3,998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$).
- O efeito de Cherenkov no vácuo é investigado no DF da Ualg pelo Professor Robertus Potting.



Brilho no núcleo do reactor TRIGA

(<http://triga.ga.com/45years.html>)



Deteção de neutrinos

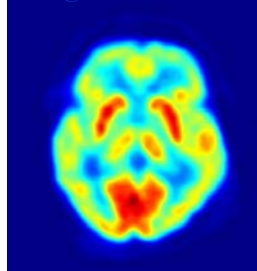
Tomografia de emissão de positrões

- A **Tomografia de Emissão de Positrões (PET)** é um exame imagiológico da medicina nuclear que utiliza radionuclídeo que emitem um positrão aquando da sua desintegração, o qual se aniquila com um electrão dos tecidos através da emissão de dois fótons gama que se propagam em direcções opostas, sendo detectados e usados para formar imagens 3D da região em análise.

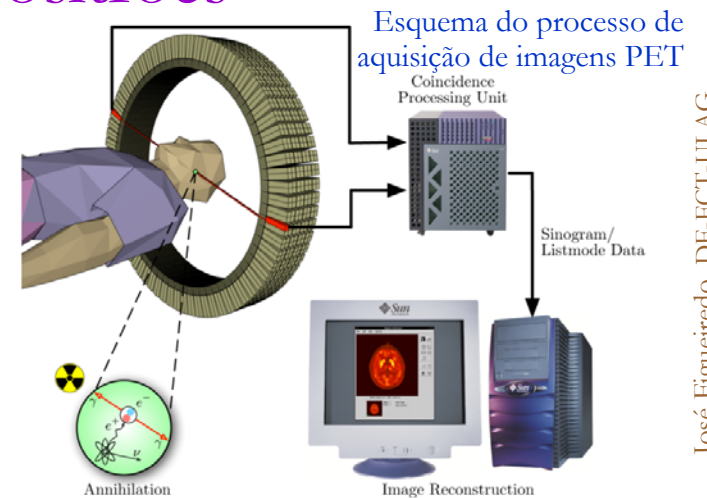
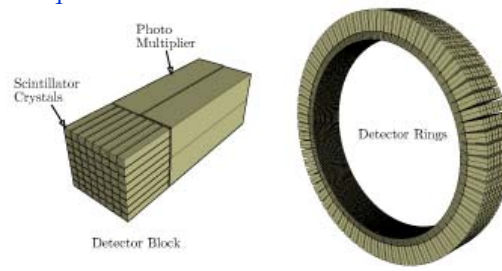
Equipamento PET



Imagem PET



Esquema do detector PET



Problemas propostos (5)

IFQR 2005-2006

Apunhado para Introdução à Teoria da Relatividade; versão 001 (a melhor)

1. Um pulso de laser é enviado da Terra para a Lua. Qual deveria ser a velocidade de uma nave espacial que vai da Terra para a Lua para que o astronauta observasse a saída do pulso da Terra e a sua chegada à Lua como acontecimentos simultâneos?
2. Uma nave tem a velocidade $0,9c$ em relação à Terra. Qual deve ser a velocidade em relação à Terra de uma outra nave que deseja ultrapassá-la com uma velocidade de $0,5c$ relativa a ela? Sol.: $0,9665c$.
3. No referencial R são observados dois eventos A ($x_1=1, y_1=y_0, z_1=z_0, ct_1=2$) e B ($x_2=5, y_2=y_0, z_2=z_0, ct_2=1$). Determine a velocidade do referencial R', que se move ao longo do eixo x , no qual os eventos são simultâneos. Sol.: $u=-c/4$.
4. Uma linha espectral de uma galáxia distante é observada, verificando-se um desvio de 5% em relação à mesma linha observada no laboratório. Qual é a velocidade de afastamento da galáxia em relação à Terra?
5. Um avião, dirigindo-se para um aeroporto, envia um sinal pelo radar e recebe o sinal reflectido na antena do aeroporto, com um aumento fraccionário $\Delta v/v = 6,6 \times 10^{-7}$. Qual é a velocidade do avião? Sol.: 712 km/h.
6. Um motorista atravessou um sinal vermelho e depois alegou ao polícia ter visto o sinal verde devido ao efeito de Doppler. O polícia, com formação em Física, multou-o por excesso de velocidade. Supondo que o motorista tenha falado a verdade, qual seria a sua velocidade?
7. Um feixe de electrões atravessa um material transparente de índice de refração $n=1,4$. Observa-se a radiação de Cherenkov numa direcção que forma um ângulo de 39° com a direcção do feixe. Calcule a energia cinética dos electrões. Sol.: 0,785 MeV.
8. Com que rapidez uma partícula se deve mover para que a sua energia cinética iguale a sua energia de repouso?
9. Qual é o momento de uma partícula cuja massa relativista é quatro vezes a sua massa em repouso? Sol.: $3,87m_0c$.
10. Um muão (vida média $T=2,2$ us e massa em repouso $m=105,7$ MeV/ c^2) tem energia cinética de 50 MeV no referencial do laboratório. Calcule a energia total, o momento do muão e a distância percorrida no laboratório durante a vida média. Sol.: $p=114,3$ MeV/ c , $d=713$ m.
11. Partículas de raios cósmicos podem atingir energias da ordem de 10^{13} MeV (calcule esta energia em joules). Qual é o tempo próprio que uma partícula estável, com essa energia, leva para atravessar a nossa galáxia, cujo diâmetro mede cerca de 10^5 anos-luz? (A energia máxima obtida num acelerador de partículas é da ordem de 10^3 GeV.)
12. Um protão cujo momento é 800 MeV/ c colide com um protão em repouso. Qual é a velocidade do centro de massa do sistema?
13. Um neutrino incide num protão e gera um neutrão e um positrão. Qual é o limiar de energia do neutrino para que isso ocorra? Sol.: 1,81 MeV.



<http://archive.ncsa.uiuc.edu/Cyberia/Cosmos/CosmicMysteryTour.html>
<http://archive.ncsa.uiuc.edu/Cyberia/Cosmos/CosmosCompHome.html>
http://archive.ncsa.uiuc.edu/Cyberia/Expo/cosmos_nav.html

«A matéria diz ao espaço-tempo como curvar e o espaço-tempo diz à matéria por ‘onde andar’». Adaptado de John Wheeler.

Introdução à Teoria da Relatividade Geral

(uma revolução só está completa quando é geral)

(uma revolução verdadeira não produz “ditadores”)

Bibliografia:

- *Teoria da Relatividade Especial*, Cap. 3 (3.7), 5 (5.4), 7, Ramayana Gazzinelli, Editora Edgard Blücher, Brasil 2005.
- *Subtil é o senhor - Vida e pensamento de Albert Einstein*, A. Pais, Gradiva 1993.
- *O Princípio da Relatividade*, H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski (Tradução do original alemão pelo Prof. Manuel dos Reis), Fundação Calouste Gulbenkian, 1971
- *Tempo & Espaço*, Visual Ciências, Verbo, 1994.
- *O passado e o presente do Cosmos*, Scientific America Brasil, Edição espacial nº1, 2003.
- *O Annus Mirabilis de Einstein* - cinco artigos que revolucionaram a Física, John Stachel, Gradiva, 2005.

“O pensamento mais feliz da minha vida”

- Nesta secção pretende-se completar o estudo da teoria da relatividade com a exposição dos princípios físicos da teoria geral e apresentar alguns testes experimentais que auxiliam a compreensão dos seus fundamentos. Não é possível nesta disciplina tratar a **teoria da relatividade geral** (TRG) em detalhe. Ao contrário da teoria restrita, que pode ser estudada com conhecimentos matemáticos relativamente simples, estando, por exemplo, incluída nos novos programas do 12º ano, a relatividade geral requer conhecimentos avançados de geometria diferencial (análise tensorial). Nas palavras de Einstein, a matemática dos problemas da TRG é tão complicada, que faz a teoria da relatividade restrita parecer uma brincadeira de crianças. Assim, pretende-se satisfazer, parcialmente, a possível curiosidade dos alunos com respeito às consequências desta área da Física.
- Na teoria da relatividade restrita são considerados apenas referenciais inerciais, não sendo encarada a gravitação. Segundo Einstein, uma das ideias básicas que o levaram a **incorporar a gravidade na teoria da relatividade** surgiu em 1907 enquanto preparava um artigo de revisão sobre a relatividade restrita:

“Quando, em 1907, trabalhava num artigo de revisão sobre a teoria da relatividade restrita ... tive também de tentar modificar a teoria newtoniana da gravitação de modo que as respectivas leis se enquadrassem na teoria (da relatividade restrita) ... Então ocorreu-me o **«glücklichste Gedanke meines Lebens», o pensamento mais feliz da minha vida**, da seguinte forma: o campo gravitacional tem apenas uma existência relativa, de algum modo semelhante ao campo eléctrico gerado por indução magnetoeléctrica. **Porque para um observador que cai livremente do telhado de uma casa não existe - pelo menos no ambiente imediato - campo gravitacional.** Na realidade, se o observador deixar cair alguns corpos, estes permanecerão, em relação a ele, em estado de repouso ou de movimento uniforme, independentemente de própria natureza física ou química (nestas considerações a resistência do ar é, evidentemente, ignorada). O observador, por conseguinte, tem o direito de interpretar o seu estado como sendo ‘de repouso’.

Devido a esta ideia, a extraordinariamente peculiar lei experimental de que no campo gravitacional todos os corpos caem com a mesma aceleração atingiu imediatamente um significado físico profundo. Nomeadamente, se existisse um objecto que caísse de um modo diferente dos outros num campo gravitacional, então, através dele, o observador poderia concluir que se encontrava num campo gravitacional e caindo nesse campo. Se, no entanto, tal objecto não existe - como a experiência mostra com grande precisão -, então o observador carece de um método objectivo de se aperceber de que está, ele próprio, a cair num campo gravitacional. Pelo contrário, tem o direito de considerar o seu estado como de repouso e o seu ambiente como de ausência de campo no que respeita à gravitação.

A experimentalmente conhecida independência da aceleração da queda em relação à matéria é, conseqüentemente, um argumento poderoso para a necessidade de o postulado da gravitação ser generalizado a sistemas de coordenadas que, relativamente uns aos outros, estão em movimento não uniforme.” [Pais, 224-225]

- **O principal campo de aplicação da teoria da relatividade geral é a cosmologia** [estudo das leis gerais do Universo e da sua constituição de conjunto, tanto do ponto de vista positivo (cosmologia científica); (astr.) ramo da astronomia que se ocupa das características físicas globais do Universo (Do gr. *kosmología*, «tratado das leis finais que regem o mundo»)]

Matemática da relatividade geral

IFQR 2005-2006

Apanhado para Introdução à Teoria da Relatividade; versão 001 (a melhorar)

- Os sistemas de coordenadas (sistemas de coordenadas cartesianos, esféricas, cilíndricas, etc.) usualmente usados na Física Clássica para descrever os sistemas físicos, não são gerais o bastante para lidarem com as alterações da geometria do espaço-tempo. Apenas tiram partido das simetrias dos problemas e ajudam a simplificar as soluções. Na Relatividade Geral é necessário considerar transformações de coordenadas que incorporem a curvatura do espaço-tempo.
- O Cálculo Tensorial, desenvolvido pelo matemático Tullio Levi-Civita, baseando-se nos trabalhos anteriores de Hamilton, Riemann e Gregorio Ricci, permite este tratamento. Einstein assimilou estes conceitos directamente de Levi-Civita. Com esta nova ferramenta, pode-se generalizar o cálculo de intervalos do espaço-tempo, introduzindo o tensor métrico g_{ij} para o espaço-tempo: $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$. Ao contrário do que acontece no espaço-tempo plano, no espaço-tempo curvo, os elementos do tensor métrico são funções das coordenadas espaço-temporais que contêm informações sobre a geometria local. O Tensor métrico, peça fundamental da teoria da Relatividade Geral, é um tensor simétrico, isto é $g_{ij} = g_{ji}$, o que significa que em vez de termos 16 componentes g_{ij} , apenas 10 componentes são independentes.
- A vantagem do cálculo tensorial é permitir escrever qualquer equação de uma forma independentemente do sistema de coordenadas utilizado. O tensor métrico possui informações não só sobre como se calculam as distâncias, mas como se realizam outras operações geométricas em espaços curvos, como o transporte paralelo de vectores e outros objectos matemáticos. É através dele que se obtém a expressão para a curvatura do espaço-tempo e se obtém o tensor de Einstein, G_{ij} , utilizado na equação da Relatividade Geral, que resume a interacção da geometria com a matéria:

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{2}g_{ij} + \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij}$$

Hilbert obteve as “mesmas” equações, de forma independente, na mesma altura.

G_{ij} é o tensor de Einstein, R_{ij} são as componentes do tensor de curvatura de Ricci, R é a curvatura escalar, Λ é a constante cosmológica, T_{ij} são as componentes do tensor de tensão-energia que descreve a matéria e a energia num dado ponto do espaço-tempo e G é a constante de gravitação (a mesma da lei de Newton da gravidade). O tensor de Ricci e a curvatura escalar são derivados do tensor métrico (ver ao lado uma expressão do tensor R_{ij}).

$$R_{\eta\eta} = -\frac{2a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \cot \theta}{\delta \psi} + \frac{2ac \frac{\partial \psi}{\partial r} \cot \theta}{\delta \psi} + \frac{a \frac{\partial c}{\partial r} \cot \theta}{\delta} - \frac{\frac{\partial a}{\partial r} c \cot \theta}{2\delta} - \frac{a \frac{\partial a}{\partial r} \cot \theta}{2\delta} - \frac{2a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}}{\delta \psi^2} - \frac{2a^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^2}{\delta \psi^2} + \frac{4ac \frac{\partial c}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\delta \psi^2} - \frac{a^2 \frac{\partial d}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\delta d \psi} + \frac{ac \frac{\partial d}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\delta d \psi} + \frac{2a \frac{\partial c}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\delta \psi} - \frac{\frac{\partial a}{\partial r} c \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\delta \psi} - \frac{3a \frac{\partial a}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\delta \psi} - \frac{2a^2 c \frac{\partial c}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\delta^2 \psi} + \frac{2a^2 b \frac{\partial c}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\delta^2 \psi} - \frac{a^2 \frac{\partial b}{\partial r} c \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\delta^2 \psi} - \frac{a \frac{\partial a}{\partial r} b c \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\delta^2 \psi} + \frac{a^3 \frac{\partial b}{\partial r} \frac{\partial c}{\partial r}}{\delta^2 \psi} + \frac{a^2 \frac{\partial a}{\partial r} b \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\delta^2 \psi} - \frac{2ab \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}}{\delta \psi} - \frac{2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}}{\psi} + \frac{4ac \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta}}{\delta \psi} - \frac{2ab \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^2}{\delta \psi^2} + \frac{6 \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^2}{\psi^2} + \frac{ac \frac{\partial d}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\delta d \psi} - \frac{ab \frac{\partial d}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\delta d \psi} - \frac{2c \frac{\partial c}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\delta \psi} + \frac{\frac{\partial a}{\partial r} c \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\delta \psi} - \frac{2a \frac{\partial b}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\delta \psi} + \frac{\frac{\partial a}{\partial r} b \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\delta \psi} + \frac{2a^2 b \frac{\partial c}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\delta^2 \psi} - \frac{2abc \frac{\partial c}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\delta^2 \psi} - \frac{a^2 \frac{\partial b}{\partial r} c \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\delta^2 \psi} - \frac{a \frac{\partial a}{\partial r} b c \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\delta^2 \psi} + \frac{a^2 b \frac{\partial b}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\delta^2 \psi} + \frac{a \frac{\partial a}{\partial r} b^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\delta^2 \psi} + \frac{a \frac{\partial c}{\partial r} \frac{\partial d}{\partial r}}{2\delta d} - \frac{\frac{\partial a}{\partial r} c \frac{\partial d}{\partial r}}{4\delta d} - \frac{a \frac{\partial a}{\partial r} \frac{\partial d}{\partial r}}{4\delta d} - \frac{\frac{\partial^2 d}{\partial r^2}}{2d} + \frac{\left(\frac{\partial d}{\partial r}\right)^2}{4d^2} - \frac{c \frac{\partial c}{\partial r} \frac{\partial d}{\partial r}}{2\delta d} + \frac{\frac{\partial a}{\partial r} c \frac{\partial d}{\partial r}}{2\delta d} - \frac{\frac{\partial a}{\partial r} \frac{\partial d}{\partial r}}{d} + \frac{a \frac{\partial^2 c}{\partial r \partial \theta}}{\delta} - \frac{a \frac{\partial^2 a}{\partial r^2}}{2\delta} - \frac{a \frac{\partial^2 a}{\partial r^2}}{2\delta} + \frac{ac \frac{\partial c}{\partial r} \frac{\partial c}{\partial r}}{\delta^2}$$

