

Este livro inclui um ANEXO  
c/ 128 pág. de Resoluções



N.º DE CÓDIGO 930100

ISBN 972-650-165-2



9 789726 501657

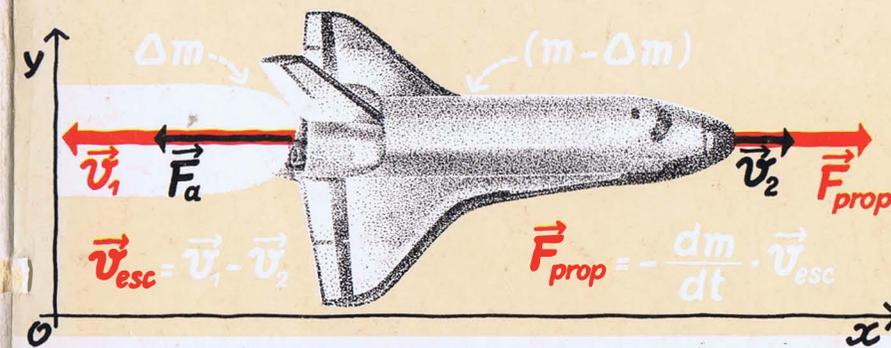
manual de **FÍSICA** • mecânica

# manual de **FÍSICA**

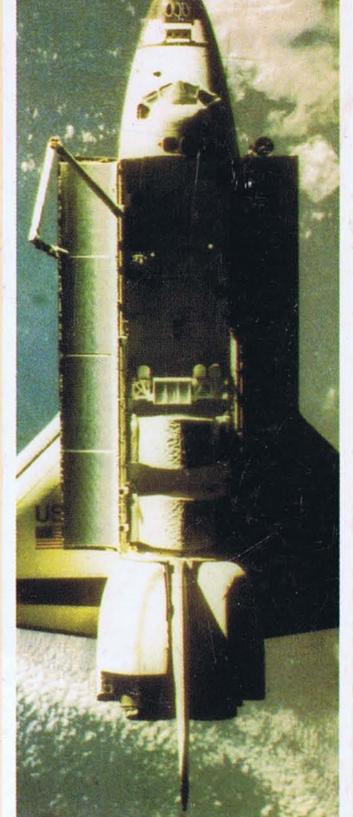
NOVA EDIÇÃO REFORMULADA

Luís Silva  
Jorge Valadares

**mecânica**  
12.º ano de escolaridade



Didáctica Editora



TELEFONO 40 40000000

PROFESORADO DE FÍSICA

INSTITUTO VENEZOLANO DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS  
LABORATORIO DE FÍSICA

# manual de FÍSICA

11.ª edição

DE - 1603- 1193

ISBN - 972 - 650 - 165 - 2

direitos  
reservados

© DIDÁCTICA EDITORA

Av. Ilha da Madeira, 26 - A - 1400 LISBOA

**DISTRIBUIÇÃO:** PLÁTANO EDITORA, SA

LISBOA: Rua João Ortigão Ramos, 29 - 29-B - Tel. 7649894 - 1500 LISBOA

CENTRO: Estrada Nacional n.º 1 - 365 Pedrulha - Tel. 20945 - 1300 COIMBRA

NORTE: Alicerce Editora, Lda. - R. Guerra Junqueiro, 456 - Tel. 699979 - 4100 PORTO

titulo MANUAL DE FÍSICA - 12.º Ano - (Mecânica)

autores LUÍS GONÇALVES DA SILVA  
JORGE ANTÓNIO VALADARES

capa  
arranjo gráfico  
e desenhos GABINETE TÉCNICO DA DIDÁCTICA EDITORA  
DAVID NOBRE/PEDRO MARTINS

composição FOTOCOMPOGRÁFICA

montagem PLÁTANO EDITORA, SA

impressão  
e acabamento PERES · Artes Gráficas  
Venda Nova - Amadora  
Dep. Legal n.º 68631/93

**Luís Silva • Jorge Valadares**

**Texto e Guia de Estudo**

**12<sup>o</sup>** ano de escolaridade

**manual de**

**FÍSICA**

**MECÂNICA**

Livro auxiliar deste volume:

ITEMS & PROBLEMAS DE FÍSICA

para o 12<sup>o</sup> ano de escolaridade  
**mecânica**

de | L. Silva  
J. Valadares  
G. de Almeida

## NOTA PRELIMINAR

1. As reacções de alunos de várias procedências no uso da 1.<sup>a</sup> edição, que procurámos conhecer, e as nossas reflexões pessoais, assim como as de alguns Colegas, levaram-nos a *reformular* profundamente o 1.<sup>o</sup> volume deste Manual. Não no seu conteúdo científico, que apenas melhorámos pontualmente, mas na sua didáctica e numa redistribuição de rubricas mais consentânea com a *maturidade* que o aluno vai progressivamente adquirindo.

Esta reformulação consistiu, essencialmente, nos seguintes pontos:

- 1.1 *Desdobramento das sete Unidades iniciais em dez Unidades, aumento significativo do número de questões* de compreensão e aplicação disseminadas no texto, *introdução de um teste de avaliação no final de cada Unidade*.  
Com estas alterações procurámos *facilitar a aprendizagem* mediante uma sequência programática mais adequada ao amadurecimento dos conceitos e à *elaboração mais atempada e eficaz* de testes de avaliação.
- 1.2 *Utilização*, nas soluções de questões, da linha metodológica das «*resoluções normalizadas*», abrangedoras e simplificadoras em termos de conceitos, sem serem mecanizadoras.
- 1.3 Recurso sistemático aos «*diagramas da partícula livre*», onde se representam somente as *forças actuantes* (aplicadas e de ligação), evitando-se, assim, a mistura e frequente confusão com a sua resultante. Esta, quando necessária, representamo-la geralmente por  $\vec{m\vec{a}}$ .
- 1.4 *Antecipação dos temas trabalho, energia cinética e conservação da energia*, para se poderem explorar mais completamente as questões dinâmicas.
- 1.5 Utilização dos referenciais acelerados somente depois de o aluno já ter consolidada a sua técnica de análise das questões nos referenciais inerciais.

2. Estas opções, que pensamos serem as que podem obter maior consenso, conduziram-nos à seguinte distribuição das rubricas do programa:

### **Unidade 1 — Cinemática da partícula**

Excluimos a cinemática do corpo rígido, a fim de o professor poder transitar mais cedo para a Dinâmica, onde o aluno tem menos dificuldades, e de permitir um estudo mais coerente da própria Dinâmica da rotação.

### **Unidade 2 — As leis de Newton do movimento**

Integrou-se nesta Unidade o *equilíbrio da partícula*, aligeirando o conteúdo da Estática e ajudando o aluno a utilizar correctamente os «diagramas da partícula livre» nas questões dinâmicas.

### **Unidade 3 — As leis de força**

É uma unidade essencialmente prática. As leis são introduzidas sumariamente e como ferramenta no tratamento das questões dinâmicas, em particular naquelas em que entram forças resistentes, com particular incidência nas forças de atrito.

### **Unidade 4 — Trabalho e energia cinética**

A utilização das expressões do trabalho com integrais é feita numa perspectiva de compreensão e rigor, e as aplicações correspondentes cingem-se aos casos em que o integral é calculável por uma área geométrica simples e conhecida.

A apresentação, aqui pertinente, da lei do trabalho-energia vai facilitar a compreensão da lei da conservação da energia.

#### **Unidade 5 — Conservação da energia**

Foi suprimida a linguagem de campo, porque este é estudado no 2.º volume, Ondas e Campos. Trata das forças conservativas e da conservação da energia mecânica. Aborda, depois, a lei geral da conservação da energia nas situações em que a massa das partículas é invariável.

#### **Unidade 6 — Conservação do momento linear**

Inclui o conceito de impulso e sua relação geral com a variação do momento linear. Inclui, ainda, o movimento do centro de massa, o movimento dos sistemas de massa variável e as colisões.

#### **Unidade 7 — Movimento em referenciais acelerados**

Estudam-se as forças de inércia e comparam-se as descrições do movimento nos referenciais acelerados e nos referenciais inerciais.

#### **Unidade 8 — Cinemática e dinâmica da rotação**

Abordamos, em primeiro lugar, o estudo da rotação em torno de um eixo fixo, utilizando apenas grandezas escalares. A seguir, apresentamos, vectorialmente, as grandezas cinemáticas da rotação. Para isso, antecipa-se e integra-se o estudo dos momentos de forças.

#### **Unidade 9 — Estática dos corpos rígidos**

Ficou simplificada e reduzida, devido às integrações feitas nas Unidades 2 e 8.

#### **Unidade 10 — Mecânica dos fluidos**

Mantém-se a estrutura, à parte melhorias pontuais, correcção de gralhas e acrescentamento de questões novas.

**Guias de Estudo** — Completam o desenvolvimento do texto e apresentam a informação matemática necessária. Salientamos em particular os **G.E.** da Unidade 1: estão sobrecarregados com as noções matemáticas que constituem ferramenta importante para o estudo da Física, tanto a este nível como a níveis mais avançados. São noções relacionadas com vectores, *derivadas* de escalares e de vectores, *produto interno de vectores* e *diferenciais* — algumas delas já estudadas nos programas de Matemática dos 10.º e 11.º anos. Estas noções são expostas de modo análogo ao seguido pelos professores de Matemática e constituem uma proposta de estudo, parcialmente facultativo, mas utilíssimo para o aprofundamento de **toda** a matéria deste Manual. Caberá aos Professores decidir *até que ponto, quando e como* deverão utilizar esta ferramenta.

Decidimos ainda introduzir o *operador integral*, como sequência apropriada à apresentação da diferencial. Embora os textos das Unidades possam ser estudados sem o recurso ao integral, o professor e alguns alunos mais interessados podem optar por utilizá-lo oportunamente. Com isso aumentarão a compreensão e aquisição segurança no tratamento de alguns problemas do movimento e do trabalho. Nos cursos superiores estas noções constituem ferramenta obrigatória e são em geral expostas sem ligação com as grandezas físicas.

Lisboa, Setembro de 1986.

OS AUTORES

## Unidades mecânicas SI de base

Aprovadas pelo Decreto-Lei n.º 320/84, de 1 de Outubro,  
com a redacção rectificada de 28 de Fevereiro de 1985  
(Ministério da Indústria e Tecnologia)

### 1. Unidade de comprimento:

O **metro** é o comprimento do trajecto percorrido no vazio pela luz, durante um intervalo de tempo de  $1/299\,792\,458$  s.

(17.<sup>a</sup> C G P M — 1983 — Resolução A.)

### 2. Unidade de tempo:

O **segundo** é a duração de  $9\,192\,631\,770$  períodos da radiação correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de céscio 133.

(13.<sup>a</sup> C G P M — 1967 — Resolução 1.)

### 3. Unidade de massa:

O **quilograma** é a unidade de massa e é igual à massa do protótipo internacional do quilograma.

(3.<sup>a</sup> C G P M — 1901 — p. 70 das actas.)

### 4. Unidade de quantidade de matéria:

A **mole** é a quantidade de matéria de um sistema contendo tantas entidades elementares quantos os átomos que existem em  $0,012$  kg de carbono 12.

Quando se utiliza a mole, as entidades elementares devem ser especificadas e podem ser átomos, moléculas, iões, electrões, outras partículas ou agrupamentos especificados de tais partículas.

(14.<sup>a</sup> C G P M — 1971 — Resolução 3.)

Section 10: Introduction to Algebra

Section 10: Introduction to Algebra  
This section covers the basic operations of algebra, including addition, subtraction, multiplication, and division of integers and fractions.

Section 10.1: Addition and Subtraction

Section 10.1: Addition and Subtraction  
This section covers the basic operations of addition and subtraction of integers and fractions. It includes examples and exercises to help you understand the rules for adding and subtracting.

Section 10.2: Multiplication and Division

Section 10.2: Multiplication and Division  
This section covers the basic operations of multiplication and division of integers and fractions. It includes examples and exercises to help you understand the rules for multiplying and dividing.

Section 10.3: Order of Operations

Section 10.3: Order of Operations  
This section covers the order of operations, which is a set of rules that tells you in what order to evaluate the parts of an expression. It includes examples and exercises to help you understand the rules.

Section 10.4: Properties of Real Numbers

Section 10.4: Properties of Real Numbers  
This section covers the properties of real numbers, including the commutative, associative, and distributive properties. It includes examples and exercises to help you understand these properties.

«Sem dúvida, a *ciência* não é perfeita e pode ser mal utilizada, mas é de longe o melhor instrumento que possuímos, que se corrige a si próprio, que progride sem cessar, que se aplica a tudo. Obedece a duas regras fundamentais:

segundo a primeira, não existem verdades sagradas, todas as asserções têm de ser examinadas cuidadosamente, com espírito crítico, não têm valor os argumentos de autoridade;

de acordo com a segunda, temos de rever ou afastar tudo aquilo que está em contradição com os factos.»

CARL SAGAN, Prof. e astrofísico norte-americano, in *Cosmos*, Lisboa, Gradiva — Publicações, Ld.<sup>a</sup>, 1984, cap. XIII.

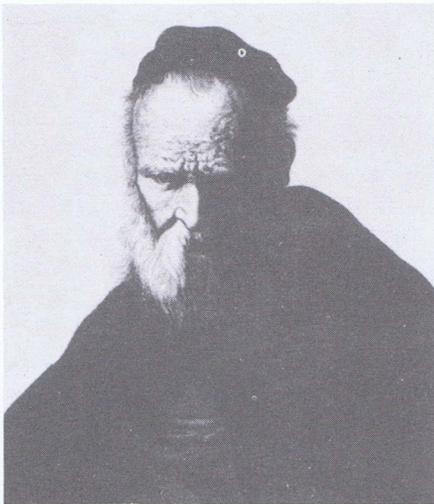
...the ...  
...the ...  
...the ...  
...the ...  
...the ...  
...the ...

...the ...  
...the ...

# Cinemática da partícula

UNIDADE

# 1



**Aristóteles** (384-332 a. C.)

Nasceu em *Estagira*. Filho de médico, teve educação esmerada. Foi discípulo de *Platão* em Atenas. De feitio tímido, revelou-se como um dos maiores génios da Antiguidade em vários ramos do conhecimento.

Adepto do geocentrismo, reforçou os conceitos de «lugar natural» e de «movimento natural», que distinguia de «movimento violento» ou provocado por forças. Aceitava o *senso comum*, segundo o qual um corpo não actuado por forças acaba sempre por parar. As suas concepções mecânicas perduraram até ao tempo de *Galileu* (séc. XVI).



**Descartes** (1596-1650)

Filósofo, físico e matemático francês, viveu na Holanda, onde escreveu a maior parte das suas obras. Transferiu-se mais tarde para Estocolmo, a convite da rainha Cristina, e aqui veio a falecer.

Foi um verdadeiro apóstolo do *método dedutivo*, que procurou aplicar tanto na Física como na Metafísica.

Na Física apoiou também o método experimental, tendo criações notáveis, especialmente no domínio da Óptica. Lançou as bases da *Geometria Analítica*. Os seus referenciais permitiram simplificar e desenvolver o estudo da Mecânica.

- 1.1** Objectivo fundamental da Cinemática
- 1.2** Equação do movimento
  - 1.2.1 Movimento no plano
  - 1.2.2 Movimento no espaço tridimensional
- 1.3** Equações paramétricas de um movimento  
Equação da trajectória
- 1.4** Deslocamento de uma partícula e suas componentes
- 1.5** Revisão e extensão dos conceitos de celeridade (ou rapidez) e velocidade
  - 1.5.1 Velocidade média —  $\vec{v}_m$   
Celeridade (ou rapidez) média,  $c_m$
  - 1.5.2 Velocidade instantânea
  - 1.5.3 O módulo (ou medida) da velocidade como derivada da equação do espaço
- 1.6** Revisão e extensão dos conceitos de aceleração média e aceleração instantânea
  - 1.6.1 Aceleração média de uma partícula
  - 1.6.2 Aceleração instantânea de uma partícula
- 1.7** Revisão e extensão do estudo dos movimentos rectilíneos
  - 1.7.1 Movimento uniforme e rectilíneo
  - 1.7.2 Movimento uniformemente variado e rectilíneo
- 1.8** Revisão e extensão do estudo do movimento circular uniforme
  - 1.8.1 Característica
  - 1.8.2 Rapidez média ou celeridade média
  - 1.8.3 Velocidade média
  - 1.8.4 Velocidade angular,  $\vec{\omega}$
  - 1.8.5 Velocidade linear,  $\vec{v}$
  - 1.8.6 Aceleração do movimento circular uniforme
- 1.9** Revisão e extensão do estudo do movimento geral de uma partícula num plano
  - 1.9.1 A aceleração no movimento variado no plano
  - 1.9.2 Estudo de mais um movimento plano com aceleração constante  
— o movimento dos projectéis
  - 1.9.3 Referência ao movimento dos projectéis no ar
- 1.10** Os corpos em translação considerados como partículas



Fig. 1.1.1. Movimento circular uniforme

Este capítulo trata da cinemática da partícula, ou seja, do estudo do movimento de um corpo considerado como uma partícula. O movimento é descrito em termos de posição, velocidade e aceleração em função do tempo. São abordados os movimentos rectilíneos, circulares e gerais no plano.

# Cinemática da partícula

1

## 1.1 Objectivo fundamental da Cinemática

Dissemos no 10.<sup>o</sup> ano que a **Cinemática** é a secção da Física onde se estuda o movimento. Este estudo, porém, não consiste em explicar o movimento mas, apenas, em **descrevê-lo** no sentido estritamente geométrico, ou seja: restringe-se à escolha de um referencial e ao registo, em termos matemáticos, do modo como as sucessivas posições do móvel vão sendo ocupadas no decurso do tempo.

Por isso, o objectivo da Cinemática circunscreve-se, fundamentalmente, ao problema seguinte: partindo da **posição presente** do móvel, num dado referencial, determinar a sua **posição futura** no mesmo referencial; ou por outras palavras: dado o *aqui* e *agora* do móvel — posição e instante iniciais para um determinado observador, prever o *ali* e *depois* do móvel em relação ao mesmo observador.

## 1.2 Equação do movimento

### 1.2.1 Movimento no plano

Consideremos uma trajectória plana ( $T$ ), não rectilínea, percorrida por uma **partícula** (móvel de dimensões desprezáveis em relação à medida da trajectória), e escolhamos para *referencial*, no plano da trajectória, um sistema de dois eixos perpendiculares,  $Ox$  e  $Oy$  — fig. 1.1. Um referencial nestas condições não é mais do que o *referencial ortonormado* — ou referencial *o.n.* — de base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ , utilizado na Matemática, mas, aqui, ligado a um corpo físico. Este referencial define um espaço físico bidimensional.

Na fig. 1.1, (a), a partícula acaba de atingir a posição  $P(x_1, y_1)$  no instante  $t_1$ . Essa posição  $P$  corresponde à extremidade do **vector posição**:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{1x} + \vec{r}_{1y} = r_{1x}\vec{u}_x + r_{1y}\vec{u}_y$$

Na fig. 1.1, (b), a partícula passou para uma nova posição  $Q(x_2, y_2)$  no instante  $t_2$ . Essa nova posição pode também ser definida à custa do **novoo vector posição**:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{2x} + \vec{r}_{2y} = r_{2x}\vec{u}_x + r_{2y}\vec{u}_y$$

G.E.1.2 ◀

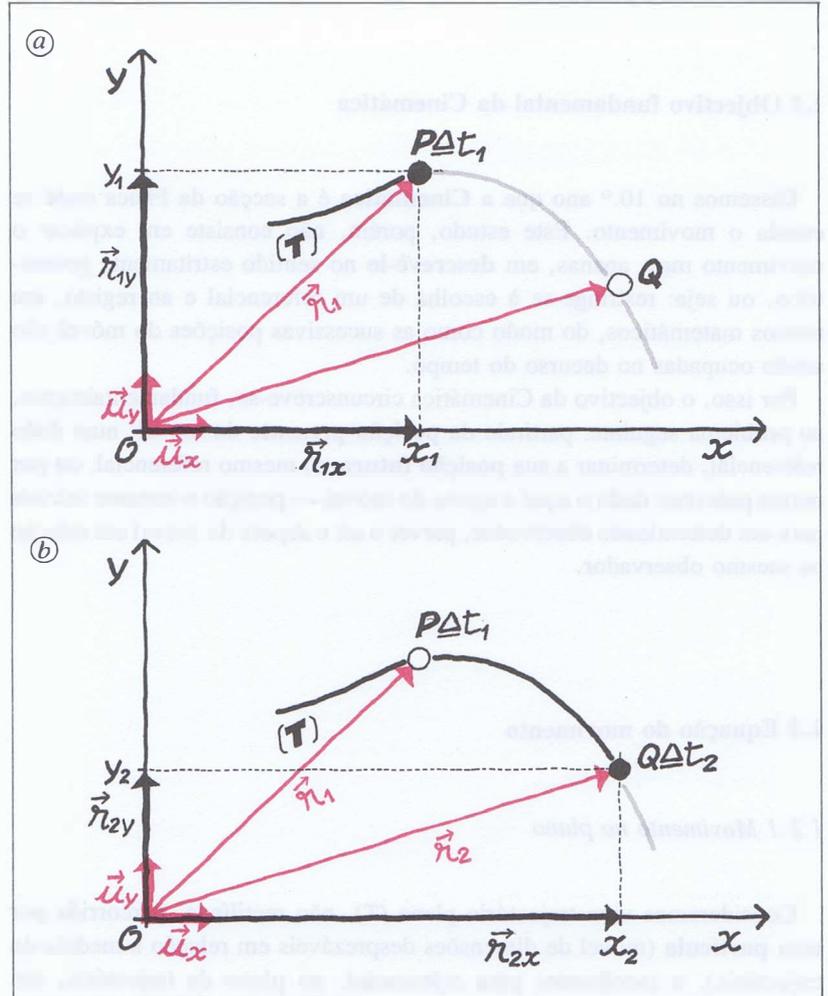


Fig. 1.1

- (a) Um móvel percorre uma trajetória (T), atingindo, no instante  $t_1$ , a posição P, definida pelo vector posição  $\vec{r}_1$  relativamente ao referencial  $(O, x, y)$ .
- (b) Prosseguindo na sua trajetória, o móvel atinge, no instante  $t_2$ , a posição Q, definida pelo vector posição  $\vec{r}_2$  no mesmo referencial.

Os vectores  $\vec{r}_{1x}$  e  $\vec{r}_{1y}$ ,  $\vec{r}_{2x}$  e  $\vec{r}_{2y}$ , que têm as direcções dos eixos coordenados e cujas somas dão os vectores posição,  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$ , respectivamente (fig. 1.1), são designados por **componentes vectoriais**, **componentes axiais** ou **vectores componentes**.

Cada um dos vectores componentes é o produto de um escalar algébrico (positivo ou negativo) pelo versor do eixo:

$$\vec{r}_{1x} = r_{1x} \vec{u}_x, \quad \vec{r}_{1y} = r_{1y} \vec{u}_y, \quad \text{etc.}$$

A estes escalares algébricos,  $r_{1x}$ ,  $r_{1y}$ ,  $r_{2x}$ ,  $r_{2y}$ , chamamos simplesmente **componentes** (ou *componentes escalares*). Pelo facto de a origem do vector posição coincidir com a origem  $O$  (0, 0) do referencial, as **componentes** do vector posição coincidem com as **coordenadas** da posição do móvel. Assim, por exemplo, no caso da fig. 1.1, (a), tem-se:

$$r_{1x} = x_1 \text{ e } r_{1y} = y_1$$

Deste modo os vectores posição  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$ , fig. 1.1, serão dados pelas expressões:

$$\vec{r}_1 = x_1 \vec{u}_x + y_1 \vec{u}_y$$

e

$$\vec{r}_2 = x_2 \vec{u}_x + y_2 \vec{u}_y$$

Em face do exposto, podemos concluir que, se conhecermos o modo como o vector posição  $\vec{r}$  vai variando no decurso do tempo, isto é, se conhecermos a equação genérica, vectorial,

$$\vec{r} = \vec{f}(t)$$

(ler:  $\vec{r}$  igual a função da variável  $t$ ),

ficamos a conhecer o movimento da partícula.

Com efeito, ficamos a saber, em cada instante, a posição da partícula.

Além disso, como veremos a seguir, esta equação vectorial — designada por **equação do movimento** — permite-nos ainda:

- determinar o *deslocamento*  $\Delta \vec{r}$  correspondente a um intervalo de tempo  $\Delta t$ ;
- escrever a *equação da trajectória*;
- determinar *velocidades e acelerações* instantâneas.

Um exemplo concreto de uma equação do movimento é:

$$\vec{r} = 3t^2 \vec{u}_x - 2t \vec{u}_y$$

Concluimos assim que a equação do movimento permite resolver o problema fundamental da Cinemática.

### ► G.E.1.3

#### Súmula

1.1

A **equação** de qualquer **movimento** plano,

$$\vec{r} = \vec{f}(t),$$

permite a descrição desse movimento.

O vector posição,  $\vec{r}$ , pode considerar-se a soma de dois *vectores componentes*, segundo os eixos:

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y$$

E estes também variam no tempo.

Em função das *componentes escalares* e dos *versores* dos eixos, o vector posição é dado por:

$$\vec{r} = r_x \vec{u}_x + r_y \vec{u}_y \iff$$

$$\vec{r} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y$$

### 1.2.2 Movimento no espaço tridimensional

Consideremos agora uma *trajectória não plana* ( $T$ ), também chamada *enviesada* ou *torsa*, necessariamente não rectilínea porque não pode assentar num plano — fig. 1.2.

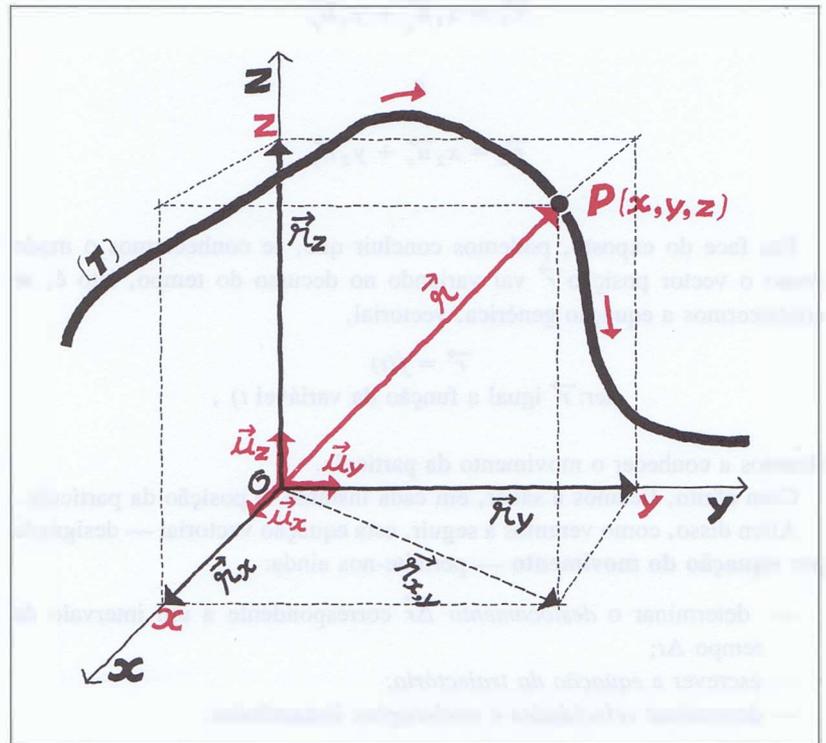
Escolhamos para referencial um sistema de três eixos perpendiculares,  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ , orientados do modo indicado na figura. Este sistema constitui um *referencial cartesiano ortonormado* de base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , ligado a um corpo físico e definindo um espaço físico tridimensional.

Cada uma das posições sucessivas da partícula é agora definida por três coordenadas,  $x, y, z$  — fig. 1.2.

O respectivo **vector posição**,  $\vec{r}$ , apresenta, por isso, três *componentes axiais* e três *componentes escalares*:

#### G.E.1.4 ◀

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z = r_x \vec{u}_x + r_y \vec{u}_y + r_z \vec{u}_z \\ &= x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z\end{aligned}$$



**Fig. 1.2** O vector posição referente ao ponto  $P(x, y, z)$  da trajectória ( $T$ ) é o vector  $\vec{r}$ , soma de dois vectors perpendiculares:

$$\vec{r} = \vec{r}_{x,y} + \vec{r}_z$$

Como o vector  $\vec{r}_{x,y}$  é a soma dos dois vectors componentes,  $\vec{r}_x + \vec{r}_y$ , temos:

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z \iff$$

$$\vec{r} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

O módulo do vector  $\vec{r}$  — fig. 1.2, que corresponde, em Matemática, à sua *norma* na base ortonormada  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , obtém-se pela raiz quadrada positiva da soma dos quadrados das componentes:

$$|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

**Q 1.1**

Uma partícula em movimento plano, num dado instante,  $t$ , passa pelo ponto  $P(-4,3)$  m.

1. Definir cartesianamente o vector posição nesse instante, relativamente à origem do referencial.
2. Expressir os vectores componentes e indicar as componentes.
3. Qual é o módulo (ou *norma*) desse vector posição?

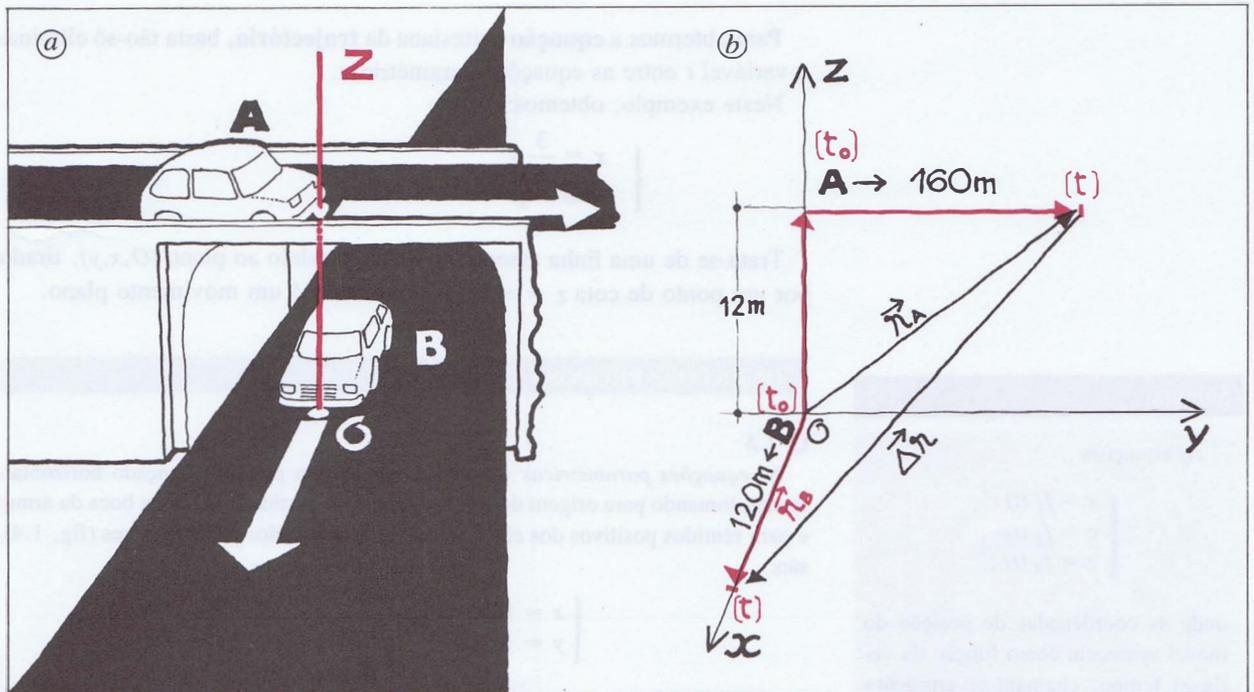
**Q 1.2**

Dois estradas, rectas e horizontais, cruzam-se perpendicularmente, uma por cima e outra por baixo de uma ponte de 12 m de altura — fig. 1.3.

Num dado instante inicial,  $t_0$ , dois carros  $A$  e  $B$  passam exactamente um por cima do outro, isto é, pela mesma vertical.

Num instante posterior,  $t$ , o carro  $A$  percorreu 160 m, contados a partir do instante  $t_0$ ; e o carro  $B$  percorreu, nas mesmas condições, 120 m.

Que distância separa os carros nesse instante  $t$ ?



**Fig. 1.3** A distância entre os carros  $B$  e  $A$ , no instante  $t$ , é o módulo (ou *norma*) do vector diferença dos vectores posição:

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

### 1.3 Equações paramétricas de um movimento

#### Equação da trajectória

Quando uma partícula se move, as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  da partícula no referencial escolhido — fig. 1.2 — vão variando no decurso do tempo. São, pois, funções da variável tempo:

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases}$$

Estas equações, que traduzem a variação, no tempo, das coordenadas de posição do móvel (e, portanto, das componentes do vector posição em relação à origem), chamam-se **equações paramétricas** do movimento. É com elas que vulgarmente se trabalha.

Assim, se a equação de um dado movimento for

$$\vec{r} = 3t^2 \vec{u}_x - 2t \vec{u}_y - \vec{u}_z,$$

as equações paramétricas serão

$$x = 3t^2, \quad y = -2t, \quad z = -1$$

Para obtermos a **equação cartesiana da trajectória**, basta tão-só eliminar a variável  $t$  entre as equações paramétricas.

Neste exemplo, obtemos:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}y^2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Trata-se de uma linha assente no plano paralelo ao plano  $(O, x, y)$ , tirado por um ponto de cota  $z = -1$ . O movimento é um movimento plano.

#### Súmula

1.2

As equações

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases}$$

onde as coordenadas de posição do móvel aparecem como função da variável tempo, chamam-se **equações paramétricas do movimento**.

A equação da trajectória obtém-se eliminando a variável  $t$  entre as equações paramétricas.

#### QUESTÕES PROPOSTAS

##### Q 1.3

As equações paramétricas do movimento de um projectil, lançado horizontalmente, tomando para origem dos eixos o ponto de partida (à saída da boca da arma) e para sentidos positivos dos eixos os que estão indicados pelos versores (fig. 1.4), são:

$$\begin{cases} x = 100t \\ y = -5,0t^2 \end{cases}$$

O alvo foi atingido ao fim de 2,0 s.

1. Escrever a equação do movimento.
2. Determinar a posição do alvo.
3. Determinar a distância a que se encontra o alvo.
4. A distância anterior coincide com o espaço percorrido pelo projectil?
5. Escrever a equação da trajectória e classificar esta.

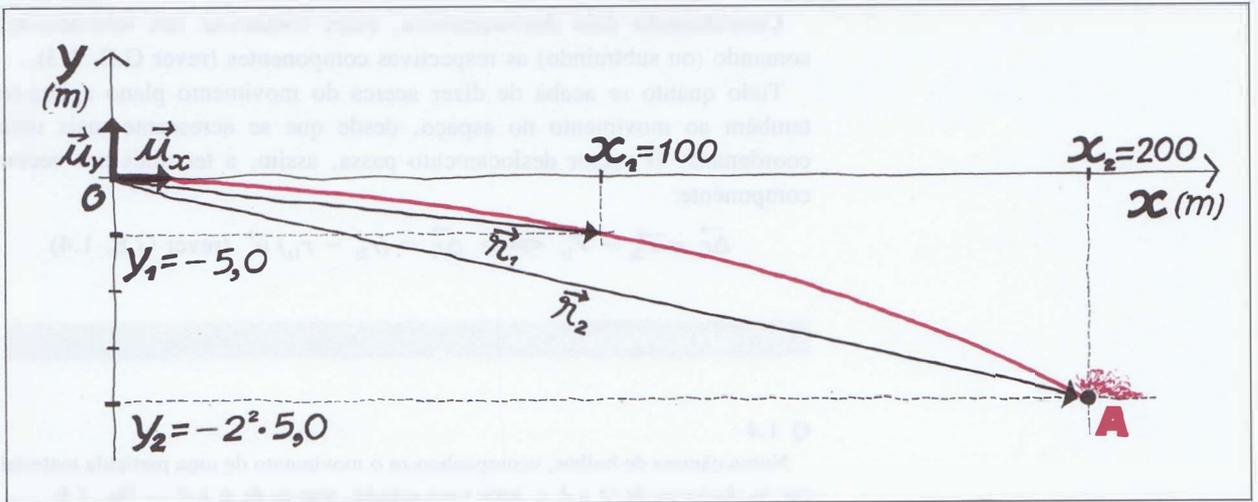


Fig. 1.4 Disparo horizontal de um projectil.

### 1.4 Deslocamento de uma partícula e suas componentes

Chama-se **deslocamento** de uma partícula entre dois instantes  $t_1$  e  $t_2$ , fig. 1.5, o vector  $\vec{\Delta r}$  que liga as posições correspondentes a esses instantes.

Como diferença que é de dois vectores posição

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (\text{fig. 1.5}),$$

o deslocamento tem como componentes vectoriais:

$$\begin{cases} \vec{\Delta r}_x = r_{2x} - r_{1x} \\ \vec{\Delta r}_y = r_{2y} - r_{1y} \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{\Delta r}_x = (r_{2x} - r_{1x}) \vec{u}_x \\ \vec{\Delta r}_y = (r_{2y} - r_{1y}) \vec{u}_y \end{cases}$$

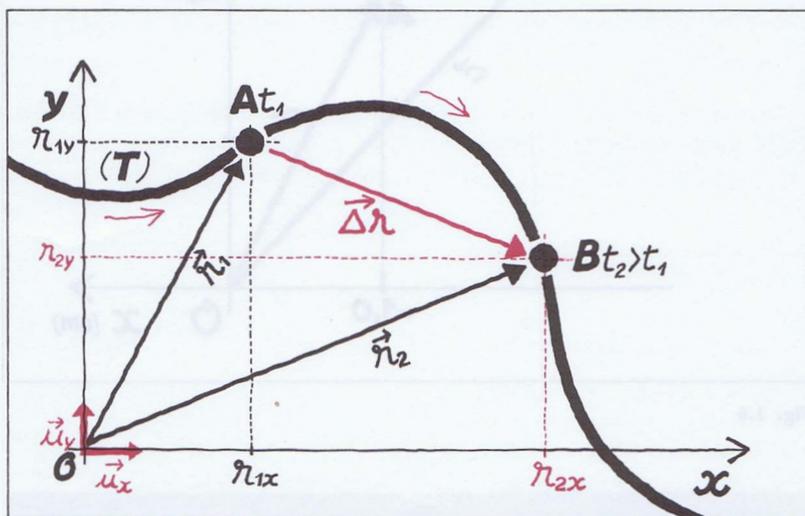


Fig. 1.5 O deslocamento de uma partícula móvel num plano, entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ , é o vector

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Considerando dois deslocamentos, estes somam-se (ou subtraem-se) somando (ou subtraindo) as respectivas componentes (rever G.E. 1.3).

Tudo quanto se acaba de dizer acerca do movimento plano aplica-se também ao movimento no espaço, desde que se acrescente mais uma coordenada. O vector deslocamento passa, assim, a ter mais um vector componente:

$$\vec{\Delta r}_z = \vec{r}_{2z} - \vec{r}_{1z} \iff \Delta r_z = (r_{2z} - r_{1z}) \vec{u}_z \quad (\text{rever G.E. 1.4})$$

### QUESTÕES PROPOSTAS

#### Q 1.4

Numa câmara de bolhas, acompanhou-se o movimento de uma partícula material que se deslocou de  $O$  a  $A$  e, após uma colisão, seguiu de  $A$  a  $P$  — fig. 1.6.

No sistema de eixos representado, o ponto  $A$  tem as coordenadas  $(-1,0; 2,0)$  cm, e o segundo deslocamento,  $b = AP$ , sofrido pela partícula tem o módulo  $2,0$  cm e a direcção definida pelos ângulos  $60^\circ$  e  $150^\circ$  representados. A que posição final  $P$  foi parar a partícula?

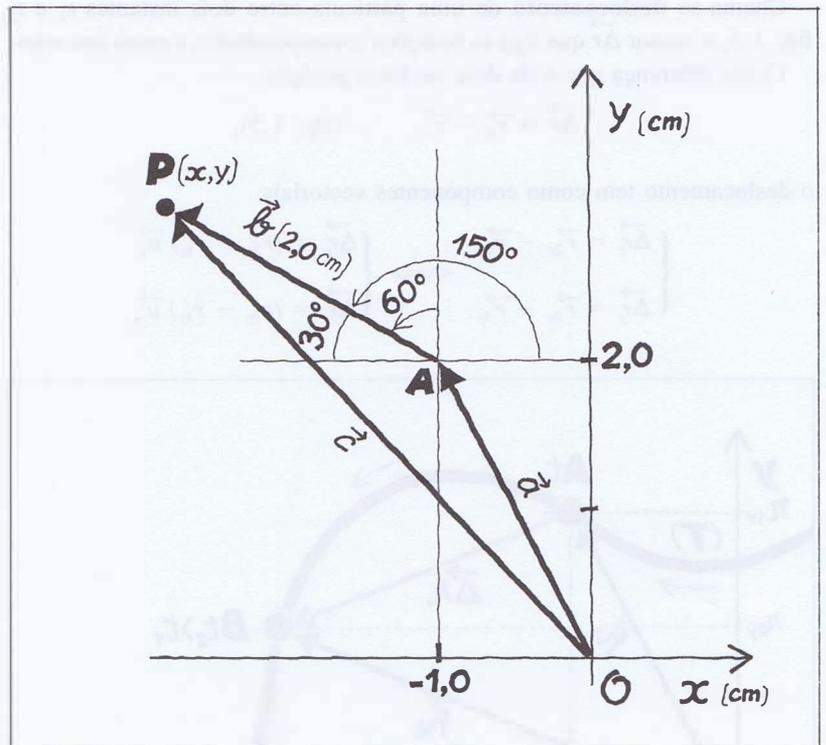


Fig. 1.6

## 1.5 Revisão e extensão dos conceitos de celeridade (ou rapidez) e velocidade

### 1.5.1 Velocidade média — $\vec{v}_m$

Celeridade (ou rapidez) média —  $c_m$

Consideremos uma partícula a mover-se ao longo de uma trajectória ( $T$ ), num referencial ( $O, x, y, z$ ) — fig. 1.7.

No instante  $t$ , a partícula está na posição  $P$ , e no instante posterior,  $t + \Delta t$ , encontra-se na posição  $Q$ .

O espaço percorrido entre os instantes  $t$  e  $t + \Delta t$  foi

$$\Delta s = \widehat{PQ},$$

ou seja o comprimento da porção da trajectória compreendida entre  $P$  e  $Q$ .

O deslocamento, entre os instantes  $t$  e  $t + \Delta t$ , foi

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P$$

Trata-se de um vector que une a posição inicial com a posição final no referencial escolhido e que, por isso, só dá informações sobre as posições extremas do móvel e não sobre a medida da trajectória descrita.

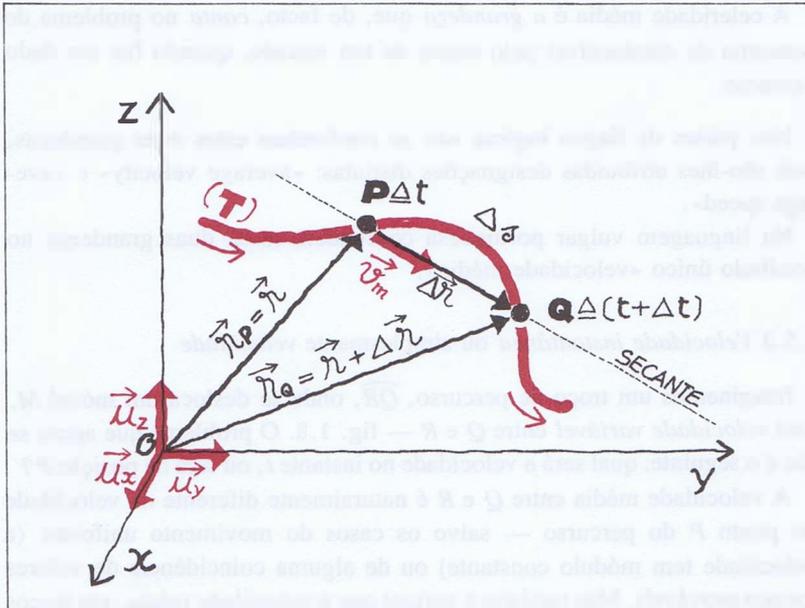


Fig. 1.7 A velocidade média, durante o intervalo de tempo  $\Delta t$  (ou seja: entre as posições  $P$  e  $Q$ ), é:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$$

## A — Velocidade média

A **velocidade média**, que é o vector

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t},$$

mede a rapidez com que, em média, o móvel *muda de posição*, quer dizer: indica o *deslocamento*  $\vec{\Delta r}$  que o móvel teria em cada unidade de tempo se o deslocamento total,  $\vec{\Delta r}$ , fosse repartido igualmente pelo número de unidades de tempo contidas no intervalo  $\Delta t$ .

No SI a velocidade média mede-se em  $\text{ms}^{-1}$ .

## B — Celeridade média ou rapidez média

A **celeridade média** ou **rapidez média** é o escalar

$$c_m = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

Este escalar mede o espaço percorrido, em média, por unidade de tempo, isto é: indica o espaço que o móvel percorreria em cada unidade de tempo se o espaço total,  $\Delta s$ , fosse repartido igualmente pelo número de unidades de tempo contidas no intervalo  $\Delta t$ . É, assim, uma medida da rapidez com que o móvel percorre a trajectória e, no SI, exprime-se em  $\text{ms}^{-1}$ .

A celeridade média é a *grandeza* que, de facto, *conta* no problema do consumo de combustível pelo motor de um veículo, quando faz um dado percurso.

Nos países de língua inglesa não se confundem estas duas grandezas, pois são-lhes atribuídas designações distintas: «average velocity» e «average speed».

Na linguagem vulgar portuguesa confundem-se as duas grandezas no vocábulo único «velocidade média».

### 1.5.2 Velocidade instantânea ou simplesmente *velocidade*

Imaginemos um troço de percurso,  $\overline{QR}$ , onde se desloca um móvel  $M$ , com *velocidade variável* entre  $Q$  e  $R$  — fig. 1.8. O problema que agora se põe é o seguinte: qual será a velocidade no instante  $t$ , ou seja na posição  $P$ ?

A velocidade média entre  $Q$  e  $R$  é naturalmente diferente da velocidade no ponto  $P$  do percurso — salvo os casos do movimento uniforme (a velocidade tem módulo constante) ou de alguma coincidência de valores (pouco provável). Mas também é natural que a velocidade média, em troços do percurso cada vez menores,  $S_a$  (antes de  $P$ ) —  $S_d$  (depois de  $P$ ),  $T_a$  (antes de  $P$ ) —  $T_d$  (depois de  $P$ ), se aproxime, sucessivamente e cada vez mais, da velocidade na posição  $P$ , ou seja no instante  $t$ . Para um intervalo de tempo  $\Delta t$ , muito pequeno, que englobe o instante  $t$ , a velocidade média já coincidirá praticamente com a velocidade no instante  $t$ .

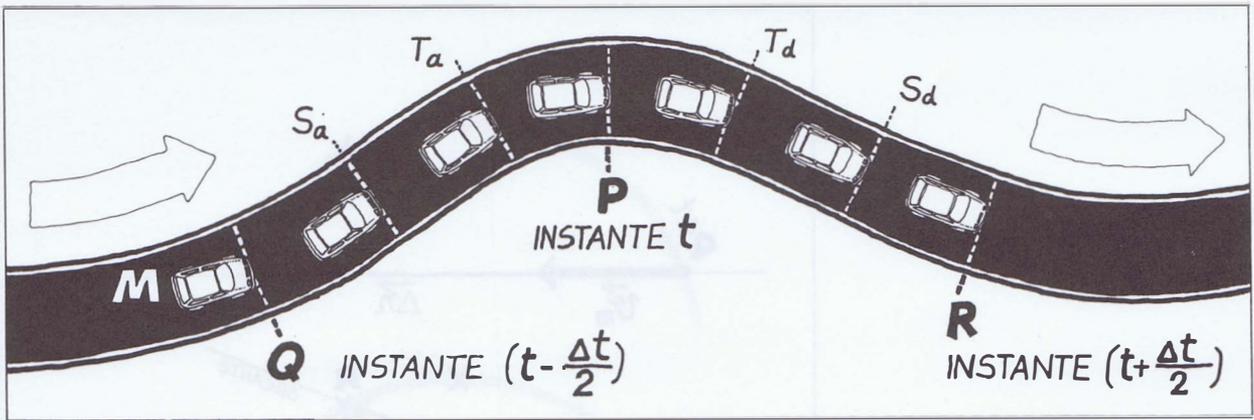


Fig. 1.8 O móvel  $M$  desloca-se entre  $Q$  e  $R$  com velocidade variável. Qual é a *velocidade* no instante  $t$  (ou posição  $P$ )?

Isto sugere-nos um processo para determinar a **velocidade instantânea**:

- calculamos a velocidade média num intervalo de tempo que contenha o instante  $t$  (que até pode ser um extremo do intervalo);
- a seguir, fazemos tender o intervalo de tempo para zero ( $\Delta t \rightarrow 0$ ), passando a tender também para zero o deslocamento  $\vec{\Delta r}$ ;
- por fim, passamos **ao limite** do quociente  $\frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$  quando  $\Delta t \rightarrow 0$ : este limite, em Matemática, define a operação **derivada** e determina-se pelas regras de derivação.

Este processo aplica-se a qualquer grandeza física instantânea que se determine a partir da grandeza física média correspondente.

Vamos aplicar este processo à determinação da velocidade instantânea. A sequência de diagramas apresentados na fig. 1.9 mostra-nos que:

- à medida que  $\Delta t \rightarrow 0$ , as sucessivas posições  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ , vão-se aproximando da posição  $P$  (ponto que, nestes diagramas, corresponde a um extremo do intervalo de tempo  $\Delta t$ );
- quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , as secantes, linhas de acção do vector velocidade média  $\vec{v}_m$ , vão-se aproximando da tangente à trajectória no ponto  $P$ ;
- no limite, isto é, para  $\Delta t$  **muito** próximo de zero (infinitamente pequeno), a secante confunde-se com a **tangente**: esta é, por isso, a **linha de acção da velocidade na posição  $P$** , ou, o que é o mesmo, no instante  $t$ .

Passando, de facto e finalmente, ao limite, podemos observar que, ao tender  $\Delta t$  para zero ( $\Delta t \rightarrow 0$ ), o deslocamento  $\vec{\Delta r}$  vai tendendo também para zero ( $\Delta r \rightarrow \vec{0}$ ), mas o quociente

$$\frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$$

tende, em geral, para um vector  $\vec{v}$ , **não nulo**.

### Súmula

1.3

A definição das **grandezas instantâneas**, isto é, referentes a um *determinado instante*, passa pela definição prévia das *grandezas médias* correspondentes. Estas referem-se a *variações médias*, durante determinados *intervalos de tempo*, de outras grandezas com elas relacionadas. Como exemplos de grandezas médias, temos:

— a *velocidade média*,

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t},$$

que mede a *rapidez* com que o móvel *muda de posição* (em média);

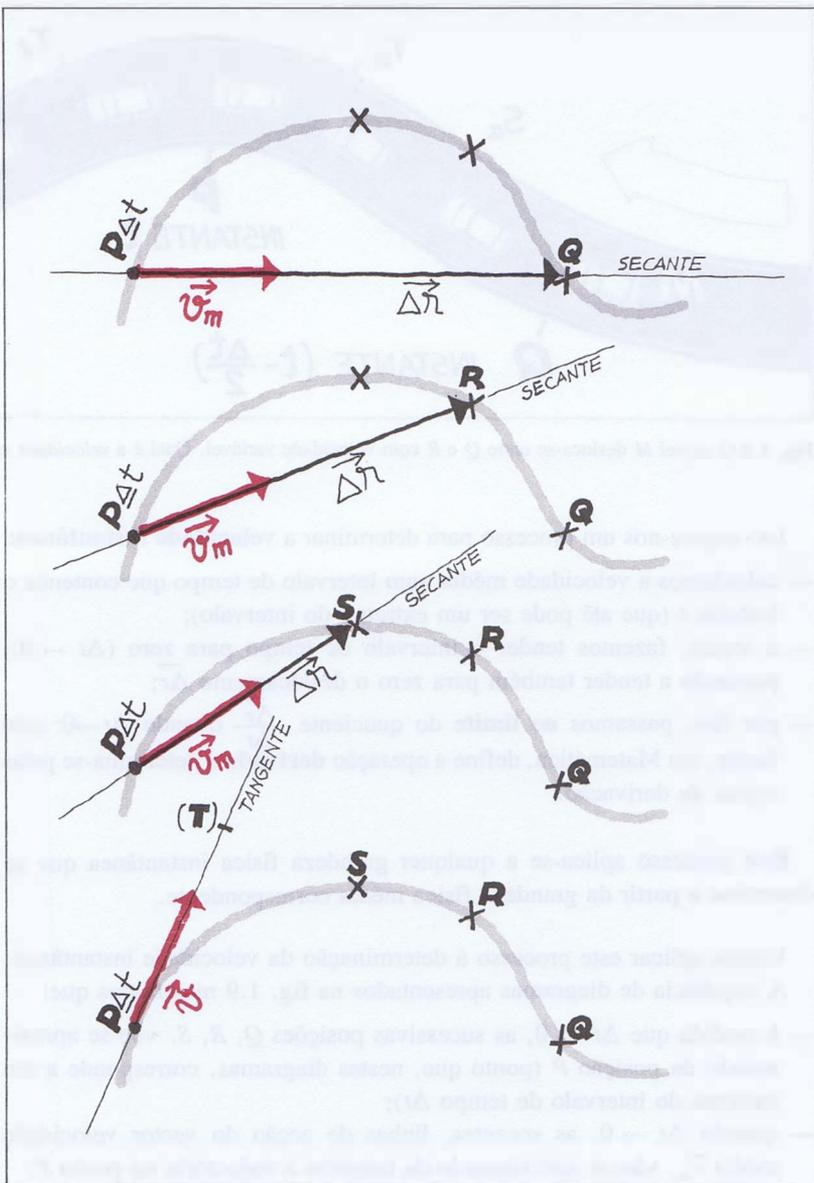
— a *celeridade média*,

$$c_m = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

que mede a *rapidez* com que o móvel *se move* (em média).

Fig. 1.9 O vector *velocidade* no instante  $t$ , ou seja na posição  $P$ , é um vector tangente à trajectória no ponto  $P$  e tem a seguinte expressão vectorial:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \\ &= \frac{d\vec{r}}{dt} \end{aligned}$$



Ora, em Matemática, o limite desta fracção,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t},$$

é a **derivada** do vector posição  $\vec{r}$  em ordem à variável tempo, e representa-se simbolicamente por

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{ou} \quad \vec{r}'(t)$$

Podemos então resumir:

A **velocidade instantânea**,  $\vec{v}$ , ou **velocidade** no instante  $t$  (isto é, na posição  $P$ ), é um vector tangente à trajectória na posição  $P$  e tem como expressão vectorial a derivada, em ordem ao tempo, do vector deslocamento:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t)$$

### 1.5.3 O módulo (ou medida) da velocidade como derivada da equação do espaço

O módulo (ou medida) da velocidade instantânea confunde-se com a celeridade ou rapidez instantânea, porque, à medida que  $\Delta t \rightarrow 0$ , os comprimentos dos arcos  $\widehat{PQ}$ ,  $\widehat{PR}$ ,  $\widehat{PS}$ , ..., vão-se aproximando, cada vez mais, dos comprimentos das secantes  $PQ$ ,  $PR$ ,  $PS$ , ..., que são as medidas dos deslocamentos — fig. 1.9.

Temos assim:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \widehat{PQ} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} PQ \Leftrightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta r$$

Podemos então escrever:

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ &= \frac{ds}{dt} = s'(t) \end{aligned}$$

Deste modo, podemos obter o módulo da velocidade por derivação da equação do espaço

$$s = f(t)$$

Por outro lado, não é preciso, nestas condições, distinguir entre *celeridade* ou *rapidez instantânea* (que os ingleses designam por *speed*) e medida da velocidade, porque, em cada instante, a rapidez com que o móvel muda de posição ( $\frac{dr}{dt}$ ) é igual à rapidez com que se move na trajectória ( $\frac{ds}{dt}$ ).

## ► G.E. 1.5 e G.E. 1.6

### Súmula

1.4

As **grandezas instantâneas** determinam-se a partir das grandezas médias pela operação de passagem ao limite, ou seja pela operação **derivada**.

Assim, no caso da *velocidade num instante  $t$* , temos:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m \\ &= \frac{d\vec{r}}{dt}, \end{aligned}$$

sendo  $\Delta t$  um intervalo de tempo que contém o instante  $t$ .

O módulo da velocidade instantânea também se obtém por derivação da equação do espaço, porque é igual à celeridade (*speed*) instantânea:

$$|\vec{v}| = \frac{ds}{dt}$$

**Q 1.5**

Um grave sobe um plano inclinado onde o atrito não é significativo.

A equação do movimento do grave, num referencial em que o eixo dos  $xx$  coincide com a trajectória e se toma para sentido positivo o sentido ascendente, é

$$\vec{r} = (30t - t^2) \vec{u}_x \quad (\text{SI})$$

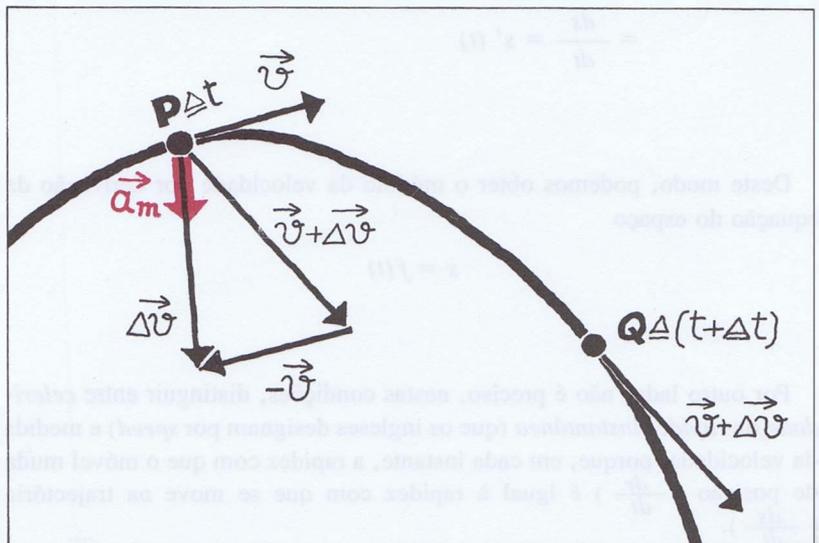
1. Determinar as velocidades nos instantes  $t_1 = 10$  s e  $t_2 = 20$  s.
2. Comparar as velocidades anteriormente obtidas.
3. Determinar o instante em que o grave atinge a posição extrema superior.

**1.6 Revisão e extensão dos conceitos de aceleração média e aceleração instantânea**

*1.6.1 Aceleração média de uma partícula*

A **aceleração média** de uma partícula, num intervalo de tempo  $\Delta t$ , ou seja entre duas posições  $P$  e  $Q$ , é a taxa média de variação da sua velocidade por unidade de tempo, quer dizer: é a variação de velocidade que ocorreria em cada unidade de tempo, se a variação total,  $\Delta \vec{v}$ , ocorrida no intervalo do tempo  $\Delta t$ , se repartisse igualmente pelo número de unidades de tempo contidas em  $\Delta t$ .

Sejam  $P$  e  $Q$  duas posições da partícula, correspondentes, respectivamente, aos instantes  $t$  e  $t + \Delta t$ , nos quais as velocidades são  $\vec{v}$  e  $\vec{v} + \Delta \vec{v}$  — fig. 1.10.



**Fig. 1.10** A aceleração média, no intervalo de tempo  $\Delta t$ , isto é, entre as posições  $P$  e  $Q$ , é o vector:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

O vector diferença

$$\vec{\Delta v} = (\vec{v} + \vec{\Delta v}) - \vec{v},$$

dividido pelo escalar (positivo)  $\Delta t$ , dá-nos o vector aceleração média no intervalo de tempo  $\Delta t$  ou, o que é o mesmo, entre as posições  $P$  e  $Q$ :

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t}$$

A medida (módulo ou norma) da aceleração média,

$$|\vec{a}_m| = \frac{|\vec{\Delta v}|}{\Delta t},$$

exprime-se, no SI, em

$$\frac{ms^{-1}}{s} = ms^{-2}$$

### 1.6.2 Aceleração instantânea de uma partícula

A **aceleração** de uma partícula, num dado instante, é a taxa de variação da sua velocidade com o tempo, nesse instante.

Para determinarmos a **aceleração no instante**  $t$ , também chamada **aceleração instantânea** ou *aceleração na posição  $P$* , utilizamos o processo geral seguido na determinação da velocidade instantânea, isto é:

— determinamos a aceleração média entre  $P$  e  $Q$  (ver fig. 1.10):

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t};$$

— fazemos tender  $\Delta t$  para zero ( $Q \rightarrow P$ ) — fig. 1.11;

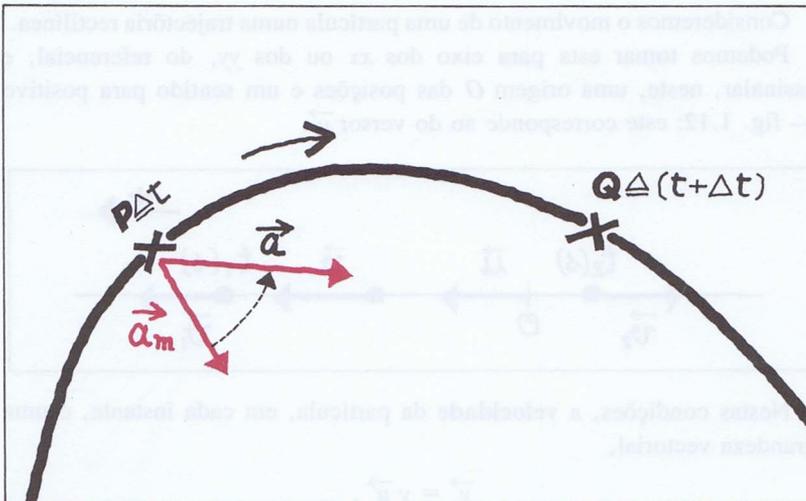


Fig. 1.11 Quando  $Q \rightarrow P$ , o vector  $\vec{a}_m$  (aceleração média) tende para um vector  $\vec{a}$  (aceleração no instante  $t$  ou posição  $P$ ):

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Sendo a **aceleração média**, no intervalo de tempo  $\Delta t$ , o vector

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t},$$

a **aceleração instantânea** será o vector

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

cujo valor é, em geral,

$$a \neq \frac{dv}{dt},$$

porque

$$\vec{v} = v \cdot \vec{u}_t$$

e o vector  $\vec{u}_t$  varia em direcção — salvo no caso do movimento rectilíneo.

— passamos ao limite pela operação **derivada do vector velocidade em ordem à variável tempo**:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \iff$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Embora a aceleração seja a derivada da velocidade em ordem ao tempo,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

o valor da aceleração não coincide, em geral, com a derivada do valor da velocidade, isto é, tem-se, geralmente:

$$a \neq \frac{dv}{dt}$$

Isto resulta do facto de que, sendo a velocidade dada por

$$\vec{v} = v \cdot \vec{u}_t,$$

vem

$$\vec{a} = \frac{d(v \cdot \vec{u}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + v \frac{d\vec{u}_t}{dt} \neq \frac{dv}{dt} \vec{u}_t,$$

porque o versor da tangente à curva,  $\vec{u}_t$ , varia no tempo (não em módulo, mas em direcção) e, portanto, tem derivada não nula.

### 1.7 Revisão e extensão do estudo dos movimentos rectilíneos

Consideremos o movimento de uma partícula numa trajectória rectilínea.

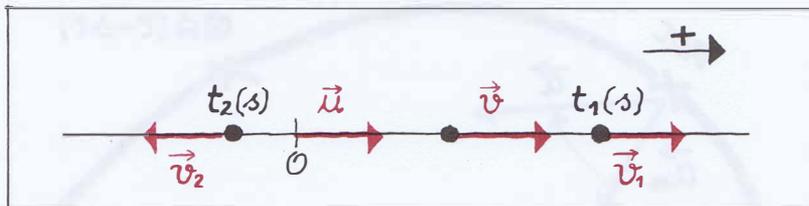
Podemos tomar esta para eixo dos  $xx$  ou dos  $yy$ , do referencial, e assinalar, neste, uma origem  $O$  das posições e um sentido para positivo — fig. 1.12: este corresponde ao do versor  $\vec{u}$ .

**Fig. 1.12** As velocidades nos instantes  $t_1$  e  $t_2$  são

$$\vec{v}_1 = v_1 \cdot \vec{u}$$

$$\vec{v}_2 = v_2 \cdot \vec{u},$$

com  $v_1 > 0$  e  $v_2 < 0$ .



Nestas condições, a **velocidade** da partícula, em cada instante, é uma grandeza vectorial,

$$\vec{v} = v \vec{u},$$

onde o escalar  $v$ , componente da velocidade no eixo  $a$  que a trajectória pertence, é um *escalar algébrico*:

$v > 0$ , se a velocidade tem o *sentido positivo* (o de  $\vec{u}$ );

$v < 0$ , se a velocidade tem o *sentido negativo*.

A este escalar  $v$  chamamos *valor (algébrico) da velocidade*.

A aceleração, em cada instante, obtém-se por derivação da velocidade.

Aplicando a regra da derivada de um produto e tendo em conta, neste caso, a não variação, no tempo, do versor  $\vec{u}$ , temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{u})}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u} + v\frac{d\vec{u}}{dt} \\ & \quad (= 0) \\ &= \frac{dv}{dt}\vec{u} \\ &= a\vec{u}\end{aligned}$$

Concluimos, assim, que a **aceleração** também é uma grandeza vectorial. Tal como a velocidade, é representada por um vector aplicado na partícula móvel, e tem as seguintes características:

- *linha de acção* — a de  $\vec{u}$ , ou seja a da recta que contém a trajectória;
- *sentido* — o de  $\vec{u}$ , portanto o *sentido positivo*, se o *valor* (algébrico),  $a$ , da aceleração for *positivo*; sentido oposto ao de  $\vec{u}$ , se o *valor*,  $a$ , da aceleração for *negativo*.

Saliente-se que o *valor da aceleração*,  $a$ , isto é, a componente da aceleração no eixo  $a$  que a trajectória pertence, é:

$a > 0$ , se o *valor*  $v$  da velocidade *crece* no decorrer do tempo

$$\left( \frac{dv}{dt} > 0 \right) ;$$

$a = 0$ , se o *valor*  $v$  da velocidade *se mantém* no decorrer do tempo

$$\left( \frac{dv}{dt} = 0 \right) ;$$

$a < 0$ , se o *valor*  $v$  da velocidade *diminui* à medida que o tempo decorre

$$\left( \frac{dv}{dt} < 0 \right) .$$

Saliente-se ainda, e a terminar, que o facto de o movimento, num dado instante, ser *acelerado* ou *retardado* não tem apenas a ver com o sentido da aceleração  $e$ , portanto, com o *valor* positivo ou negativo de  $a$ , mas, também, com o sentido da velocidade  $e$ , portanto, com o *valor* positivo ou negativo de  $v$ .