- As soluções da equação de Einstein são obtidas a partir de uma determinada métrica. A primeira solução exacta para esta equação foi proposta por Karl Schwarzschild na chamada Métrica de Schwarzschild, e é a solução para o caso de uma massa esférica estacionária (massa sem rotação). Esta foi também a primeira solução na qual se obtiveram buracos negros como parte do resultado.
- Propor uma métrica correcta é uma parte importante e difícil do problema. Eis algumas das soluções conhecidas da Equação de Einstein: i) Métrica de Schwarzschild; ii) Métrica de Kerr, que descreve o caso de uma massa em rotação; iii) Métrica de Reissner-Nordstrom, para o caso de uma métrica esférica com carga eléctrica; iv) Métrica de Kerr-Newman, para o caso de uma massa girante com carga eléctrica; v) Métrica Friedmann-Robertson-Walker (FRW), usada em cosmologia como modelo de um **universo em expansão**; vi) Métrica de ondas-pp que descreve vários tipos de **ondas gravitacionais**; vii) Métrica de “Wormholes”, ou buracos de minhoca, usada para descrever viagens no tempo.
- As soluções i), ii), iii) e iv) incluem buracos negros como parte da solução.
- Ver, por exemplo, <http://scienceworld.wolfram.com/physics/topics/FieldEquationsSolutions.html>

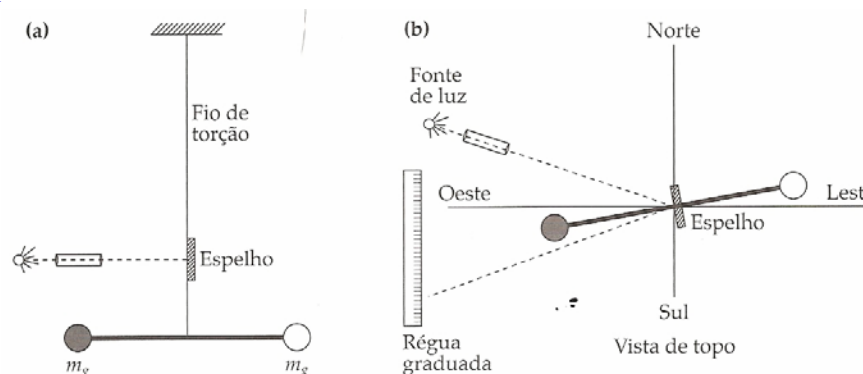
Igualdade entre massa inercial e massa gravitacional

- No *Discurso sobre as duas novas ciências*, Galileu refere que no ar “a variação na rapidez entre esferas de ouro, cobre, mármore e outros materiais «pesados», numa queda de cem cúbitos, é tão pequena que a esfera de ouro não se adiantaria em relação à de cobre não mais do que quatro dedos. Tendo observado isso, concluí que, num meio totalmente sem resistência, todos os corpos caem com a mesma rapidez.”
- A afirmação acima traduz, na linguagem científica, a lei da queda dos graves: os corpos apenas sujeitos à gravidade caem com a mesma aceleração, i.e., o movimento de qualquer partícula de prova em queda livre é independente de sua constituição e estrutura. (Considera-se uma *partícula de prova* para assegurar que o corpo deve ser suficientemente pequeno para que a heterogeneidade do campo gravitacional no seu interior possa ser desprezada durante o seu movimento.
- A lei da gravitação universal de Newton estabelece que a grandeza força de atracção gravitacional entre duas partículas de prova é directamente proporcional ao produto das suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância d que separa os seus centros: $F_g = Gm_1m_2/d^2$.
- A segunda lei da dinâmica para uma partícula de prova, na versão newtoniana toma a forma $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.
- Ter em atenção que as grandezas $m_{1,2}$ e m_i são correspondem a entidades físicas diferentes: as primeiras denominam-se massas gravitacionais e a segunda chama-se massa inercial (mede a resistência da partícula à alteração do seu estado de movimento). Para todos os corpos, verifica-se que há, dentro da precisão experimental e por uma escolha conveniente de unidades, uma coincidência notável, entre a massa gravitacional e a massa inercial: os valores das duas massas são iguais. Ter presente, que tanto a Mecânica como a teoria da gravitação de Newton funcionariam perfeitamente bem mesmo que estas duas grandezas tivessem valores distintos. De facto, a massa gravitacional podia ser, como a carga eléctrica, independente da massa inercial.
- Considerem-se dois corpos com massas inerciais m_{i1} e m_{i2} , e massas gravitacionais m_{g1} e m_{g2} em queda livre, partindo da mesma altura. Sobre cada corpo actua a força da gravidade $F_g = GM_T m_g / d^2$, onde M_T e d são a massa e a distância do centro do corpo ao centro da Terra. Pela segunda lei de Newton $F_i = m_i a$, verificando-se $m_i a = -GM_T m_g / d^2$: corpo 1, $m_{i1} a_1 = -GM_T m_{g1} / d^2$; corpo 2, $m_{i2} a_2 = -GM_T m_{g2} / d^2$. Dividindo as duas equações membro a membro, obtém-se: $(m_{i1} a_1) / (m_{i2} a_2) = m_{g1} / m_{g2}$. Tendo em conta a lei da queda dos graves de Galileu, $a_2 = a_1$, resultando $m_{i1} / m_{i2} = m_{g1} / m_{g2}$: a razão das massas inerciais dos corpos é igual à razão das respectivas massas gravitacionais. Uma escolha adequada das unidades das duas grandezas, permite que a razão seja igual a 1, fazendo com que os valores das massas inerciais e gravitacionais sejam iguais.
- O princípio da igualdade entre as massas inerciais e gravitacionais é designado princípio de equivalência (de Galileu).

Consequência da igualdade das massas inercial e gravitacional

▪ Várias experiências têm sido efectuadas para verificar a validade do princípio de equivalência de Galileu. Referimos as mais relevantes

▪ Experiência de Eötvös com o pêndulo de torção, 1889: experiência feita à latitude de 45° , usando duas esferas de igual massa gravitacional mas de materiais diferentes, suspensas numa balança de torção cujo braço é orientado na direcção este-oeste. Devido à rotação da Terra, as forças a que as esferas ficariam sujeitas deveriam ser diferentes se as massas inerciais fossem diferentes (ter em atenção que os materiais são diferentes), e o momento da resultante das forças provocaria uma torção do fio de suspensão. A leitura da torção é feita com um sistema óptico muito sensível.



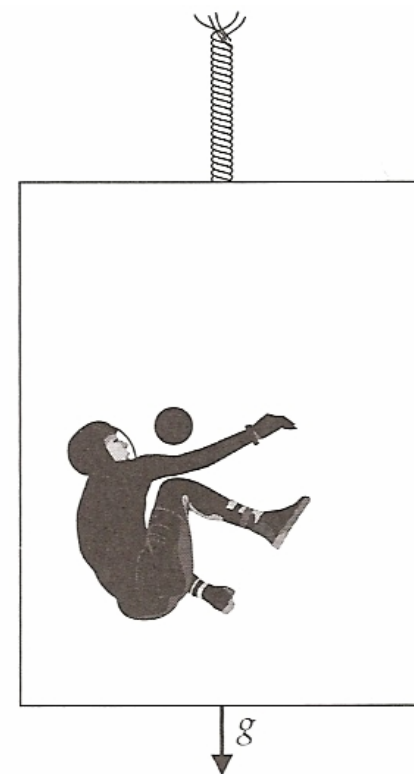
▪ Contudo, nenhuma torção foi observada, com a precisão de 5 partes em 10^8 . Esta experiência foi mais tarde repetida, novamente com resultado negativo.

▪ Em 1964, Dicke *et al*, usando uma versão modificada da experiência de Eötvös em que se mediu as acelerações das massas de prova relativamente ao Sol, obtiveram o mesmo resultado negativo com a precisão de 1 parte em 10^{11} .

▪ Recentemente, o princípio de equivalência foi testado pela comparação das acelerações da Lua e da Terra em direcção ao Sol, utilizando medidas muito precisas da distância Terra-Lua (precisão de ~ 2 cm, obtida por reflexão de um feixe laser, enviado da Terra, em espelhos colocados na superfície da Lua [Nature 347, pp. 261-263, 1990]).

▪ Considere-se um elevador, cujo cabo de suspensão é cortado, em queda livre. Um observador dentro do elevador deixa de sentir a reacção do chão do elevador e verifica que a força da gravidade deixou de existir na sua vizinhança, porque se deixar cair um objecto, observará que este não se move relativamente a ele (como consequência da equivalência das massas gravitacional e inercial).

▪ Nenhuma experiência de mecânica realizada dentro do elevador será capaz de indicar o movimento do elevador. O elevador em queda livre é equivalente, para experiências de mecânica, a um elevador fora de qualquer influência gravitacional: dentro do elevador os fenómenos decorreriam como se o elevador fosse um referencial inercial. É este o caso da estação espacial internacional, que pode ser considerado um referencial inercial em relação às estrelas.



Princípio da equivalência e laboratórios locais

É possível criar condições experimentais semelhantes a um campo gravítico, acelerando um referencial (por exemplo o elevador do caso anterior fora de qualquer influência gravitacional). Seja um astronauta de massa m num foguetão em repouso na plataforma de lançamento b). O astronauta pode verificar a acção que exerce no chão do foguetão através de uma balança de mola, medindo mg . Se o foguetão for levado para uma região do espaço onde se pode considerar nulo o campo gravítico, e se deslocar nessa região com movimento uniforme, a acção que o astronauta exercerá no pavimento do foguetão será nula (o astronauta e todos os corpos no interior do foguetão estarão em imponderabilidade). Contudo, se o mesmo foguetão for acelerado com uma aceleração g , o astronauta e todos os corpos “livres” no seu interior são compelidos contra as paredes do foguetão, exercendo nelas forças iguais a $-mg$. A acção do astronauta no pavimento é também igual a mg .

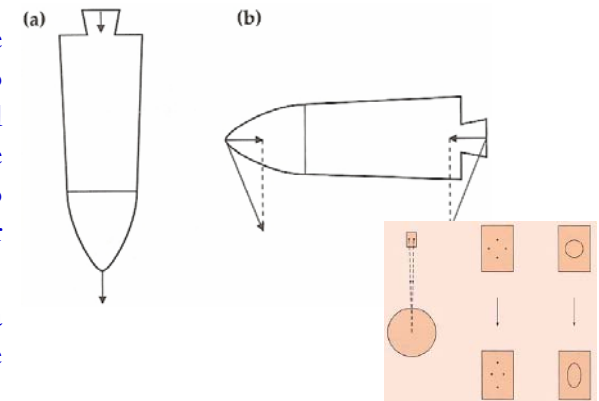
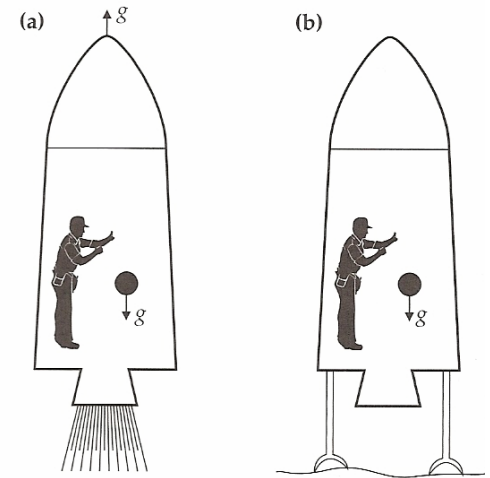
As duas situações, um foguetão em repouso num campo gravitacional e um foguetão em movimento uniformemente acelerado numa região fora da influência de qualquer campo gravitacional, são mecanicamente equivalentes. O astronauta será incapaz, através de experiências de mecânica, de concluir se o foguete está acelerado ou está sob a influência de um campo gravitacional com aceleração devida à gravidade g .

Da mesma forma que generalizou o princípio da relatividade de Galileu na relatividade restrita, Einstein generalizou o princípio de equivalência de Galileu, postulando o seguinte princípio da equivalência: “um laboratório local, não-girante, em queda livre, é equivalente, para a realização de qualquer experiência física, a um referencial inercial numa região do espaço sem gravidade.” Esta equivalência torna aplicável neste referencial em queda livre, referencial inercial, a teoria da relatividade restrita: as leis da física válidas num laboratório local em queda livre são as leis da relatividade restrita.

Laboratório local: laboratório que abrange apenas a vizinhança imediata do experimentador, de forma a que nas regiões em apreço o campo gravítico se possa considerar homogéneo, pois só um campo homogéneo pode ser anulado por uma escolha conveniente do referencial. Por exemplo, num referencial em queda livre suficientemente amplo para abranger a região de Faro a Sagres, se o campo gravítico fosse anulado em Faro não seria anulado em Sagres, pois em Sagres o campo gravítico tem direcção ligeiramente diferente da que tem em Faro. A situação «pioraria» se o referencial local abrangesse, por exemplo, toda a Europa.

Em referenciais não-locais podem surgir forças de maré: por exemplo, num objecto longo em queda livre num campo gravítico não uniforme a força da gravidade na parte mais próxima da fonte do campo é superior à força da gravidade na parte mais afastada, e o objecto é esticado a).

Se o objecto cair com a sua maior dimensão na direcção perpendicular ao campo, as forças gravitacionais nos dois extremos têm componentes ao longo do comprimento do objecto, com sentido opostos, que comprimem o objecto. Estas forças de maré são muito significativas em campos gravitacionais fortes, como no caso dos campos gravitacionais criados por buracos negros b).

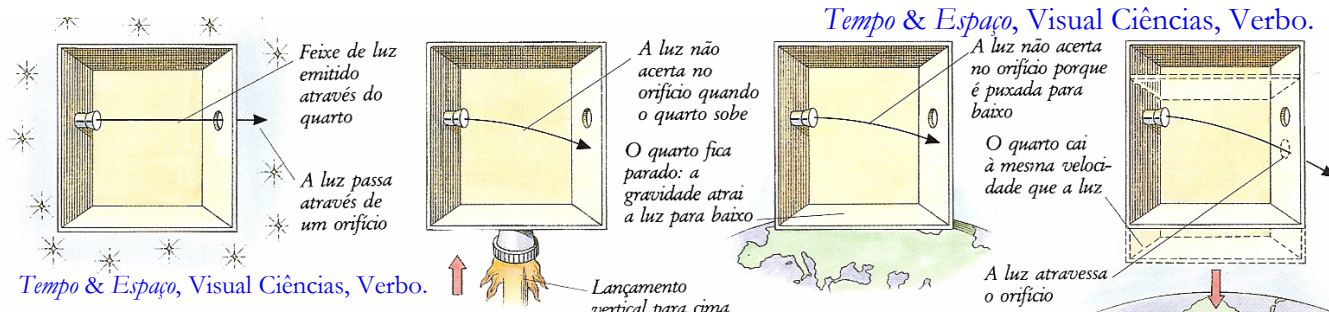


PE e a curvatura da luz num campo gravitacional

■ Imaginemos uma experiência conceptual. Um *quarto* a deslocar-se com velocidade uniforme na ausência de qualquer campo gravitacional. Numa parede do *quarto* está um emissor de luz que emite na direcção perpendicular ao movimento do quarto, do lado oposto, em frente à fonte de luz, a parede tem um buraco que permite que a luz se escape do quarto (ver figura da esquerda). Para um observador no quarto a luz propaga-se paralelamente ao chão.