No **movimento rectilíneo**, a aceleração instantânea é o vector

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

com o valor

$$a = \frac{dv}{dt},$$

ou seja:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u},$$

sendo  $\vec{u}$  o versor, constante, da trajectória.

Se o valor

$$a = \frac{dv}{dt}$$

da aceleração tiver o sinal do valor da velocidade, o movimento é *acelerado*.

Se tiver sinal oposto, o movimento é *retardado*.

Assim:

Se o **movimento é acelerado**, isto é, se a medida ou **módulo da velocidade aumenta**, a aceleração tem o sentido da velocidade, podendo ser:

$$\begin{cases} a > 0 \text{ e } v > 0 \rightarrow \text{ambas com o sentido positivo;} \\ a < 0 \text{ e } v < 0 \rightarrow \text{ambas com o sentido negativo;} \end{cases}$$

Se o **movimento é retardado**, quer dizer, se a medida ou **módulo da velocidade diminui**, a aceleração tem o sentido oposto ao da velocidade, podendo ser:

$$\begin{cases} a < 0 \text{ e } v > 0 \\ a > 0 \text{ e } v < 0 \end{cases} \rightarrow \vec{a} \text{ e } \vec{v} \text{ com sentidos opostos}$$

## QUESTÕES PROPOSTAS

### Q 1.6

Mostrar que num movimento rectilíneo, retardado e de sentido negativo, os valores da velocidade e da aceleração têm sinais contrários.

### Q 1.7

Um grave é lançado verticalmente. A equação do seu movimento é:

$$\vec{r} = (30t - 5t^2)\vec{u}_y \quad (\text{SI})$$

1. Qual é a equação das velocidades,  $\vec{v} = f(t)$ ?
2. Qual é o valor da velocidade inicial?
3. Qual é o valor da aceleração da gravidade?
4. Em que intervalo de tempo o movimento é retardado?  
E em que intervalo de tempo é acelerado?
5. De que movimento se trata?

### 1.7.1 Movimento uniforme e rectilíneo

#### Característica:

Os deslocamentos  $\vec{\Delta r}$  do móvel efectuem-se na mesma linha recta, não mudam de sentido e os seus módulos (ou medidas) são proporcionais aos tempos em que ocorrem.

De acordo com esta definição, tem-se

$$\frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \vec{v}_m = \text{cons.}^{\text{te}}$$

## Lei das velocidades

Tendo presente que o limite de uma constante é essa própria constante, verifica-se que

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \text{cons.}^{te}$$

### Em conclusão:

«No movimento rectilíneo e uniforme, a velocidade é constante (em módulo, direcção e sentido).»

## Lei dos espaços

Considerando a trajectória rectilínea sobre o eixo dos  $xx$  — fig. 1.13 — e representando por  $x_0$  a coordenada (abscissa) do móvel no instante zero, e por  $x$  a coordenada (abscissa) do móvel no instante genérico  $t$ , tem-se, partindo da definição da velocidade neste movimento,

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - 0}.$$

Daqui resulta:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t \quad (\text{equação geral do movimento})$$

Tendo em conta que (fig. 1.13)

$$\vec{r} = x \vec{u}, \vec{r}_0 = x_0 \vec{u} \quad \text{e} \quad \vec{v} = v \vec{u},$$

vem

$$x \vec{u} = x_0 \vec{u} + vt \vec{u}$$

ou, eliminando o versor  $\vec{u}$ ,

$$x = x_0 + vt \quad (\text{equação das posições})$$

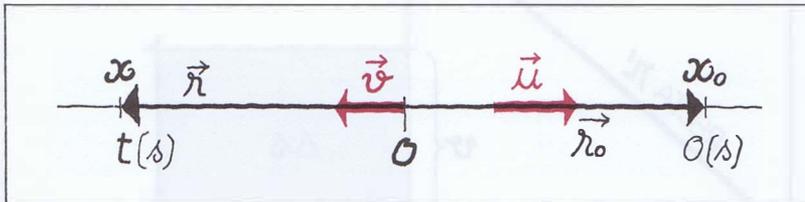


Fig. 1.13 No movimento uniforme entre as posições  $x_0$  e  $x$  tem-se:

$$\vec{r}_0 = x_0 \vec{u}, \vec{r} = x \vec{u} \quad \text{e} \quad \vec{v} = v \vec{u}$$

Na situação apresentada na figura é:  $x_0 > 0$ ,  $x < 0$  e  $v < 0$

No **movimento rectilíneo uniforme**:

— A velocidade é constante:

$$\vec{v} = \text{const.}^{\text{te}}$$

— A aceleração é nula:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$$

— A posição varia linearmente no tempo:

$$x = x_0 + vt$$

— Os espaços percorridos são proporcionais aos tempos em que são percorridos:

$$s = |v| \cdot t$$

Finalmente, tendo ainda em conta que o valor da velocidade,  $v$ , pode ser positivo ou negativo (tal como os valores de  $x$  e  $x_0$ ), e que o espaço,  $s$ , coincidente com o módulo do deslocamento

$$|x - x_0|,$$

é sempre positivo, vem:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= vt && \Rightarrow \\ |x - x_0| &= |v| \cdot t && \Leftrightarrow \\ s &= |v| \cdot t \end{aligned}$$

Em conclusão:

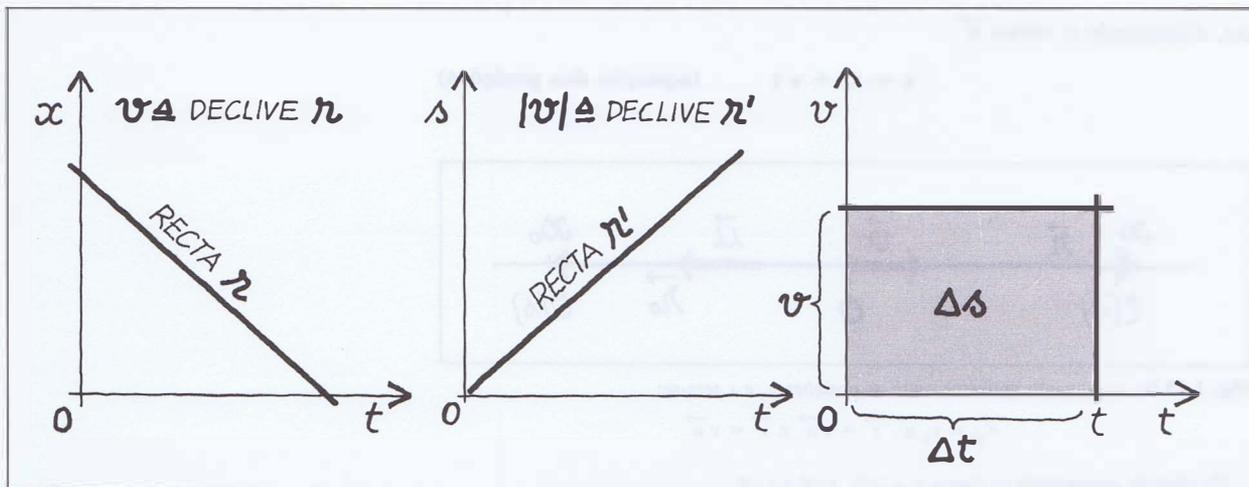
«No movimento rectilíneo e uniforme, os espaços percorridos são proporcionais aos tempos gastos a percorrê-los.»

Representação gráfica

Dos gráficos *posição-tempo* ( $t, x$ ), *espaço-tempo* ( $t, s$ ) e *velocidade tempo* ( $t, v$ ) — fig. 1.14, podemos obter:

- o **valor da velocidade**, dado pelo declive da recta do gráfico ( $t, x$ );
- o **módulo (ou norma) da velocidade**, dado pelo declive da recta do gráfico ( $t, s$ );
- a **medida do espaço**, dado pela «área» do rectângulo de lados  $\Delta t$  e  $v$  no gráfico ( $t, v$ ).

Fig. 1.14 Gráficos do movimento uniforme.



**Q 1.8**

O Joaquim vive num local  $L_1$ , junto da berma de uma parte rectilínea da estrada. Todos os dias úteis, às 8 h da manhã, chega e parte uma camioneta, vinda propositadamente do seu local de trabalho,  $L_2$ , situado na mesma estrada à distância  $d$  (medida nesta).

Certo dia, o Joaquim resolveu não esperar pela camioneta e partir a pé às 7 h 30 min., a caminho do trabalho. A camioneta apanhou-o no caminho e regressou logo, conduzindo-o ao trabalho 10 minutos antes da hora habitual de chegada.

1. Construir os gráficos posição-tempo referentes aos movimentos uniformes da camioneta e do Joaquim, tomando para origem o local  $L_1$  e para instante zero as 7 h 30 min, e arbitrando dois valores possíveis — um para a velocidade diária da camioneta e outro para a velocidade do Joaquim.
2. Determinar, a partir dos gráficos, o tempo que o Joaquim caminhou a pé.

*1.7.2 Movimento uniformemente variado e rectilíneo*

Característica

As variações da velocidade do móvel,  $\Delta \vec{v}$ , efectuam-se sempre na mesma direcção e são, em módulo, proporcionais aos tempos em que ocorrem.

De acordo com esta definição, tem-se:

$$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{a}_m = \text{const.}^{\text{te}}$$

Lei das acelerações

Sendo o limite de uma constante essa própria constante, tem-se, por definição de aceleração:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \text{const.}^{\text{te}}$$

Em conclusão:

«No movimento rectilíneo uniformemente variado, a aceleração é constante (em módulo, direcção e sentido).»

### Lei das velocidades

Designando por  $\vec{v}_0$  a velocidade no instante zero e por  $\vec{v}$  a velocidade no instante genérico  $t$  — fig. 1.15, tem-se, a partir da definição da aceleração, neste movimento,

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - 0},$$

donde resulta:

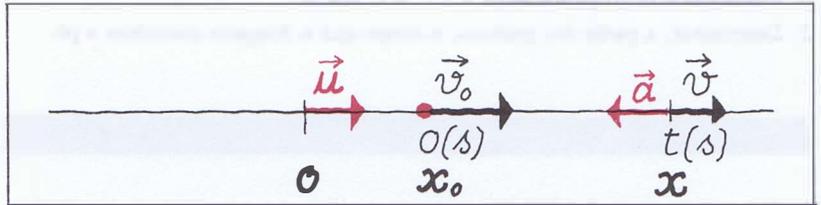
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t \quad (\text{equação vectorial das velocidades})$$

**Fig. 1.15** No movimento uniformemente variado, verifica-se que

$$v = v_0 + at,$$

sendo  $v_0$  e  $v$  os valores das velocidades inicial e no instante  $t$ , respectivamente, e  $a$  o valor da aceleração. Na figura tem-se:

$$v_0 > 0, v > 0 \text{ e } a < 0.$$



Tendo em conta que (fig. 1.15)

$$\vec{v} = v \vec{u}, \quad \vec{v}_0 = v_0 \vec{u} \text{ e } \vec{a} = a \vec{u},$$

vem:

$$v \vec{u} = v_0 \vec{u} + at \vec{u} \iff v = v_0 + a t \quad (\text{equação escalar das velocidades})$$

Nesta equação,  $v$ ,  $v_0$  e  $a$  podem ser positivos ou negativos, conforme os sentidos dos respectivos vectores.

### Em conclusão:

«Num movimento uniformemente variado, o valor da velocidade varia linearmente no tempo.»

### Lei dos espaços

Uma vez que a velocidade é a derivada do vector posição em ordem ao tempo,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

podemos obter a equação do movimento,

$$\vec{r} = \dot{f}(t),$$

primitivando a equação das velocidades

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

(a primitivação é a operação matemática inversa da derivação).

Obteríamos então a expressão

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \quad (\text{equação geral do movimento})$$

O aluno, porque ainda não sabe primitivar, poderá *verificar* que, *derivando* esta última equação, com  $\vec{r}_0$ ,  $\vec{v}_0$  e  $\vec{a}$  constantes, *obtem*, de facto, *a equação das velocidades*.

Tendo em conta que

$$\vec{r} = x \vec{u}, \quad \vec{r}_0 = x_0 \vec{u}, \quad \vec{v}_0 = v_0 \vec{u} \quad \text{e} \quad \vec{a} = a \vec{u},$$

sendo  $x$ ,  $x_0$ ,  $v_0$  e  $a$  os valores (algébricos) das respectivas grandezas, vem, da equação anterior:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (\text{equação das posições})$$

Esta equação, tal como as outras *equações escalares* atrás referidas, foi estabelecida no 10.º ano (ver, por exemplo, Manual de Física para o 10.º ano, dos autores, secção 2.12).

Saliente-se, no entanto, que as equações escalares são válidas apenas no caso de o movimento ser rectilíneo enquanto que as *equações vectoriais* são válidas para todos os movimentos com aceleração constante (rectilíneos ou curvilíneos).

No caso, e só no caso, de o *movimento rectilíneo* do móvel **não mudar de sentido**, como, por exemplo, no *m. u. a.* ou no *m. u. r.*, e até ao instante

$$t_p = \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{a}|},$$

que é o instante em que a velocidade se anula no *m.u.r.*, temos:

$$s = |x - x_0| = \left| v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \right|$$

### Súmula

1.8

No movimento rectilíneo uniformemente variado:

— A aceleração é constante:

$$\vec{a} = \text{const.}^{\text{te}}$$

— O valor da velocidade varia linearmente no tempo:

$$v = v_0 + at$$

— A posição do móvel varia segundo uma função quadrática da variável tempo:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

## Representação gráfica

Dos gráficos *aceleração-tempo* ( $t, a$ ), *velocidade-tempo* ( $t, v$ ) e *posição-tempo* ( $t, x$ ) — fig. 1.16, podemos obter:

- a **variação de velocidade**, dada pela «área» do rectângulo de lados  $\Delta t$  e  $a$ , no gráfico ( $t, a$ );
- o **espaço percorrido**, dado pela «área» do trapézio ou triângulo situado entre a recta oblíqua e o eixo dos tempos, no gráfico ( $t, v$ );
- o **valor da velocidade**, dado pelo declive da tangente à curva no gráfico ( $t, x$ ).

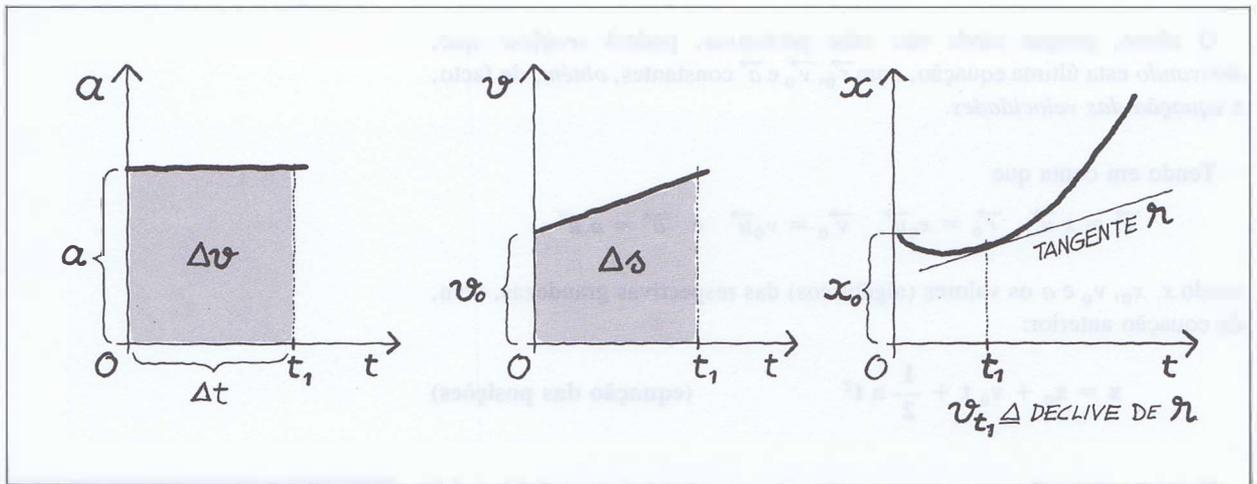


Fig. 1.16 Gráficos do movimento uniformemente variado.

## QUESTÕES PROPOSTAS

### Q 1.9

O gráfico da fig. 1.17 mostra como a velocidade de um carro variou no tempo durante um período de 20 min em que se moveu numa estrada em linha recta.

Considerar que a posição do carro no instante zero é:  $x_0 = 0$ .

1. Durante quanto tempo permaneceu o carro parado?
2. Quando é que esteve mais afastado do ponto de partida?
3. Em que instante, aproximadamente, ocorreu a aceleração máxima? Justificar.
4. Escrever uma equação que permita obter as posições do móvel no intervalo de tempo [120; 240] s.

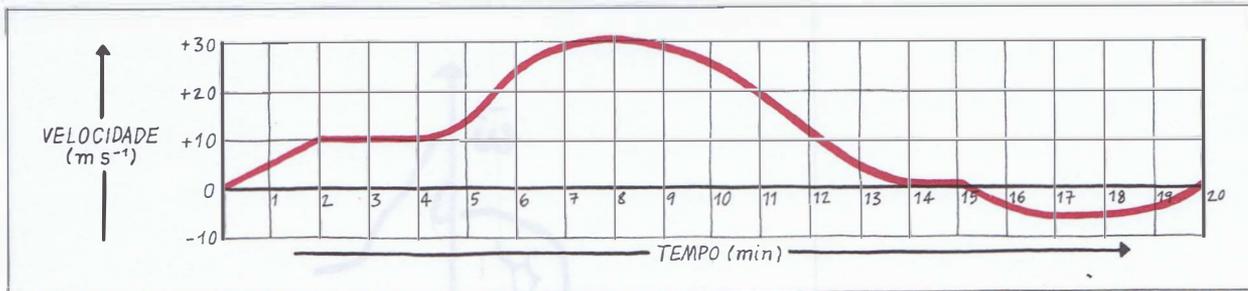


Fig. 1.17

**Q 1.10**

A equação das posições de um móvel é

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \text{ com } v_0 \text{ e } a \text{ constantes}$$

Mostrar que a velocidade média no intervalo de tempo  $[t; t + \Delta t]$  tem o valor

$$v_m = v_0 + at + \frac{1}{2} a \cdot \Delta t$$

**Q 1.11**

Uma partícula move-se retilineamente, sendo a sua posição, relativamente a uma origem  $O$ , arbitrária, dada pela equação

$$x = t^3 - 6t^2 + 9t + 5 \quad (\text{SI})$$

Quais são os intervalos de tempo em que:

1. A partícula se move no sentido negativo?
2. O movimento da partícula é acelerado?
3. O movimento da partícula é retardado?

**1.8 Revisão e extensão do estudo do movimento circular uniforme**

**1.8.1 Característica**

A partícula percorre arcos de circunferência de medida igual em tempos iguais e, portanto, os comprimentos de arco ( $\Delta s$ ) são proporcionais aos tempos ( $\Delta t$ ) em que foram percorridos — fig. 1.18:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{cons.}^{\text{te}}$$

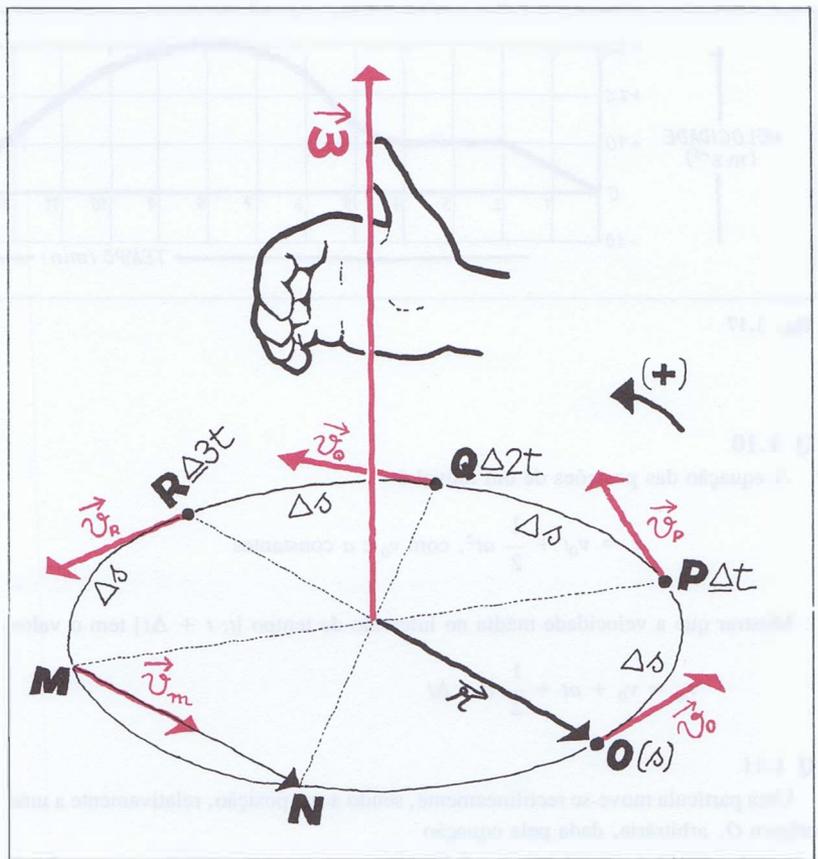


Fig. 1.18 Movimento circular uniforme de velocidade angular  $\vec{\omega}$ .

Tem-se:

$$\vec{v}_O \neq \vec{v}_P \neq \vec{v}_Q \neq \vec{v}_R$$

Mas:

$$v_O = v_P = v_Q = v_R$$

### 1.8.2 Rapidez média ou celeridade média

Da própria definição de m.c.u., e tendo em conta o conceito de período,  $T$ , como tempo de uma volta completa, resulta o seguinte:

$$c_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T} = \text{const.}^{\text{te}}$$

### 1.8.3 Velocidade média

É obtida a partir da sua definição — ver secção 1.5.1.

Assim, por exemplo, entre  $M$  e  $N$  (fig. 1.18), tem-se:

$$\vec{v}_m(M, N) = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\vec{MN}}{\Delta t}$$

### 1.8.4 Velocidade angular, $\vec{\omega}$

Conforme a fig. 1.18 mostra, a velocidade angular  $\vec{\omega}$  é um vector perpendicular ao plano da trajectória, com o sentido dado pela regra da mão direita e cujo valor,  $\omega$ , é o ângulo varrido, por unidade de tempo, pelo raio vector  $\vec{r}$ .

Tendo em conta que os ângulos varridos são proporcionais aos tempos e que o ângulo varrido durante um período  $T$  é  $2\pi$  radianos (ângulo de um giro), vem:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{rad/s ou s}^{-1})$$

### 1.8.5 Velocidade linear, $\vec{v}$

Como sabemos, a velocidade é um vector sempre tangente à trajectória — fig. 1.18.

Também sabemos que o seu *módulo*, aqui representado simplesmente por um  $v$  (tomamos o sentido da velocidade e do movimento para sentido positivo), coincide com a *celeridade instantânea* (ver secção 1.5.3):

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Mas, como o limite de uma constante é ela própria, vem:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = c_m = \frac{2\pi r}{T}$$

Finalmente, considerando que

$$\frac{2\pi}{T} = \omega,$$

temos:

$$v = \omega r$$

### 1.8.6 Aceleração no movimento circular uniforme

Vamos estudar as características da aceleração no movimento circular uniforme, seguindo o caminho geral que até agora temos utilizado: determinar a aceleração média e, depois, o seu limite quando  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Porém, neste caso, convém separar o problema em duas partes, a fim de tornar a sua solução mais clara. Por isso, tratamos, em primeiro lugar, da direcção e sentido da aceleração, e, posteriormente, do seu módulo.

Na fig. 1.19 estão representados, na mesma escala, os vectores velocidade,  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ , em dois instantes consecutivos,  $t$  e  $t + \Delta t$ , correspondentes às posições  $P$  e  $Q$  de um móvel em movimento circular uniforme.

Na mesma figura está construído o vector diferença ou variação de velocidade,

$$\vec{\Delta v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1,$$

assim como o vector aceleração média,

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t},$$

que consideramos aplicado em  $Q$  e paralelo a  $\vec{\Delta v}$ .

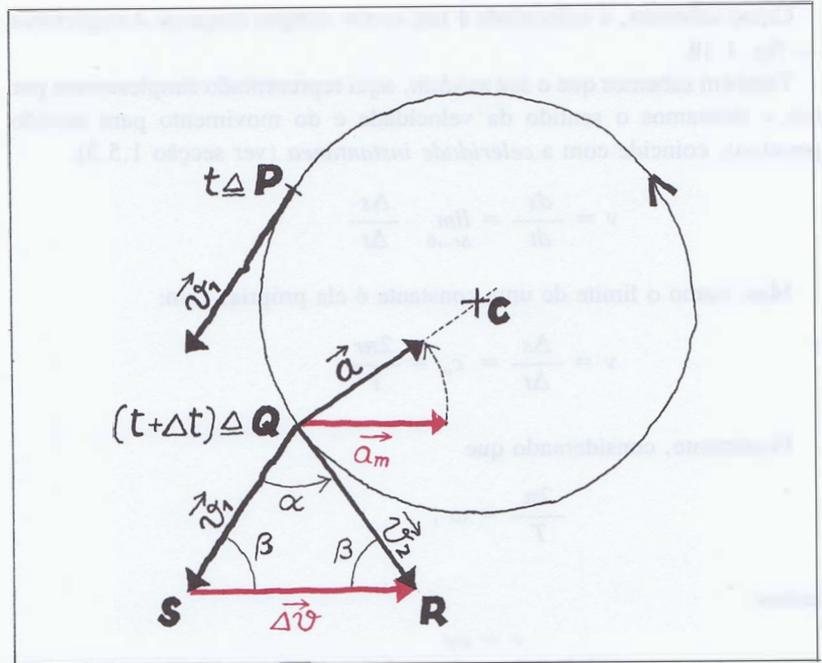


Fig. 1.19 À medida que  $\Delta t \rightarrow 0$  também

$$\begin{cases} P \rightarrow Q \\ \vec{v}_1 \rightarrow \vec{v}_2 \\ \alpha \rightarrow 0 \text{ e } \beta \rightarrow 90^\circ \end{cases}$$

e por isso:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} \rightarrow \vec{a} \perp \vec{v}_2$$

Como o movimento é uniforme, será

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|,$$

e, portanto, o triângulo

$$\Delta [Q, S, R]$$

é isósceles, tendo, por isso, dois ângulos,  $\beta$ , iguais.

Façamos tender para zero o intervalo de tempo  $\Delta t$ :

$$\Delta t \rightarrow 0$$

Então os pontos  $P$  e  $Q$  irão ficando mais próximos (por comodidade, consideramos  $Q$  fixo e  $P$  a aproximar-se de  $Q$ ), o vector  $\vec{v}_1$  tenderá a sobrepor-se ao vector  $\vec{v}_2$  e o ângulo  $\alpha$  vai diminuindo até atingir o valor zero.

Ora, à medida que

$$\alpha \rightarrow 0,$$

os ângulos  $\beta$  vão tendendo para  $90^\circ$ , visto que

$$\alpha + \beta + \beta = 180^\circ$$

Nestas condições, o vector aceleração  $\vec{a}_m$ , que tem a direcção e o sentido do vector diferença  $\Delta \vec{v}$ , vai tendendo para um vector  $\vec{a}$ , perpendicular à direcção de  $\vec{v}_2$ .

Concluimos assim que a **aceleração instantânea**

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_m$$

é **radial e centrípeta**.

Como acabamos de verificar, o processo de determinação de uma grandeza instantânea a partir da grandeza média correspondente, indicado, em suas linhas gerais, na secção 1.5.2, pode também aplicar-se com vantagem ao método gráfico, devido à sua clareza.

Vamos continuar a aplicar este processo à 2.<sup>a</sup> parte do problema da determinação da aceleração centrípeta no *m.c.u.*, com a finalidade de o aluno se familiarizar com o mesmo.

### B — Módulo ou medida da aceleração no *m.c.u.*

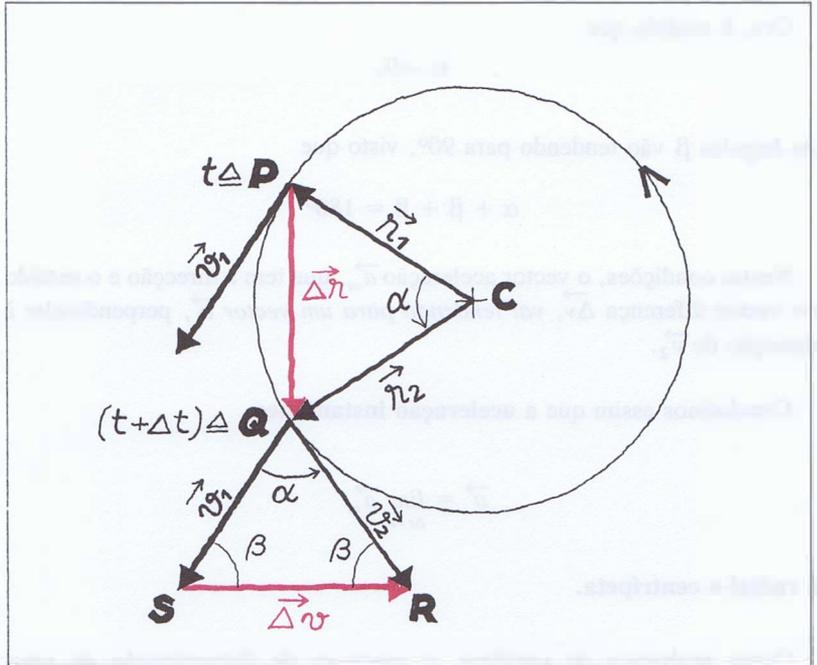
Para deduzirmos o módulo ou medida da aceleração, no *m.c.u.*, começamos por reproduzir a fig. 1.19, acrescentada dos raios vectores,  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$ , relativos aos pontos  $P$  e  $Q$ : obtemos então a fig. 1.20.

Verificamos nesta figura que os triângulos

$$\Delta [C, P, Q] \text{ e } \Delta [Q, S, R]$$

são isósceles e têm:

- dois lados proporcionais (os que representam as velocidades são proporcionais aos que representam os raios, pois  $v_1 = v_2 = \omega r$ , com  $\omega$  constante);
- os ângulos formados por estes lados iguais (têm lados perpendiculares e são agudos).



**Fig. 1.20** Os triângulos  $\Delta [Q, R, S]$  e  $\Delta [C, P, Q]$  são semelhantes, isto é, têm ângulos iguais e lados proporcionais.

Nestas condições, os referidos triângulos são semelhantes.

Atendendo à razão dos lados homólogos (ou proporcionais, que são os que se opõem a ângulos iguais), temos:

$$\frac{\overline{SR}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{QS}}{\overline{PC}} \iff \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v}{r}$$

Como

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta r} \cdot \frac{\Delta r}{\Delta t},$$

a razão dos lados homólogos permite escrever, substituindo  $\frac{\Delta v}{\Delta r}$  :

$$a_m = \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Aplicando limites, considerando que  $v$  e  $r$  são constantes e atendendo à definição de  $v$ , temos, sucessivamente:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta r}{\Delta t} \right)$$

$$= \frac{v}{r} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot v \iff$$

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Em conclusão:

O módulo da aceleração instantânea, na *m.c.u.*, que, por ser radial e centrípeta, coincide com o módulo (ou medida) da aceleração normal ou centrípeta, é dado pela expressão:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n = \frac{v^2}{r}$$

No movimento circular uniforme:

— A velocidade angular é uma grandeza vectorial e é constante:

$$\vec{\omega} = \text{const.}^{\text{te}}$$

— A velocidade instantânea varia, mas o seu módulo é constante:

$$v = \omega \cdot r$$

— A aceleração é radial, centrípeta e de módulo

$$a = \frac{v^2}{r}$$

### QUESTÕES PROPOSTAS

#### Q 1.12

Uma partícula descreve uma trajectória circular de raio 2,0 m, durante 4,0 s, com movimento uniforme.

Determinar, durante meia volta — fig. 1.21:

1. A rapidez média ou celeridade média.
2. O módulo da velocidade média.
3. O módulo da velocidade.
4. O módulo da aceleração média.
5. O módulo da aceleração instantânea.

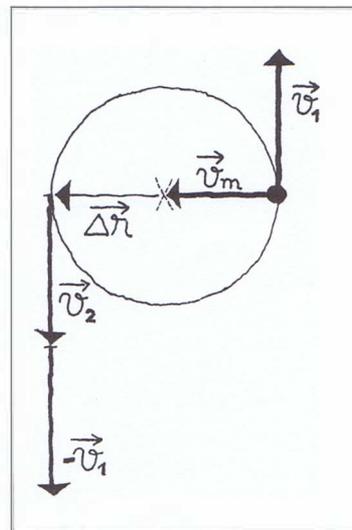


Fig. 1.21

## 1.9 Revisão e extensão do estudo do movimento geral de uma partícula num plano

Para conhecermos o movimento de uma partícula num plano, o problema fundamental consiste, como já sabemos, em descobrir a *forma* da equação geral do movimento (recordar secções 1.2.1 e 1.3):

$$\vec{r} = f(t).$$

Depois, derivando esta, obtemos a equação da velocidade:

$$\vec{v} = f'(t) = f_1(t)$$

E derivando esta, por sua vez, obtemos a equação da aceleração:

$$\vec{a} = f''(t) = f_2(t)$$

Para obtermos a equação (e com esta a forma) da trajectória, eliminamos a variável tempo entre as equações paramétricas

$$\begin{cases} x = f_3(t) \\ y = f_4(t) \end{cases}$$

ou equações das componentes escalares do vector posição

$$\vec{r} = f(t)$$

Para obter o ângulo da velocidade com a aceleração, utilizamos o operador *produto interno* (ver G.E. 1.7):  $\vec{v} \cdot \vec{a} = v \cdot a \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha$ .

Vamos treinar uma vez mais estes processos gerais, propondo a resolução das questões Q 1.13 e Q 1.14.

G.E. 1.7 ◀



### QUESTÕES PROPOSTAS

#### Q 1.13

A equação de um determinado movimento plano é a seguinte:

$$\vec{r} = 3t \vec{u}_x + (4t + 1) \vec{u}_y \quad (\text{SI})$$

1. Determinar:

1. O vector posição nos instantes  $t = 0$  s e  $t = 2$  s.
2. O deslocamento no intervalo  $[0$  s;  $2$  s].
3. A equação da trajectória do móvel e a forma desta.
4. A velocidade, a aceleração e o tipo de movimento.

2. Representar a trajectória num diagrama  $(x, y)$  e a *posição inicial* ( $t = 0$  s) sobre essa trajectória.

3. Escrever uma equação do espaço percorrido sobre a trajectória, partindo da posição inicial.

**Q 1.14**

As equações paramétricas de um dado movimento plano são

$$\begin{cases} x = 3t^2 - 2t \\ y = 4t^2 - 5t \end{cases}$$

Determinar o ângulo formado pelos vectores velocidade e aceleração no instante  $t = 1$  s.

*Sugestão:* aplicar a definição de produto interno de vectores, que pode ser recordada no G.E.1.7.

### 1.9.1 A aceleração no movimento variado no plano

No caso geral, o movimento variado no plano nem é *rectilíneo* — caso em que a aceleração se reduz à sua componente sobre a trajectória, tendo a direcção da velocidade,

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}, \text{ com } \vec{u} = \text{versor da trajectória rectilínea,}$$

nem é *circular uniforme* — caso em que a aceleração se reduz à sua componente (*normal* ou *centrípeta*) perpendicular à trajectória e à direcção da velocidade:

$$\vec{a} = \vec{a}_n = \frac{v^2}{r} \vec{u}_n,$$

com  $\vec{u}_n$  = versor da normal à velocidade e à trajectória, e centrípeta.

No caso geral, portanto, o movimento plano é curvilíneo e variado, e a *aceleração* — que tem a linha de acção e o sentido da força resultante que actua na partícula móvel (fig. 1.22) — apresenta duas componentes especialmente importantes:

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t \text{ ou componente tangencial;}$$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{r} \cdot \vec{u}_n, \text{ que é a componente normal ou centrípeta}$$

Vamos demonstrar a existência destas duas componentes da aceleração. Assim, considerando que a velocidade é tangente à trajectória, temos:

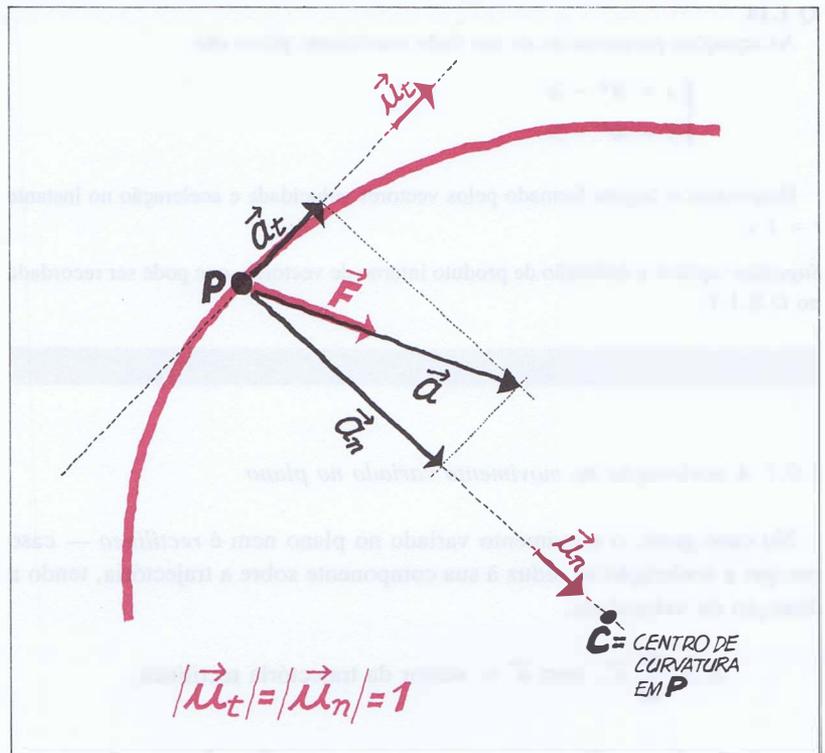
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v \cdot \vec{u}_t)}{dt} \iff$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t + v \cdot \frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

► G.E. 1.8

**Fig. 1.22** A aceleração, no ponto  $P$ , tem a direcção e o sentido da força  $\vec{F}$  actuante, e é a soma vectorial das acelerações tangencial e normal (ou centrípeta):

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$



Como

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} \perp \vec{u}_t \quad (\text{tem, portanto, a direcção de } \vec{u}_n, \text{ conforme se conclui do G.E. 1.8})$$

e

**G.E. 1.9** ◀  $\frac{du_t}{dt} = \frac{v}{r}$  (ver G.E. 1.9),

podemos escrever

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{v}{r} \cdot \vec{u}_n$$

Temos, então, sucessivamente:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t + v \cdot \frac{v}{r} \cdot \vec{u}_n \Leftrightarrow$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t + \frac{v^2}{r} \cdot \vec{u}_n \Leftrightarrow$$

$$\vec{a} = a_t \cdot \vec{u}_t + a_n \cdot \vec{u}_n \Leftrightarrow$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Quanto aos valores numéricos da aceleração temos:

$$a_t = \frac{dv}{dt} \begin{cases} \frac{dv}{dt} > 0, \text{ se o valor da velocidade aumenta} \\ \frac{dv}{dt} = 0, \text{ se o valor da velocidade se mantém} \\ \frac{dv}{dt} < 0, \text{ se o valor da velocidade diminui} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} \begin{cases} v \text{ é o valor da velocidade em } P \\ r \text{ é o raio de curvatura, } \overline{PC}, \text{ no ponto } P \end{cases}$$

Tanto o raio de curvatura,  $r$ , como o centro de curvatura,  $C$ , variam de ponto para ponto da trajetória curvilínea não circular:

—  $C$  é, para cada ponto, o centro da circunferência oscultriz — fig. 1.23;

—  $r = \overline{PC}$  é, em cada ponto, dado pela derivada,  $\frac{ds}{d\theta}$ ,

pois, para ângulos  $\Delta\theta$  muito pequenos, entre normais próximas (fig. 1.23), os espaços  $\Delta s$  são também muito pequenos, os raios em  $P$  e em  $Q$  (pontos igualmente muito próximos) confundem-se num só raio,  $r$ , e tem-se:

$$\text{arco} = \text{raio} \times \text{ângulo ao centro}$$

ou

$$ds = r \times d\theta$$

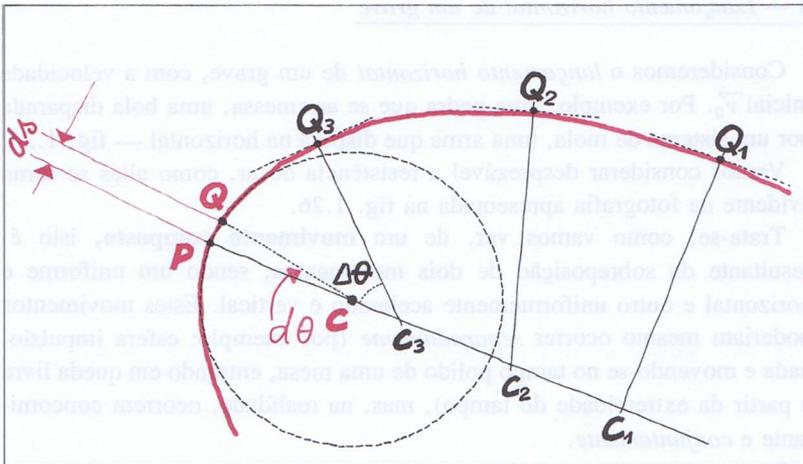


Fig. 1.23 O centro de curvatura,  $C$ , no ponto  $P$ , é o limite para que tendem os pontos  $C_1, C_2, C_3, \dots$ , de encontro das normais, em  $Q_1, Q_2, \dots$ , com a normal em  $P$ , à medida que os pontos  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ , se vão aproximando do ponto  $P$ . É também o centro de uma circunferência chamada oscultriz, que quer dizer: oscula a curva, isto é, toca-a num ponto único; além disso, tem raio máximo.

No caso geral do movimento curvilíneo e variado, a aceleração tem duas componentes — a tangencial e a radial centrípeta:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t + \frac{v^2}{r} \cdot \vec{u}_n$$

Nesta expressão são variáveis:

$\vec{u}_t$  e  $\vec{u}_n$  (só em direcção);

$v, r$  e  $\frac{dv}{dt}$  (escalar algébrico).

► G.E.1.10 e 1.11

**Q 1.15**

Mostrar que a aceleração nos movimentos rectilíneos e no movimento circular uniforme se reduz a casos particulares da expressão geral

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{r} \vec{u}_n$$

**Q 1.16**

O vector posição que caracteriza o movimento de uma partícula é

$$\vec{r} = 3t^2 \cdot \vec{u}_x + 5t \cdot \vec{u}_y \quad (\text{SI})$$

1. Determinar o vector aceleração.
2. Determinar, em função do tempo, os módulos das componentes tangencial e centrípeta (ou normal) da aceleração.

**1.9.2 Estudo de mais um movimento plano com aceleração constante — o movimento dos projecteis**

Dos movimentos planos com **aceleração constante** já estudámos os *movimentos rectilíneos uniformemente variados*. Vamos agora estudar um outro tipo de movimento com aceleração constante — trata-se de um movimento no qual, ao contrário daqueles, a aceleração não tem a direcção da velocidade.

**A — Lançamento horizontal de um grave**

Consideremos o *lançamento horizontal* de um grave, com a velocidade inicial  $\vec{v}_0$ . Por exemplo, uma pedra que se arremessa, uma bola disparada por um sistema de mola, uma arma que dispara na horizontal — fig. 1.24.

Vamos considerar desprezável a resistência do ar, como aliás se torna evidente na fotografia apresentada na fig. 1.26.

Trata-se, como vamos ver, de um **movimento composto**, isto é, resultante da sobreposição de dois movimentos, sendo um uniforme e horizontal e outro uniformemente acelerado e vertical. Estes movimentos poderiam mesmo ocorrer *separadamente* (por exemplo: esfera impulsio-nada e movendo-se no tampo polido de uma mesa, entrando em queda livre a partir da extremidade do tampo), mas, na realidade, ocorrem concomitante e *conjuntamente*.

Para compreender este movimento composto, vamos recordar o **princípio da independência das forças de Galileu** estudado no 10.º ano (ver secção 4.9.3, Manual de Física para o 10.º ano, dos autores):

«Quando várias forças actuam sobre a mesma partícula, cada força actua independentemente das demais.»

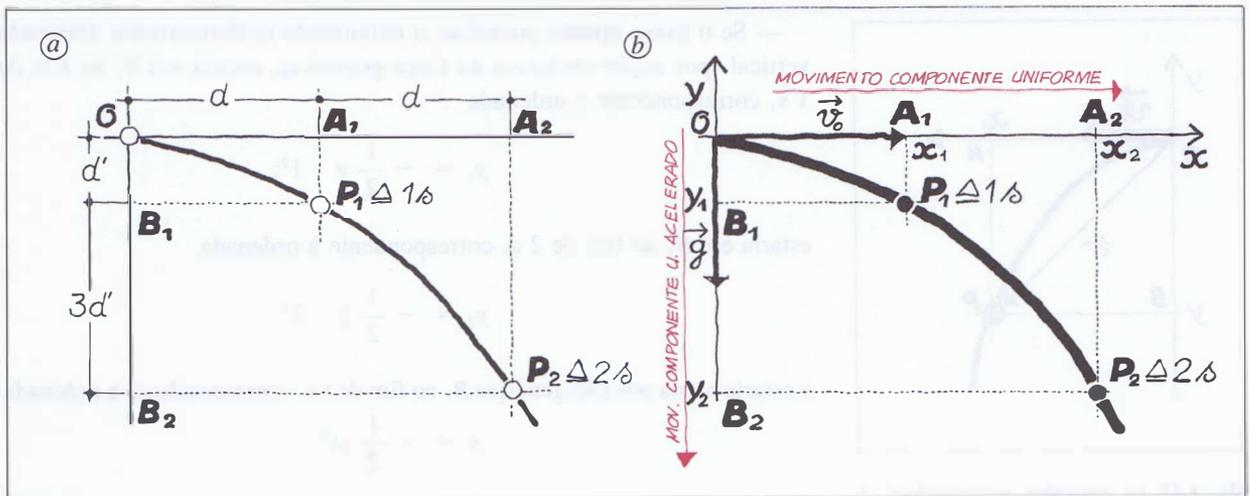


Fig. 1.24

- (a) Trajectória parabólica de um grave lançado horizontalmente, e algumas relações entre medidas que a experiência permite verificar.
- (b) O movimento do grave pode considerar-se composto de dois movimentos: um uniforme, horizontal, de velocidade  $\vec{v}_0$ ; outro uniformemente acelerado, vertical, com a aceleração da gravidade,  $\vec{g}$ .

Deste princípio (em Física, os **princípios** ou **leis fundamentais** são *induzidos* da observação e da experiência), hoje considerado como um corolário *deduzido* da lei fundamental do movimento, isto é, como uma **lei derivada** (corresponde ao que em Matemática se chama *teorema*), resulta uma outra lei — **a lei da independência ou sobreposição dos movimentos simultâneos**.

Segundo esta lei, os vários *movimentos simultâneos* que um móvel tenderia a possuir, por acção ou por ausência de forças, sobrepõem-se de tal modo que a *posição final* do móvel é a mesma que viria a ocupar se estivesse submetido, *sucessiva e isoladamente*, a cada um desses movimentos (chamados **movimentos componentes**).

Aplicando esta lei ao caso do lançamento horizontal de um grave (fig. 1.24), podemos afirmar o seguinte:

— Se o grave apenas possuísse o movimento uniforme de velocidade horizontal  $\vec{v}_0$  (esta velocidade mantém-se porque a aceleração, sendo vertical, não a afecta), estaria em A<sub>1</sub> ao fim de 1 s, correspondente à abscissa

$$x_1 = v_0 \cdot 1;$$

estaria em A<sub>2</sub> ao fim de 2 s, correspondente à abscissa

$$x_2 = v_0 \cdot 2;$$

e estaria, numa posição genérica A, ao fim de t s, correspondente à abscissa

$$x = v_0 t \quad (\text{fig. 1.25})$$

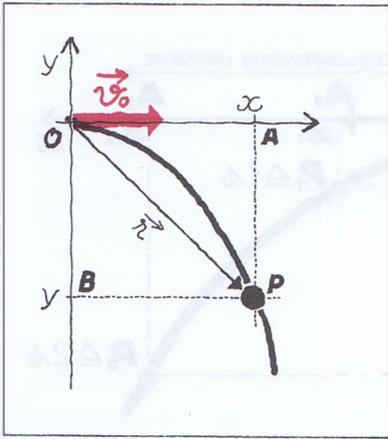


Fig. 1.25 As equações paramétricas do movimento do grave lançado horizontalmente são:

$$\begin{cases} x = v_0 \cdot t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

A equação do movimento é

$$\vec{r} = (v_0 \cdot t) \vec{u}_x + \left(-\frac{1}{2}gt^2\right) \vec{u}_y$$

— Se o grave apenas possuísse o movimento uniformemente acelerado vertical (por ação exclusiva da força gravítica), estaria em  $B_1$  ao fim de 1 s, correspondente à ordenada

$$y_1 = -\frac{1}{2}g \cdot 1^2;$$

estaria em  $B_2$  ao fim de 2 s, correspondente à ordenada

$$y_2 = -\frac{1}{2}g \cdot 2^2;$$

e estaria numa posição genérica  $B$ , ao fim de  $t$  s, correspondente à ordenada

$$y = -\frac{1}{2}gt^2$$

— Pela lei da sobreposição destes dois movimentos simultâneos, a posição, no instante  $t$  (fig. 1.25), é

$$P(x, y) \iff P(v_0t; -\frac{1}{2}gt^2),$$

ou seja:

a mesma que seria atingida se os movimentos componentes, uniforme e uniformemente acelerado, ocorressem separada e sucessivamente. As trajetórias é que seriam, obviamente, diferentes:

$\overline{OA} + \overline{AP}$  ou  $\overline{OB} + \overline{BP}$ , para os movimentos separados;

$\overline{OP}$  (trajetória parabólica), para os movimentos sobrepostos, que é o que na realidade sucede.

A prova experimental do que acaba de afirmar-se está documentada na fotografia de exposição múltipla apresentada na fig. 1.26. A unidade de tempo é

$$\frac{1}{30} \text{ s}$$

(intervalo entre dois disparos, consecutivos, de flash) e a distância entre cada duas linhas horizontais de referência, consecutivas, é de 15 cm.

Conhecidas, então, as coordenadas da posição genérica,  $P$ , do grave (fig. 1.25), ficamos a saber as equações paramétricas,

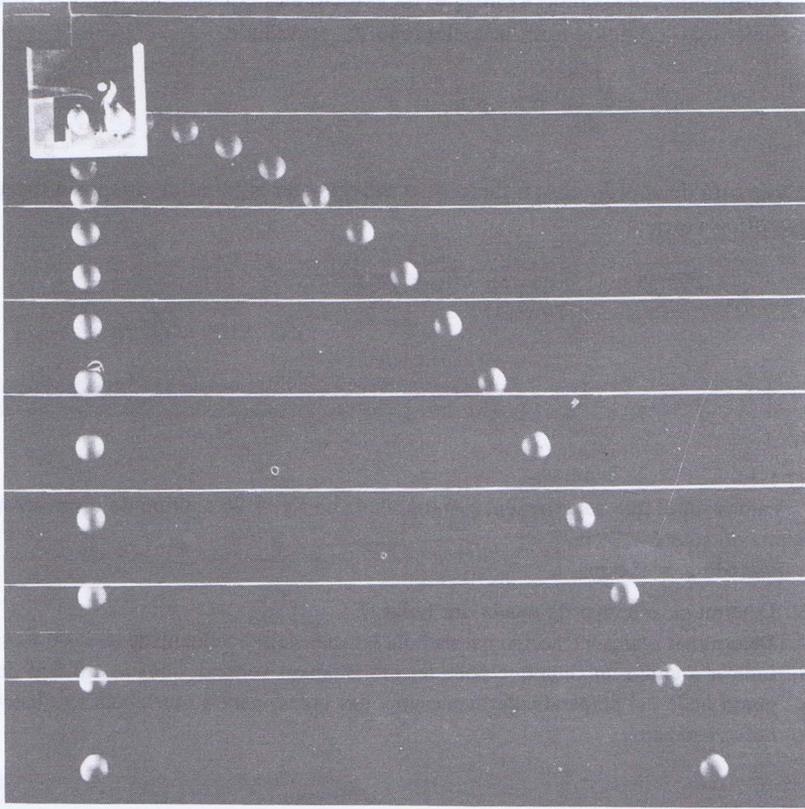
$$\begin{cases} x = v_0 \cdot t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2, \end{cases}$$

e a equação do movimento,

$$\vec{r} = (v_0 \cdot t) \vec{u}_x + \left(-\frac{1}{2}gt^2\right) \vec{u}_y$$

A partir desta obtemos a equação da velocidade, por derivação:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_0 \vec{u}_x + (-gt) \vec{u}_y$$



**Fig. 1.26** Fotografia de duas bolas que partem ao mesmo tempo: uma é lançada horizontalmente com a velocidade de  $2,00 \text{ m.s}^{-1}$ , e outra é largada em queda livre.

Esta fotografia foi obtida com disparos de «flash» intervalados de  $1/30 \text{ s}$ .

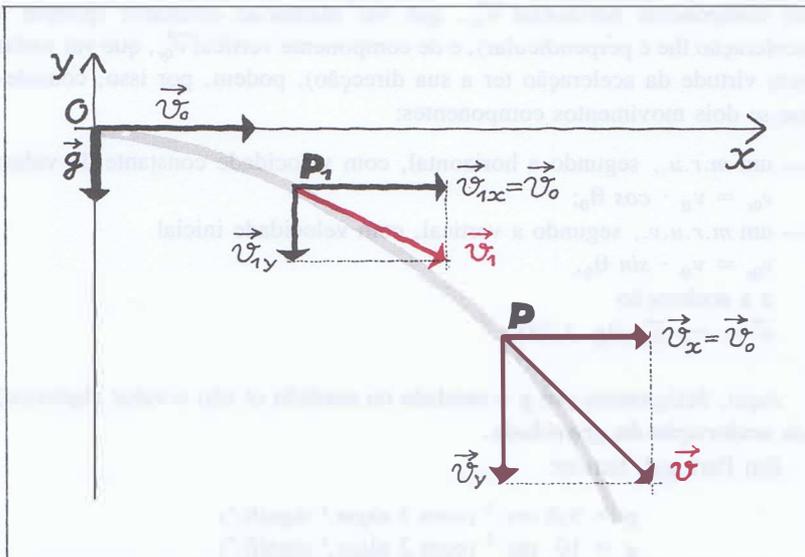
(Reprodução autorizada por P.S.S.C.)

- Verificar na foto que é entre os disparos de ordem 13 e 14 que qualquer das bolas vai de traço a traço (queda vertical:  $0,15 \text{ m}$ ), portanto entre os instantes  $13 \times 1/30 \text{ s}$  e  $14 \times 1/30 \text{ s}$

- Verificar teoricamente

$$(\Delta h = \frac{1}{2} g t_2^2 - \frac{1}{2} g t_1^2)$$

Daqui concluímos que a velocidade tem sempre a mesma componente horizontal,  $v_0 \vec{u}_x$ , e uma componente vertical, de módulo  $g.t$ , que varia segundo as leis da queda livre — fig. 1.27.



**Fig. 1.27** A velocidade, tangente à trajectória, tem, em cada ponto, uma componente horizontal igual à velocidade inicial,  $\vec{v}_0$ .

Finalmente, derivando a equação da velocidade, concluímos também que a aceleração coincide com a aceleração da gravidade,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -g\vec{u}_y = \vec{g},$$

o que está de acordo com o facto de o móvel estar submetido apenas à força gravítica vertical

$$\vec{F}_g = m\vec{g}$$

## QUESTÕES PROPOSTAS

### Q 1.17

Vamos supor que na experiência fotografada na fig. 1.26 a altura do dispositivo acima do solo é 1,76 m.

Fazendo  $g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$ :

1. Determinar o tempo de queda das bolas.
2. Determinar o alcance horizontal da bola lançada com a velocidade de 2,00 m/s.
3. Indicar a altura máxima que pode ter um anteparo vertical, situado a 0,8 m do ponto onde cai perpendicularmente uma das bolas, para a outra bola não bater nesse anteparo.

## B — Lançamento oblíquo de um grave

No lançamento oblíquo de um projectil com a velocidade  $\vec{v}_0$  (fig. 1.28), de componente horizontal  $\vec{v}_{0x}$ , que vai manter-se constante (porque a aceleração lhe é perpendicular), e de componente vertical  $\vec{v}_{0y}$ , que vai variar (em virtude da aceleração ter a sua direcção), podem, por isso, considerar-se dois movimentos componentes:

— um *m.r.u.*, segundo a horizontal, com velocidade constante de valor:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos \theta_0;$$

— um *m.r.u.v.*, segundo a vertical, com velocidade inicial

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin \theta_0,$$

e a aceleração

$$\vec{a} = -g\vec{u}_y \text{ (fig. 1.28).}$$

Aqui, designamos por  $g$  o **módulo** ou **medida** (e não o valor algébrico) da **aceleração da gravidade**.

Em Portugal, tem-se:

$$g = 9,8 \text{ ms}^{-2} \text{ (com 3 algar.}^s \text{ signifi.}^s)$$

$$g = 10 \text{ ms}^{-2} \text{ (com 2 algar.}^s \text{ signifi.}^s)$$

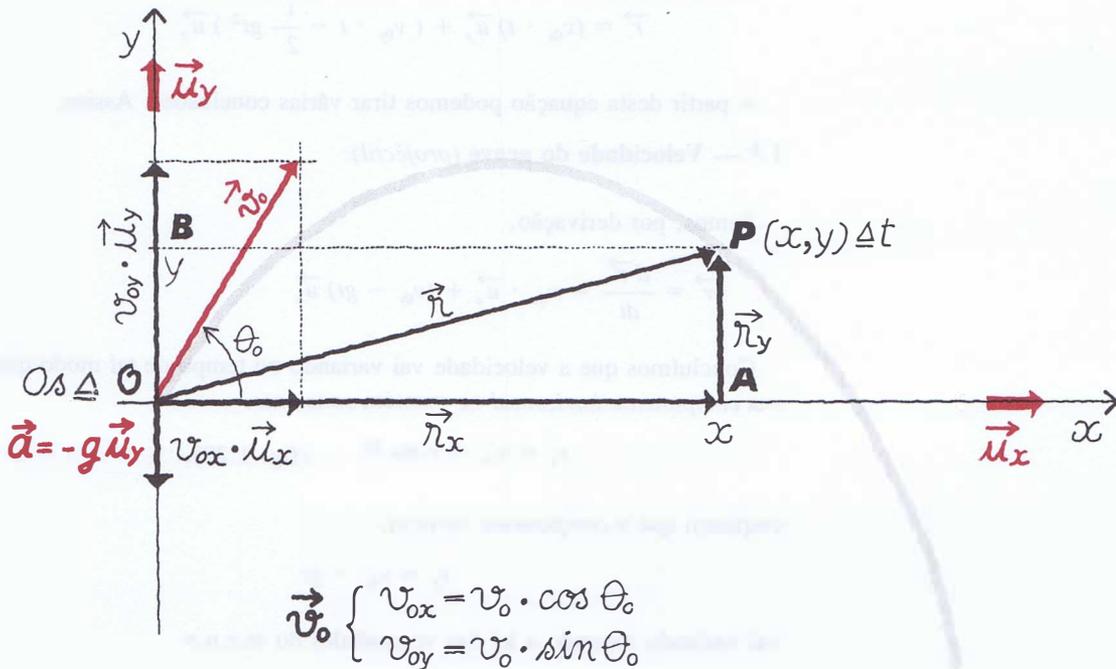


Fig. 1.28 Trajectória parabólica de um projectil lançado obliquamente com a velocidade inicial  $\vec{v}_0$ .  
 $\theta_0$  = ângulo de lançamento (ângulo de inclinação do vector  $\vec{v}_0$ )

Se o projectil não estivesse submetido à força gravítica e tivesse apenas o primeiro dos movimentos componentes, ele estaria, no instante  $t$ , na posição A do eixo dos  $xx$ , de abscissa:

$$x = v_{0x} \cdot t$$

Se, pelo contrário, o projectil se movesse apenas com o segundo movimento componente, então, no instante  $t$ , estaria na posição B do eixo dos  $yy$ , de ordenada

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Pela lei da independência ou sobreposição dos movimentos simultâneos, o grave estará, no instante  $t$ , na posição P, cujas coordenadas são:

$$\begin{cases} x = v_{0x} \cdot t \\ y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Estas são as equações paramétricas do movimento do projectil.

A equação geral do movimento será, então:

$$\vec{r} = (v_{0x} \cdot t) \vec{u}_x + (v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} gt^2) \vec{u}_y$$

A partir desta equação podemos tirar várias conclusões. Assim:

1.<sup>a</sup> — Velocidade do grave (*projétil*):

Temos, por derivação,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_{0x} \cdot \vec{u}_x + (v_{0y} - gt) \vec{u}_y$$

Concluimos que a velocidade vai variando no tempo de tal modo que a sua componente horizontal se mantém constante,

$$v_x = v_{0x} = \text{const.}^{\text{te}} \quad (\text{fig. 1.29}),$$

enquanto que a componente vertical,

$$v_y = v_{0y} - gt$$

vai variando segundo a lei das velocidades do m.r.u.v.

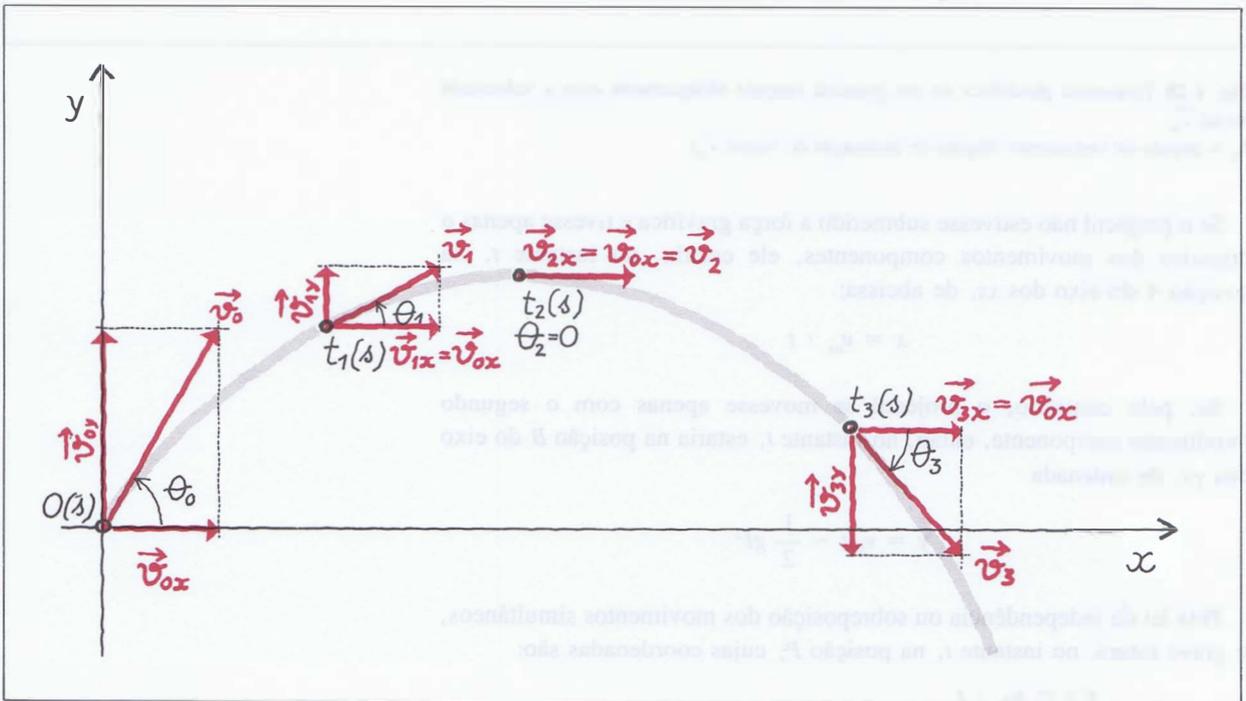


Fig. 1.29 A velocidade, tangente à trajetória do móvel, varia de tal modo que a sua componente vectorial horizontal se mantém constante:

$$\vec{v}_{1x} = \vec{v}_{2x} = \vec{v}_{3x} = \dots = \vec{v}_{0x}$$

O ângulo  $\theta$  da velocidade com a horizontal vai também variando sendo, em cada instante, dado por

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_y}{v_x}$$

## 2.<sup>a</sup> — Aceleração do grave (projectil):

Obtém-se, por derivação da equação das velocidades

$$\vec{v} = v_{0x} \vec{u}_x + (v_{0y} - gt) \vec{u}_y,$$

a equação do vector aceleração:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -g \vec{u}_y = \vec{g}$$

Trata-se, de facto, de um movimento com aceleração constante, sendo esta a aceleração da gravidade.

Várias outras conclusões se podem tirar da equação do movimento e das equações paramétricas. Dessas conclusões resultam várias fórmulas que o aluno não tem necessidade de memorizar. Antes, sim, deve preparar-se para as *deduzir*, sempre que se torne necessário o seu uso. Como tal, convidamo-lo a tentar resolver as questões que se seguem.

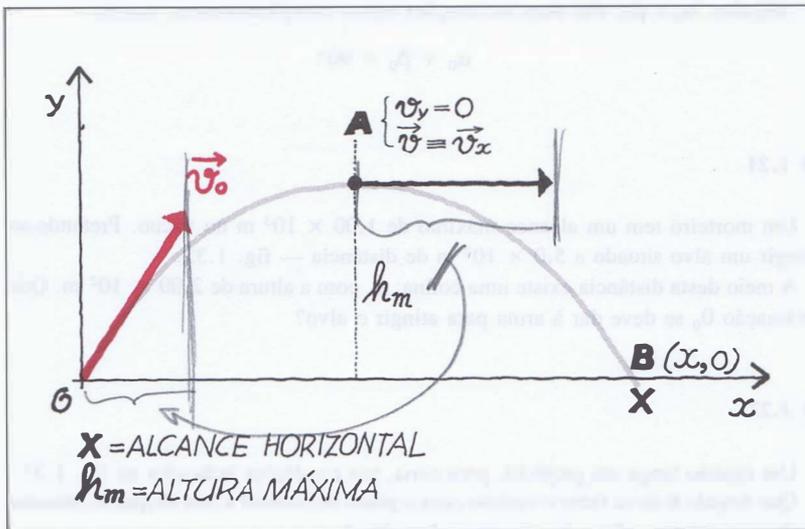
### QUESTÕES PROPOSTAS

#### Q 1.18

Escrever as equações paramétricas do movimento de um projectil e, em face delas, mostrar que a trajectória é uma parábola.