■ Quando o *quarto* acelera (por exemplo, em queda livre), um observador no referencial do *quarto* vê a luz atrasando-se relativamente ao chão. Contudo, um observador fixo na superfície da Terra, vê a luz a curvar-se no sentido oposto ao da aceleração (ou no sentido do campo gravítico). O movimento da luz é composto: a trajectória é uma parábola (uma combinação do movimento uniforme da luz - linear com o tempo - como o movimento acelerado (ou de queda livre) - quadrático com o tempo.

■ É claro que o desvio do pulso de luz nessa experiência seria imperceptível porque a velocidade da luz é muito mais elevada que a componente da velocidade na direcção do movimento. Este efeito já era previsto pelas teorias da gravitação e corpuscular da luz. Em 1801, **Johann von Soldner** previu que os «raios» de luz que passassem rasantes ao Sol sofreriam uma deflexão de 0,84" de arco ($\alpha = 2GM/\Delta c^2$). Estranho? Relembrar a lei da queda dos graves de Galileu. Em 1911/3, os cálculos de Einstein indicavam que os raios provenientes dessas estrelas deviam ser deflectidos de 0,83" de arco pela gravidade do Sol (o valor obtido classicamente), sugerindo que este desvio da luz poderia ser verificado através de observações astronómicas, e propondo que durante um eclipse solar total fosse analisadas estrelas cujos «raios» de luz passassem rasantes ao Sol. Contudo, antes desta verificação ser possível, Einstein corrigiu o resultando (em 1914). De acordo com a nova previsão, os raios provenientes dessas estrelas deviam ser deflectidos de 1,75" de arco. O fenómeno foi observado pela primeira em Sobral (Brasil) e na Ilha do Príncipe, situadas na faixa de sombra total de um eclipse total em 1919, confirmando o valor previsto pela TRG. Esta corroboração tornou Einstein mundialmente famoso. ($\alpha = 4GM/\Delta c^2$, $\Delta_{\text{Sol}} \sim 7 \times 10^8$ m, $M_{\text{Sol}} \sim 2 \times 10^{30}$ kg.)



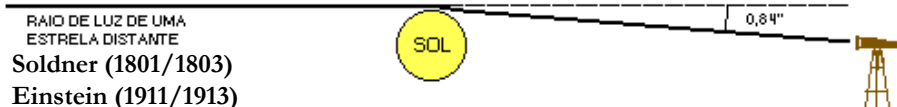
Tempo & Espaço, Visual Ciências, Verbo.

QUARTO FLUTUANTE
Einstein compreendeu que a aceleração e a gravidade são equivalentes. Num quarto fechado, longe da acção de grandes massas, e portanto longe da acção da gravidade, a luz «flutua» livremente no espaço descrevendo uma linha recta ao atravessar o quarto, e sai por um pequeno orifício da parede. Se se encontrassem astronautas neste quarto, eles estariam em queda livre.

O QUARTO ACELERA DESLOCANDO-SE PARA CIMA
Se o quarto for acelerado pelo motor de um foguetão, os astronautas imaginários cairão no chão, como se tivessem peso. O quarto acelera em sentido ascendente durante o tempo que a luz leva a atravessá-lo e, como tal, o feixe de luz é desviado para baixo, não acertando no orifício da parede, uma vez que a alcança mais abaixo.

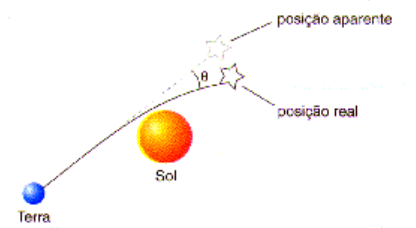
QUARTO ATRAÍDO POR UM PLANETA
Se o mesmo quarto se encontrar em repouso na superfície da Terra, os astronautas também caem no chão. A gravidade «puxa» a luz para baixo à medida que esta atravessa o quarto e, como tal, o feixe de luz não passa através do orifício da parede, alcançando-a mais abaixo. A luz é desviada devido à acção da gravidade.

QUARTO EM QUEDA LIVRE
Quando o mesmo quarto cai livremente no campo da gravidade terrestre, os astronautas não sentem o seu peso. O feixe de luz sofre um desvio devido à gravidade, mas apenas na medida exacta para que passe através do orifício. Parece viajar a direito através do quarto.



■ Outras observações de desvios da radiação electromagnética por campos gravíticos têm sido efectuadas, estando sempre em acordo com a teoria.

Verificações da curvatura da luz num campo gravitacional



14-10-1913

Figura 17

Zürich, 14. X. 13.

Ans
Hoch geehrter Herr Kollege!

Eine einfache theoretische Überlegung macht die Annahme plausibel, dass Lichtstrahlen in einem Gravitationsfelde eine Deviation erfahren.

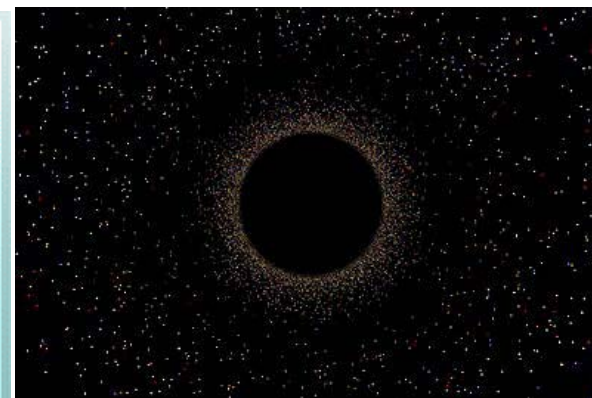
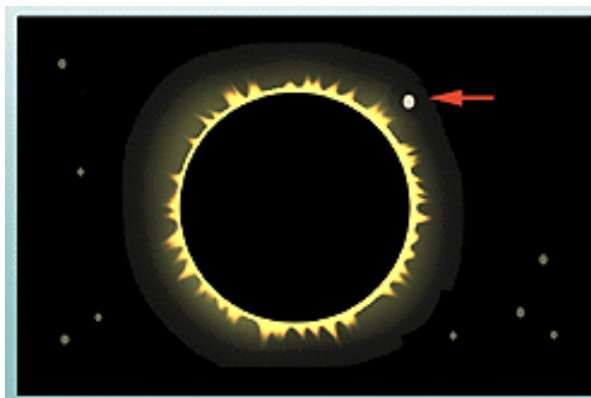
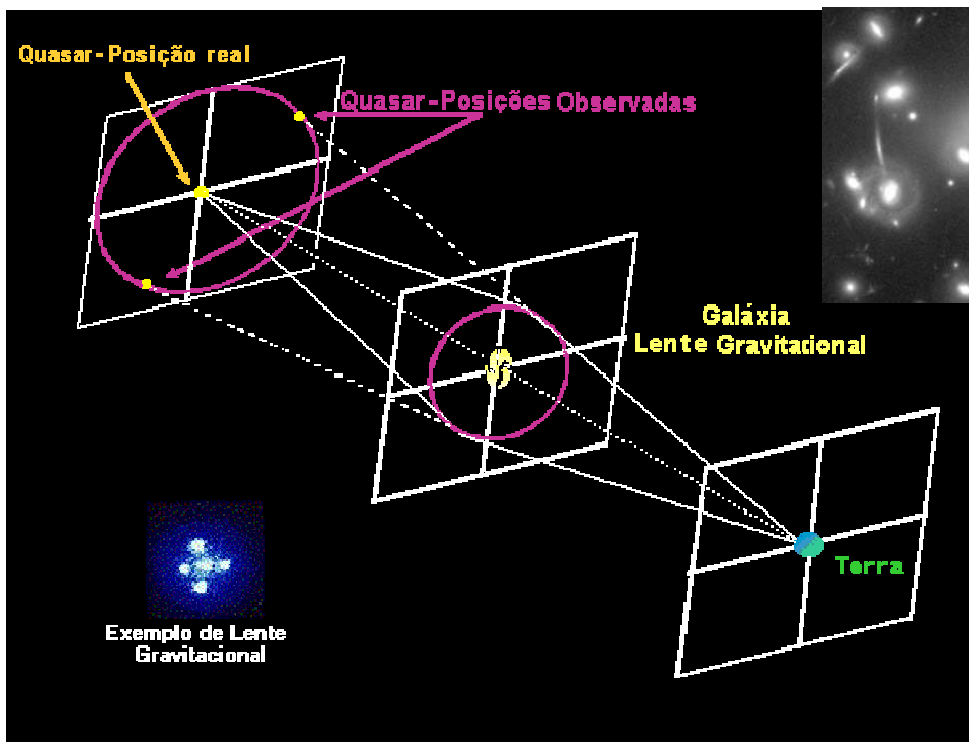
grav. Feld
Lichtstrahl

An Sonnensande müsste diese Ablenkung $0,84''$ betragen und wie $\frac{1}{R}$ abnehmen (R = Sonnenradius).

$- 0,84''$

Sonne

Es wäre deshalb von grösstem Interesse, bis zu wie grosser Sonnen-nähe gewisse Fixsterne bei Anwendung der stärksten Vergrösserungen bei Tage (ohne Sonnenfinsternis) gesehen werden können.

Quasar-Posição real

Quasar-Posições Observadas

Galáxia Lente Gravitacional

Terra

Exemplo de Lente Gravitacional

- Um ângulo de $0,84''$ corresponde, mais ou menos, ao ângulo segundo o qual veria os dois pontos ao lado (:) se olhasse para eles de uma distância de 100 metros. Sem o recurso à fotografia, que foi inventada em 1830, esta comparação seria praticamente impossível.

Dilatação gravitacional do tempo

Apunhado para Introdução à Teoria da Relatividade; versão 001 (a melhorar) IFQR 2005-2006

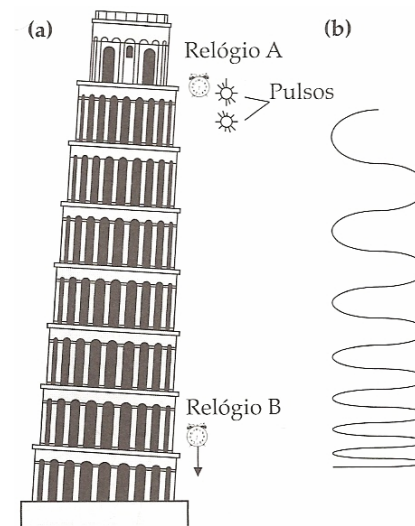
▪ A dilatação gravitacional do tempo é uma consequência do PE que pode ser explicada com uma experiência conceptual, proposta por Einstein. Imagine um relógio atômico A , que emite pulsos de luz com frequência muito elevada, colocado no topo de uma torre, e um relógio idêntico B , colocado no segundo andar. Cada um deles, marca como flui o tempo na sua posição. Quando o relógio A emite um pulso, deixa-se que caia livremente. Ao emitir o pulso seguinte, ele terá percorrido uma distância quase imperceptível, de modo que o intervalo entre os dois pulsos mostrará ainda como corre o tempo no topo da torre. Quando o primeiro pulso chega ao relógio B , deixa-se também que este caia livremente e, quando o segundo pulso o atingir, ele terá percorrido também uma distância imperceptível, de modo que ainda indicará o correr do tempo no segundo piso. Como os dois relógios estão em queda livre podem ser considerados como pertencentes a referenciais inerciais, por causa do PE, e a TRG pode ser aplicada. Como A iniciou a queda antes de B , a sua velocidade é sempre superior à do B , *aproximando-se*, portanto, deste. Assim, no referencial de B a luz proveniente de A será observada com um desvio Doppler para o violeta, isto é, com frequência mais alta. Como A e B medem o decorrer do tempo no topo e no segundo piso, respectivamente, isso significa que o tempo flui mais lentamente no segundo andar do que no topo da torre, ou seja: a **gravidade dilata o tempo**.

▪ A dilatação gravitacional do tempo, discutida na experiência imaginária acima, foi confirmada em várias experiências em que foram comparados relógios atômicos colocados a diferentes altitudes em relação ao nível do mar. Uma das mais precisas foi realizada em 1976 pelo Observatório Astrofísico Smithsonian (EUA): um oscilador maser foi enviado num foguete a uma altitude de 10 000 km e foram feitas comparações da frequência dos pulsos com a frequência dos pulsos de um oscilador idêntico colocado no laboratório terrestre. Pela TRG, na altitude máxima, o relógio do foguete deveria ter uma rapidez de 4,5 partes em 10^{10} superior à do relógio terrestre. A concordância com a previsão da teoria foi de 0,01%.

▪ “Aplicação” tecnológica das “dilatações” do tempo: Sistema Global de Posicionamento (GPS).

▪ O sistema GPS utiliza uma rede de 24 satélites, a cerca de 20 200 km, que permite determinar a posição de um ponto na Terra com grande precisão, medindo a posição desse ponto em relação a vários desses satélites. Estas distâncias são obtidas a partir do tempo que a luz demora a percorrer o espaço que os separa. Para que se atinja a precisão necessária usam-se relógios atômicos. Como o satélite se encontra vários milhares de km da superfície da Terra e a sua velocidade orbital é significativa, é necessário compensar os efeitos relativistas na medidas dos tempos.

▪ Para compensar o adiantamento dos relógios colocados nos satélites (2 de rubídio e 2 de césio) em relação os relógios à superfície da Terra, os relógios atômicos dos satélites são sincronizados de forma a que um segundo no satélite corresponda a um maior número de transições atômicas.