#### Q 1.19

Determinar a *altura máxima* de um projectil,  $h_m$ , ou seja a ordenada do ponto mais elevado da trajectória — fig. 1.30.



### Súmula

A equação geral  $d$  de um projectil lançado

$$\vec{r} = (v_{0x} \cdot t) \vec{u}_x + (v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2) \vec{u}_y$$

Tendo em conta o ângulo de inclinação inicial,  $\theta_0$ , podemos escrever:

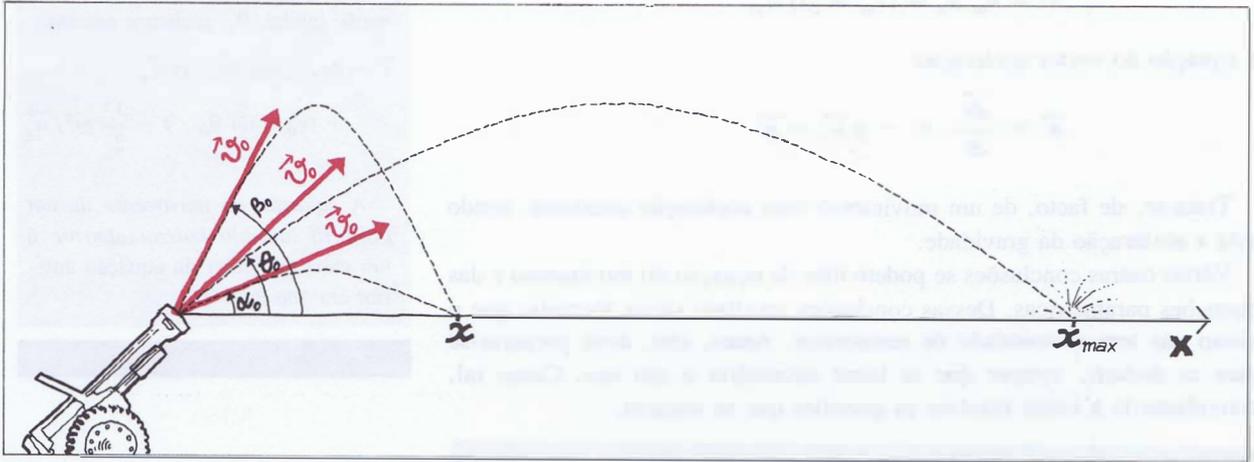
$$\vec{r} = (v_0 \cdot \cos \theta_0 \cdot t) \vec{u}_x + (v_0 \cdot \sin \theta_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2) \vec{u}_y$$

A equação do movimento de um projectil lançado horizontalmente é um caso particular da equação anterior em que  $\theta_0 = 0^\circ$ .

Fig. 1.30 A altura máxima,  $h_m$ , do projectil, é a ordenada do ponto A. Neste ponto, a velocidade coincide com a sua componente horizontal e, portanto, a componente vertical é nula.

**Q 1.20**

1. Determinar a expressão do *alcance horizontal* de um projectil lançado obliquamente em função das componentes da velocidade inicial.
2. Demonstrar que esse alcance horizontal é máximo para um ângulo de lançamento de  $45^\circ$ :  $\theta_0 = 45^\circ$  — fig. 1.31.  
Dado:  $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cdot \cos \theta$ .



**Fig. 1.31** Para velocidades iniciais do mesmo módulo,  $v_0$ , o alcance é máximo para uma inclinação inicial de  $45^\circ$ ; e é o mesmo para inclinações iniciais de valores complementares:

$$\alpha_0 + \beta_0 = 90^\circ$$

3. Mostrar, ainda, que para lançamentos com velocidades de módulo igual,  $v_0$ , o mesmo alcance pode ser obtido com duas inclinações diferentes, desde que os ângulos,  $\alpha_0$  e  $\beta_0$ , das duas inclinações sejam complementares, isto é,

$$\alpha_0 + \beta_0 = 90^\circ$$

**Q 1.21**

Um morteiro tem um alcance máximo de  $1,00 \times 10^3$  m no vácuo. Pretende-se atingir um alvo situado a  $5,0 \times 10^2$  m de distância — fig. 1.32.

A meio desta distância existe uma colina,  $B$ , com a altura de  $2,00 \times 10^2$  m. Que inclinação  $\theta_0$  se deve dar à arma para atingir o alvo?

**Q 1.22**

Um canhão lança um projectil, para cima, nas condições indicadas na fig. 1.33. Que ângulo  $\theta$  deve fazer o canhão com o plano horizontal a fim de que se obtenha o alcance máximo,  $D$ , sobre a rampa da colina?

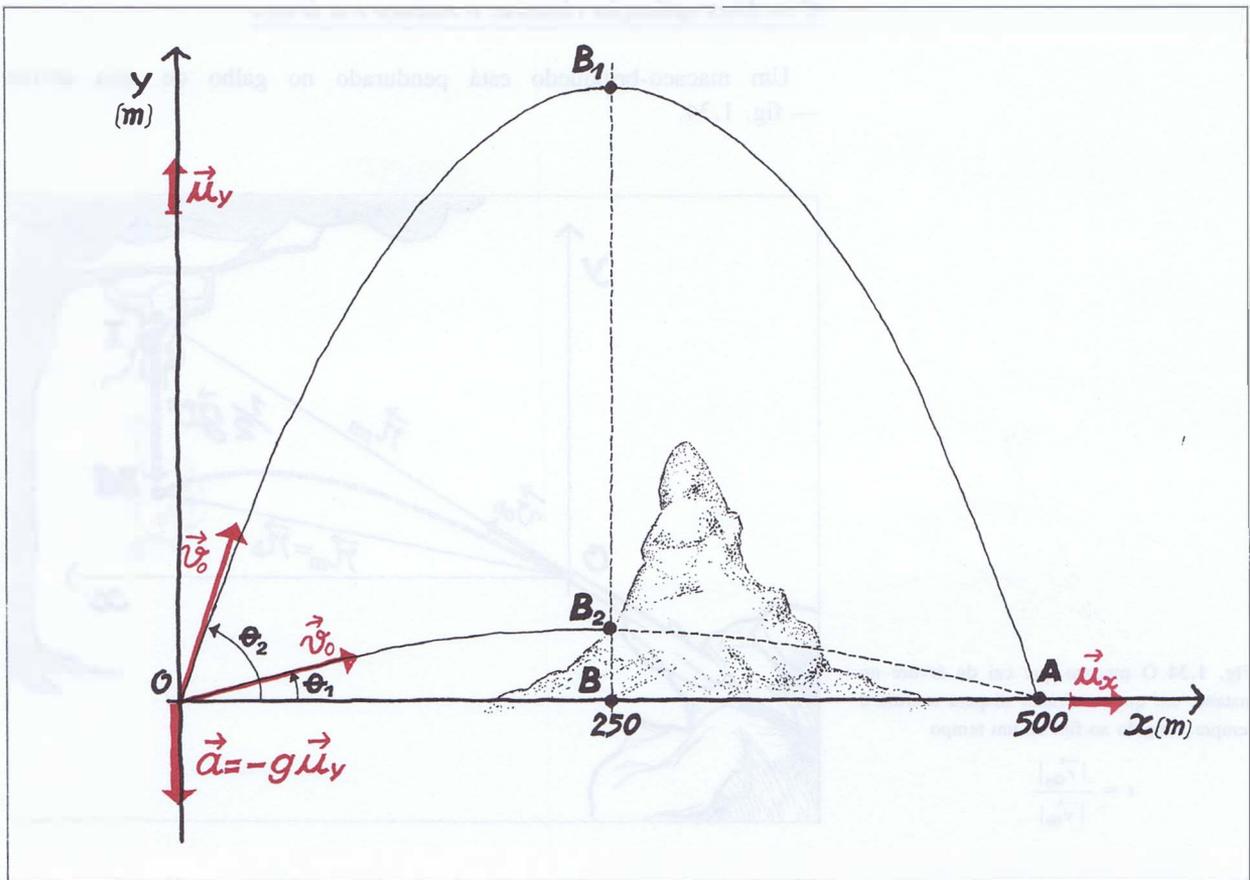


Fig. 1.32 Como atingir o alvo A, passando por cima da colina B, com a altura de 200 m?

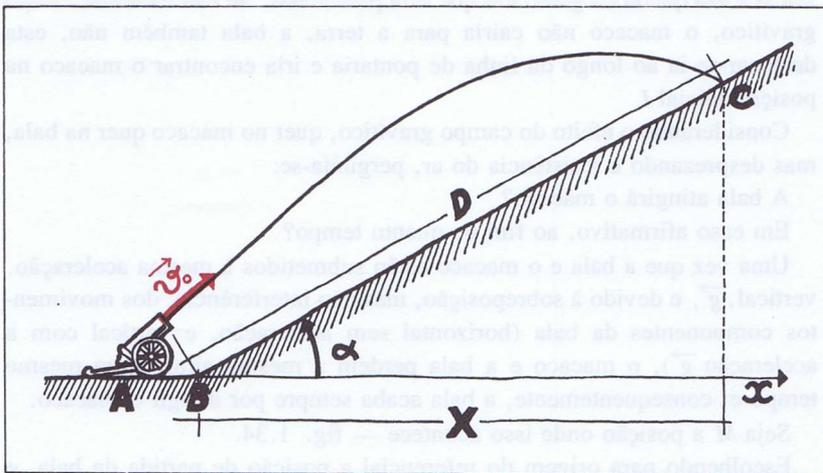


Fig. 1.33 Na plataforma horizontal AB monta-se um canhão para lançar projectéis.  
BC é a rampa de uma colina cujo ângulo de inclinação é  $\alpha$ .

Um macaco-brinquedo está pendurado no galho de uma árvore — fig. 1.34.

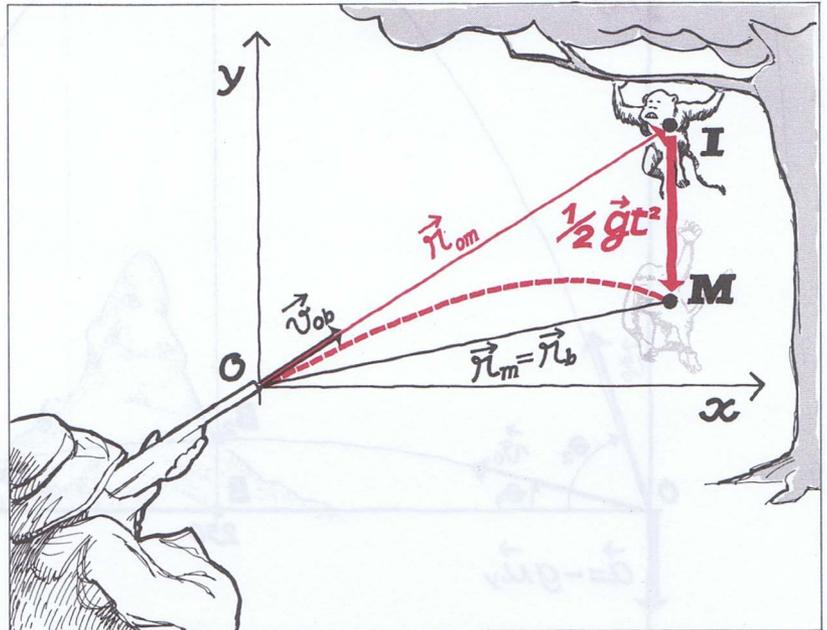


Fig. 1.34 O macaco que cai da árvore no instante em que o atirador dispara a arma é sempre atingido ao fim de um tempo

$$t = \frac{|\vec{r}_{Om}|}{|\vec{v}_{0b}|}$$

Um rapaz, a uma certa distância da árvore, aponta a sua arma de brincar para o macaco e, no preciso instante em que dispara, o macaco também inicia a sua queda do galho em que está pendurado. Se não existisse campo gravítico, o macaco não cairia para a terra, a bala também não, esta deslocar-se-ia ao longo da linha de pontaria e iria encontrar o macaco na posição inicial *I*.

Considerando o efeito do campo gravítico, quer no macaco quer na bala, mas desprezando a resistência do ar, pergunta-se:

A bala atingirá o macaco?

Em caso afirmativo, ao fim de quanto tempo?

Uma vez que a bala e o macaco estão submetidos à mesma aceleração, vertical,  $\vec{g}$ , e devido à sobreposição, mas não interferência, dos movimentos componentes da bala (horizontal sem aceleração, e vertical com a aceleração  $\vec{g}$ ), o macaco e a bala perdem a mesma altura num mesmo tempo e, conseqüentemente, a bala acaba sempre por atingir o macaco.

Seja *M* a posição onde isso acontece — fig. 1.34.

Escolhendo para origem do referencial a posição de partida da bala, e designando por  $\vec{r}_m$  o vector posição do macaco e por  $\vec{r}_b$  o vector posição da bala, ter-se-á:

$$\vec{r}_m = \vec{r}_b$$

Mas tanto o macaco como a bala têm movimentos com aceleração  $\vec{g}$ , constante. Obedecem, portanto, à equação

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \quad (\text{ver secção 1.7.2}),$$

que, para o *macaco*, toma a forma particular (ver fig. 1.34)

$$\vec{r}_m = \vec{r}_{0m} + \vec{0} \cdot t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2$$

e, para a *bala*, a forma

$$\vec{r}_b = \vec{0} + \vec{v}_{0b} \cdot t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2$$

representando  $t$ , nestas expressões, o tempo que dura o movimento parabólico, de  $O$  a  $M$ , da bala, e rectilíneo, de  $I$  a  $M$ , do macaco, até se encontrarem.

Igualando, então, as expressões de  $\vec{r}_m$  e  $\vec{r}_b$ , vem

$$\vec{r}_{0m} = \vec{v}_{0b} \cdot t,$$

donde se conclui que o tempo que o macaco leva a ser atingido,

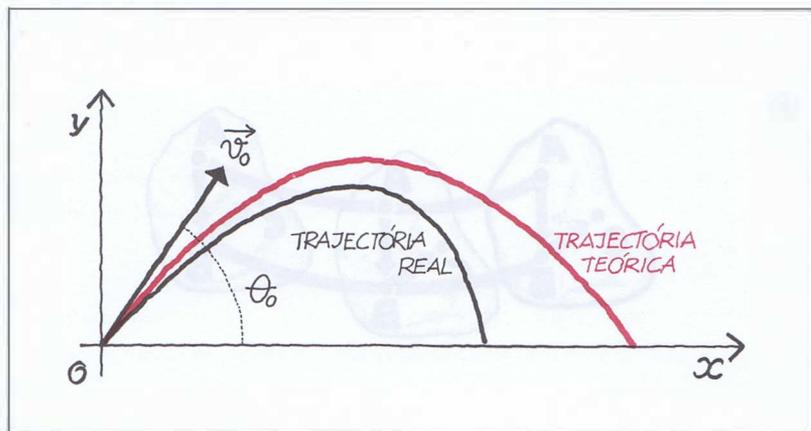
$$t = \frac{|\vec{r}_{0m}|}{|\vec{v}_{0b}|},$$

é:

- 1.º — o mesmo que levaria se não houvesse campo gravítico, pois, nessa situação, o movimento da bala seria uniforme, com a velocidade  $\vec{v}_{0b}$ , e percorreria o espaço rectilíneo de medida  $|\vec{r}_{0m}|$ ;
- 2.º — tanto menor quanto maior for o módulo da velocidade inicial da bala,  $\vec{v}_{0b}$ .

### 1.9.3 Referência ao movimento dos projecteis no ar

No ar e a baixas altitudes, a **trajectória real** do projectil é diferente da **trajectória teórica**, pois a resistência do ar diminui o alcance — fig. 1.35. Por outro lado, a resistência do ar varia com a forma do projectil, a velocidade deste, o grau de humidade do ar, a nebulosidade da atmosfera e a temperatura do ar.



**Fig. 1.35** Trajectória *real* (no ar) de um projectil lançado obliquamente, e trajectória *teórica* (no vácuo).

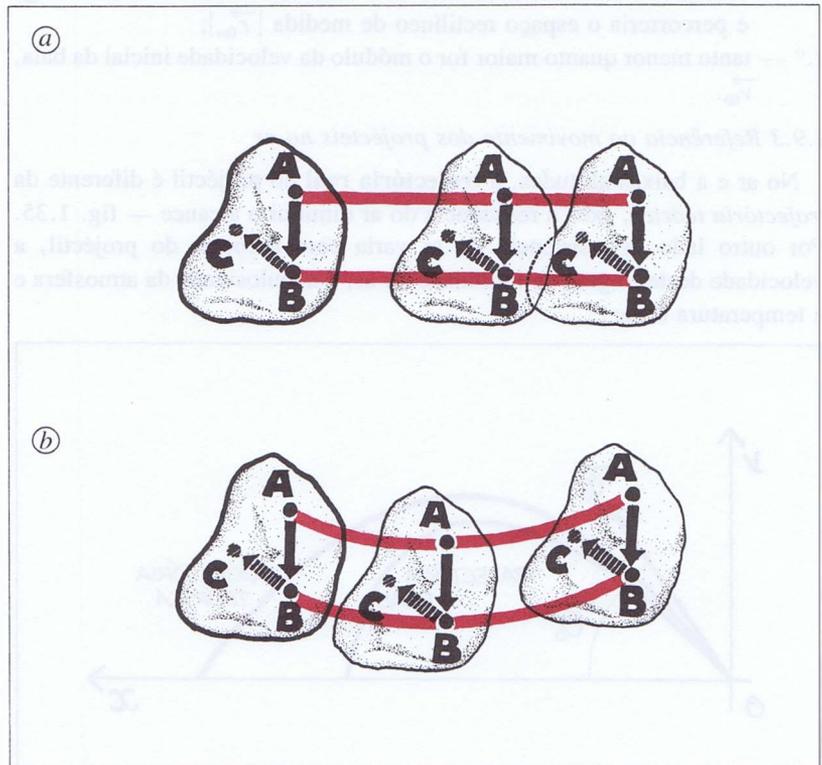
## 1.10 Os corpos em translação considerados como partículas

Acabámos de estudar o movimento de corpos cujas dimensões eram desprezáveis em face das medidas das suas trajectórias. Tais corpos designam-se, genericamente, por **partículas**.

Vamos agora referir-nos sumariamente ao **movimento de translação de corpos** cujas dimensões já não são desprezáveis. Admitiremos que estes corpos são **rígidos, indeformáveis**, isto é, tais que *a distância entre dois quaisquer dos seus pontos não varia no decurso do tempo*. Trata-se, em rigor, de *corpos ideais*, aos quais, porém, muitos corpos autênticos se assemelham no seu comportamento: são aqueles cuja rigidez é suficientemente grande para serem desprezáveis os movimentos relativos das suas partículas, como, por exemplo, moléculas poliatómicas, barras de aço, planetas, etc., etc.

Os movimentos dos corpos rígidos podem ser **simples** (*translação pura e rotação pura*) ou **compostos** (*translação e rotação simultâneas*).

O movimento mais simples de um corpo rígido é o **movimento de translação** ou *translação pura* (fig. 1.36), que tem a seguinte característica: *durante o movimento, qualquer segmento orientado  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$  ou outro, definido por dois pontos do corpo, não muda de direcção*.



**Fig. 1.36** No movimento de translação de um corpo sólido, segmentos orientados quaisquer,  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$  ou outros, definidos por dois pontos do corpo, *não mudam de direcção durante o movimento*.

- (a) Translação rectilínea.  
(b) Translação curvilínea.

Desta definição resultam as seguintes propriedades:

- 1.<sup>a</sup> — Todos os pontos do corpo descrevem trajectórias iguais e paralelas.
- 2.<sup>a</sup> — Num dado instante, todos os pontos têm as mesmas características cinemáticas, em particular a mesma velocidade e aceleração.

Se a *translação* do corpo for *rectilínea* — fig. 1.36, (a), a velocidade (comum) dos pontos do corpo mantém constante a direcção. Se a *translação* for *curvilínea* — fig. 1.36, (b), a direcção da velocidade varia.

Para descrevermos o movimento de translação de um corpo basta, portanto, descrever o movimento de um qualquer dos seus pontos. Por isso, nas unidades seguintes, iremos substituir sistematicamente os corpos em translação por partículas, considerando aplicadas nestas todas as forças exteriores que actuam nesses corpos. Reduziremos, assim, o estudo do movimento de translação de um corpo ao estudo do movimento da partícula.

## QUESTÕES PROPOSTAS

### Q 1.23

Dois automóveis movem-se rectilíneamente, seguindo um atrás do outro. Quando estão à distância  $d$ , o automóvel perseguidor, que segue com a velocidade  $v_A$ , começa a travar com a aceleração constante de módulo  $a$ .

Entretanto, o automóvel perseguido mantém constante a sua velocidade —  $v_B$ .

Estabelecer uma relação entre  $v_A$ ,  $v_B$  e  $2ad$  para a qual:

1. Os automóveis fiquem duas vezes a par.
2. O automóvel perseguidor não consiga alcançar o da frente.

No movimento de translação de um sólido, o vector definido por dois pontos quaisquer,  $A$  e  $B$ , do sólido é um **vector constante** durante o movimento:

$$\vec{AB} = \text{const.}^{\text{te}}$$

Todos os pontos do sólido têm, em qualquer instante, a mesma velocidade e a mesma aceleração.

# Teste de auto-avaliação

## I

Considerar as afirmações seguintes:

- (A) A aceleração média tem a direcção e o sentido da velocidade.
- (B) Nos movimentos uniformes, a velocidade é constante.
- (C) Nos movimentos uniformes, o módulo da velocidade coincide com a rapidez média em qualquer intervalo de tempo.
- (D) Nos movimentos curvilíneos, em que o módulo de velocidade varia proporcionalmente ao tempo, o módulo da aceleração tangencial é constante.

1. Quais são as afirmações correctas?
2. Fundamentar as escolhas feitas.

## II

A figura T.1.1 representa a trajectória de uma partícula móvel e duas velocidades,  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ , que dizem respeito a dois instantes,  $t_1$  e  $t_2$ , separados por um intervalo de 2,0 s.

$$|\vec{v}_1| = 10 \text{ ms}^{-1} \quad |\vec{v}_2| = 20 \text{ ms}^{-1}$$

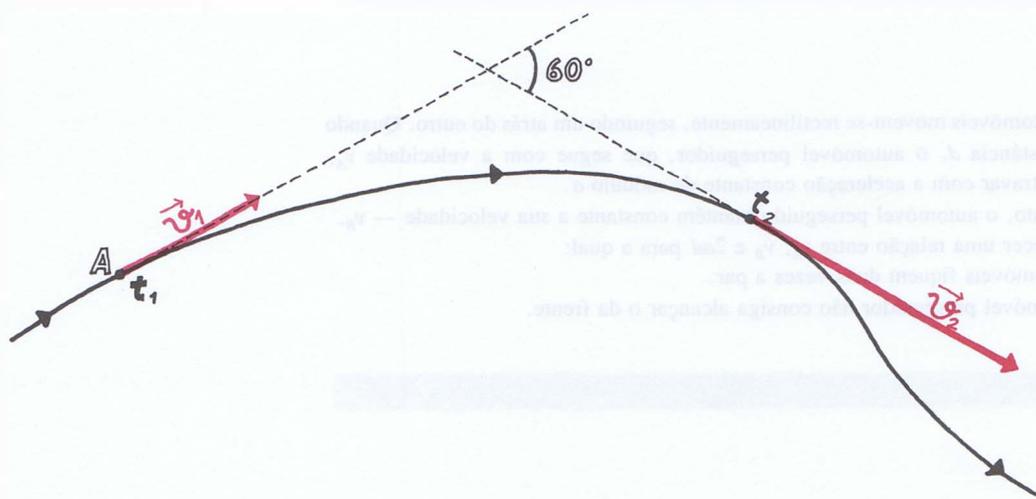


Fig. T.1.1

1. Copiar a figura e completá-la, determinando graficamente o vector aceleração média no intervalo  $[t_1, t_2]$ , representando-o no ponto A.
2. Determinar algebricamente o módulo do referido vector aceleração média.

## III

Um dado movimento plano tem a seguinte equação do movimento:

$$\vec{r} = \cos t \cdot \vec{u}_x + \sin t \cdot \vec{u}_y \quad (\text{SI})$$

Sabendo que as derivadas de  $\sin t$  e  $\cos t$  são, respectivamente,

$$(\sin t)' = \cos t \quad \text{e} \quad (\cos t)' = -\sin t :$$

1. Determinar a velocidade da partícula no instante  $t = 2\pi$  segundos.
2. Determinar a aceleração da partícula nesse mesmo instante.
3. Mostrar que se trata de um movimento circular uniforme.
4. Determinar o módulo da velocidade angular desse movimento circular uniforme e, bem assim, a sua expressão vectorial, se o movimento estiver a realizar-se no sentido anti-horário (directo).

#### IV

A equação vectorial

$$\vec{r} = 490 t \vec{u}_x + (490 t - 4,9 t^2) \vec{u}_y \quad (\text{SI})$$

refere-se ao lançamento oblíquo de um projectil num sistema ortogonal de dois eixos, centrado no ponto de lançamento, com o eixo dos  $xx$  horizontal (despreza-se a resistência do ar).

1. Determinar o tempo que o projectil leva a atingir o ponto mais alto da trajectória.
2. Determinar o alcance horizontal do projectil.
3. No instante  $t = 10$  s, posterior ao lançamento, a que altura se encontra o projectil?

#### V

Um rapaz faz rodar uma pedra numa trajectória circular de raio 1,5 m, praticamente num plano horizontal e à altura de 2,0 m acima do solo. O fio parte-se e a pedra vai atingir o solo num ponto afastado 10 m da vertical do ponto de largada.

Qual era a aceleração centrípeta da pedra quando o fio se partiu?

$$(g = 10 \text{ ms}^{-2})$$

#### VI

Uma partícula move-se ao longo de uma parábola de equação  $y = \frac{1}{2} x^2$  — fig. T.1.2 — de tal modo que a componente, segundo o eixo dos  $xx$ , da sua velocidade tem valor constante,  $k$ :

$$v_x = k \iff x = kt$$

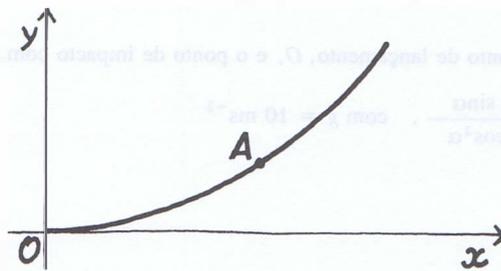


Fig. T.1.2

1. Determinar a componente da velocidade segundo o eixo dos  $yy$ ,  $v_y$ , como função de  $x$ .
2. Determinar as componentes da aceleração segundo os eixos,  $a_x$  e  $a_y$ .
3. Representar num diagrama igual ao da fig. T.1.2 os vectores velocidade e aceleração no ponto A.

### VII

Uma partícula descreve uma circunferência de raio 27 cm com movimento circular uniformemente acelerado. Num ponto A, a sua velocidade é  $9 \text{ cm s}^{-1}$  e, num outro ponto B, onde se encontra 0,25 s após a passagem em A, a sua velocidade é  $10 \text{ cm s}^{-1}$ .

Determinar:

1. O módulo da aceleração da partícula em A.
2. A tangente do ângulo formado pela aceleração com o vector posição em A, em relação ao centro.

### VIII

Fundamentar a veracidade ou falsidade das seguintes afirmações:

- 1.ª «Em qualquer movimento uniformemente variado é  $|\vec{a}_t| = \text{const.}^{\text{te}}$ »
- 2.ª «Nos movimentos rectilíneos e uniformemente variados são constantes  $\vec{a}_t$  e  $\vec{a}_c$ ».

### IX

Uma boca de fogo lança um projectil, com a velocidade inicial  $\vec{v}_0$ . Esta velocidade é perpendicular à rampa cujo ângulo de inclinação é  $\alpha$ .

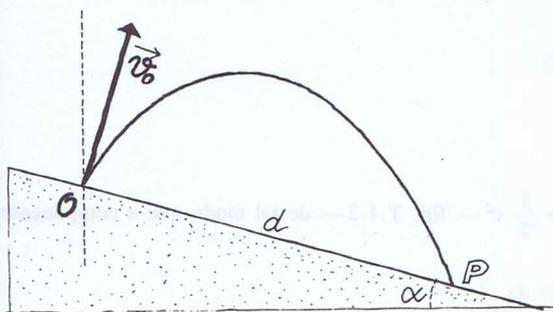


Fig. T.1.3

Provar que a distância  $d$  entre o ponto de lançamento,  $O$ , e o ponto de impacto com a rampa,  $P$ , é dado pela expressão

$$d = \frac{v_0^2 \sin \alpha}{5 \cos^2 \alpha}, \quad \text{com } g = 10 \text{ ms}^{-2}$$

# Leis de Newton do movimento

UNIDADE

2



Galileu Galilei (1564-1642)

Pioneiro da «revolução científica», inicia um período novo e muito produtivo no que respeita à compreensão do Universo e descoberta das **leis da queda dos graves**.

Este sábio pisano, contemporâneo de *Kepler* (1571-1630), o primeiro descobridor de leis da Natureza (a cinemática do sistema solar), tornou-se publicamente célebre pela defesa apaixonada, e nem sempre servida por argumentos científicos irrefutáveis, do sistema de *Copérnico* (1473-1543). Publicou em 1632 o *Diálogo dos Grandes Sistemas*, onde revela o brilho da sua argumentação e o seu pendor irónico (em 1979 apareceu uma tradução portuguesa).

Depois de ter sido condenado pela Inquisição ao encarceramento em «gaiola dourada», produziu, nos últimos dez anos de vida, a sua inestimável obra científica: aqui, sim, *abre caminhos novos*.



Isaac Newton (1643-1727)

Alarga e prolonga os caminhos rasgados por Galileu, estabelecendo, com genial argúcia, as **leis fundamentais do movimento**.

*Newton* surge-nos como um alto espírito que descobre *horizontes novos*. Em 1663, com 20 anos, compra numa feira um livro de astrologia; para compreender uma das suas figuras, adquire um livro de Trigonometria; para entender as demonstrações desta, arranja um exemplar dos *Elementos de Geometria de Euclides*; dois anos volvidos, e depois de ler a *Geometria Analítica de Descartes*, *inventa o cálculo diferencial!*

1666 foi o seu «ano milagroso»: fez as descobertas mais importantes. Interrogado sobre como as conseguia, respondeu com natural simplicidade: «Pensando nelas!»

Era dotado de feitio e trato difícil: orgulhoso, briguento e doente, aceitava mal a contestação...



# Leis de Newton do movimento



Isaac Newton (1643-1727)



Galileo Galilei (1564-1642)

- 2.1** Como se estabelecem as leis físicas
  - 2.1.1 Que são as leis físicas?
  - 2.1.2 Critérios de estabelecimento das leis físicas
- 2.2** A lei da inércia
  - 2.2.1 Concepção geocêntrica
  - 2.2.2 Concepção heliocêntrica
  - 2.2.3 A Mecânica de Galileu e Newton
- 2.3** Referenciais de inércia
- 2.4** Lei fundamental ou segunda lei de Newton
- 2.5** Definição das grandezas força e massa
- 2.6** A lei da acção e reacção
- 2.7** Algumas aplicações das leis de Newton
  - 2.7.1 Metodologia para aplicação das leis de Newton
  - 2.7.2 Equilíbrio da partícula
  - 2.7.3 As forças que actuam no pêndulo gravítico simples
  - 2.7.4 As forças que actuam no pêndulo cónico
  - 2.7.5 Dinâmica de um sistema de partículas ligadas
- 2.8** Validade das leis da Mecânica. Princípios da relatividade de Galileu e de Einstein
  - 2.8.1 A adição de velocidades
  - 2.8.2 A aceleração é independente dos referenciais (inerciais)
  - 2.8.3 Os princípios da relatividade de Galileu e Einstein

# Leis de Newton do movimento

---

## 2.1 Como se estabelecem as leis físicas

### 2.1.1 Que são as leis físicas?

Nesta Unidade vamos apresentar o estudo físico do movimento ou, mais propriamente, iniciar a Dinâmica. Isto quer dizer que iremos tratar das leis do movimento e da doutrina ou teoria que o **explica**. Igualmente serão explicados os fenómenos que decorrem do movimento, tornando-os inteligíveis. Os objectivos são, pois, diferentes dos da Cinemática, onde não passámos da *mera descrição* geométrica dos diferentes movimentos.

Por isso, antes de nos referirmos aos três pilares em que assenta a Mecânica clássica, isto é, às **três leis de Newton** relativas ao movimento, convém estabelecer o valor epistemológico destas leis e bem assim o de todas as leis básicas da Física.

Em primeiro lugar, recordamos que as **leis físicas** são afirmações que de momento se revelam correctas acerca do modo como ocorrem os fenómenos. Esta é uma condição inerente à sua finalidade — as leis físicas foram criadas para a compreensão dos fenómenos.

Em segundo lugar, salientamos o seguinte princípio geral seguido em Ciência: *uma lei não tem carácter eterno*.

O carácter *útil e momentâneo* das leis físicas, e nunca é de mais insistir neste ponto, revela-se no facto de muitas afirmações sobre o comportamento da matéria, feitas ao longo da história da Ciência, não serem hoje aceites como leis físicas.

A título de exemplo, lembramos que *Aristóteles*, no século IV a. C., julgava ter descoberto uma lei da Natureza ao afirmar que os corpos mais pesados caem para a Terra mais rapidamente do que os corpos mais leves.

A lei da Natureza que actualmente se refere a esta situação foi descoberta por *Galileu* apenas no século XVII, isto é, cerca de 2000 anos depois, e, segundo ela, todos os corpos caem para a Terra com a mesma aceleração, independentemente do seu peso.

Este exemplo de uma lei que, posteriormente, se revela errada nem é geral nem é tão-pouco o caso mais vulgar. Com efeito, na maioria das vezes sucede que o refinamento de uma técnica experimental ou a descoberta de factos novos vêm provar que a ideia que está no cerne de uma lei ou de uma teoria deixa de ser totalmente correcta, porque não se pode aplicar às novas descobertas ou aos novos resultados.

Surge então a necessidade de modificar a lei ou a teoria, e ampliar o seu âmbito de modo a explicar os factos novos.

Sucedeu assim com a **Mecânica relativista** de *Einstein*, que se pode considerar como uma extensão da *Mecânica newtoniana*.

Apesar da imensa vastidão do nosso Universo, os cientistas têm levado a cabo a tarefa notável de hierarquizar as leis e unificar as teorias, reduzindo ao mínimo o número de leis fundamentais que permitem descrever este Universo.

Apresentamos, a propósito, o exemplo sugestivo da unificação das teorias, inicialmente independentes, do Magnetismo, da Electricidade e, mais tarde, da própria Óptica, fundidas hoje numa única teoria — a **teoria electromagnética**. Esta condensa-se num número reduzido de equações, as *equações de Maxwell*, que traduzem, por sua vez, um número igualmente reduzido de leis.

### 2.1.2 Critérios de estabelecimento das leis físicas

São dois os critérios principais que presidem ao estabelecimento das leis físicas:

#### 1.º — O critério da simplicidade

Os cientistas acreditam que, não obstante a complexidade dos fenómenos naturais, é possível torná-los inteligíveis por meio de equações que traduzam *leis físicas simples*. Este critério é actualmente questionado por vários pensadores.

#### 2.º — O critério da generalidade

O Universo tem-se revelado *homogéneo* no tempo e no espaço, isto é, tem manifestado as mesmas propriedades em qualquer ponto e em qualquer instante, quer quanto à propagação da energia quer quanto às interacções desta com a matéria.

Este facto tem possibilitado a *generalização* de um número reduzido de leis a todos os fenómenos naturais estudados até hoje.

**Q 2.1**

Indicar o que caracteriza uma lei física quanto à sua utilidade, à sua durabilidade e à sua evolução.

**Q 2.2**

Os critérios da simplicidade e da generalidade aplicados às leis físicas são lógicos, são apenas intuitivos ou são considerados axiomáticamente como hipóteses de trabalho?

**2.2 A lei da inércia**

**2.2.1 Concepção geocéntrica**

Sabemos, por experiência, que **só a actuação de forças pode alterar o estado cinético de um corpo**. Por exemplo, um corpo em repouso no tampo horizontal de uma qualquer mesa é *incapaz de se pôr em movimento por si próprio*.

A partir deste ponto de vista, que é um ponto de vista correcto, *Aristóteles* (384-322 a.C.) foi conduzido à seguinte ideia incorrecta: o movimento dum corpo exige a interacção dele com outros corpos, isto é, um corpo só pode estar em movimento se for actuado por forças.

Um dos motivos que o conduziram a essa ideia errada foi aceitar o *geocentrismo* do Universo — fig. 2.1.



**Fig. 2.1** Aristóteles acreditava num *Universo* limitado, constituído por muitas superfícies esféricas, transparentes e concêntricas. A estas esferas pertenciam os astros, e a *Terra* ocupava o centro desse *Universo*. A superfície esférica exterior das estrelas fixas era movida por um motor de natureza espiritual — o *Primum Mobile*.

Aristóteles distinguia entre os **corpos celestes**, formados pela *quinta essência*, não existente na Terra, e cujos movimentos naturais eram circunferências perfeitas, eternamente fixas, e os **corpos terrestres**, constituídos por um ou mais dos quatro elementos: «terra», «água», «ar» e «fogo», cada um destes com o seu *lugar natural* (esses elementos não correspondiam às substâncias naturais que hoje têm esses nomes).

O movimento dos corpos só era **natural**, isto é, só ocorria na ausência de forças, durante o tempo mínimo necessário para ocuparem os seus lugares naturais, de acordo com os elementos que os constituíam. Era o que sucedia, por exemplo, com uma pedra em queda no ar e na água. Segundo Aristóteles, isso devia-se ao facto de ser constituída principalmente por «terra», e o lugar natural deste elemento ser por baixo do «ar» e da «água».

Todos os demais movimentos eram **violentos**, quer dizer, provocados e sustentados por forças.



**Fig. 2.2** Ptolomeu (90-168), a quem se deve a imposição da teoria geocêntrica durante perto de 15 séculos, fundamentava a não rotação da Terra no facto de uma pessoa, ao saltar num ponto A, cair no mesmo ponto e não noutra, B por exemplo.

### 2.2.2 Conceção heliocêntrica

Nos finais do séc. XIV e durante o séc. XV, dois problemas estimulavam a investigação das leis dos movimentos. Por um lado, o desenvolvimento da artilharia. Por outro lado, o *heliocentrismo*, proposto por Nicolau Copérnico (1473-1543), segundo o qual o Sol estava no centro do Universo e a Terra era um planeta que, como os demais, se movia em torno do Sol.

Esta *hipótese heliocêntrica* punha em xeque a Mecânica aristotélica. Com efeito, a Terra parecia mover-se por si mesma, pois não era crível que ela, assim como os outros planetas, estivesse continuamente a ser empurrada há milhões de anos. Mas também levantava dificuldades, porque, por exemplo, sendo a Terra móvel, tornava-se necessário explicar o facto de um corpo, ao ser lançado ao ar, abandonando a superfície da Terra, acabar por cair exactamente no mesmo ponto de lançamento e não noutra ponto que estivesse mais atrás, no momento do lançamento — fig. 2.2.

### 2.2.3 A Mecânica de Galileu e Newton

A solução para o enigma imposto pela teoria heliocêntrica, e para muitos outros relacionados com o movimento, só pôde ser encontrada nos séculos XVI e XVII com o trabalho de dois notáveis cientistas — *Galileu e Newton*.

A partir quer de *experiências reais* quer *conceptuais*, Galileu chegou à conclusão de que um corpo, desde que não seja actuado por forças, se move eternamente, em linha recta, com velocidade constante — fig. 2.3.

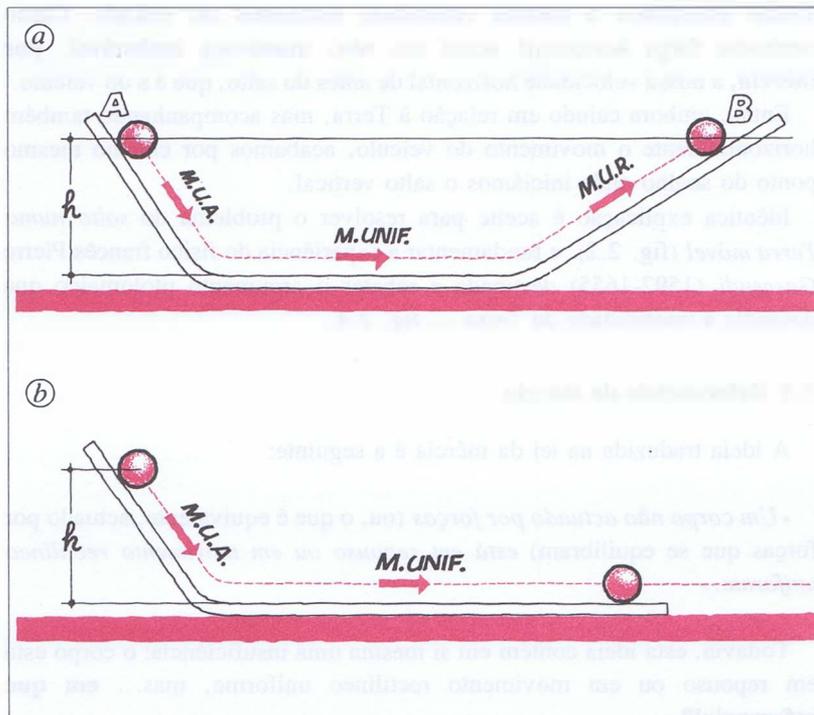


Fig. 2.3 Uma experiência ideal de Galileu.

- (a) Uma esfera, abandonada na posição A, tende a subir até à altura primitiva (posição B), quaisquer que sejam as inclinações dos dois planos, aproximando-se tanto mais da altura  $h$  quanto melhor eliminarmos o atrito.
- (b) Se imaginarmos a ausência de atrito e suprimirmos o 2.º plano, a altura inicial jamais será atingida. Nesta situação, o movimento no plano horizontal é eterno, ou seja interminável.

Esta ideia galilaica, frontalmente oposta à ideia aristotélica dos movimentos violentos, viria a ser fundamentada por *Newton*, que a traduziu na seguinte frase (escrita em latim, como era uso naquela época):

«**Todo o corpo continua em estado de repouso ou de movimento uniforme, em linha recta, a menos que seja compelido a mudar esse estado por forças que lhe sejam aplicadas.**»

Desta lei da inércia resultam imediatamente duas consequências:

- 1.<sup>a</sup> — A «invenção» do conceito mecânico de **força** como entidade responsável pela alteração do estado cinético dos corpos.
- 2.<sup>a</sup> — O conceito de **inércia** como propriedade intrínseca de todos os corpos. Esta propriedade consiste na tendência que cada corpo tem para *manter* o seu estado cinético, ou seja para manter a sua *velocidade*.

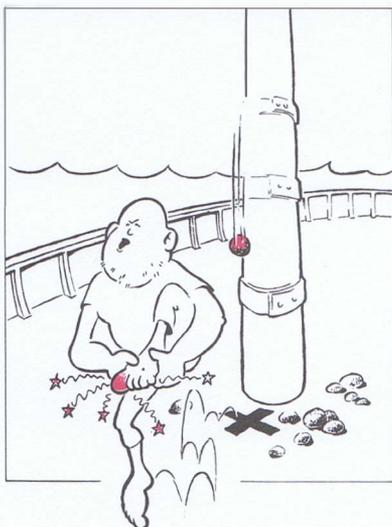
## Súmula

## 2.1

Na **concepção geocêntrica** havia movimentos naturais e movimentos forçados ou violentos.

Na **concepção heliocêntrica**, um corpo pode mover-se por si, isto é, sem ser actuado por forças.

Na concepção galilaico-newtoniana, impôs-se a **lei da inércia**, segundo a qual os corpos, se não forem actuados por forças, mantêm a sua velocidade (quer dizer: ou estão em repouso ou em movimento rectilíneo, uniforme e eterno).



**Fig. 2.4** Gassendi abandonou pedras do mastro de um barco em movimento. Verificou que elas caíam junto à base do mastro, precisamente no mesmo ponto onde caíam com o barco parado. Com esta experiência procurou rebater o argumento ptolomaico a favor da imobilidade da Terra — fig. 2.2.

É precisamente devido à *inércia* que, ao saltarmos na direcção vertical, quando estamos numa viatura em movimento uniforme, acabamos por cair no mesmo ponto desta. Com efeito, ao abandonarmos verticalmente o soalho possuímos a mesma velocidade horizontal do veículo. Como nenhuma força *horizontal* actua em nós, mantemos inalterável, **por inércia**, a nossa velocidade horizontal de antes do salto, que é a do veículo.

Então, embora caindo em relação à Terra, mas acompanhando também horizontalmente o movimento do veículo, acabamos por cair no mesmo ponto do soalho onde iniciámos o salto vertical.

Idêntica explicação é aceite para resolver o problema do *salto numa Terra móvel* (fig. 2.2), e fundamentar a experiência do físico francês Pierre Gassendi (1592-1655) destinada a rebater o argumento ptolomaico que defendia a imobilidade da Terra — fig. 2.4.

### 2.3 Referenciais de inércia

A ideia traduzida na lei da inércia é a seguinte:

«*Um corpo não actuado por forças* (ou, o que é equivalente, actuado por forças que se equilibram) *está em repouso ou em movimento rectilíneo uniforme.*»

Todavia, esta ideia contém em si mesma uma insuficiência: o corpo está em repouso ou em movimento rectilíneo uniforme, mas... **em que referencial?**

Sem a indicação do referencial, a afirmação de que o corpo está em repouso ou que está em m.r.u. *carece de sentido*. Pois não é verdade que o mesmo corpo pode estar em m.r.u. num referencial e ter movimento curvilíneo variado noutro? Torna-se, pois, necessário completar a lei da inércia, especificando o referencial onde estamos a considerar o m.r.u. ou o repouso.

Passamos, por isso, a afirmar:

*Todo o corpo não actuado por forças está em repouso ou em m.r.u. relativamente a determinados referenciais*, que designamos genericamente por **referenciais de inércia**.

Acabámos, deste modo, com uma insuficiência, mas caímos, por outro lado, num *círculo vicioso*. Senão, vejamos.

Que é um **referencial de inércia**?

É, por sua própria definição, um *referencial onde é válida a lei da inércia*. Por outras palavras, é um referencial relativamente ao qual uma partícula não actuada por forças está em repouso ou em movimento rectilíneo uniforme. Certo. Mas nós, por outro lado, só podemos afirmar que uma partícula **não é actuada por forças** se ela se conservar em repouso ou em m.r.u. num referencial de inércia.

Quer dizer:

Definimos *referenciais de inércia* a partir do estado cinético dos corpos na *ausência de forças*. Mas para falarmos em *ausência de forças* temos de partir da existência prévia de *referenciais de inércia*.

É a serpente com a cauda na boca, alimentando-se de si própria...

Poderíamos seguir uma outra via e definir *referenciais de inércia* como sendo aqueles que se podem considerar em movimento livre, portanto sem qualquer aceleração, já que só nessas condições os seus observadores (*observadores de inércia*) verão um corpo, não actuado por forças, permanecer em repouso ou em m.r.u.

Mas esta definição dos referenciais de inércia, como *referenciais* que se *movem sem aceleração*, sugere uma pergunta extremamente embaraçosa, quicá sem resposta:

### — Onde existem no Universo os referenciais de inércia?

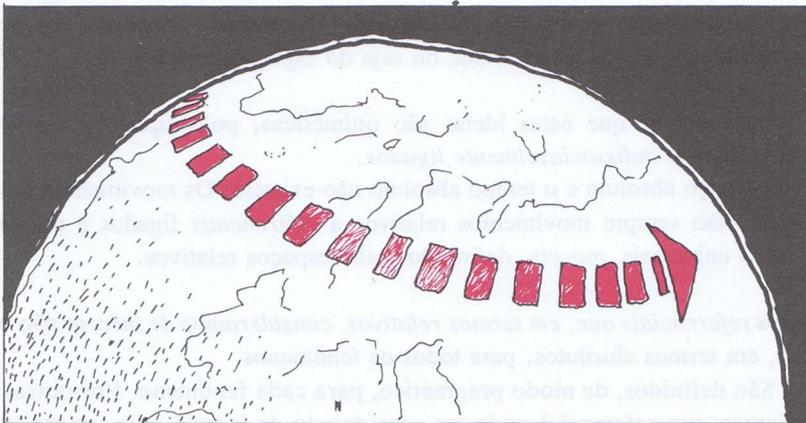
Esta questão colocou-a a si mesmo o próprio Newton.

O facto de a lei da inércia ter sido estabelecida na Terra parece levar-nos a concluir que a Terra é um *referencial de inércia*.

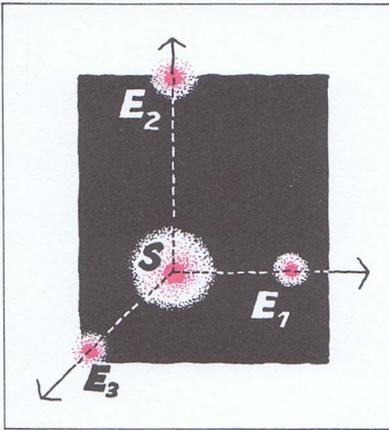
Ora sabe-se que a Terra *roda* em torno do seu eixo com uma aceleração de  $3,4 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-2}$  e na *translação* em torno do Sol tem uma aceleração de  $0,6 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-2}$ .

O efeito de acelerações tão pequenas é perfeitamente desprezável para *movimentos de curta duração*. Nestas condições, é legítimo considerarmos a Terra como *referencial de inércia* na grande maioria das situações com que vamos trabalhar.

Porém, no estudo dos movimentos celestes, o efeito da rotação da Terra já se faz sentir — fig. 2.5.



**Fig. 2.5** Ainda que o Sol e as outras estrelas, num intervalo de tempo de 12 horas, pouco variem de velocidade, dadas as suas baixas acelerações, têm nítido movimento curvilíneo para os observadores terrestres, em virtude do movimento de rotação da Terra no sentido directo (anti-horário).



**Fig. 2.6** O referencial inercial-base de Newton, também chamado *referencial de Kepler*, tem o seu centro no Sol e os três eixos passando por três estrelas «fixas» em relação ao Sol.

### G.E.2.2 e G.E.2.3 ◀

#### Súmula

2.2

Os **referenciais de inércia** são referenciais onde um corpo, não actuado por forças, está em repouso ou em m.r.u. e eterno.

Conceptualmente, os referenciais de inércia são referenciais *não acelerados* e só poderiam existir num *espaço absoluto*, que é irreal por não se relacionar com os corpos.

Os *referenciais de inércia* que adoptamos são **relativos a cada fenómeno**: de acordo com o valor da sua aceleração, podem tomar-se para referenciais de inércia nuns fenómenos (curta duração) e não podem para outros (longa duração).

Para o estudo da dinâmica celeste, Newton adoptou como referencial de inércia um referencial centrado no Sol e com três eixos passando por três estrelas «fixas» — fig. 2.6. É o chamado **referencial de Kepler** ou **referencial inercial-base newtoniano**.

Posteriormente, Newton intuiu que este referencial também não seria de inércia para todos os movimentos celestes possíveis. Hoje, sabe-se que, de facto, o Sol tem a velocidade (em média) de

$$v_s = 3 \times 10^5 \text{ ms}^{-1}$$

em torno do centro da nossa galáxia, movendo-se a uma distância média desse centro

$$R_s \approx 3 \times 10^{20} \text{ m}$$

Este movimento implica uma aceleração da seguinte ordem de grandeza:

$$a_s = \frac{v_s^2}{R_s} \approx 3 \times 10^{-10} \text{ ms}^{-2}$$

Trata-se de uma aceleração por demais insignificante, mesmo para *movimentos celestes duradouros*.

Em termos absolutos, o Sol também não é um referencial de inércia, porque acelera. Como, aliás, aceleram todos os corpos do Universo, desde a mais remota galáxia aos minúsculos constituintes da matéria.

Foi a intuição genial deste facto que conduziu Newton à aceitação de um **espaço absoluto**, espaço que existiria para além dos corpos e no qual um referencial fixo seria um **referencial inercial absoluto**.

Os corpos teriam **movimentos absolutos** em relação a esses referenciais, movimentos que ocorreriam no decurso do **tempo absoluto** (tempo independente desses referenciais, ou seja do espaço absoluto).

Hoje sabe-se que estas ideias são quiméricas, pois *espaço e tempo* encontram-se *indissociavelmente ligados*.

O espaço absoluto e o tempo absoluto não existem. Os movimentos dos corpos são sempre movimentos relativos a *referenciais* ligados a outros corpos universais, *móveis*, definindo assim espaços relativos.

Os *referenciais* que, em termos relativos, consideramos de inércia não o são, em termos absolutos, para todos os fenómenos.

São definidos, de modo pragmático, para cada fenómeno. Por outras palavras: um referencial pode ser considerado de inércia para um dado fenómeno e não o ser para outro fenómeno.

**Q 2.3**

A inércia de um corpo é a propriedade segundo a qual o corpo:

- (A) estando a acelerar, tende a manter essa aceleração.
- (B) estando suspenso, tende a cair para Terra.
- (C) estando a mover-se livremente, acaba por parar.
- (D) estando a mover-se livremente, tende a manter a sua velocidade.

Escolher a opção correcta.

**Q 2.4**

1. O passageiro de um comboio atira ao ar, *verticalmente*, fora da janela, um porta-chaves, com uma dada velocidade. Mantendo a mão fixa e sendo desprezável a resistência do ar, onde acaba por cair o porta chaves: atrás da mão, à frente da mão, ou sobre a mão do passageiro?
2. Fundamentar a resposta à alínea anterior.

**2.4 Lei fundamental ou segunda lei de Newton**

Já sabemos do 10.<sup>o</sup> ano o que se entende por **quantidade de movimento** ou **momento linear**,  $\vec{p}$ , de uma partícula: é uma grandeza vectorial, igual ao produto da massa inercial da partícula pela sua velocidade, ou seja

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

Tomando por base, principalmente, o princípio da independência das forças simultâneas, de Galileu, as observações deste cientista e as suas próprias conjecturas sobre a variação da quantidade de movimento dos corpos, Newton estabeleceu a seguinte **lei fundamental do movimento**:

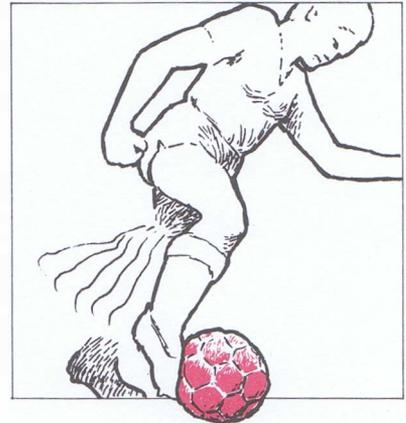
*A taxa temporal de variação da quantidade de movimento (ou momento linear) de uma partícula é igual à força que actua na partícula (fig. 2.7):*

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (\text{forma geral da 2.ª lei de Newton})$$

Se a massa da partícula é constante,

$$m = \text{cons.}^{\text{te}},$$

o que acontece para a grande maioria das partículas, que se movem com *baixas velocidades* (em geral, inferiores a 1% da velocidade da luz no vácuo), então podemos, tal como Newton fez, modificar a forma mais geral da 2.<sup>a</sup> lei.



**Fig. 2.7** Traduzimos a interacção entre as partículas do pé e da bola afirmando que o pé exerceu *uma força na bola*. De acordo com a *lei fundamental de Newton*, na sua forma mais geral, podemos afirmar que a força exercida na bola é igual à taxa temporal da variação da quantidade de movimento (ou momento linear) da bola:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

*Newton* estabeleceu a lei fundamental do movimento ou 2.<sup>a</sup> lei nos seguintes termos: «a taxa temporal da variação da quantidade de movimento de uma partícula é igual à força que actua na partícula». Atendendo a que a quantidade de movimento é a grandeza

$$\vec{p} = m \vec{v} ,$$

a 2.<sup>a</sup> lei pode ser traduzida na forma:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Posteriormente, *Newton* derivou desta expressão a forma simplificada da mesma lei,

$$\vec{F} = m \vec{a} ,$$

que é válida apenas nas situações em que a massa da partícula é constante.

Temos, assim, sucessivamente:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} ,$$

uma vez que

$$\vec{v} \cdot \frac{dm}{dt} = 0$$

A expressão

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (\text{forma restrita da 2.ª lei de Newton})$$

traduz a forma mais conhecida da 2.<sup>a</sup> lei, mas só é válida, insistimos, para as partículas de massa invariável (deslocando-se, portanto, a baixas velocidades).

No caso de a partícula ser actuada por um *sistema de forças*, isto é, por várias forças simultâneas, chama-se **resultante** do sistema de forças, e representamo-la também por  $\vec{F}$ , a força que, só por si, é capaz de provocar na partícula o mesmo efeito (no sentido do mesmo deslocamento) que as forças do sistema, actuando conjuntamente. A força resultante é dada pelo vector soma dos vectores representativos das forças componentes do sistema.

A lei fundamental é, então, traduzida pelas relações

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{ou} \quad \vec{F} = m \vec{a} ,$$

onde

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

e a aceleração  $\vec{a}$  é a **soma das acelerações produzidas por cada uma das forças separadamente:**

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n$$

Quer dizer: verifica-se a *independência de cada uma das forças* (já Galileu tinha estabelecido este facto).

Finalmente, se a partícula de massa invariável,  $m$ , ou não é actuada por forças ou a resultante destas é zero ( $\vec{F} = \vec{0}$ ), a lei fundamental indica-nos que a aceleração é nula ( $\vec{a} = \vec{0}$ ). Quer dizer: a *partícula* ou está *em repouso* ou *em movimento rectilíneo e uniforme*.

Conclui-se que a *lei fundamental implica*, para os **observadores inerciais** (observadores fixos em referenciais inerciais), a *verificação da lei da inércia*. Esta lei é, pois, uma particularização da lei fundamental para tais observadores, no estudo do movimento das partículas de massa invariável.



## 2.5 Definição das grandezas força e massa

É fácil ver que a grandeza escalar positiva,  $m$ , que figura na expressão da lei fundamental

$$\vec{F} = m \vec{a},$$

mede a *inércia* do corpo. Por este facto, chama-se-lhe **massa inercial** ou **coeficiente de inércia**.

Com efeito, a expressão da lei fundamental pode escrever-se escalarmente na forma

$$a = \frac{F}{m},$$

e esta relação mostra que para um corpo, sujeito a uma força dada, de intensidade  $F$ , a aceleração adquirida,  $a$ , será *tanto menor quanto maior for a massa  $m$* , que é uma característica do corpo. Uma vez que tal aceleração,  $a$ , é também *tanto menor quanto maior for a inércia do corpo* (oposição à *variação de velocidade*), podemos definir, *conceptualmente*, a **massa inercial**,  $m$ , de um corpo como sendo a **medida da sua inércia**.

*Operacionalmente*, definimos a massa inercial de um corpo recorrendo, apenas, a grandezas cinemáticas. Para isso, aplicamos a *lei da conservação da quantidade de movimento* à colisão frontal desse corpo com outro cuja massa se escolhe como padrão (fig. 2.8), e em condições tais que o sistema dos dois corpos se possa considerar isolado.

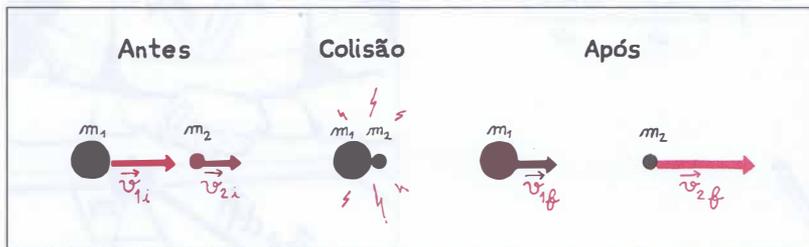


Fig. 2.8 O corpo de massa padrão  $m_1$  colide frontalmente com o corpo de massa  $m_2$ :

$\vec{v}_{1i}$  e  $\vec{v}_{2i}$  — são as velocidades respectivas antes da colisão;

$\vec{v}_{1f}$  e  $\vec{v}_{2f}$  — são as velocidades respectivas depois da colisão;

O corpo  $m_1$  sofre a seguinte variação da quantidade de movimento:

$$\Delta \vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_{1f} - m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \Delta \vec{v}_1$$

O corpo  $m_2$  sofre a seguinte variação da quantidade de movimento:

$$\Delta \vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_{2f} - m_2 \vec{v}_{2i} = m_2 \Delta \vec{v}_2$$

Pela *lei da conservação da quantidade de movimento* (ver secção 4.17.1, Manual de Física para o 10.º ano), a quantidade de movimento do sistema tem de se manter constante durante o choque. Isto obriga a que a variação da quantidade de movimento de uma das massas seja simétrica da variação da quantidade de movimento da outra:

$$\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2 \iff m_1 \Delta \vec{v}_1 = -m_2 \Delta \vec{v}_2 \iff \frac{m_2}{m_1} = -\frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta \vec{v}_2}$$

Como na colisão frontal (ou unidimensional) a direcção comum das velocidades é invariável, podemos substituir esta razão pela razão dos módulos, ou seja

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{|\Delta \vec{v}_1|}{|\Delta \vec{v}_2|}$$

Utilizando a massa padrão cujo valor  $m_1$  se arbitrou (pode ser o *quilograma padrão*, um seu múltiplo ou submúltiplo), estamos aptos a determinar a massa  $m_2$ , medindo apenas espaços e tempos.

Definida, assim, operacional e dinamicamente (pois aplicou-se uma lei de conservação), a massa inercial, partindo somente de medidas cinemáticas e da massa padrão arbitrariamente escolhida, podemos *tomar a massa para grandeza fundamental e definir a força a partir dela*.

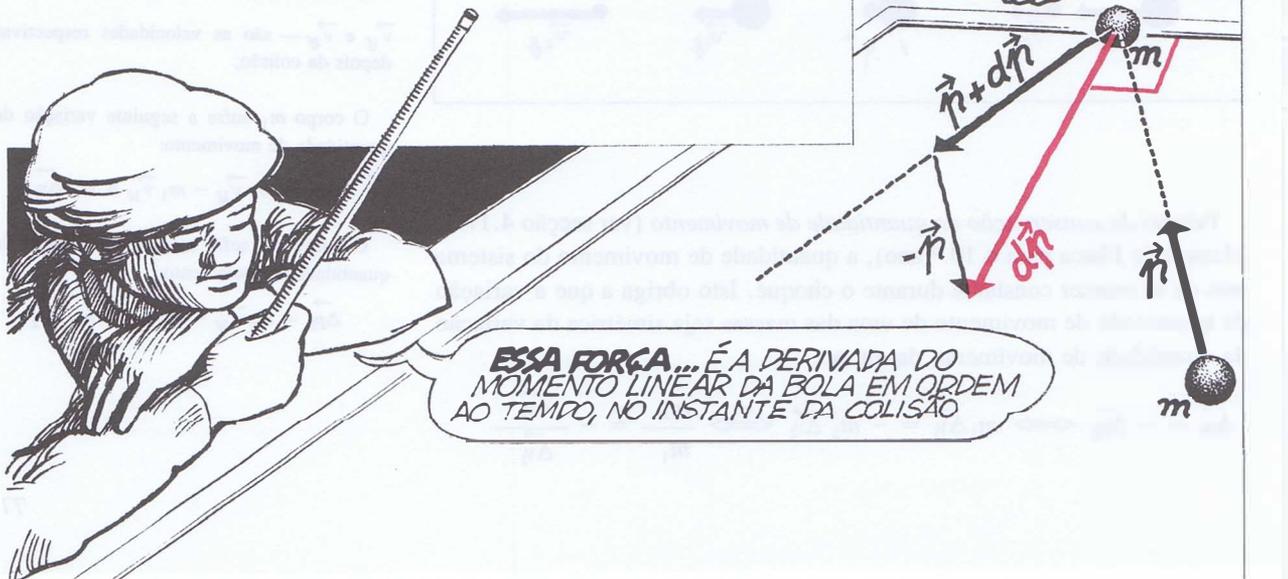
Recorremos, precisamente, à expressão mais geral da lei fundamental de Newton. Com efeito, a **força**, aplicada **numa** partícula ou **num** corpo, é, **nos referenciais inerciais**, um **modo de exprimir a interacção** da partícula ou do corpo com o resto do Universo. Como desta interacção provém uma variação da quantidade de movimento da partícula ou do corpo, a definição matemática e rigorosa do conceito de força é a que é dada directamente pela expressão da 2.ª lei de Newton: derivada da quantidade de movimento da partícula ou do corpo em ordem ao tempo, no instante em que a força actua, isto é (fig. 2.9):

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Fig. 2.9 Da interacção bola de bilhar-tabela resultou uma taxa de variação temporal da quantidade de movimento (ou momento linear) da bola:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}$$

Esta define rigorosamente a força aplicada na bola durante a colisão!



A **massa inercial** de um corpo é conceptualmente a propriedade do corpo que *mede a sua inércia*. Pode-se definir operacionalmente sem recorrer à força, partindo apenas de grandezas cinemáticas, através da relação

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|\Delta \vec{v}_2|}{|\Delta \vec{v}_1|}$$

A partir da massa definida deste modo, podemos definir a **força** exercida num corpo como sendo a taxa de variação, instantânea e temporal, da quantidade de movimento (ou momento linear) do corpo:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Esta definição newtoniana de força tem a vantagem de ser extensível às forças que, como as forças de inércia (ver Unidade 7), não resultam de interações. É válida, além disso, quer em Física clássica quer em Física relativista (onde  $m$  varia com a velocidade). Nesta última situação, a força apresenta duas componentes — uma segundo a *linha de acção da aceleração* e outra segundo a *linha de acção da velocidade*, porque

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \iff \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \vec{v} \iff$$

$$\vec{F} = m \vec{a} + \frac{dm}{dt} \vec{v}$$

Este resultado mostra-nos que a força tem carácter de grandeza matemática, conceptual.

Excluindo as *forças de inércia*, que pertencem ao universo dos referenciais acelerados, todas as demais forças resultam de *interacções fundamentais* (gravitacionais ou electromagnéticas) entre as partículas dos corpos e os campos dos outros corpos. E isto é tão certo na situação de um grave atraído para a Terra como nas situações em que há contacto macroscópico entre os corpos — figs. 2.7 e 2.9. Também nestes casos as forças não se traduzem em «puxões» ou «empurrões»: traduzem, isso sim, acções de campo a nível microscópico.

QUESTÕES PROPOSTAS

Q 2.5

Nas situações (a) e (b) apresentadas na fig. 2.10 temos o mesmo corpo, de massa 1,0 kg, ligado a um fio de massa desprezável, assente sobre a mesma mesa, em condições idênticas.

Na situação (a), puxou-se o fio com uma força muscular de 0,5 kgf.

Na situação (b), puxou-se o fio com um corpo cujo peso tem o valor de 0,5 kgf.

Nestas condições, podemos afirmar que o corpo de massa 1,0 kg adquiriu

- (A) a mesma aceleração em ambas as situações.
- (B) aceleração maior na situação (b).
- (C) aceleração maior na situação (a).
- (D) acelerações que podem ser iguais ou não, pois faltam dados.