O intervalo de tempo entre dois eventos medido numa região onde existe um campo gravitacional $\Delta T(R)$, R é a distância à superfície da fonte de campo, e o intervalo de tempo entre os mesmos eventos medido numa região onde não existe campo gravitacional, $\Delta T(R=\infty)$, relacionam-se da forma seguinte:

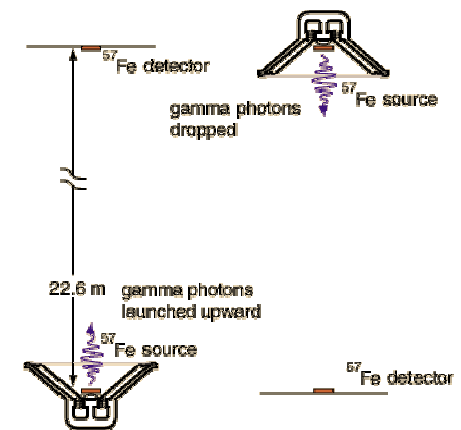
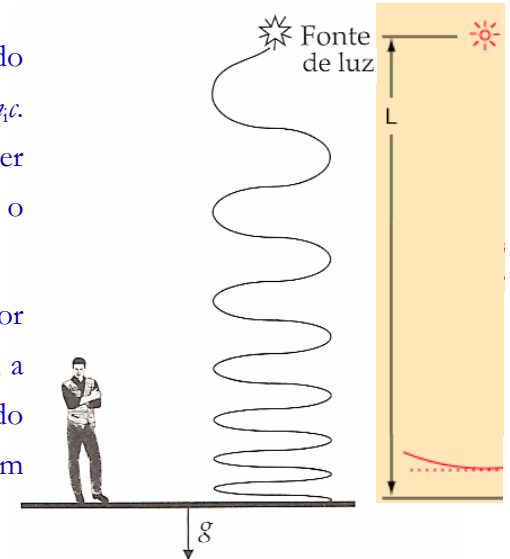
$$\Delta T(R) = \Delta T(\infty) \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}$$

Na superfície da Terra :

$$\Delta T(R) = \Delta T(\infty) \sqrt{1 - \frac{2gR}{c^2}}$$

A massa gravitacional da luz

- Terá o fóton *massa gravitacional*? As experiências parecem indicar que o fóton tem massa gravitacional. Aquando do estudo da dinâmica relativista, concluiu-se que se podia atribuir massa inercial ao fóton, $m_i \equiv E/c^2$, e momento $p = m_i c$. A *massa inercial* m_i é a massa correspondente à energia E do fóton, de acordo com a equação de Einstein. Ter presente que um fóton desloca-se sempre com velocidade c e, portanto, a sua «massa de repouso» m_0 é nula. Se o fóton tem massa inercial, deverá ter também massa gravitacional. Como referido, existem evidências que assim é.
- Considere-se um observador situado num laboratório onde a aceleração devida à gravidade é g . O observador analisa um feixe de luz de frequência ν emitido por uma fonte colocada à altura L . Pelo princípio de equivalência, a experiência é equivalente à realizada num laboratório situado numa região sem gravidade, que se desloque no sentido da fonte com aceleração g . O laboratório em repouso num campo gravítico pode, portanto, ser substituído um laboratório em acelerado com aceleração $-g$.
- Admitindo que este laboratório parte do repouso, no intervalo de tempo L/c que a luz leva a atingir o observador, este terá adquirido uma velocidade $u = -gL/c$ em direcção à fonte, i.e., o observador aproxima-se da fonte e verá, em consequência do efeito de Doppler, um desvio da frequência para o violeta, medindo $\nu' = \nu(1 - \beta) = \nu(1 + gL/c^2)$. Pode-se escrever $\nu' = \nu + \nu(gL/c^2)$ ou $\Delta\nu/\nu = gL/c^2 = \Delta\phi/c^2$, onde $\Delta\phi$ representa a variação do potencial entre a região do emissor e do observador. Multiplicando os dois membros pela constante de Planck e introduzindo a massa inercial, obtém-se $h\nu' = h\nu + (h\nu/c^2)gL = h\nu + m_g gL$, podendo escrever-se $m_g g = (h\nu/c^2)g$, como sendo a força gravitacional que «actua» no fóton.
- À superfície da Terra a variação de frequência é muito pequena, tendo em conta o valor de c^2 ; para um altura de 22,6 m, $\Delta\nu/\nu \approx 2,5 \times 10^{-15}$, que corresponde a 2,5 s em 30 milhões de anos!
- Imagine-se agora que um fóton de frequência ν é emitido, numa região muito afastada da Terra, na direcção à Terra. A frequência do fóton à superfície da Terra será: $\nu' = \nu(1 + \Delta\phi/c^2) = \nu(1 + GM_T/R_T c^2)$.
- Se um fóton de frequência ν escapa de uma estrela, de massa M_E e raio R_E , a uma distância suficientemente afastada da estrela um observador mede a frequência $\nu' = \nu(1 - GM_E/R_E c^2)$ [observa um desvio para o vermelho].
- Esta é a frequência da luz observada na superfície da Terra, assumindo que a gravidade da Terra é muito menor que a da estrela. Neste caso, **o desvio para o vermelho é de origem gravitacional**, e não deve ser confundido com o desvio para o vermelho devido ao efeito de Doppler.



[Ver o artigo “*Apparent weight of photons*”, R. V. Pound e G. A. Rebka, Jr., Phys. Rev. Lett., 4, 337-341 (1960) - na página de propostas de trabalhos de pesquisa].

Curvatura do espaço-tempo

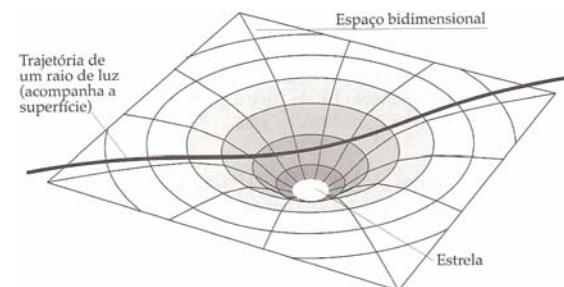
■ Como consequência do PE, o raio de luz curva-se no campo gravitacional, como se fosse formado por partículas com massa gravitacional. Da análise da experiência da dilatação gravitacional do tempo, conclui-se que a única hipótese necessária para que o encurvamento da trajetória da luz ocorra é que a luz tenha uma velocidade finita. Da mesma forma, qualquer outro fenómeno que se propague com velocidade finita num referencial inercial, na presença de um campo gravitacional, será forçado pela gravidade a percorrer uma trajetória curva. Estas experiências não mostram uma propriedade da luz, mas uma propriedade do espaço na presença de um campo gravitacional. Imaginando que o espaço se curva nas proximidades de uma massa, então, a trajetória «recta» característica de um fenómeno qualquer, como, por exemplo, um raio de luz, encurvar-se-á naturalmente nessa região (Figura).

■ *A curvatura do espaço-tempo e o princípio de equivalência constituem as bases conceituais da teoria da relatividade geral de Einstein.* As ideias sobre curvatura do espaço foram desenvolvidas durante o século XIX por vários matemáticos, a partir da rejeição do quinto postulado de Euclides (por um ponto fora de uma recta passa sempre uma única recta paralela à recta dada). Gauss, Lobachevski e Bolyai verificaram que a rejeição do quinto postulado levava a outras geometrias - *não-euclidianas* - tão coerentes como a de Euclides. O sistema axiomático de Euclides descreve a geometria do espaço *normal* de três dimensões.

■ Qual será a geometria de um espaço de duas dimensões imerso no espaço tridimensional? Considere um plano como sendo o espaço bidimensional que pretendemos analisar. Tome uma recta nesse plano e um ponto do plano fora da recta; por esse ponto passa uma única recta paralela à recta dada, e pode-se dizer que o plano satisfaz à geometria euclidiana e é, portanto, um espaço euclidiano.

■ Considere agora uma superfície esférica, que também é um espaço bidimensional, imersa no *nosso* espaço ordinário de três dimensões. A linha sobre a qual se mede a distância mais curta entre dois pontos numa superfície é denominada **geodésica**; por exemplo, no plano, as geodésicas são rectas e, na superfície esférica, são os círculos máximos. Tome um círculo máximo (geodésica) arbitrário como o equador da superfície esférica. Dois meridianos (que também são geodésicas, porque são círculos máximos) próximos podem ser considerados localmente como paralelos - a situação é semelhante à de duas rectas perpendiculares a outra recta no plano. Porém, os **meridianos curvam-se para se encontrarem nos pólos** e não podemos dizer que são paralelos. O quinto postulado de Euclides é, então, violado na superfície esférica, e a geometria nessa superfície não poderá ser euclidiana.

■ Gauss descobriu isso de uma maneira concreta, ao fazer um levantamento topográfico numa região próxima de Göttingen, na Alemanha. Ele verificou que, no maior triângulo do seu levantamento, a soma dos ângulos internos era ligeiramente diferente de 180° , o que mostrava que, na superfície esférica da Terra, não era possível aplicar uma geometria euclidiana. Seres bidimensionais limitados a viver numa superfície esférica poderiam comprovar a curvatura do seu espaço, ao verificar que a soma dos ângulos de um triângulo é sempre superior a 180° , ou que a razão da circunferência de um círculo para o raio é menor do que 2π . Esses seres seriam compelidos a construir uma geometria, válida no seu espaço curvo bidimensional, que seria obrigatoriamente não-euclidiana.



Curvatura do espaço-tempo: as *equações de campo de Einstein*

IFQR 2005-2006
Apanhado para Introdução à Teoria da Relatividade; versão 001 (a melhorar)

- Gauss chegou a especular se o *nosso* espaço tridimensional não seria curvo - se a geometria euclidiana não seria incorrecta nesse espaço. Contudo, foi Bernhard Riemann quem deu o «passo em frente». Numa conferência que proferiu sobre os fundamentos da geometria, em 1854, Riemann comentou que a verdade sobre o espaço deveria ser procurada na experiência e não no estudo dos tratados de Euclides. Concluiu ainda que o espaço, apesar de parecer regular (liso) nas dimensões comuns ao ser humano, talvez fosse irregular em distâncias muito pequenas e, que a grandes distâncias poderia apresentar uma curvatura que, se fosse positiva, mesmo que muito pequena, curvava o universo e o fecharia numa estrutura finita. Contudo, a mais profunda previsão de Riemann foi que o espaço não devia ser apenas uma espécie de suporte para os fenómenos físicos, *parado, rígido, homogéneo, independente da matéria e da energia*, como se pensava então. Ele era da opinião que a geometria do espaço devia de alguma forma *participar* nos fenómenos físicos e que a curvatura do espaço devia ser determinada por «forças externas». Para ele as propriedades do espaço não poderiam ser deduzidas de considerações matemáticas, mas da experiência física.
- Na mecânica clássica uma partícula confinada a uma superfície, livre de forças externas e atrito, percorre uma geodésica. Não é possível supor que, ao incluirmos um campo gravitacional no espaço curvo de três dimensões, a partícula seguirá também uma geodésica, porque uma órbita gravitacional depende da posição e da velocidade iniciais. Mas, no espaço-tempo - que contém um eixo temporal - a posição inicial inclui a velocidade inicial e é assim satisfeita a condição para determinação unívoca da órbita. O espaço-tempo de Minkowski foi por isso essencial para um novo avanço. De início Einstein rejeitou a ideia de espaço-tempo de Minkowski porque achava que complicava sem necessidade TRE; no entanto, como ele reconheceu depois, a concepção de Minkowski foi essencial para a formulação da TRG.
- Einstein fez a primeira tentativa para incorporar a gravitação na TRE, em 1907, no artigo de revisão já mencionado. Diante das dificuldades para formalizar a teoria, só retornou ao problema da gravitação em 1911. Foi então que descobriu que *a gravidade é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo* - essa é a essência da TRG. Durante os anos seguintes Einstein procurou encontrar as equações que relacionariam quantitativamente a matéria com a métrica do espaço-tempo, ou seja, determinar como a matéria curva o espaço-tempo. Marcei Grossmann, um antigo colega então professor de matemática, sugeriu-lhe que a ferramenta adequada para tratar o problema seria análise tensorial (ou geometria diferencial), inventado e desenvolvido na segunda metade do século XIX sucessivamente por Riemann, Gregorio Ricci e seu discípulo Tullio Levi-Civita. Einstein e Grossmann chegaram a uma primeira forma da lei de curvatura em 1914, apenas válida para alguns referenciais - não obedecia, portanto, ao princípio da relatividade (PR) - e não satisfazia, por isso, à expectativa de Einstein (mesmo assim foi publicada).
- A forma final da TRG foi desenvolvida em 1915. Nesta teoria, a força de gravitação (como definida por Newton) é substituída pela geometria - na ausência de forças externas, as trajectórias de partículas são geodésicas do espaço-tempo. *As equações de campo de Einstein*, como são chamadas as equações básicas da TRG, são invariantes sob transformações entre quaisquer referenciais. (Estas equações foram obtidas de forma independente por Hibert).
- *As equações de campo de Einstein* permitem calcular quantitativamente como o espaço-tempo é curvado na vizinhança da matéria pela densidade de massa (expressa como densidade de energia) e pela pressão de matéria. Excepto em alguns casos (por exemplo no interior de estrelas de neutrões) a pressão de matéria é desprezível em comparação com a densidade de massa e é essa que determina a curvatura do espaço.

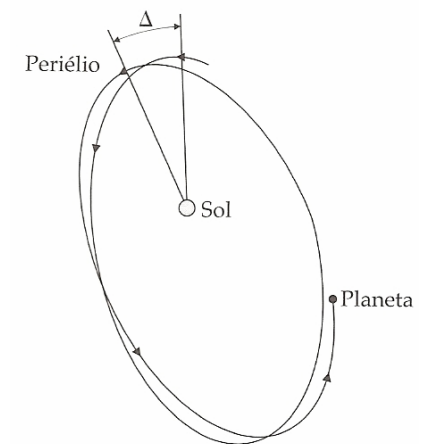
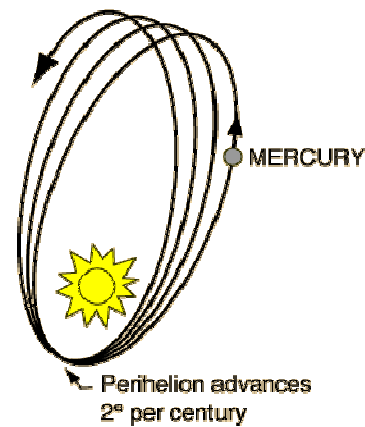
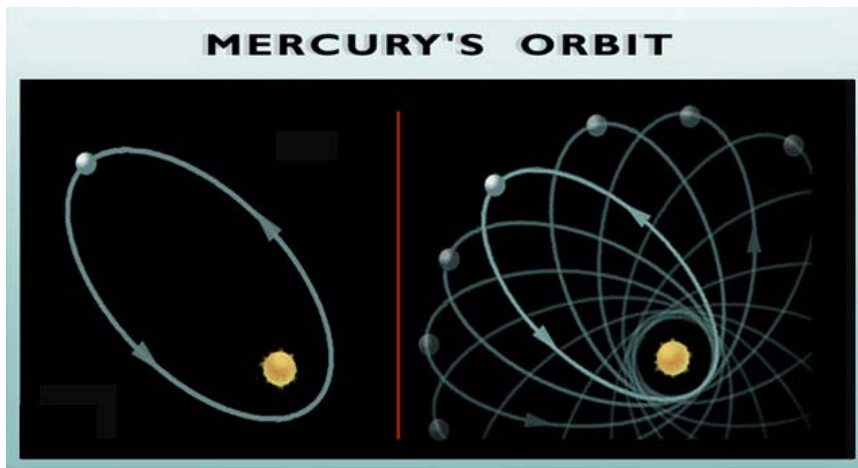
20-03-2006

Precessão do periélio de mercúrio

IFQR 2005-2006

Apalhado para Introdução à Teoria da Relatividade; versão 001 (a melhorar)

- O avanço do periélio (ponto da órbita de um planeta mais próximo do sol) da órbita de Mercúrio é maior em relação ao dos outros planetas por causa de sua proximidade ao Sol: $1,38''$ de arco a cada órbita completada (2° por século).
- Desse arco, $1,28''$ deve-se à perturbação dos outros planetas e pode ser calculado pela lei de gravitação de Newton, mas em cada ano *mercuriano* $0,10''$ ficam sem explicação; num século observa-se, portanto, um avanço do periélio em $43''$ de arco não explicável.
- A partir de suas equações de campo, Einstein calculou o deslocamento do periélio de Mercúrio - que vinha utilizando desde 1907 como contraprova das suas ideias - obtendo ótima concordância com a observação astronómica.
- As órbitas dos planetas têm um movimento de precessão muito lento em torno do Sol, que pode ser explicado em parte pela perturbação dos outros planetas, mas há uma *parte* inexplicável pela Mecânica Clássica.
- Várias tentativas foram feitas pelos astrónomos para explicar essa anomalia - introdução de um planeta interno à órbita de Mercúrio ou de um satélite deste e até mesmo alteração do expoente de r na lei de gravitação de Newton - sem sucesso.
- Einstein obteve o valor correcto do avanço secular, $43''$, pela aplicação directa de sua teoria, resolvendo assim um problema astronómico que perdurava **havia sessenta anos, e essa continua a ser a explicação aceita até hoje, sendo o primeiro grande triunfo da teoria.**



Das “estrelas escuras” de Michell ao buraco negro de Schwarzschild

- A gravidade mantém os corpos na superfície terrestre. Normalmente, quando lançarmos uma bola no ar ela acaba por cair: quanto maior for a velocidade inicial da bola, maior é a altura que ela atinge na subida. Porém, se a bola for lançada, com grande velocidade, $>8 \text{ km.s}^{-1}$, pode entrar em órbita à volta da Terra - como a bala do canhão de Newton - tal como a lua, os planetas em torno do Sol e os satélites em torno dos planetas. Um objecto em órbita encontra-se sob a acção da gravidade do planeta, apesar de se encontrar em queda livre. Se conseguirmos lançar a bola com uma velocidade ainda maior do que a necessária para que ela entre em órbita, $>11,2 \text{ km.s}^{-1}$, ela acabará por deixar de ficar sob a influência do campo gravítico terrestre.
- A lei de gravitação de Newton permite concluir uma partícula lançada da superfície de um astro pode-se libertar da acção gravitacional deste astro se a sua velocidade inicial for superior a uma velocidade limite - a *velocidade de escape*. A condição para que a partícula não retorne ao astro, desprezando-se as forças de resistência ao movimento, é que sua energia mecânica não seja negativa: $\frac{1}{2}mv^2 - GmM/R \geq 0$, onde m e M são as massas da partícula e do astro, R é o raio do astro e G é a constante de gravitação universal. A velocidade de escape que corresponde à igualdade na equação acima, é: $v = \sqrt{2GM/R}$.
- A velocidade de escape não dependem da massa da partícula e é tanto maior quanto maior for a massa do astro e menor for o seu raio. Se o raio do astro tender para zero, a velocidade de escape divergiria para infinito. Para “objectos” lançados da superfície do Sol, a velocidade de escape é 617 km.s^{-1} .
- Um buraco negro é um objecto cujo campo gravitacional, na sua vizinhança, é tão elevado que nada, nem mesmo a luz, pode escapar à sua acção. Em 1780 o físico britânico John Michell formulou a hipótese de que uma estrela 500 vezes maior que o Sol, mas com a mesma densidade, “absorveria” a luz desta forma. Seria uma “estrela escura” (mais tarde designada buraco negro). Isto é, numa estrela destas (buraco negro), a velocidade de escape é superior à da luz e, como nada se move tão rápido como a luz, a luz emitida pela estrela acaba por regressar ao buraco negro.
- Poucos (e.x. Laplace) levaram a sério esta ideia, até a teoria da relatividade geral de Einstein explicar a gravidade em termos de distorção do espaço-tempo. A teoria da relatividade geral prevê que qualquer porção de matéria deformará o espaço-tempo ao seu redor, podendo formar uma “estrela escura” ou buraco negro, se for comprimido dentro de um certo raio: pode-se «formar» um buraco negro adicionando mais massa a um objecto, mantendo o seu tamanho, ou mantendo a massa e comprimindo o raio. O Sol poderia formar um buraco negro no espaço-tempo se fosse comprimido, ficando reduzido ao tamanho de uma esfera com $\sim 6 \text{ km}$ de diâmetro (da ordem do tamanho do monte Everest).

Com este tamanho a Terra seria um buraco negro



TERRA COMPRIMIDA

Se a Terra fosse comprimida numa esfera com 18 mm de diâmetro, a sua gravidade aumentaria e mantê-la-ia em queda eternamente, tornando-a infinitamente densa e deformando o espaço-tempo em torno de si, formando um buraco negro. Qualquer objecto — o Sol, uma colher de chá ou uma pessoa — formaria um buraco negro se fosse comprimido de forma a não conseguir resistir à sua própria gravidade.

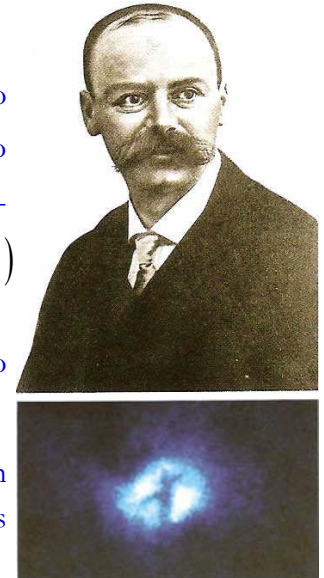
Tempo & Espaço.

O buraco negro de Schwarzschild

IFQR 2005-2006

Apanhado para Introdução à Teoria da Relatividade; versão 001 (a melhorar)

- John Michell teve a audácia de combinar a teoria de gravitação e a teoria corpuscular da luz, de Newton, e fez a conjectura de que as partículas da luz teriam massa gravitacional. Deduziu então que era possível imaginar a existência de astros, que denominou *estrelas escuras*, para os quais a velocidade de escape seria superior a c . Os corpúsculos de luz não seriam capazes de se libertar da gravidade destes astros - nenhum raio de luz escaparia - e o astro seria, portanto, invisível. Para que um astro com massa igual à do Sol se comportasse dessa maneira, ele deveria ser extremamente compacto: sua circunferência não poderia exceder 18,5 km. Laplace também chegou à conjectura semelhante à de Michell, referindo-a nas duas primeiras edições de sua obra *O sistema do mundo*.
- Contudo, no início do século XIX, experiências de interferência da luz levaram ao progressivo abandono da teoria corpuscular de Newton em favor da teoria ondulatória de Huygens, e as conjecturas das estrelas escuras, baseada na teoria corpuscular da luz, foi esquecida. Os objectos semelhantes aos imaginados por Michell e Laplace só “ressurgiriam” com a TRG. Karl Schwarzschild, imediatamente depois da publicação da TRG em Novembro de 1915, e pouco antes de morrer (1873-1916), dedicou-se à solução das equações de campo de Einstein, descrevendo a forma como o espaço-tempo é distorcido à volta de uma porção de matéria. Recuperou a ideia de que quando uma estrela se contrai atinge um ponto em que a sua gravidade é tão elevada que nem a luz consegue escapar. O raio crítico do buraco negro é hoje conhecido como o raio de Schwarzschild.
- Schwarzschild enviou uma comunicação à “Academia de Ciências Alemã”, através de Einstein, na qual calculava a curvatura do espaço-tempo causada pela gravidade de uma estrela esférica, e a solução das equações de Einstein no vácuo para o campo gravitacional de um corpo esfericamente simétrico. A título de curiosidade, a “solução” encontrada para a geometria do espaço-tempo no exterior de uma estrela de massa M , com simetria esférica, é:
$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$
- O raio crítico de Schwarzschild é igual ao produto da massa do objecto pelo dobro da constante gravítica dividido pelo quadrado da velocidade da luz: $R_S = 2GM/c^2$ (expressão surpreendentemente coincidente com a obtida na Física Clássica)
- Um sinal luminoso emitido pela estrela buraco negro nunca ultrapassa o raio de Schwarzschild, i.e., a estrela não brilha para um observador situado no exterior de R_S , daí o nome estrela escura, absorvendo tudo que entra no interior de R_S sendo por isso mais correntemente designada buraco negro.



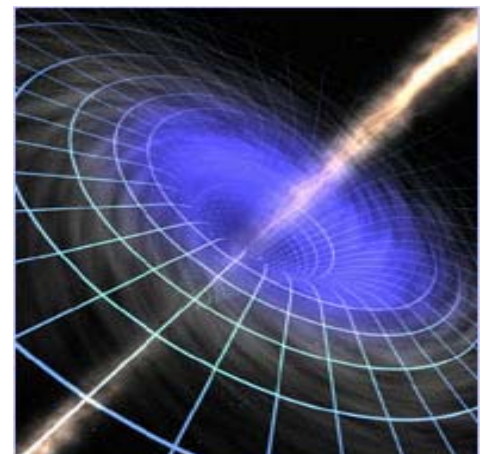
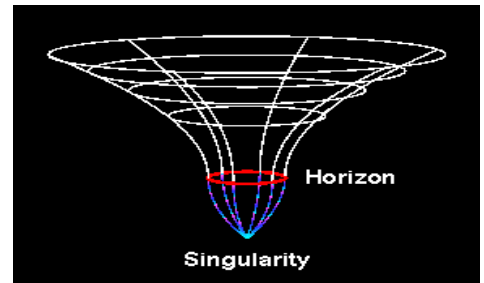
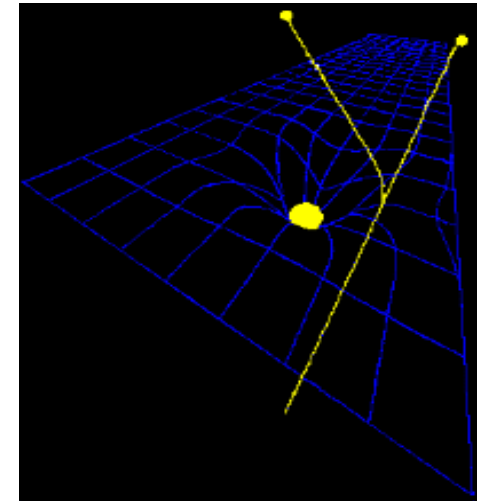
José Figueiredo, DF-FCT-ULAG

«Propriedades» dos buracos negros

IFQR 2005-2006

Apanhado para Introdução à Teoria da Relatividade; versão 001 (a melhorar)

- A solução de Schwarzschild para as equações de campo de Einstein vaticina a existência de uma circunferência crítica, dependente da massa da estrela, abaixo da qual a luz não escapa da estrela. O valor dessa circunferência crítica é igual ao da teoria de Michell e Laplace. O raio *crítico de Schwarzschild* pode ser obtido, usando a mecânica clássica, por um artifício simples fazendo a velocidade de escape igual a c : $R_S = 2GM/c^2$. O aluno deve ter presente que o que se fez acima *não* é uma dedução válida do raio crítico R_S , mas apenas um artifício que gera a expressão obtida por Schwarzschild. A dedução correcta tem em conta a dilatação gravitacional do tempo. Numa estrela com circunferência muito maior do que a crítica - por exemplo, o Sol -, o espaço-tempo é pouco encurvado; à medida que o tamanho da estrela diminui, a curvatura do espaço-tempo aumenta, até que, ao atingir a circunferência crítica, a curvatura aumenta indefinidamente – diz-se que a circunferência crítica envolve uma singularidade. As figuras ao lado apresentam uma analogia no espaço bidimensional, imerso no espaço tridimensional, do que foi descrito acima.
- A dificuldade em aceitar a existência de singularidades no mundo real, por parte de Einstein e da maioria dos físicos, fez que a singularidade de Schwarzschild ficasse esquecida até aos finais dos anos trinta. Einstein chegou mesmo a publicar um artigo no qual procurava mostrar a impossibilidade da singularidade.
- Em 1939, o estudo da evolução das estrelas trouxe novamente o tema à discussão. Robert Oppenheimer e colaboradores iniciaram o estudo da influência relativa das forças nucleares e gravitacionais nas estrelas de neutrões. Os resultados obtidos culminaram na publicação de um artigo, por Snyder e Oppenheimer, onde propunham que uma estrela suficientemente maciça, sofreria um colapso, que continuaria indefinidamente, após as suas fontes de energia termonuclear se esgotarem. Esse artigo marcou o início da física moderna dos buracos negros, nome dado por John Wheeler ao estado final de colapso dessas estrelas. Novamente, a contracção indefinida da estrela levava a uma singularidade no espaço-tempo e o modelo de Schwarzschild foi resgatado, ficando ligado a um fenómeno muito provável no mundo físico.
- A superfície esférica perfeitamente definida em torno da singularidade, que demarca a região de onde a luz não pode escapar, define o *horizonte de eventos* do buraco negro, nome dado em analogia com o horizonte na Terra, além do qual nada se vê. A massa do buraco negro não está distribuída homogeneamente no volume do horizonte, mas tende a se concentrar na singularidade; entre a singularidade e o horizonte acabará por haver apenas vácuo.
- No espaço-tempo, o colapso da estrela dá também origem ao encurvamento do tempo. Esta curvatura manifesta-se pelo gradual *alentejamento* do tempo à medida que nos aproximamos do buraco negro.



Outros modelos de buracos negros

IFQR 2005-2006

Apanhado para Introdução à Teoria da Relatividade; versão 001 (a melhorar)

- No referencial da estrela de circunferência crítica, um relógio que se aproxima dela torna-se cada vez mais vagaroso, até parar completamente, ao atingir o horizonte de eventos. Isso provoca um desvio de frequência da luz: quanto mais lento o tempo, maior o desvio para comprimentos de onda maiores, até que, ao «parar o tempo», o comprimento de onda tende para o infinito e a luz desaparece, ou, de outro ponto de vista, a frequência tende para zero e a energia dos fótons se anula. Essa é a razão por que não se vê luz emitida pela estrela. Essa explicação substitui, num contexto relativista, em que a velocidade da luz é uma constante, o modelo de Michell e Laplace de fótons com massa num campo gravitacional, para justificar a ausência de luz emitida por estrelas de raio crítico ou inferior.
- Para além do modelo de buraco negro de Schwarzschild existem outros modelos de buraco negro, como, por exemplo, os modelos de Reissner-Nordström (massa com carga eléctrica Q) e de Kerr-Newman (massa com simetria não-esférica, com carga eléctrica Q e em rotação). A cada um destes modelos está associada uma métrica do espaço-tempo. (Ver, ex., <http://scienceworld.wolfram.com/physics/topics/FieldEquationsSolutions.html>)
- O estudo dos buracos negros envolve, além da TRG, a mecânica quântica e a termodinâmica e constitui hoje um dos temas mais activos e polémicos da astrofísica, por causa das previsões exóticas que gera. A confusão de conjecturas discordantes é um sinal de que é um campo de estudos em progresso, mas que não há ainda um modelo bem estabelecido, suportado por observações seguras.

Nota sobre os modelos de buracos negros (ou outros modelos)

- Devemos estar atentos para o facto de que os modelos e as teorias físicas são criações livres da mente humana que exigem o teste da experiência e da observação cuidadosa. Com esses modelos e teorias, constrói-se uma *imagem* do mundo que *não* é o mundo real, objectivo, que existe fora de nossos sentidos (eventualmente ampliado pelos instrumentos), mas uma *representação* dele. Deseja-se que os dois - o mundo real e o mundo físico das teorias - sejam idênticos, mas nunca se estará seguro disso. Os observadores procuram evidências de um objecto no mundo real que corresponda ao modelo proposto.
- Há, na comunidade científica dos especialistas e, principalmente, dos não especialistas deste campo, um sentimento de desconforto com a ideia da existência *real* de singularidades no universo. Provavelmente, uma futura teoria quântica da gravitação eliminará essas singularidades e levará a novos modelos do buraco negro. Enquanto se aguarda novas evidências, é sempre bom ter cautela e aceitar os modelos propostos como *modelos de trabalho*.