Escolher a opção correcta e fundamentar a escolha.

Q 2.6

Uma partícula de massa 0,20 kg move-se num plano ao qual se associou um referencial  $(O,x,y)$ . Quando a partícula está na posição  $(1,0; 0)m$  e segue com a velocidade  $\vec{v} = 0,50 \vec{u}_y$  ( $ms^{-1}$ ), é-lhe aplicada uma força constante  $\vec{F} = -4,0 \times 10^{-3} \vec{u}_x$  (N).

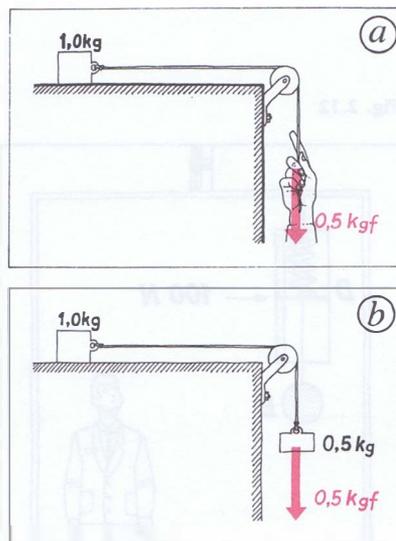


Fig. 2.10

O corpo de massa 1,0 kg adquire aceleração igual ou aceleração diferente nas duas situações?

Considerando para instante zero aquele em que se iniciou a actuação da força, determinar:

1. A equação do movimento da partícula.
2. O instante em que a partícula atravessa o eixo dos  $yy$  e a posição em que o faz.
3. Esboçar uma trajectória da partícula.

### Q 2.7

Representar a(s) força(s) que actuam no corpo nas situações da fig. 2.11

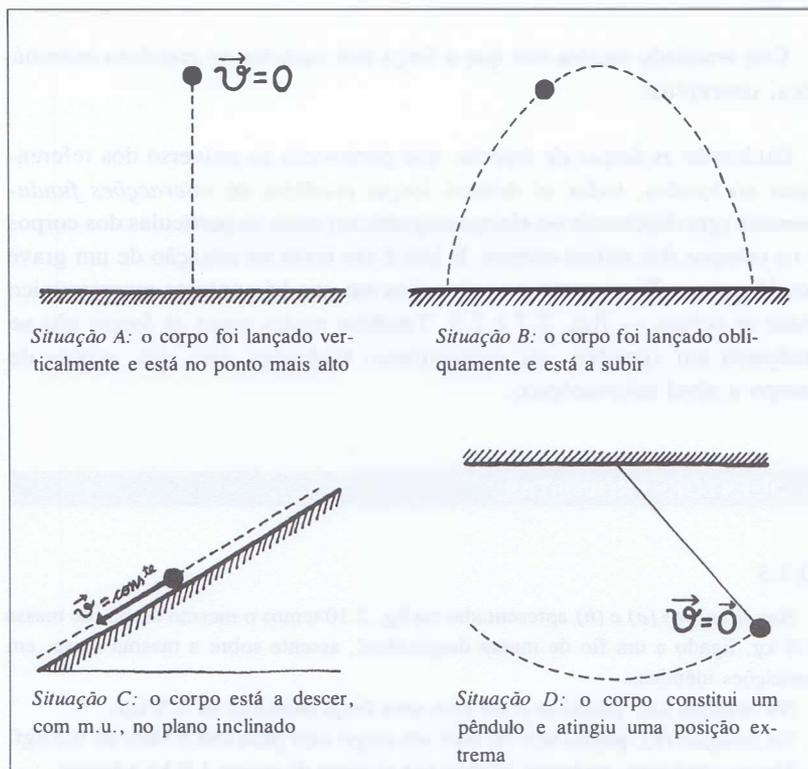
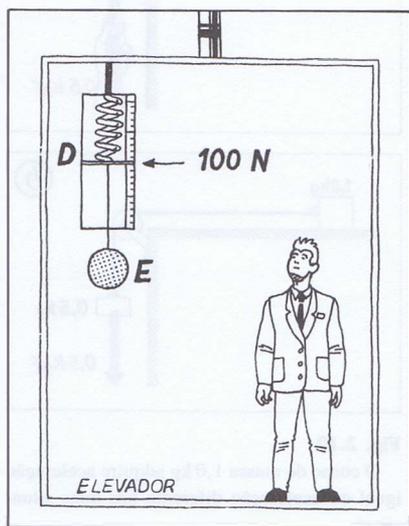


Fig. 2.11

Fig. 2.12



### Q 2.8

O dinamómetro  $D$  marca 100 N (fig. 2.12), mas a força gravítica da Terra sobre a esfera,  $E$ , é 80 N.

Nestas condições, o elevador poderá estar

- (A) a descer com velocidade constante.
- (B) a descer com aumento de velocidade.
- (C) a subir com velocidade constante.
- (D) a subir com aumento de velocidade.

Escolher a opção correcta e fundamentar a escolha.

**Q 2.9**

Uma pára-quedista, de massa  $m$ , desce com velocidade constante de  $6,0 \text{ ms}^{-1}$ . A intensidade da força que o pára-quedas exerce no pára-quedista é (não considerando a resistência do ar):

- (A) 0      (B)  $\frac{mg}{2}$       (C)  $mg$       (D)  $6mg$

Escolher a opção correcta e fundamentar a escolha.



**2.6 A lei da acção e reacção**

Para *Newton*, toda a força que actua num corpo tem de resultar da **interacção** dele com outro corpo. Isto é, *Newton* não concebia a possibilidade de uma força actuar num corpo sem haver outro corpo que estivesse na origem dessa força — fig. 2.13.

A genial intuição de *Newton* não se limitou, porém, à verificação deste facto. Com efeito:

- *Admite* que à força que um corpo  $M$  exerce sobre outro  $A$  (**acção**) corresponde sempre uma resposta (**reacção**), ou seja uma outra força deste corpo  $A$  sobre o primeiro,  $M$  — fig. 2.13.
- *E concebe* uma lei fundamental — a **lei da acção e reacção** — que enuncia com as seguintes palavras (excepto as que vão dentro de parêntesis):

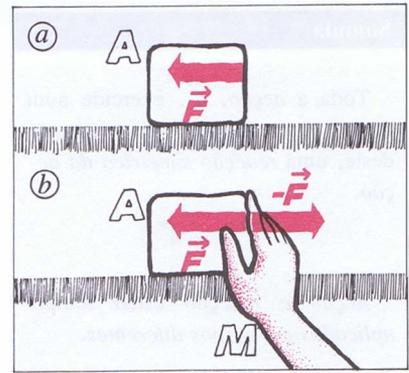
*«Para cada acção existe uma reacção igual (em módulo) e oposta; por outras palavras, as acções de dois corpos um sobre o outro são iguais (em módulo), mas de sentidos contrários.»*

Um facto notável é o seguinte:

As forças que resultam da interacção de dois corpos  $A$  e  $B$ , isto é, **acção e reacção**, *nunca* estão aplicadas *num só* dos corpos que interagem mas, antes, repartidas uma por cada corpo — fig. 2.14.

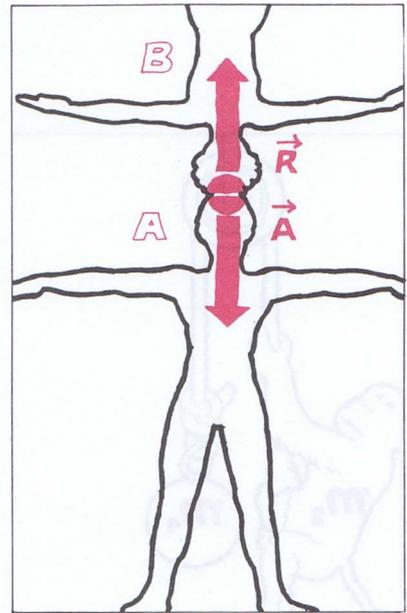
Em todas as situações que iremos considerar, vamos *aceitar* a propagação instantânea da acção. Nestas condições, consideramos a acção, num dado instante  $t$ , *simétrica* da reacção nesse mesmo instante,  $t$ :

$$\vec{A}(t) = -\vec{R}(t)$$



**Fig. 2.13**

- (a) Segundo a concepção newtoniana, se num corpo  $A$  actua uma força  $\vec{F}$ , tem de haver um outro corpo qualquer, próximo ou distante, que actue em  $A$ .
- (b) Se esse outro corpo é, p.ex., a mão  $M$ , então o corpo  $A$  também exerce uma força,  $-\vec{F}$ , na mão. Trata-se, pois, da interacção do par  $(A, M)$ .



**Fig. 2.14** A acção  $\vec{A}$  do acrobata  $B$  sobre o acrobata  $A$  está aplicada na cabeça deste.

A reacção  $\vec{R}$  do acrobata  $A$  sobre o acrobata  $B$  está aplicada na cabeça de  $B$ .

Tem-se:

$$\vec{A} = -\vec{R}$$

Toda a acção,  $\vec{A}$ , exercida num corpo, desencadeia, como resposta deste, uma reacção simétrica da acção:

$$\vec{R} = -\vec{A}$$

Acção e reacção estão sempre aplicadas em corpos diferentes.

A acção precede a reacção, mas, logo que esta aparece, os seus nomes podem permutar-se, visto que, estruturalmente, são indistintas.

No entanto, uma vez que a reacção é determinada pela acção, é uma força de resposta. Existe então um intervalo de tempo, *finito e não nulo*, entre o desencadear da acção e o aparecimento da reacção ou resposta. Este intervalo de tempo é perfeitamente desprezável, não significativo, no domínio da Física clássica (ou das baixas velocidades). O intervalo de tempo entre as ocorrências da acção e da respectiva reacção só se torna apreciável, de facto, no caso de velocidades próximas da da luz, como sucede com as velocidades das partículas elementares carregadas.

Nestes casos, o valor da acção, no instante  $t$ , só é assumido pela reacção num instante posterior,  $t + \Delta t$ :

$$\vec{A}(t) = -\vec{R}(t + \Delta t)$$

Posteriormente, será posta em causa a concepção newtoniana de *força* como *resultado exclusivo da interacção* entre corpos (Unidade 7, forças de inércia).

### QUESTÕES PROPOSTAS

#### Q 2.10

Um prato caiu ao chão e, ao embater neste, partiu-se. Teria sido a força gravítica (peso do prato) a força que partiu o prato? Justificar.

#### Q 2.11

Um macaco sobe rapidamente por uma corda que passa pela gola de uma roldana fixa, suposta ideal, exercendo na corda uma força tal que o bloco de massa  $m_1$ , suspenso do outro lado da corda, *não se move* — fig. 2.15.

Sabendo que a massa do macaco é menor que a do bloco,

$$m_2 < m_1,$$

e que o macaco sobe a corda com movimento uniformemente acelerado, provar que a aceleração do macaco pode calcular-se pela expressão

$$a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_2}$$

#### Q 2.12

Tendo em conta a 3.ª lei de Newton podemos afirmar que:

- (A) a resultante das forças interiores que actuam num corpo pode ser diferente de zero.
- (B) a uma acção corresponde sempre, no mesmo instante, uma reacção simétrica.
- (C) acção e reacção são forças que actuam sempre em corpos diferentes.
- (D) acção e reacção são forças que nunca actuam na mesma partícula.

Escolher a opção correcta.

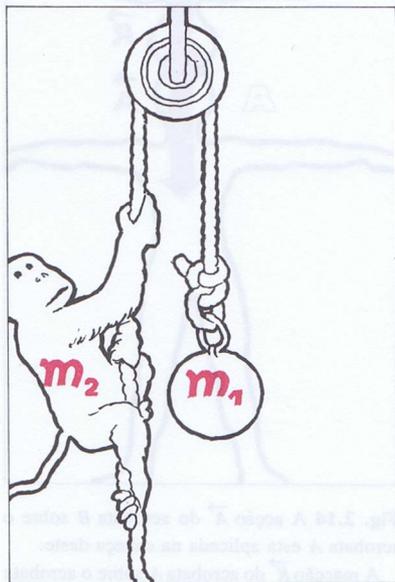
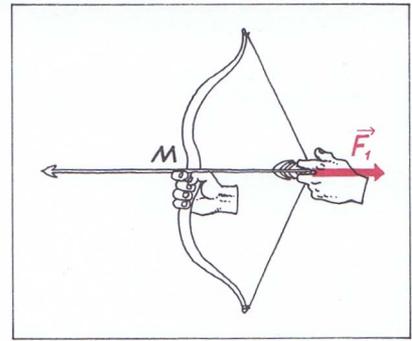


Fig. 2.15 Um macaco sobe a pulso uma corda, mantendo o bloco  $m_1$  em repouso. Com que aceleração sobe o macaco?

**Q 2.13**

Num arco de flecha, tenso e apoiado numa dada mesa, pronto a disparar (fig. 2.16), a intensidade da força  $F_1$  exercida sobre a corda pela mão do arqueiro:

1. É igual, maior ou menor do que a intensidade da força exercida pela outra mão sobre a madeira do arco (em  $M$ )? Justificar.
2. É igual, maior ou menor do que a intensidade da força exercida pela corda sobre a flecha no preciso momento em que a corda é solta? Justificar.



**Fig. 2.16**

**Q 2.14**

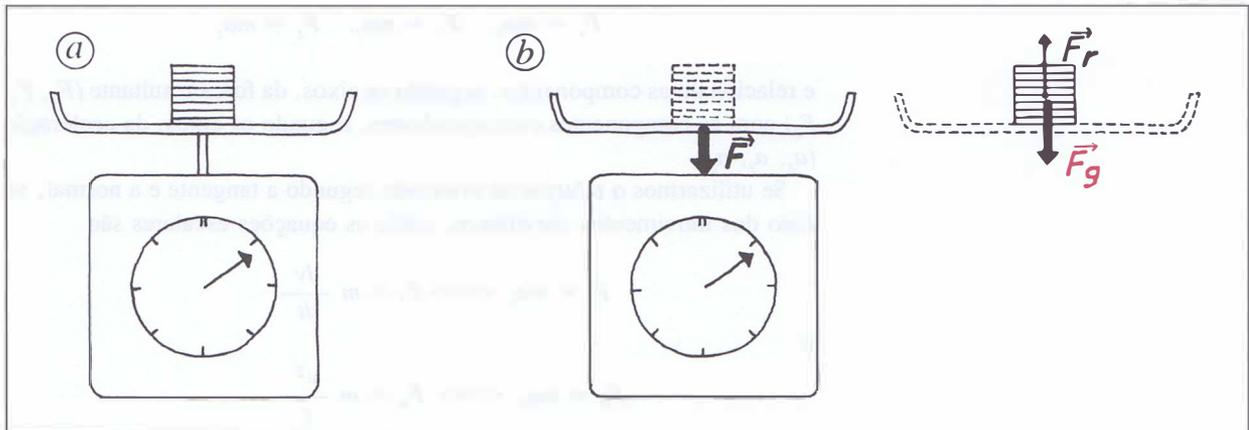
Um corpo está a ser «pesado» numa balança — fig. 2.17, (a).

Na fig. 2.17, (b), representaram-se, em desenhos separados, as forças que actuam no corpo ( $\vec{F}_g$  e  $\vec{F}_r$ ) e no prato da balança ( $\vec{F}$ )

Considerar as opções seguintes:

	O facto de o corpo estar em repouso implica que:	A lei da acção-reacção implica que:
Opção (A)	$\vec{F} = \vec{F}_g$	$\vec{F}_r = -\vec{F}_g$
Opção (B)	$\vec{F}_r = -\vec{F}$	$\vec{F} = \vec{F}_g$
Opção (C)	$\vec{F}_r = -\vec{F}_g$	$\vec{F}_r = -\vec{F}$
Opção (D)	$\vec{F}_r = -\vec{F}_g$	$\vec{F} = \vec{F}_g$

Escolher a opção correcta.



**Fig. 2.17**

## 2.7 Algumas aplicações das leis de Newton

### 2.7.1 Metodologia para aplicação das leis de Newton

A aplicação das leis de Newton ao estudo dos diversos movimentos da partícula exige um processo metodológico cujas fases são as seguintes:

- 1.<sup>a</sup> — identificação da partícula em estudo;
- 2.<sup>a</sup> — identificação da vizinhança da partícula: conjunto de corpos (planos inclinados, Terra, fios, molas, etc.) que interactivam com ela;
- 3.<sup>a</sup> — identificação de todas as forças que a vizinhança exerce na partícula;
- 4.<sup>a</sup> — construção do diagrama da partícula livre: representa-se a partícula por um ponto e representam-se por vectores todas as forças que actuam na partícula;
- 5.<sup>a</sup> — escolha de um referencial conveniente, com recurso a uma de duas opções:
  - ou se escolhe um referencial cartesiano  $(O, x, y, z)$  adequado, que se cingirá geralmente a dois eixos, pois trabalharemos quase sistematicamente com movimentos planos;
  - ou se escolhe um referencial com dois eixos dirigidos, respectivamente, segundo a *tangente* à trajectória e segundo a *normal*, no caso dos movimentos curvilíneos;
- 6.<sup>a</sup> — aplicação da lei fundamental

$$\vec{F} = m \vec{a},$$

escrevendo-a sob a forma das correspondentes equações escalares.

Se usamos o referencial cartesiano  $(O, x, y, z)$ , estas equações escalares são

$$F_x = ma_x, \quad F_y = ma_y, \quad F_z = ma_z$$

e relacionam as componentes, segundo os eixos, da força resultante ( $F_x, F_y, F_z$ ) com as componentes correspondentes, segundo os eixos, da aceleração ( $a_x, a_y, a_z$ ).

Se utilizarmos o referencial orientado segundo a tangente e a normal, no caso dos movimentos curvilíneos, então as equações escalares são

$$F_t = ma_t \iff F_t = m \frac{dv}{dt}$$

e

$$F_n = ma_n \iff F_n = m \frac{v^2}{r}$$

Vamos exemplificar resolvendo dois problemas.

### 1.º Problema:

O corpo C da fig. 2.18, (a), desliza sem atrito ao longo do plano com a inclinação de  $30^\circ$ . Por meio de um fio, que faz um ângulo de  $45^\circ$  com a direcção segundo a qual se desloca o corpo, exerce-se neste uma força constante,  $\vec{T}$ , tal que

$$|\vec{T}| = 60 \text{ N}$$

e faz deslizar o corpo sem descolar do plano.

Sendo

$$m = 10 \text{ kg} \quad \text{e} \quad g = 10 \text{ ms}^{-2},$$

indicar se o corpo C desce ou sobe o plano inclinado. Calcular também a aceleração com que se move.

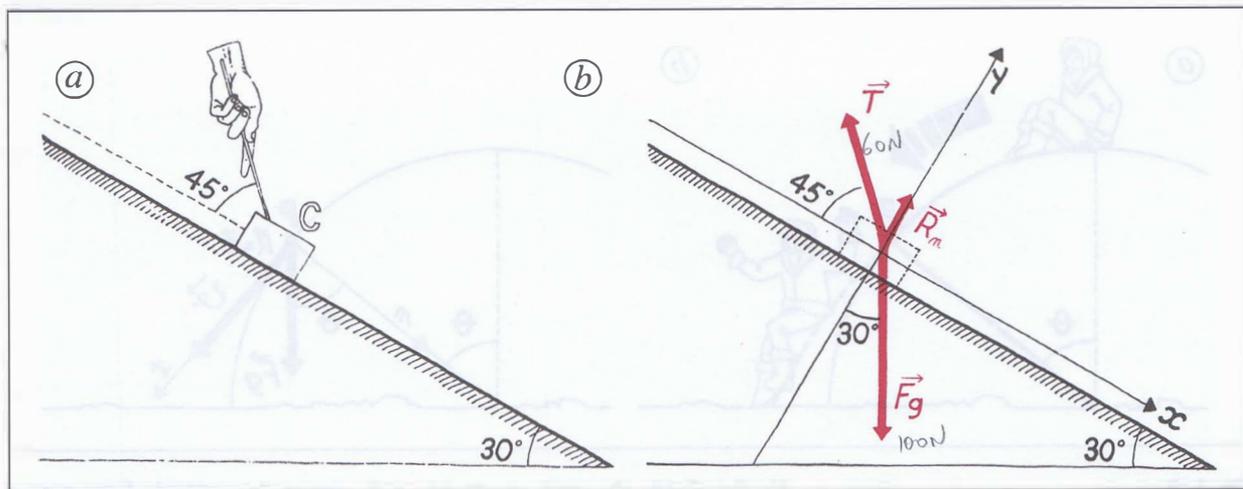


Fig. 2.18 (a) O corpo C sobe ou desce o plano? Com que aceleração?  
(b) Diagrama da partícula livre.

Na fig. 2.18, (b), construiu-se o diagrama da partícula livre e escolheu-se um sistema de eixos cartesianos conveniente (interessa sempre escolher um dos eixos na direcção em que o corpo se move).

As componentes das forças segundo os eixos são:

$$\begin{cases} T_x = -|\vec{T}| \cos 45^\circ = -42,4 \text{ N} \\ R_{nx} = 0 \\ F_{gx} = +|\vec{F}_g| \sin 30^\circ = +50 \text{ N} \end{cases} \quad \begin{cases} T_y = +|\vec{T}| \cos 45^\circ = +42,4 \text{ N} \\ R_{ny} = R_n \\ F_{gy} = -|\vec{F}_g| \cos 30^\circ = -87 \text{ N} \end{cases}$$

Aplicando o seguinte sistema de equações escalares (em que  $a_y = 0$ , pois sabe-se que o corpo se move ao longo do eixo dos  $xx$ ),

$$\begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T_x + R_{nx} + F_{gx} = ma_x \\ T_y + R_{ny} + F_{gy} = m \times 0 \end{cases}$$

vem:

$$\begin{cases} -42,4 + 0 + 50 = 10 a_x \\ +42,4 + R_n - 87 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_x = 0,76 \text{ ms}^{-2} \\ R_n = 44,6 \text{ N} \end{cases}$$

O corpo desce o plano ( $a_x > 0$ ) com uma aceleração de  $0,76 \text{ ms}^{-2}$ .

## 2.º Problema:

Um rapaz, de massa  $m$ , está sentado no cume de um bloco de gelo com a forma semi-esférica — fig. 2.19, (a). Começa a deslizar, partindo do repouso. Considerando que no gelo o atrito se pode desprezar, relacionar a velocidade  $v$  no ponto de descolagem,  $P$ , com o ângulo  $\theta$ .

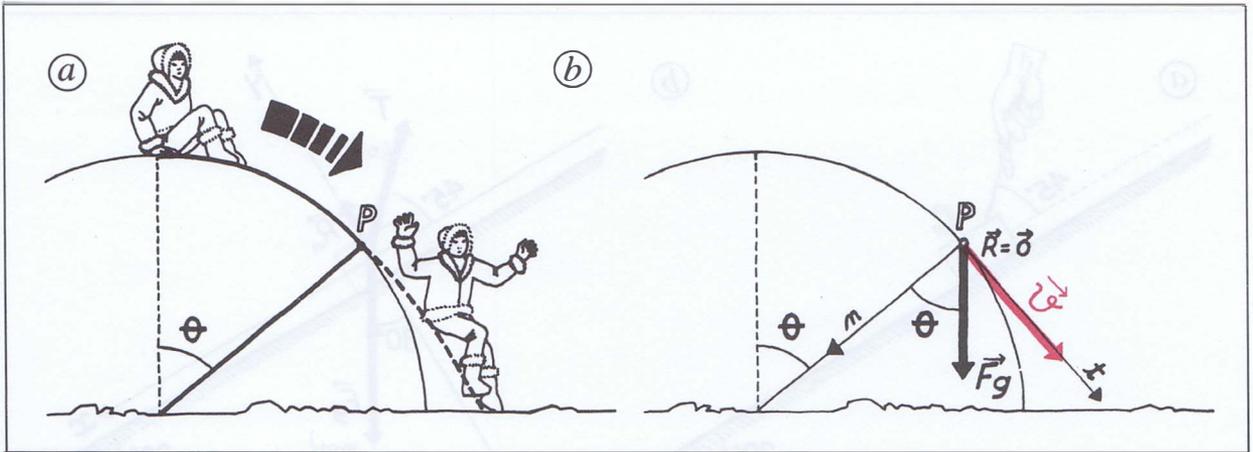


Fig. 2.19

Que relação há entre a velocidade no ponto  $P$  e o ângulo  $\theta$ ?

Na fig. 2.19, (b), está construído o diagrama da partícula livre para o movimento do corpo, num sistema de eixos constituído pela tangente e pela normal à trajetória.

Até ao ponto  $P$ , onde o rapaz perde o contacto com o bloco, as forças que actuam são a força gravítica e a reacção normal. No ponto  $P$  o rapaz descola e, por isso, a reacção normal desaparece. As duas equações escalares do movimento no referencial adoptado (segundo a tangente e a normal) são, pois:

$$F_t = m \frac{dv}{dt} \iff mg \sin \theta = m \frac{dv}{dt} \iff$$

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \theta$$

e

$$F_n = m \frac{v^2}{r} \iff mg \cos \theta - 0 = m \frac{v^2}{r} \iff$$

$$v^2 = rg \cos \theta$$

G.E.2.4 ◀

As relações pedidas são, pois, duas:

$$\frac{dv}{dt} = g \sin\theta \quad \text{e} \quad v^2 = gr \cos\theta$$

Voltaremos a este problema na Unidade 5, resolvendo-o, de modo mais completo, por aplicação da lei da conservação da energia.

### QUESTÕES PROPOSTAS

#### Q 2.15

Uma partícula descreve uma trajetória circular de raio  $r$ , e centro  $O$ , sob a ação das forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  — fig. 2.20.

1. Escrever uma relação entre as intensidades das forças e a velocidade  $v$ , na posição  $A$ .
2. O movimento da partícula atrás referida será uniforme? Justificar.

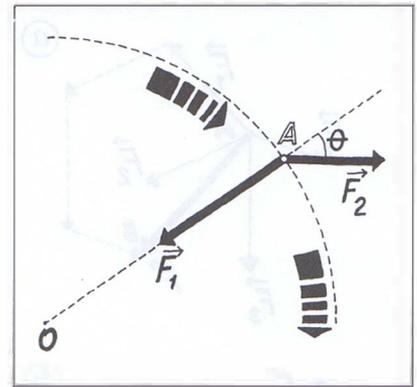


Fig. 2.20

#### 2.7.2 Equilíbrio da partícula

Diz-se que uma partícula está **em equilíbrio** num dado referencial quando o estado cinético dessa partícula, em relação a esse referencial, é:  
 — ou o repouso (neste caso o **equilíbrio** denomina-se **estático**);  
 — ou o movimento retilíneo e uniforme (então o **equilíbrio** chama-se **dinâmico**).

O estudo do equilíbrio da partícula faz parte, tradicionalmente, de um capítulo da Física chamado *Estática* (do grego *statiké* = *em equilíbrio*). Integramo-lo nesta Unidade por se tratar de uma aplicação imediata das leis de Newton, como iremos ver.

Consideremos, para este efeito, o sistema de todas as forças que a *vizinhaça* de uma partícula exerce nela. Tal sistema tem uma resultante,  $\vec{F}$ , que é a soma vectorial

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

Pela 2.<sup>a</sup> lei do movimento de Newton (ver secção 2.4), esta resultante entra na equação que governa o movimento da partícula, isto é:

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

Então, para que a partícula esteja em equilíbrio será necessário que se verifique qualquer das duas condições

$$\vec{v} = \vec{0} \quad (\text{equilíbrio estático})$$

ou

$$\vec{v} = \text{const.}^{\text{te}} \quad (\text{equil. dinâm.}),$$

às quais corresponde aceleração nula

$$\vec{a} = \vec{0} \quad ,$$

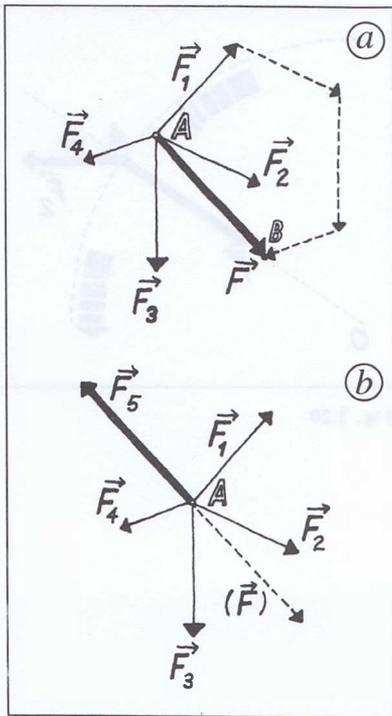


Fig. 2.21

(a) No sistema de quatro forças  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ , a **resultante** é o vector

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{AB}$$

(b) E a **equilibrante** é o vector

$$\vec{F}_5 = -\vec{F}$$

## Súmula

2.6

Na **partícula**, a **condição de equilíbrio** é que seja nula a soma vectorial (resultante) das forças que nela actuam:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{0}$$

Esta **equação vectorial** desdobra-se em **três equações escalares** (algébricas):

$$\begin{cases} F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0 \\ F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0 \\ F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = 0 \end{cases}$$

que, por sua vez, implica:

$$\vec{F} = m\vec{0} \iff \vec{F} = \vec{0}$$

Concluimos, assim, que a **condição de equilíbrio da partícula** consiste em ser nula a **resultante** (soma vectorial) de todas as forças que nela actuam, ou seja:

$$\vec{F} = \vec{0} \iff \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{0}$$

Num referencial cartesiano ortonormado (para forças coplanares), esta equação vectorial desdobra-se nas duas equações escalares seguintes:

$$\begin{cases} F_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0 \\ F_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0 \end{cases}$$

Se as forças não forem coplanares, utiliza-se um referencial cartesiano tri-ortogonal. As equações escalares são então três — as duas anteriores mais a relativa às componentes das forças no eixo dos  $z$ :

$$F_z = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = 0$$

Quando o sistema de forças que actua numa partícula tem **resultante ou soma nula** diz-se que constitui um **sistema de forças em equilíbrio**.

Se as forças que actuam na partícula não tiver resultante nula — fig. 2.21, (a) — é sempre possível determinar uma outra força que, acrescentada às forças que já actuavam, constitui um novo sistema de forças em equilíbrio — fig. 2.21, (b).

Esta nova força chama-se **equilibrante** do sistema das outras.

Terá de ser simétrica da respectiva resultante, isto é, deverá ter o mesmo módulo e a mesma linha de acção que ela, mas sentido contrário.

## QUESTÕES PROPOSTAS

### Q 2.16

Num determinado ponto  $P$  está situada uma partícula.

Aplicam-se-lhe três forças,  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  e  $\vec{F}_3$ , dirigidas segundo as arestas de um paralelepípedo e concorrentes nesse ponto  $P$ .

1. Poderá a partícula, sujeita somente a estas três forças (uma delas pode ser a força gravítica), ficar ou permanecer em equilíbrio?
2. Terá este sistema de forças equilibrante?

### Q 2.17

Na fig. 2.22, os corpos que se suspenderam das roldanas fixas  $A$  e  $B$  estão ligados por um fio que passa por baixo do eixo fixo  $E$ .

Que peso se deve suspender no ponto  $C$  do fio para que este deixe de deslizar e se possa retirar o eixo sem alterar o equilíbrio?

Quanto mede o ângulo  $\theta$ ?

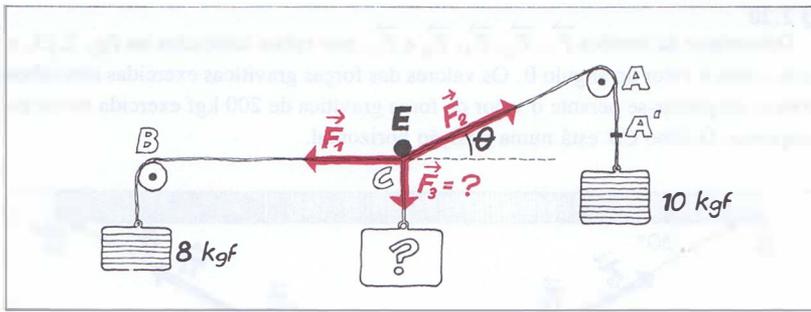


Fig. 2.22 O ponto  $C$  do fio, por baixo do eixo fixo  $E$ , fica em equilíbrio sob a acção do sistema de três forças ( $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ ).

**Q 2.18**

1. Determinar, nas condições da figura 2.23, as tensões dos cabos em função do ângulo  $\theta$ .
2. Discutir a solução mais conveniente: se suspender o candeeiro de um cabo só, se suspendê-lo de dois cabos e em que condições.

**Q 2.19**

Numa viga ou num cabo rígidos chama-se **tracção** a força que actua segundo o eixo longitudinal e está dirigida *para fora*. E chama-se **compressão** a força que actua também longitudinalmente, mas está dirigida *para dentro*. Finalmente, designa-se por **tensão** de um cabo a força que ele exerce no corpo a que está ligado.

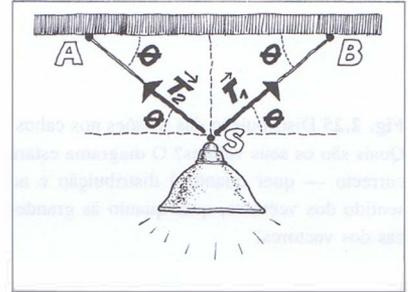


Fig. 2.23 Um candeeiro metálico que pesa 20 kgf está suspenso de dois cabos — SA e SB. O ponto de junção,  $S$ , está em equilíbrio sob a acção das tensões  $T_1$  e  $T_2$  e da acção devida ao peso do candeeiro.