21-03-2006

<http://w3.ualg.pt/~jlongras/ensino.htm> 67

“Teste” à teoria da relatividade geral

IFQR 2005-2006

Apunhado para Introdução à Teoria da Relatividade; versão 001 (a melhorar)

- Apesar de estar entre as mais brilhantes criações da mente humana, unindo espaço, tempo e gravitação e esclarecendo fenómenos como os buracos negros e a expansão do Universo, há aspectos da teoria que ainda não foram testados. Como o próprio Einstein considerava, não se pode comprovar uma teoria, mas apenas verificar a sua falsidade. Como refere o filósofo Karl Popper, “o critério da cientificidade de uma teoria reside na possibilidade de a invalidar, de a refutar ou ainda de a testar”: um grande número de enunciados singulares nunca permite inferir um enunciado geral; em contra partida. Por exemplo, “pouco importa o grande número de cisnes brancos que tenhamos observado; não justifica a conclusão de que todos os cisnes são brancos” [Karl Popper, Jean Baudouin, Edições 70, 1992].
- Muitas previsões da teoria da Teoria da Relatividade Geral nunca foram testados experimentalmente. Uma das conjecturas da Teoria da Relatividade geral prevê a deformação do espaço-tempo na presença de corpos maciços, antevendo, por exemplo, que a Terra arrasta o tempo-espaço em seu redor enquanto roda: **arrastamento dos referenciais inerciais**. (Ver <http://einstein.stanford.edu/> e http://einstein.stanford.edu/gpb_intro.html/)
- Em Abril de 2004, a NASA lançou uma sonda espacial com a missão de testar a Teoria da Relatividade Geral. O satélite “Gravity Probe-B (GP-B)”, que custou quase 600 milhões de euros, permanecerá no espaço 16 meses. A sonda espacial está equipada com quatro giroscópios sofisticados, que compõem um sistema de referência *espaço-temporal* quase perfeito. Se a previsão de arrastamento do espaço-tempo estiver correcta os giroscópios sofrerão uma alteração no alinhamento de seus eixos. (Ver também <http://www.gravityprobeb.com/>)
- A NASA espera publicar as primeiras conclusões do projecto GP-B no início de 2007.
- **Primeiras evidências:** Em Outubro do ano passado, uma equipa do Centro Conjunto para a Tecnologia do Sistema Solar da NASA adiantou-se ao trabalho da GP-B e, parece, ter obtido evidências de que a Terra arrasta o espaço-tempo em seu redor, enquanto gira. Os investigadores conseguiram medir o efeito, previsto pela primeira vez em 1918, observando os deslocamentos das órbitas de dois satélites geostacionários. Segundo a NASA, a descoberta constitui a primeira medição de um efeito em que uma massa em rotação arrasta o espaço-tempo na sua vizinhança. E os dados que a GP-B vai obter serão imprescindíveis para realmente verificar a validade desta previsão da teoria.

“Teste” à teoria da relatividade geral: “Gravity Probe-B (GP-B)”

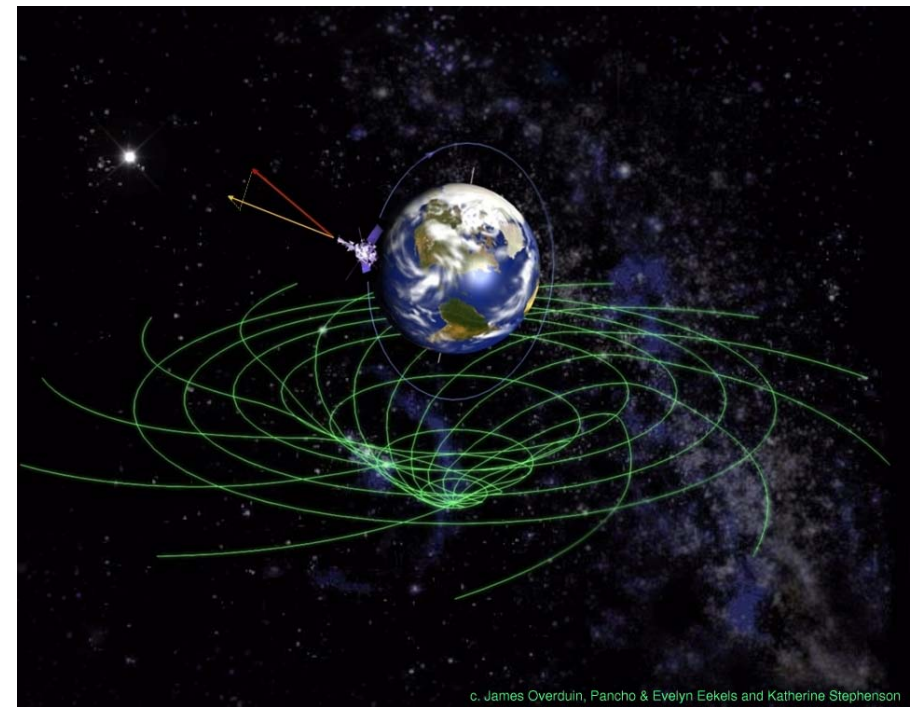
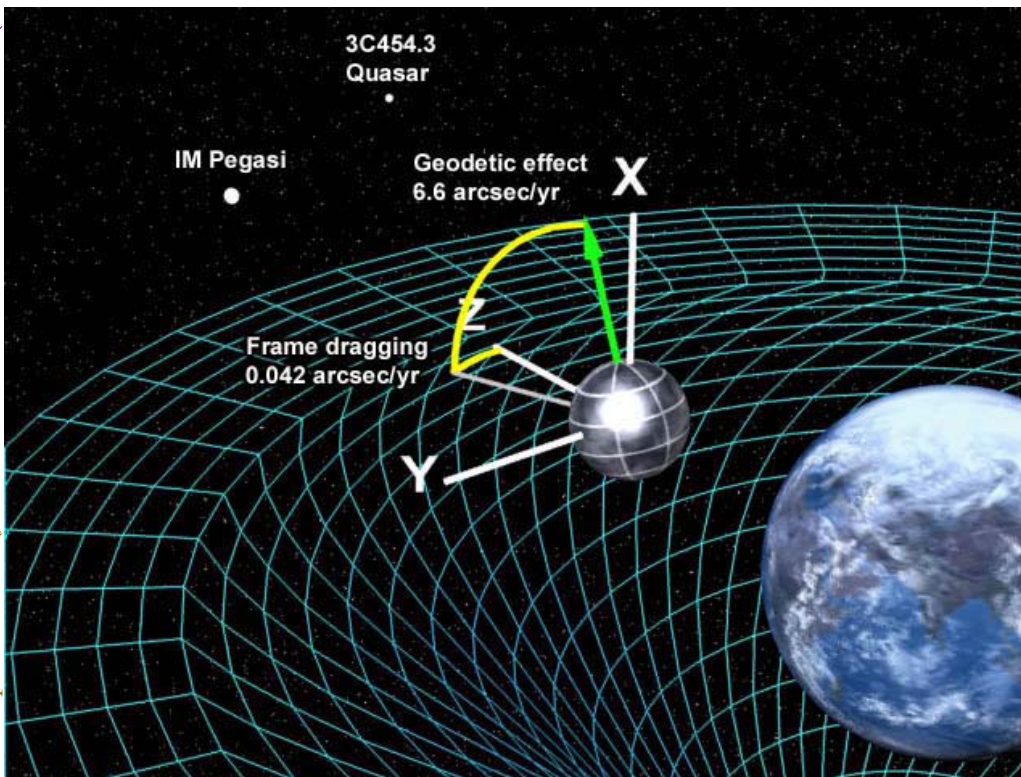
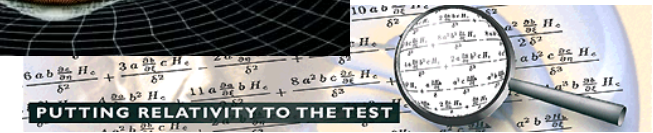
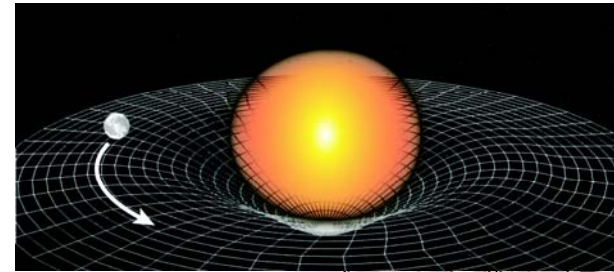
IFQR 2005-2006

A teoria da relatividade geral de Einstein propõe que “o espaço deve ser curvo para produzir os «caminhos orbitais» e acelerações equivalentes”

Em 1960, Leonard Schiff e os colegas propuseram uma experiência com uma “giroscópio relativista” para testar a teoria de Einstein.

Requisitos da GP-B: 1) “Build a perfect straight line that can orbit the Earth stably; 2) Align it with a distant star; 3) Protect it from all forces, except for “gravity” (or curved spacetime); 4) Watch it very carefully for one year”.

Apunhado para Introdução à Teoria da Relatividade; versão 001 (a melhorar)



Ver http://einstein.stanford.edu/content/fact_sheet/GPB_FactSheet-0405.pdf
21-03-2006

Previsões da TRG e a Cosmologia

IFQR 2005-2006

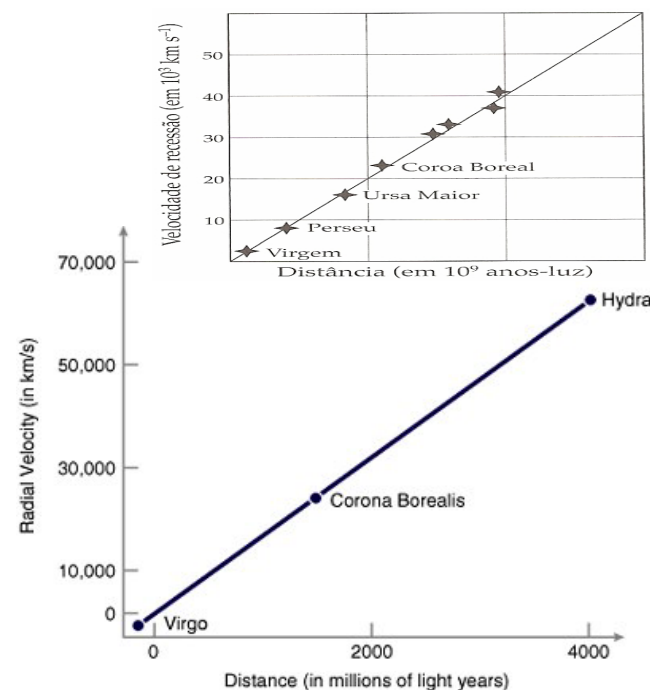
Apanhado para Introdução à Teoria da Relatividade; versão 001 (a melhorar)

- Como referido, a TRG permitiu calcular, entre outras coisas, a deflexão da luz de estrelas pelo campo gravitacional do Sol com alta precisão e prever a existência de singularidades no espaço-tempo, que foram associadas, um quarto de século depois, aos *buracos negros*.
- A TRG também prevê a existência das ondas gravitacionais. A detecção de **ondas gravitacionais** tem sido tentada exaustivamente por «métodos» *terrestres* sem sucesso ainda (procurar informação sobre *Ligo, Tama, Virgo, e GEO*). Em 1974, Joseph Taylor e Russell Eulse descobriram a primeira pulsar binária. Por métodos extraordinariamente precisos de medição do tempo, verificaram uma pequena, mas constante, diminuição da sua velocidade orbital, cuja única explicação até agora é a emissão de ondas gravitacionais, em completo acordo com a previsão da TRG.
- Em 1917, Einstein publicou um trabalho que aplicava a TRG à cosmologia, marcando o início da cosmologia moderna. Nesse trabalho, com o objectivo de obter um universo isotrópico, homogéneo, ilimitado, mas espacialmente finito e estacionário, pois no meio científico acreditava-se que assim deveria ser o Universo, Einstein introduziu nas equações de campo da TRG uma constante Λ , a *constante cosmológica* ou o *termo cosmológico*. O termo cosmológico teve uma vida sinuosa: inicialmente bem sucedido, foi considerado pelo próprio Einstein “o maior erro da sua vida”, “desaparecendo” das teorias cosmológicas, ressurgindo na década 90 para explicar a expansão acelerada do universo que, de acordo com as observações de supernovas, está a acontecer.

Recessão das galáxias

- Em 1917, Vesto Slipher publicou resultados que mostram que a luz proveniente de 21 das 25 nebulosas espirais por ele estudadas sofria um desvio Doppler para o vermelho. Estes resultados indicavam que as nebulosas se afastavam de nós-observador. (Posteriormente, foi possível verificar que as quatro que não obedeciam à regra geral pertenciam ao Grupo Local, galáxias ligadas à Via Láctea pela gravitação.)
- Edwin P. Hubble, continuando as observações de Slipher, descobriu que as nebulosas eram de facto galáxias, a partir de algumas das suas estrelas, as estrelas de brilho variável designadas Cefeidas, estimou as suas distâncias à nossa galáxia. Um gráfico da velocidade de recessão das galáxias, obtida pelo efeito de Doppler, em função desta distância, usando o brilho das Cefeidas, mostra que a velocidade de recessão v é proporcional à distância r da galáxia ao observador: $v=Hr$, onde H é o parâmetro de Hubble (também chamada *constante de Hubble*), que pode ser determinada a partir do gráfico.
- Esta descoberta conduziu a astrofísica a um notável desenvolvimento no qual a TRG foi a ferramenta indispensável à formulação de novos modelos.

20-03-2006

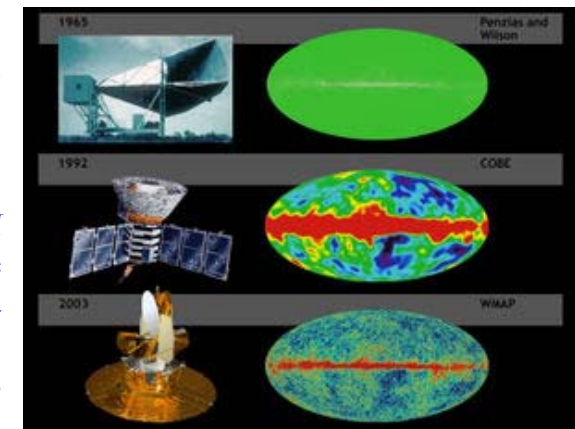


José Figueredo, DF-FCT-ULAG

“Átomo primordial” e a radiação de cósmica de fundo

Apunhado para Introdução à Teoria da Relatividade; versão 001 (a melhorar)
IFQR 2005-2006

- Esta série de observações permitiu concluir que as galáxias se estão *afastando umas das outras* - pois não faz sentido imaginar a Terra como centro do universo - e, em consequência, fazer a conjectura de que o Universo está em expansão. Podemos compreender isso facilmente: imagine um balão de borracha sendo enchido e dois pontos em sua superfície (ver página seguinte – Universo em expansão - passa na massa a levedar). O valor actualmente aceite para o parâmetro de Hubble, $H \sim 15 \text{ km s}^{-1}/10^6 \text{ anos-luz}$, é inferior ao valor por ele calculado. Com este novo valor de H , pode-se concluir que as distâncias entre as galáxias aumentam aproximadamente 1% em cada 200 milhões de anos. (Para valores de H actualizados, ver adiante páginas 72 e 73).
- As observações de Slipher e Hubble estavam de acordo com os resultados de Aleksandr Friedmann, que demonstrou, em 1922, que uma das soluções possíveis das equações da TRG é um universo em expansão. Em 1927, Georges Lemaître fez a conjectura de que o universo estava em expansão, tendo a sua origem num *átomo primordial*, que teria explodido no início da história cósmica. Esta conjectura foi apelidada, em tom jocoso, como “big bang”, pelo astrofísico Fred Hoyle, que acreditava num universo estacionário. O modelo de Lemaître foi sendo aperfeiçoado. Nos anos 70-80, Stephen Hawking e Roger Penrose demonstraram que a TRG implica o início do Universo e do tempo numa singularidade.
- Em 1948, George Gamow conjecturou, baseado no modelo do “big bang”, que o estado do universo nos estádios iniciais da sua evolução seria caracterizado por uma densidade de radiação e de temperatura extraordinariamente elevadas. Previu que seria possível observar os resquícios dessa radiação como uma radiação de fundo isotrópica, com o espectro de corpo negro, tendo o seu pico se desviado para a região de microondas, pelo efeito de Doppler, devido à imensa velocidade de expansão do universo (a radiação cósmica de fundo é considerada o “vestígio” da radiação emitida quando o Universo em expansão se tornou transparente à radiação electromagnética, cerca de 400 000 anos após o “big bang”, em resultado da formação do hidrogénio e do hélio). A estimativa de Gamow para a temperatura da radiação cósmica de fundo, $\sim 50 \text{ K}$, foi corrigida, por Ralph Alpher e Robert Herman, para $\sim 5 \text{ K}$.
- Em 1965, Arno Penzias e Robert Wilson usando uma antena de comunicações por satélite, observaram um ruído de fundo, isotrópico, de energia correspondente à temperatura de 2,725 K, cuja origem não conseguiam explicar. Era exactamente a radiação prevista por Gamow, e a descoberta levou à atribuição do Nobel de Física a Penzias e a Wilson. Corrigindo-se o valor de 5 K, com o valor do parâmetro cosmológico de Hubble conhecido em 1965, obtém-se 2,725 K, em extraordinário acordo com o valor observado. A figura mostra a “imagem” da radiação de fundo obtida pelo satélite COBE, em 1992: observam-se variações em torno dos 2,725 K apenas na quinta casa decimal.
- As medidas da radiação cósmica permitem estimar que havia cerca de 109 fôtons para cada barião, podendo-se concluir que os átomos só formaram quando a temperatura era da ordem de 3 000 K, tornando o Universo transparente. As flutuações na radiação cósmica permitem explicar a formação das galáxias.
- A radiação cósmica de fundo constitui uma das mais fortes evidências em favor do modelo do “big bang”. Este modelo e a lei de Hubble permitem obter qualitativamente a idade e a dimensão do universo. Como H tem a dimensão do inverso do tempo, o inverso de H tem a dimensão de um tempo e pode ser associada, de forma imprecisa, à *idade do universo*: $H^{-1} \approx 3 \times 10^{17} \text{ s} \approx 10 \text{ mil milhões de anos}$. Multiplicando esse valor pela velocidade da luz, obtém-se a dimensão máxima que o universo poderia ter alcançado a partir da explosão inicial: $cH^{-1} \approx 3 \times 10^{26} \text{ m}$, que se denomina, também sem grande rigor, o *raio do universo*. (Ver, por exemplo, <http://scienceworld.wolfram.com/physics/HubbleConstant.html>)



21-03-2006

Universo em expansão acelerada

Apanhado para Introdução à Teoria da Relatividade; versão 001 (a melhorar) IFQR 2005-2006

- O estado inicial marca o início do espaço e do tempo, e não há sentido em falar em espaço e tempo antes dele.
- Nessa singularidade, que seria o proto-universo, a TRG parece não ser válida.
- Há, porém, esperança de que seja criada uma *teoria quântica da gravitação*, que unificará a mecânica quântica e a TRG e evitará as singularidades previstas por esta última.

O Sol !

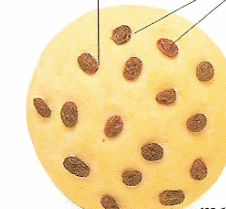
UNIVERSO EM EXPANSÃO
A teoria de Einstein, para seu espanto, também prevê que o espaço vazio se encontra em expansão. O espaço existente entre as galáxias encontra-se em dilatação, afastando as galáxias. É o que acontece com as passas de uma massa que se encontra a levedar. Elas não se movem através da massa, mas estão a afastar-se entre si à medida que a massa vai levedando.

As passas (galáxias) encontram-se próximas na massa (espaço)



Tempo da observação

As passas mantêm o mesmo tamanho



Milhões de anos mais tarde

As galáxias afastam-se

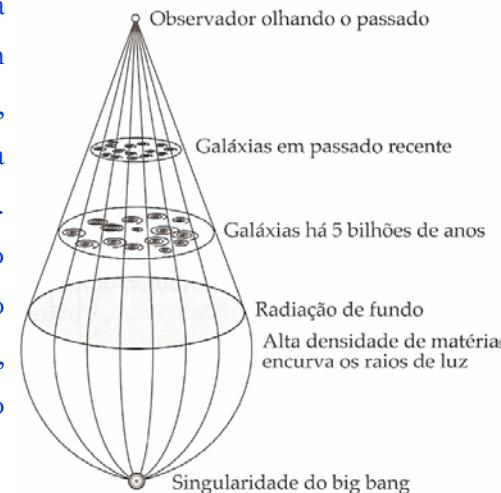
As galáxias afastam-se indefinidamente



Mais alguns milhões de anos mais tarde

Tempo & Espaço, Visual Ciências, Verbo.

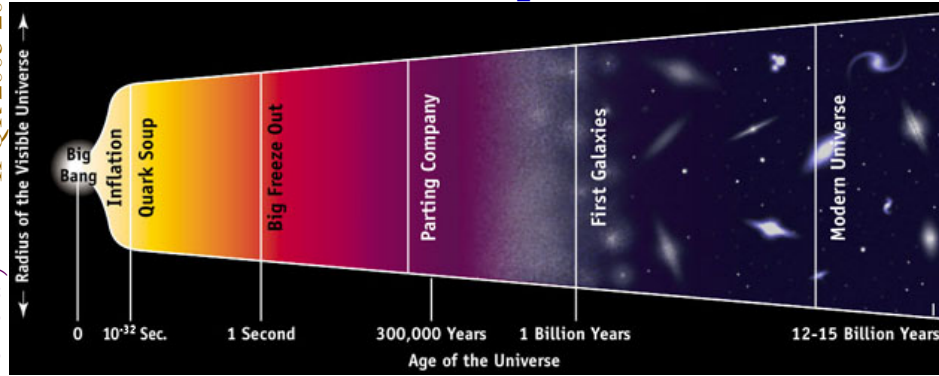
▪ A Via Láctea contém cerca de 10^{11} estrelas, que são a quase totalidade dos objectos vistos no céu à noite. Para lá além da Via Láctea, na região atingida por nossos instrumentos, que tem um raio aproximado de 10^9 anos luz, existem cerca de 10^{11} galáxias, que se afastam mutuamente umas das outras. Quando um astrónomo observa galáxias distantes, ele está na verdade observando-as como eram no passado, porque a luz proveniente delas levou um certo tempo para chegar até ele. No cone de luz do Universo, ele estará observando uma secção recta na folha inferior do cone (Figura). Uma secção recta mais distante do vértice representará o universo na época da formação das galáxias e, à medida que o astrónomo observar regiões mais remotas, estará observando de facto secções do cone que correspondem ao universo em tempos anteriores à formação das galáxias. De acordo com o modelo padrão do **big bang**, o universo originou-se, há cerca de 12 a 15 mil milhões de anos, de um estado extraordinariamente denso e quente e, desde então, de acordo com a teoria da relatividade geral (TRG), expande-se e arrefece.



- Assim, conclui-se que o **Universo teve uma origem no tempo. (Ver paradoxo de Olbers: porque é que o céu é escuro durante a noite?)**
- Existem evidências fortes a favor do modelo do “big bang”: a recessão das galáxias e a radiação cósmica de fundo, remanescente do estado inicial. A conjectura de uma explosão inicial não é necessária ao modelo do “big bang”, que procura descrever apenas como o universo evolui e não a sua origem.
- Se, da nossa posição actual, construirmos o cone de luz, uma determinada secção dele, no passado, mostrará uma radiação de fundo remanescente do Universo com a idade de ~400 mil anos. Quando observamos regiões cada vez mais remotas do universo, a secção recta observada do cone, que representa o universo num certo instante de tempo, deverá diminuir e tender para zero - tender para uma *singularidade*. O que faz que isso ocorra é a alta densidade de matéria e radiação, que curva os raios de luz que formam a superfície do cone e os faz convergir na singularidade, como mostra a Figura acima.

O modelo do "big bang": procura de evidências

"A linha cósmica do tempo"



Ondas gravitacionais (ver Ligo, Tama, Virgo, GEO)



Ver, por exemplo, *Ondulações do espaço-tempo*, Scientific America Brasil, Edição espacial nº1, 2003.

Radiação cósmica de fundo

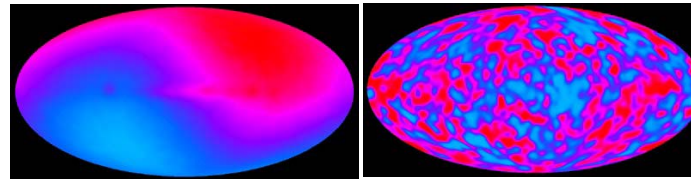
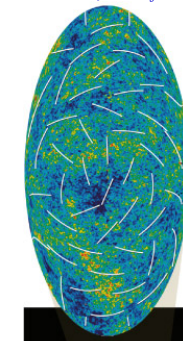
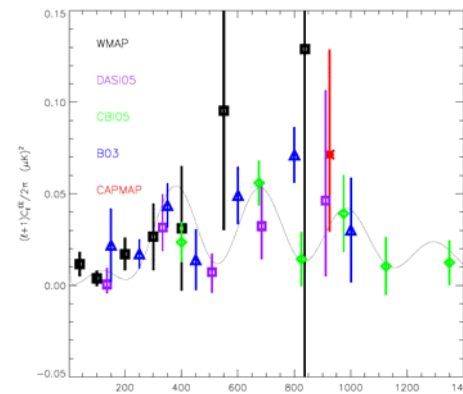


Figura da esquerda: valor médio da radiação de fundo, 2,725 K.
Figura da direita: variações (anisotropia) da temperatura da radiação cósmica de fundo.

Medidas da polarização da radiação cósmica

http://en.wikipedia.org/wiki/Image:WMAP_3yr_EE.png

Ver também *Ecos do Big Bang*, Scientific America Brasil, Edição espacial nº1, 2003.

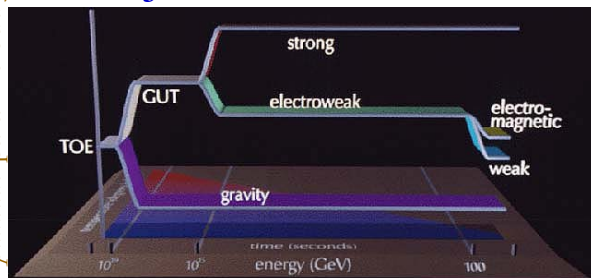


New Evidence
By measuring patterns in the polarization of the radiation from the Big Bang (map at left), astronomers were able to refine their measurements of the infant universe. They found strong evidence that the universe had undergone a violent growth spurt in the first trillionth of a second of time.

PATTERNS OF POLARIZATION
Direction of light vibration.

A Big Bang Timeline
Astronomers are now able to more accurately calculate a timeline for major events in the formation of the early universe.

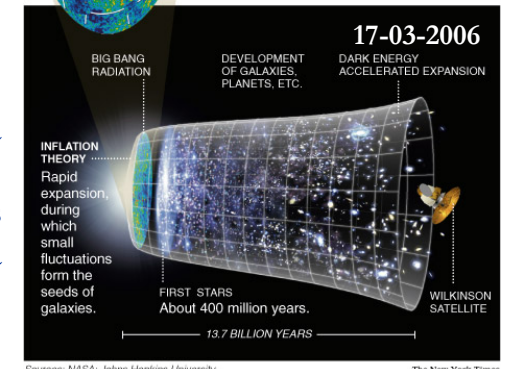
Interacções fundamentais



TOE: "theory of everything" é uma teoria físico-matemática que pretende explicar e ligar todos os fenómenos físicos;
GUT: "Grand Unified Theory", é uma teoria das interacções fundamentais que pretende as interacções forte e electro-fracas, eventualmente, a gravitacional, numa única interacção.

<http://www.upscale.utoronto.ca/JPU200Y/RobSinclair.pdf>

http://en.wikipedia.org/wiki/Physical_cosmology



Sources: NASA, Johns Hopkins University, The New York Times

Radiação cósmica de fundo - lei de Planck – e a cosmologia

Porções da energia do Universo devidas à matéria e à radiação

- Até recentemente, pensava-se que o universo era basicamente constituído por matéria. Porém, uma das ideias associada com o modelo do Big Bang é que quanto mais recuamos no tempo, mais o universo era *dominado* por fótons: nos princípios do Universo, a energia devida às partículas com *massa de repouso* desempenhava um papel bem menor na evolução do Universo. A quantidade de energia na forma de radiação no Universo actual pode ser estimada usando a lei de Stefan-Boltzmann, se considerarmos o universo preenchido pela radiação cósmica de fundo à temperatura 2,7 K. Assim, a densidade de energia em equilíbrio é dada por $u=(4/\delta)\sigma T^4\sim 0,25\text{ MeV/m}^3$.
- Parece também existir uma energia de fundo associada aos neutrinos que parece ter uma temperatura perto de 1,9 K, estimando-se que existem cerca de 7/4 mais neutrinos que fótons, de acordo com o modelo “standard” do Universo. Tratando os neutrinos como partículas com «massa de repouso» igual a zero, obtém-se uma densidade de energia $\sim 0,11\text{ MeV/m}^3$. A densidade de energia total devida aos neutrinos e aos fótons é cerca de $u\sim 0,4\text{ MeV/m}^3$.
- As estimativas correntes da quantidade de massa no Universo é $\rho_{\text{massa}}/c^2\sim 10^{11}$ massas solares/ $\text{Mpc}^3\sim 0,5\text{ GeV/m}^3$, de forma que as correntes estimativas da quantidade de energia associada à matéria é cerca de mil vezes superior à energia da radiação.

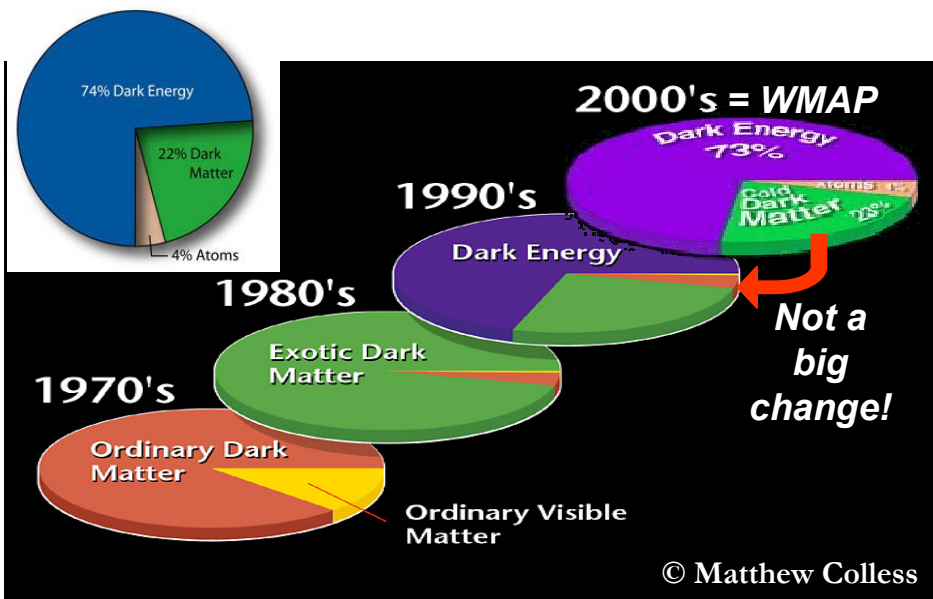
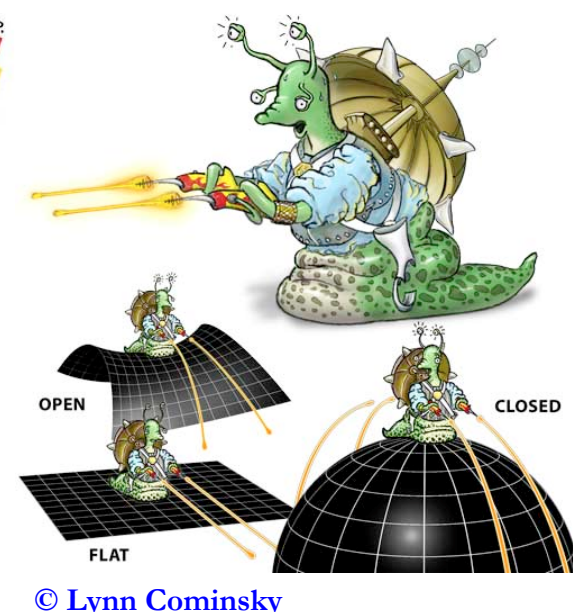
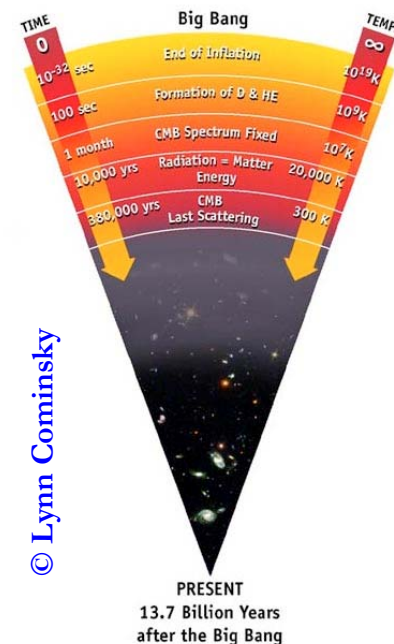
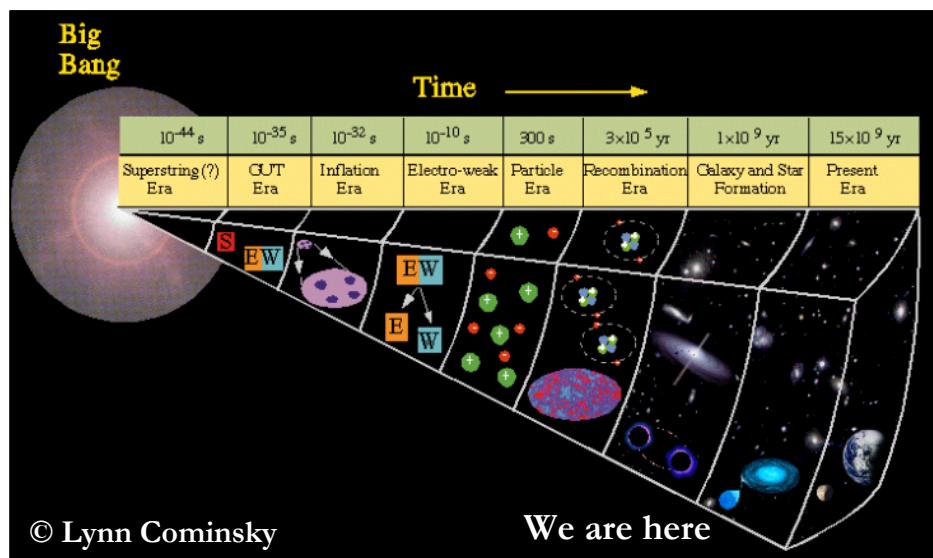
Temperatura, tempo de expansão e densidade de energia do Universo no modelo “standard” do Big Bang

- No modelo do Big Bang da expansão do Universo, o tempo de expansão pode ser obtido a partir do parâmetro de Hubble: $t_{\text{exp}}=1/H(t)$. O parâmetro de Hubble pode ser relacionado com o modelo de expansão usando a equação de Friedmann $t_{\text{exp}}=1/H(t)=\sqrt{(3c^2/8\pi G u)}$. No estágio inicial de expansão do universo, a densidade de energia era dominada pela radiação, sendo a contribuição da matéria desprezável. Nestas condições, a densidade de energia na equação de Friedmann pode ser associada ao campo de radiação e relacionada com a razão entre as temperaturas num dado instante de tempo e a temperatura da radiação cósmica de fundo actual, obtendo-se $u(T)\sim 0,4\text{ MeV/m}^3 [T/2,7\text{ K}]^4$ (recordar lei de Stefan-Boltzmann). Substituindo na equação de Friedmann obtém a expressão para o tempo de expansão do Universo em função da temperatura no fase inicial em que o Universo era dominado pela radiação: $t_{\text{exp}}=[2,7\text{ K}/T]^2\sqrt{(3c^2/8\pi G \times 0,4\text{ MeV/m}^3)}$.
- A igualdade das densidades de energia devida à matéria e devida à radiação ocorre à temperatura do ponto de transparência, cerca de 3000 K. A temperatura inferiores a este valor a densidade de energia é dominada pela matéria. A densidade de energia devida à matéria em função da temperatura é dada por $\rho_{\text{massa}}(T)\sim 0,5\text{ GeV/m}^3 [T/2,7\text{ K}]^3$. A expressão resultante para o tempo de expansão obtido a partir da equação de Friedmann é $t_{\text{exp}}=[2,7\text{ K}/T]^{3/2}\sqrt{(3c^2/8\pi G \rho_{\text{massa}})}$.
- No Universo dominado pela radiação onde $T\gg 3000\text{ K}$, a relação entre o tempo de expansão e a temperatura é $t_{\text{exp}}\sim 4\times 10^{20}\text{ sK}^2/T^2$.
- Para temperaturas $T\ll 3000\text{ K}$, a matéria domina em energia. Na era de domínio da matéria, o tempo de expansão e a temperatura estão relacionados por $t_{\text{exp}}=[2,7\text{ K}/T]^{3/2}\sqrt{(3c^2/8\pi G \rho_{\text{massa}})}$. Usando os valores da densidade de energia, $0,5\text{ GeV/m}^3$, então obtém-se para o tempo de expansão $4,5\times 10^9$ anos.
- Se se usar o valor crítico da densidade de energia associada à matéria, $\sim 5,5\text{ GeV/m}^3$, associada ao valor do parâmetro de Hubble de $72\text{ km}/(\text{s Mpc})$, o tempo de expansão correspondente à temperatura actual de $2,7\text{ K}$ é $13,6\times 10^9$ anos. O cálculo da densidade crítica obtém-se a partir da expressão de Weinburg ou $\rho_{\text{massa}}=M/[4\pi R^3/3]=3H^2/[8\pi G]$, onde M e R representam, respectivamente a *massa* e o *raio* do Universo.

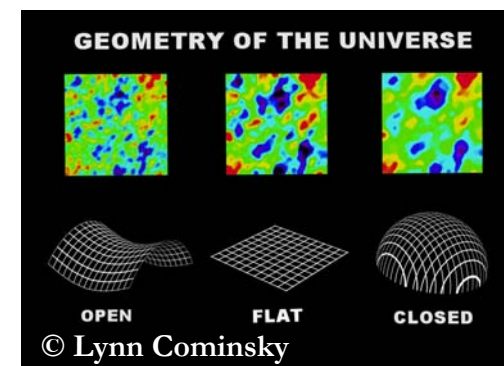
Universo: estado actual do conhecimento

IFQR 2005-2006

Apanhado para Introdução à Teoria da Relatividade; versão 001 (a melhorar)



Dos valores para a idade do Universo nas figuras acima e da página anterior (NY Times, 17-03-2006 – Fonte NASA e Johns Hopkins University), obtém-se para a «constante» de Hubble: $H \sim 22 \text{ km.s}^{-1}/10^6 \text{ anos-luz}$ ou $H \sim 73 \text{ km.s}^{-1}/\text{megaparsec}$.



Parsec s. m. (astr.) unidade de distância usada em astronomia, tal que uma estrela a um parsec de distância teria uma paralaxe anual de um segundo de arco equivalente a $3,086 \times 10^{13} \text{ km}$, 3,26 anos-luz (Do fr. parsec, «id.», de par[allax], «paralaxe» + sec [onde], «segundo»).

http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/dr2/map_bibliography.cfm
<http://crd.lbl.gov/~borrill/cmb/planck/AAS2006PlanckPoster.html>
 21-03-2006

Universo: *certezas, dúvidas e especulações*

IFQR 2005-2006

Apanhado para Introdução à Teoria da Relatividade; versão 001 (a melhorar)

- O universo evoluiu a partir de um estado mais denso e mais “quente”. (Convincente evidência obtida de muitas partes da Astronomia e da Física)
- O Universo expande-se conforme prevê a TRG. (Passa nos testes, mas poucos foram suficientemente rigorosos)
- A matéria escura composta por «partículas» *exóticas* domina as galáxias. (Muitas evidências indirectas, havendo teorias concorrentes.)
- A maior parte da massa do Universo está regularmente distribuída – parece agir como constante cosmológica de Einstein, parecendo acelerar a expansão do Universo. (Está em acordo com observações, mas existem muitos *enigmas* teóricos.)
- O Universo desenvolveu-se a partir da inflação. (teoria elegante, há «espera» de evidências directas, exigindo muita extrapolação das leis da Física)
- Parece que as primeiras estrelas do Universo eram muitas vezes mais densas e luminosas que o Sol (100 a 1000 massas solares; 4 a 14 vezes o raio do Sol; 1 milhão a 30 milhões mais luminosas; temperatura na superfície: ~100 000 K; tempo de vida: 3 milhões de anos – Sol: 10 mil milhões de anos).
- Verifica-se que 25% das supernovas distantes são mais «fracas» do que se havia previsto, o que parece indicar que a expansão do espaço está acelerando – evidência de uma nova forma de energia.
- Os mapas recentes da radiação cósmica de fundo (inflação) parecem indicar que o Universo é plano e está preenchido por matéria escura.
- Se o Universos se expandiu mais lentamente no passado, como sugerem as supernovas distantes, o Universo é mais “velho” do que se pensava.
- A maior parte da matéria parece ser formada por matéria escura, cuja origem é desconhecida. Se for confirmada a constante cosmológica, poderá corresponder a uma forma de energia escura em escalas cosmológicas.
- O espaço parece ser preenchido por partículas virtuais fugazes. (Ver efeito de **Casimir**.) Parece que o Universo foi, recentemente, dominado por um campo de energia invisível, que está a provocar a aceleração da expansão – a quinta essência (campo quântico)).
- Um quantum de energia exerce uma *força gravitacional* atractiva ou repulsiva dependendo da sua pressão: se a pressão for zero ou positiva – matéria e radiação convencional – a *força da gravidade* é atractiva. A quinta essência parece ter pressão negativa, sendo a sua força gravitacional repulsiva.
- A lei da gravidade de Newton, a força de atracção entre duas massa diminui com o inverso do quadrado da distância entre elas, tem sido testada para distâncias macroscópicas, funcionando bem até distâncias da ordem de 1 mm. Estudos da gravidade actuando sobre distâncias inferiores a 1 mm, podem revelar dimensões extra. Várias experiências estão em preparação. Estas dimensões reforçariam a produção dos objectos bizarros da gravidade quântica, como os micro-buracos negros, gravitões e supercordas, que poderão ser detectados, caso existam.
- O Large Hadron Collider permitirá *sondar* energias de TeV, esperando-se que ajude a desvendar a natureza da gravidade quântica (cordas, laços, etc.)
- A sonda Microwave Anisotropy Probe proporciona uma imagem mais detalhada do Universo primordial.
- O grande mistério para os cosmólogos é a série de eventos que ocorreram menos de um milésimo de segundo após o Big Bang. Talvez o Big Bang não tenha sido único. Podem existir muitos Universos.
- Detectar uma onda gravitacional é como observar que Saturno se aproximou do Sol de uma distância equivalente ao diâmetro do átomo de hidrogénio.
- Plano B para o cosmos: Varying-Speed-of-Light theory (VSL) – se a nova cosmologia falhar ...
- Ondas da inflação, padrões de polarização da radiação cósmica de fundo.

21-03-2006

<http://w3.ualg.pt/~jlongras/ensino.htm>

Problemas propostos (6)

1. Mostre que a frequência de um pêndulo de comprimento L , numa região onde a aceleração da gravidade é g , é dada por $\nu \sim 1/2\pi\sqrt{(m_g/m_i \times g/L)}$, onde m_g e m_i são as massas gravitacional e inercial da esfera na extremidade do pêndulo. (Newton fez experiências com o pêndulo para investigar uma possível diferença entre m_g e m_i ; Bessel demonstrou a igualdade $m_g=m_i$, usando este método, com a precisão de uma parte em 6×10^4 .)
2. A Terra está na periferia da Via Láctea. Faça uma estimativa do desvio gravitacional para o vermelho, observado na Terra, da luz emitida no centro da galáxia. O diâmetro e a massa da Via Láctea são $\approx 10^5$ anos-luz e $\approx 10^{42}$ kg. Trate a distribuição de massa na galáxia como aproximadamente uniforme.
3. Astrónomos observaram um objecto cósmico que irradiava intensamente na faixa das radiofrequências. Conseguiram identificar no espectro óptico uma linha característica do espectro atómico do oxigénio, que em condições normais no laboratório tem comprimento de onda $\lambda=372,7$ nm, com uma linha com $\lambda=509,7$ nm; verificaram, portanto, um significativo desvio do espectro para o vermelho. Estude as duas hipóteses seguintes: a) o objecto está na nossa galáxia e o desvio é *gravitacional*; b) o objecto está fora da nossa galáxia e afasta-se dela, sendo o desvio causado pelo efeito de Doppler. Será a primeira hipótese razoável? De acordo com a segunda hipótese, qual seria a velocidade e a distância do objecto em relação à Via Láctea? (Este objecto foi designado *quasar*) Sugestão: Calcule, na primeira hipótese, a razão entre a massa do objecto e a massa da nossa galáxia.
4. Numa experiência destinada a verificar a dilatação gravitacional do tempo, um oscilador maser é enviado num foguetão até à altitude de 10 000 km. A pulsação do maser é comparada com a de oscilador idêntico no laboratório terrestre. Calcule a relação dos tempos medidos por esses dois osciladores, quando o foguete está à altitude máxima.
5. Um satélite pertencente ao sistema GPS tem uma órbita circular com período 11 horas e 58 minutos. Se os receptores GPS não incorporassem correcções relativistas, a sua posição à superfície da Terra seria determinada com um erro da ordem de 1 km, ao passo que nos sistemas PGS o erro é de apenas alguns metros. a) determine o raio da órbita do satélite. b) calcule a sua velocidade orbital. c) O satélite possui osciladores que produzem um sinal GPS não-militar com frequência 1,57542 GHz, medido no referencial do satélite. Qual é a frequência do sinal recebido na superfície da Terra devido à «dilatação» do tempo? d) O desvio da frequência para o violeta previsto pela relatividade geral, pode ser obtido usando a expressão $\Delta f/f = \Delta U_g/mc^2$, ΔU_g representa a variação de energia potencial de um sistema objecto-Terra quando o objecto de massa m é deslocado entre os pontos correspondentes à emissão e à recepção do sinal. Determine a variação *fraccional* em frequência. e) Qual é a variação *fraccional* global em frequência? Sobreposto a estes dois efeitos relativistas, ocorre também o desvio por efeito de Doppler que é geralmente muito superior, podendo ser um desvio para o vermelho ou para o azul, consoante o satélite se afasta ou se aproxima do receptor (observador).

Bibliografia

- *Teoria da Relatividade Especial*, Ramayana Gazzinelli, Editora Edgard Blücher, Brasil 2005.
- *Subtil é o senhor - Vida e pensamento de Albert Einstein*, A. Pais, Gradiva 1993.
- *O Princípio da Relatividade*, H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski (Tradução do original alemão pelo Prof. Manuel dos Reis), Fundação Calouste Gulbenkian, 1971.
- *O Annus Mirabilis de Einstein - cinco artigos que revolucionaram a Física*, John Stachel, Gradiva, 2005.
- *Física*, G. Gerthsen, Kneser, H, Vogel, Fundação Calouste Gulbenkian, 1998.
- *O passado e o presente do Cosmos*, Scientific America Brasil, Edição espacial nº1, 2003.
- *Modern Physics*, P. A. Tripler and R. A. Llewellyn, W. H. Freeman and Company, 2002.
- *Physics for Scientists & Engineers (Physics for Scientists & Engineers With Modern Physics)* by Raymond A. Serway, Brooks/Cole Publishing Company 1999.
- *Tempo & Espaço*, Visual Ciências, Verbo, 1994.

Sítios da Internet

- <http://www.wikipedia.org/> (figuras e imagens)
- <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hframe.html> (figuras e imagens)
- Black Hole Merger Movie: <http://www.aip.org/png/2006/256.htm>
- The Lazarus Project: http://www.phys.utb.edu/numrel/research_dir/lazarus.html
- http://pt.wikipedia.org/wiki/P%C3%A1gina_principal