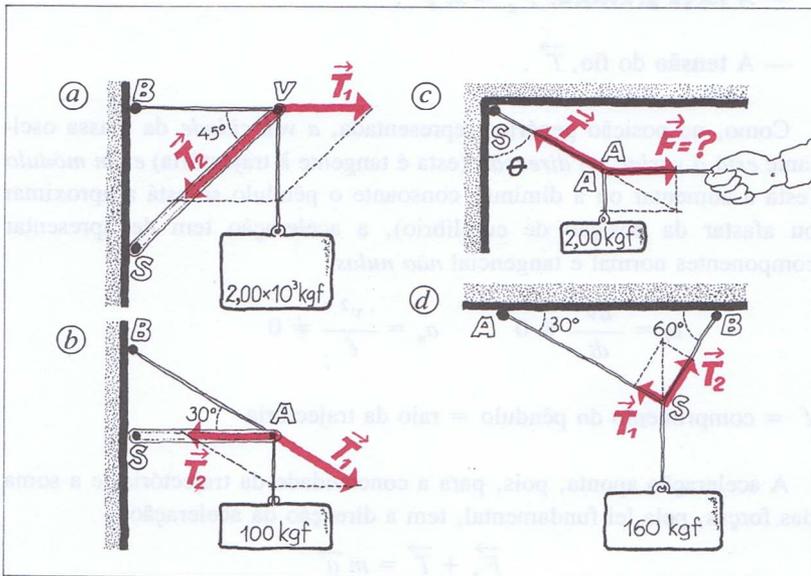
Determinar, de acordo com os esquemas da fig. 2.24:

1. A compressão  $T_2$  na viga VS e a tracção  $T_1$  no cabo VB.
2. A tracção  $T_1$  no cabo AB e a compressão  $T_2$  no cabo AS.
3. A força horizontal  $\vec{F}$  que mantém o ponto A em equilíbrio para:

$$\theta = 30^\circ, \theta = 45^\circ \text{ e } \theta = 60^\circ$$

4. As tensões  $T_1$  e  $T_2$  nos cabos SA e SB.

Particularizar para  $\alpha = 30^\circ$  e  $\beta = 60^\circ$ .

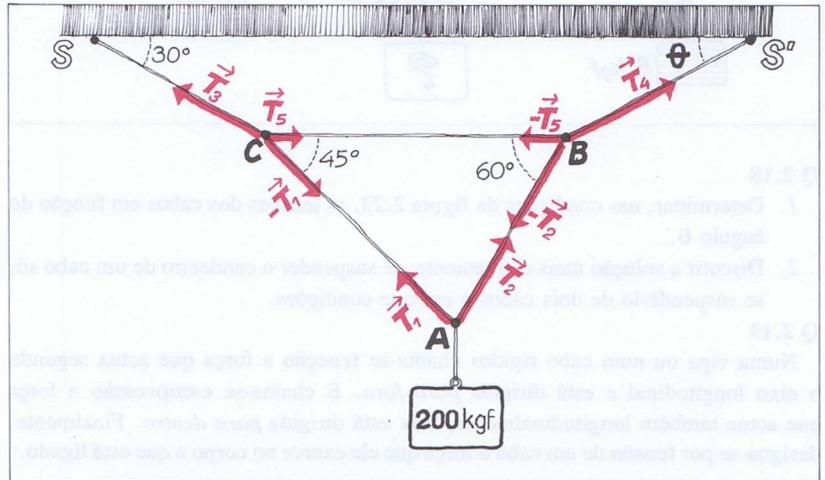


**Fig. 2.24**

- (a) Compressão  $T_2$  na viga VS e tracção  $T_1$  no cabo VB.
- (b) Tracção  $T_1$  e compressão  $T_2$  nos cabos AB e AS, respectivamente.
- (c) Tensão  $T$  do fio AS;  $F = ?$
- (d) Tensões  $T_1$  e  $T_2$  nos cabos SA e SB.

**Q 2.20**

Determinar as tensões  $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{T}_3, \vec{T}_4$  e  $\vec{T}_5$ , nos cabos indicados na fig. 2.25, e bem assim o valor do ângulo  $\theta$ . Os valores das forças gravíticas exercidas nos cabos podem desprezar-se perante o valor da força gravítica de 200 kgf exercida no corpo suspenso. O cabo  $CB$  está numa posição horizontal.



**Fig. 2.25** Distribuição das tensões nos cabos. Quais são os seus valores? O diagrama estará correcto — quer quanto à distribuição e ao sentido dos vectores, quer quanto às grandezas dos vectores?

**2.7.3 As forças que actuam no pêndulo gravítico simples**

Na figura 2.26, (a), está esquematizada uma posição genérica do pêndulo e, para essa posição, representaram-se as forças que actuam na massa pendular, a saber:

- A **força gravítica**,  $\vec{F}_g = m \vec{g}$  ;
- A **tensão do fio**,  $\vec{T}$  .

Como, na posição genérica representada, a *velocidade* da massa oscilante *está a variar em direcção* (esta é tangente à trajectória) e *em módulo* (está a aumentar ou a diminuir consoante o pêndulo se está a aproximar ou afastar da posição de equilíbrio), a aceleração tem de apresentar componentes normal e tangencial *não nulas*:

$$a_t = \frac{dv}{dt} \neq 0 \quad a_n = \frac{v^2}{\ell} \neq 0$$

$\ell$  = comprimento do pêndulo = raio da trajectória

A aceleração aponta, pois, para a concavidade da trajectória, e a soma das forças, pela lei fundamental, tem a direcção da aceleração:

$$\vec{F}_g + \vec{T} = m \vec{a}$$

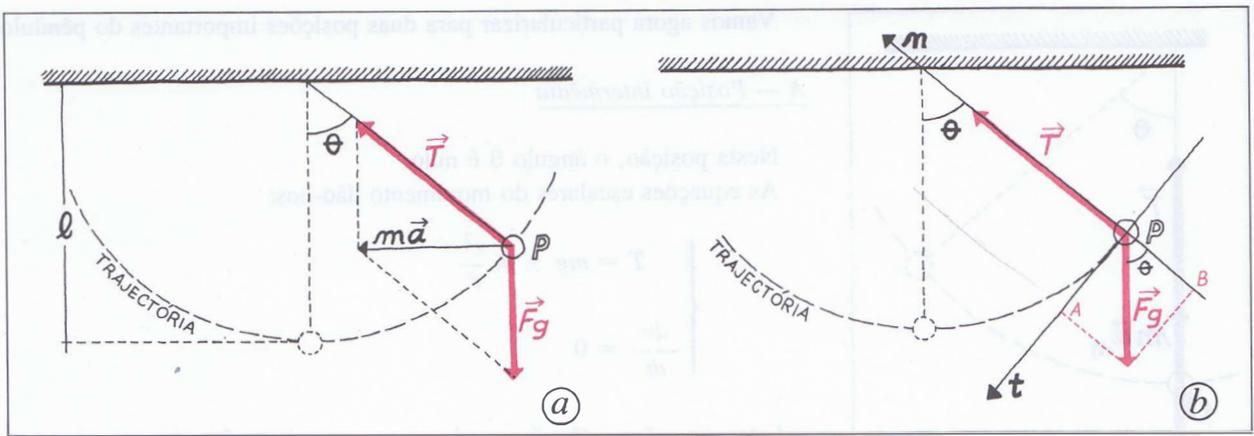


Fig. 2.26

(a) A duas forças,  $\vec{F}_g$  e  $\vec{T}$ , que actuam num pêndulo, originam uma aceleração dirigida para a concavidade da trajectória:

$$\vec{F}_g + \vec{T} = m \vec{a}$$

(b) Componentes das forças segundo a normal e a tangente à trajectória:

$$\begin{cases} T_n = T \\ F_{g,n} = \overline{PB} = F_g \cdot \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} T_t = 0 \\ F_{g,t} = \overline{PA} = F_g \cdot \sin \theta \end{cases}$$

Introduzindo o sistema  $(t, n)$  de eixos já referido (segundo a tangente e a normal à trajectória), a lei fundamental de Newton traduz-se pelas equações escalares seguintes — fig. 2.26, (b):

$$\begin{cases} T - F_g \cos \theta = m \frac{v^2}{\ell} \\ F_g \sin \theta = m \frac{dv}{dt} \end{cases} \iff \begin{cases} T = mg \cos \theta + m \frac{v^2}{\ell} \\ \frac{dv}{dt} = g \sin \theta \end{cases}$$

A segunda equação pode conduzir-nos, por integração, a esta outra

$$\frac{1}{2} v_0^2 - \frac{1}{2} v^2 = g \ell (1 - \cos \theta),$$

onde  $v_0$  corresponde à velocidade na posição de equilíbrio.

Por agora não será utilizada e o aluno não tem de a saber. Mas, posteriormente, veremos que ela traduz a conservação da energia mecânica no pêndulo.

A primeira equação dá-nos a tensão  $\vec{T}$ .

## Súmula 2.7

No **pêndulo gravítico simples** actuam a força gravítica,  $\vec{F}_g$ , que é constante, e a tensão do fio,  $\vec{T}$ , que é variável.

As componentes tangencial e normal da resultante destas forças são:

$$\begin{cases} F_t = F_g \sin \theta \\ F_n = T - F_g \cos \theta \end{cases}$$

A tensão  $\vec{T}$  é máxima para  $\theta = 0^\circ$  e é mínima para  $\theta =$  amplitude angular.

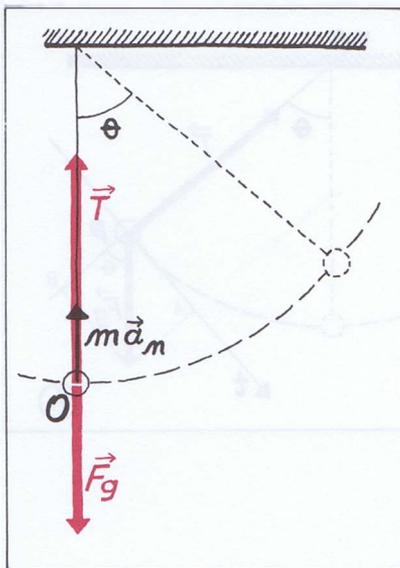


Fig. 2.27

A tensão, na posição intermédia, é dada por:

$$T = mg + m \frac{v^2}{\ell}$$

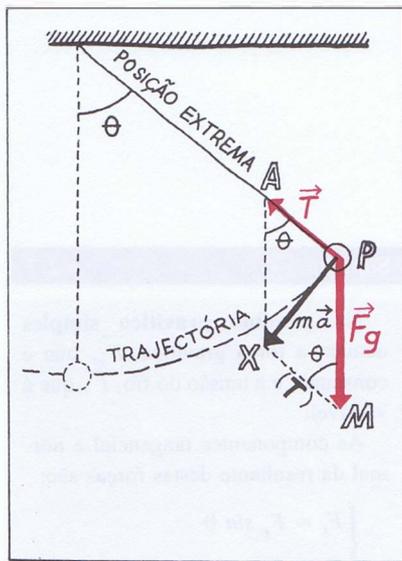


Fig. 2.28

Numa posição extrema, a força resultante

$$\vec{T} + \vec{F}_g = m \vec{a}$$

é tangente à trajectória, e a tensão é dada por

$$T = mg \cos \theta$$

Vamos agora particularizar para duas posições importantes do pêndulo:

### A — Posição intermédia

Nesta posição, o ângulo  $\theta$  é nulo.

As equações escalares do movimento dão-nos:

$$\begin{cases} T = mg + m \frac{v^2}{\ell} \\ \frac{dv}{dt} = 0 \end{cases}$$

Estas equações estão de acordo com os seguintes factos:

- 1.º — A tensão e a força gravítica têm a direcção normal à trajectória e sentidos contrários — fig. 2.27, pelo que a aceleração que produzem se reduz, necessariamente, à sua componente normal:

$$T - F_g = ma_n \Leftrightarrow$$

$$T - mg = \frac{mv^2}{\ell} \Leftrightarrow$$

$$T = mg + m \frac{v^2}{\ell}$$

- 2.º — A velocidade tem nessa posição um valor máximo. Se a função

$$v = f(t)$$

tem um valor máximo, a sua derivada é nula:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0$$

### B — Posição extrema

Nesta posição, o ângulo  $\theta$  é máximo e a velocidade  $v$  é nula (fig. 2.28).

As equações escalares do movimento dão-nos:

$$\begin{cases} T = mg \cos \theta \\ a_t = \frac{dv}{dt} = g \sin \theta \end{cases}$$

Estas equações são coerentes com os seguintes factos:

- 1.º — A velocidade, nessa posição extrema, não está a mudar de direcção ( $a_n = 0$ ), mas, apenas, de sentido e módulo ( $a_t \neq 0$ ) — fig. 2.29.
- 2.º — Resolvendo o  $\Delta[PXM]$ , obtém-se directamente (fig. 2.28):

$$T = mg \cos \theta$$

## QUESTÕES PROPOSTAS

### Q 2.21

Indicar, justificando, em qual das posições de um pêndulo gravítico a *tensão* do fio tem a *intensidade máxima*.

### Q 2.22

Um pêndulo simples, com a massa de 50 g e o comprimento de 1,00 m, oscila com a amplitude ( $\theta$  máximo) de  $45^\circ$ . Sabendo que, para  $\theta = 0^\circ$ , a velocidade é  $2,4 \text{ ms}^{-1}$ , determinar a tensão do fio nestas condições. Determinar também a tensão do fio para  $\theta = 45^\circ$ .

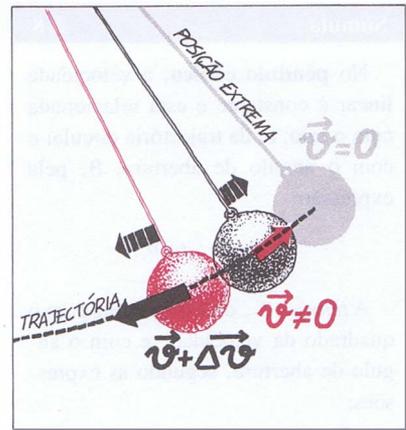


Fig. 2.29 A representação da velocidade em dois instantes muito próximos àquele em que o corpo está na posição extrema mostra que

$$\Delta v \neq 0 \Rightarrow a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \neq 0$$

### 2.7.4 As forças que actuam no pêndulo cónico

O móvel  $O$  descreve uma trajectória circular, situada no plano horizontal, com movimento uniforme.

As forças aplicadas são a força gravítica,  $\vec{F}_g$ , e a tensão,  $\vec{T}$ , cuja resultante está dirigida segundo o raio da trajectória e aponta para o centro  $C$  da mesma — fig. 2.30.

O módulo da força resultante é

$$ma_c = m \frac{v^2}{r} = m\omega^2 r,$$

onde  $r$ , raio da trajectória, tem o valor:

$$r = \overline{OC} = \overline{OS} \sin \theta \iff r = \ell \sin \theta$$

Tendo em conta o sistema de eixos ( $O$ ,  $n$ ,  $y$ ), da fig. 2.30, a lei fundamental traduz-se pelas equações escalares:

$$\begin{cases} T \cos \theta - mg = 0 \\ T \sin \theta = ma_c \end{cases} \iff \begin{cases} T \cos \theta = mg \\ T \sin \theta = m \frac{v^2}{r} \end{cases}$$

Dividindo a 2.ª equação pela 1.ª, membro a membro, obtém-se:

$$v^2 = gr \operatorname{tg} \theta$$

Esta expressão permite-nos obter o módulo da velocidade e mostra-nos que, quando a velocidade aumenta, o ângulo de abertura,  $\theta$ , também aumenta (e, portanto, aumenta o raio  $r$ ).

A 1.ª equação escalar

$$T \cos \theta = mg \iff T = \frac{mg}{\cos \theta}$$

permite concluir que a *tensão aumenta com o ângulo*  $\theta$ .

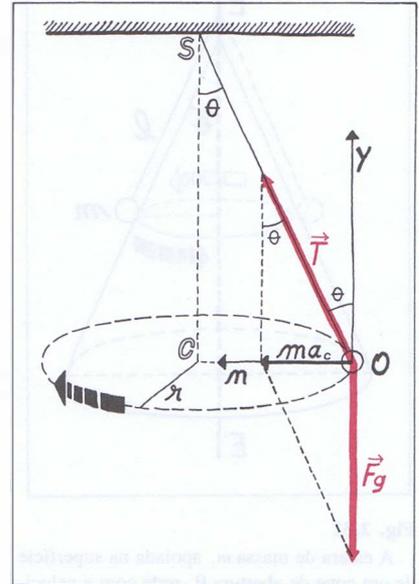


Fig. 2.30 Pêndulo cónico.

No **pêndulo cónico**, a velocidade linear é constante e está relacionada com o raio,  $r$ , da trajectória circular e com o ângulo de abertura,  $\theta$ , pela expressão:

$$v^2 = gr \cdot \operatorname{tg} \theta .$$

A **tensão**,  $\vec{T}$ , do fio aumenta com o quadrado da velocidade e com o ângulo de abertura, segundo as expressões:

$$T = m\omega^2 \ell$$

$$T = \frac{mg}{\cos \theta}$$

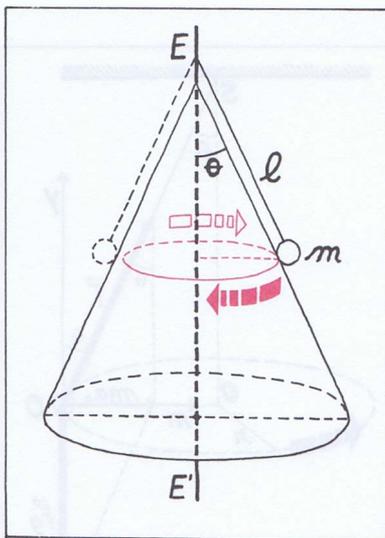


Fig. 2.31

A esfera de massa  $m$ , apoiada na superfície de um cone de abertura  $\theta$ , roda com a velocidade angular  $\omega$ , sem atrito.

A 2.<sup>a</sup> equação escalar

$$T \sin \theta = ma_c \iff T \sin \theta = m\omega^2 r$$

também permite obter a tensão. Com efeito, desta equação resulta:

$$T = \frac{m\omega^2 r}{\sin \theta}$$

Como

$$r = \ell \cdot \sin \theta$$

obtemos, finalmente:

$$T = m\omega^2 \ell$$

Daqui concluímos que a **tensão cresce com o quadrado da velocidade**.

QUESTÕES PROPOSTAS

Q 2.23

A esfera de massa  $m$ , ligada a um fio de comprimento  $\ell$ , roda com a velocidade angular  $\omega$  em torno do eixo  $EE'$ , nas condições indicadas na fig. 2.31.

Determinar, em função do ângulo  $\theta$ :

1. A tensão do fio e a reacção da superfície cónica sobre a esfera.
2. A velocidade angular necessária para reduzir a zero a reacção da superfície.
3. Particularizar para:  $\ell = 0,5 \text{ m}$ ;  $m = 200 \text{ g}$ ;  $\theta = 60^\circ$ ;  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$

2.7.5 Dinâmica de um sistema de partículas ligadas

Se, em vez de uma só partícula em movimento, como temos vindo a considerar até aqui, tivermos várias partículas de algum modo ligadas entre si, a metodologia exposta na secção 2.7.1 deve ser **aplicada, separadamente, a cada partícula**.

Assim, constrói-se um diagrama para *cada* partícula, representando todas as forças que *nela* estão a actuar. Ao contabilizar as forças, há que ter em linha de conta as forças de ligação entre as partículas — são forças que actuam simetricamente em partículas diferentes, de acordo com a *lei da acção e reacção*.

A seguir, aplica-se a lei fundamental

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

a **cada uma das partículas**, separadamente. Obtemos assim um *sistema de tantas equações quantas as partículas*, sistema que resolveremos em relação às grandezas desconhecidas.

Vamos concretizar com dois exemplos.

### 1.º Exemplo

Uma cadeira  $C$ , de massa  $m_2$ , pode subir, com atrito que consideramos desprezável, ao longo de umas calhas — fig. 2.32. Uma pessoa de massa  $m_1$ , sentada na cadeira, fá-la subir com aceleração constante, exercendo uma força muscular, também constante, na corda  $c$ .

Desprezando, por agora, as massas da roldana e da corda, e conhecida a aceleração com que sobem a pessoa e a cadeira, pretende-se determinar a tensão da corda.

Para isso, vamos considerar, em separado, as partículas cadeira,  $C$ , e pessoa,  $P$  — fig. 2.32.

Tendo em conta que a pessoa exerce uma *acção* normal,  $\vec{N}$ , na cadeira, dirigida para baixo, e que esta exerce uma *reação*,  $\vec{N}$ , dirigida para cima na pessoa, e considerando ainda o facto de a corda, de massa desprezável, exercer tensões iguais,  $\vec{T}$ , na pessoa e na cadeira (dado o facto de se desprezar a massa da roldana e da corda), os diagramas de forças exercidas na pessoa,  $P$ , e na cadeira,  $C$ , são os que constam da fig. 2.33.

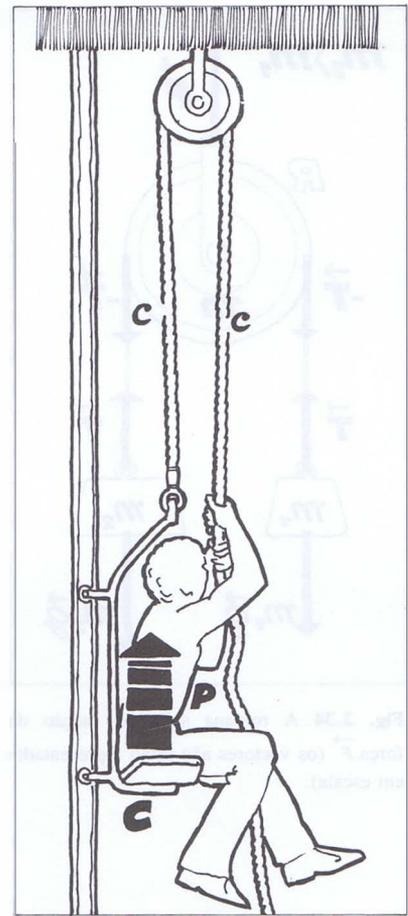


Fig. 2.32 A cadeira sobe ao longo da calha, puxada pela corda  $c$ , em virtude da força muscular que a pessoa exerce na corda.

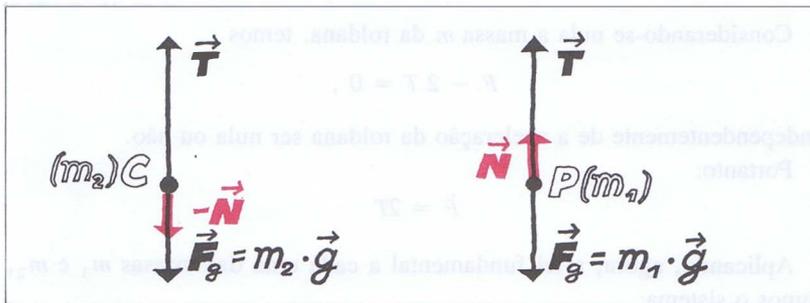


Fig. 2.33 Diagramas das forças exercidas na cadeira,  $C$ , e na pessoa,  $P$ , representadas na fig. 2.32

Aplicando agora a lei fundamental do movimento a cada uma das partículas, obtemos o sistema

$$\begin{cases} T - (N + m_2 g) = m_2 a \\ T + N - m_1 g = m_1 a \end{cases}$$

Como conhecemos as massas e a aceleração (esta pode ser nula se subir com movimento uniforme), as incógnitas são a tensão  $T$  da corda e a intensidade  $N$  do par acção-reação. O problema consiste, pois, em resolver este sistema simples de duas equações.

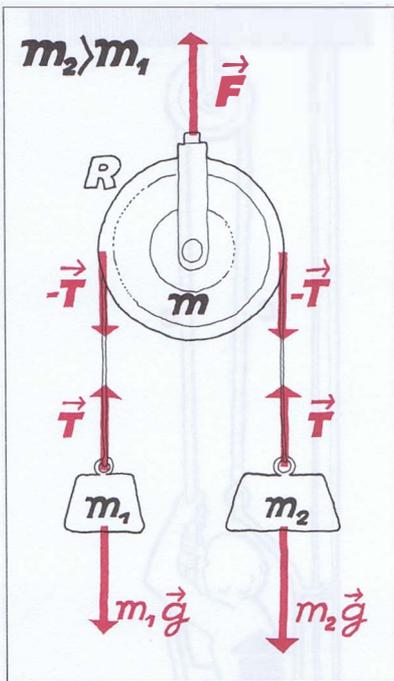


Fig. 2.34 A roldana sobe por acção da força  $\vec{F}$  (os vectores não estão representados em escala).

2.º Exemplo

Exercendo a força  $\vec{F}$ , constante, na roldana  $R$ , de massa  $m$  desprezável, levanta-se o corpo de massa  $m_1$  — fig. 2.34 — de tal modo que o corpo  $m_2$  não sobe nem desce em relação à Terra.

- Qual é o valor da força  $\vec{F}$ ?
- E qual é a aceleração com que sobe  $m_1$ ?

Como veremos na Unidade 8, uma roldana, de massa desprezável, comporta-se como se não rodasse, não alterando as tensões no fio, também de massa desprezável, que passa na sua gola, de um e de outro lado desta. Compreenderemos, então, o facto de a tensão  $\vec{T}$  ser a mesma em  $m_1$  e em  $m_2$  — fig. 2.34.

Em face do que acabámos de informar, podemos considerar, neste exemplo, três partículas:

- a roldana;
- o corpo de massa  $m_1$ ;
- o corpo de massa  $m_2 > m_1$ .

Começemos pela roldana. Tendo em conta as forças que nela actuam e aplicando a lei fundamental, vem:

$$F - 2T = ma_R$$

Considerando-se nula a massa  $m$  da roldana, temos

$$F - 2T = 0,$$

independentemente de a aceleração da roldana ser nula ou não.

Portanto:

$$F = 2T$$

Aplicando, agora, a lei fundamental a cada uma das massas  $m_1$  e  $m_2$ , temos o sistema:

$$\begin{cases} T - m_1 g = m_1 a_1 \\ T - m_2 g = 0 \end{cases} \quad (\text{porque } a_2 = 0)$$

A segunda equação permite concluir que

$$T = m_2 g$$

e, portanto,

$$F = 2T = 2m_2 g$$

A primeira equação dá-nos a solução:

$$a_1 = \frac{m_2 g - m_1 g}{m_1}$$

## QUESTÕES PROPOSTAS

### Q 2.24

O sistema da fig. 2.35 pode mover-se com atrito desprezável. Desprezando a massa da roldana e dos fios e sabendo que o corpo  $m_1$  desce, provar que a aceleração com que ele desce é dada por

$$a = \frac{m_1 \sin \alpha - m_2}{m_1 + m_2} g$$

### Q 2.25

Na fig. 2.36, os três corpos representados têm as massas

$$m_1 = 10 \text{ kg}, \quad m_2 = 20 \text{ kg} \quad \text{e} \quad m_3 = 10 \text{ kg}$$

Desprezando o atrito e as massas da roldana e dos fios, determinar ( $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ ):

1. A aceleração dos três corpos.
2. As tensões nos dois fios.

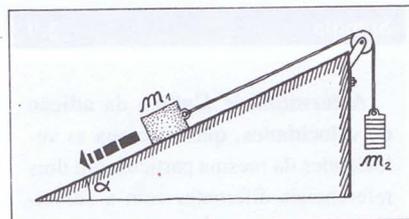


Fig. 2.35

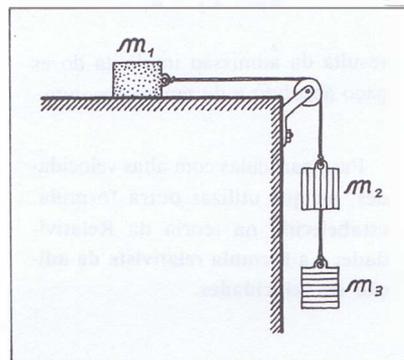


Fig. 2.36

## 2.8 Validade das leis da Mecânica. Princípios da relatividade de Galileu e de Einstein

### 2.8.1 A adição de velocidades

Seja um referencial  $S_1$ , que admitimos ser **referencial de inércia** — fig. 2.37. Para concretizar, pode ser um referencial fixo numa estação de caminho de ferro.

Consideremos a seguir um referencial  $S_2$ , que se move com a velocidade  $\vec{v}_i$  (podemos designá-la por *velocidade de transporte*), constante relativamente a  $S_1$ . Este referencial  $S_2$  pode ser, por exemplo, um referencial fixo numa **carruagem** de um comboio que se afasta, em linha recta, da estação, com velocidade constante ( $S_2$  tem movimento de **translação uniforme** em relação a  $S_1$  e, como tal, os versores dos eixos são constantes no tempo).

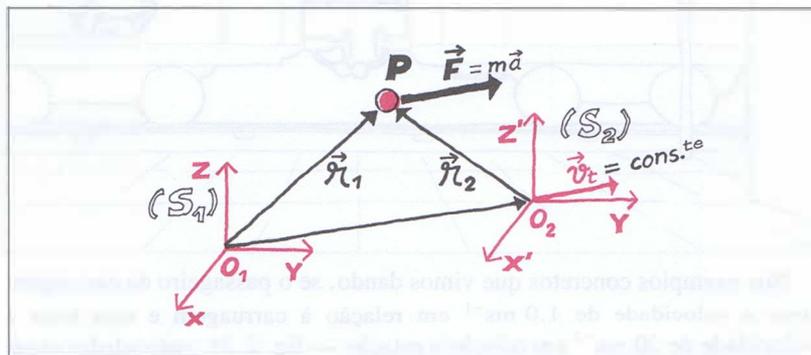


Fig. 2.37 A velocidade de  $P$ , em  $S_1$ ,  $\vec{v}_1$ , é a soma da velocidade de  $P$ , em  $S_2$ ,  $\vec{v}_2$ , com a velocidade de  $S_2$  em relação a  $S_1$ :

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_i$$

A **fórmula de Galileu da adição de velocidades**, que relaciona as velocidades da mesma partícula em dois referenciais diferentes com a velocidade de transporte,

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_t,$$

resulta da admissão implícita do espaço absoluto e do tempo absoluto.

Para partículas com altas velocidades, há que utilizar outra fórmula, estabelecida na teoria da Relatividade: é a **fórmula relativista da adição de velocidades**.

Como se relacionam as velocidades,  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ , de uma partícula  $P$  (pode ser um passageiro a caminhar na carruagem), nos dois referenciais  $S_1$  e  $S_2$ ?

Da figura conclui-se directamente:

$$\vec{r}_1 = \vec{O}_1\vec{O}_2 + \vec{r}_2$$

Derivando em ordem ao tempo  $t$ , vem:

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{d\vec{r}_2}{dt} + \frac{d(\vec{O}_1\vec{O}_2)}{dt}$$

Mas:

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{v}_1 \rightarrow \text{velocidade de } P \text{ no referencial } S_1$$

$$\frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{v}_2 \rightarrow \text{velocidade de } P \text{ no referencial } S_2$$

$$\frac{d(\vec{O}_1\vec{O}_2)}{dt} = \frac{d(\vec{v}_t \cdot t)}{dt} = \vec{v}_t \rightarrow \text{velocidade constante, de transporte, de } S_2 \text{ em relação a } S_1$$

Tem-se, pois:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_t$$

Esta regra de adição de velocidades foi já estabelecida por Galileu. É, aliás, intuitiva. Se a translação de  $S_2$  não for uniforme, ela continua a ser aplicável, mas *para cada instante*, isto é, só diz respeito às velocidades instantâneas.

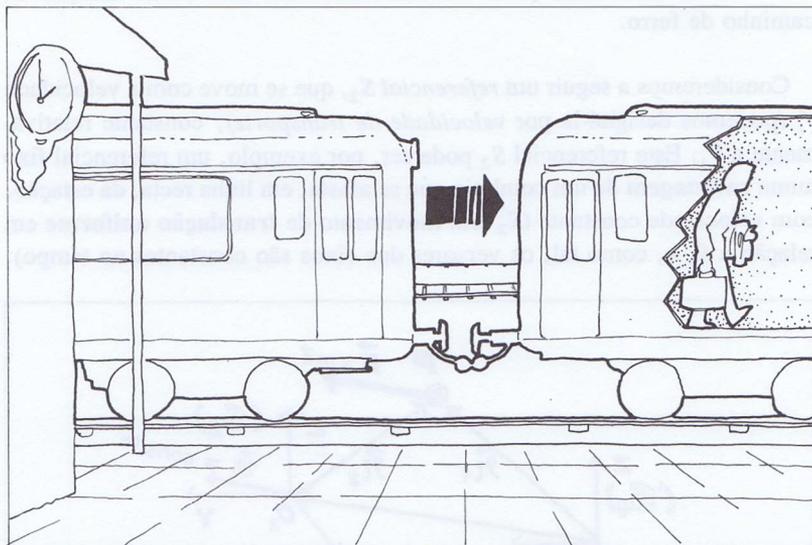


Fig. 2.38

Se o passageiro caminhar na carruagem, paralelamente à via férrea, com a velocidade de  $1,0 \text{ ms}^{-1}$ , no mesmo sentido em que se move a carruagem com a velocidade de  $20 \text{ ms}^{-1}$ , a velocidade do passageiro, relativamente à estação, é de  $21 \text{ ms}^{-1}$ .

Nos exemplos concretos que vimos dando, se o passageiro da carruagem tiver a velocidade de  $1,0 \text{ ms}^{-1}$  em relação à carruagem e esta tiver a velocidade de  $20 \text{ ms}^{-1}$  em relação à estação — fig. 2.38, velocidades essas

com o **mesmo sentido**, então o passageiro terá a velocidade de

$$1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} + 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 21 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

em relação à estação. Afastar-se-á dela 21 m em cada segundo: 1,0 m por sua iniciativa e 20 m arrastado pelo comboio.

Se as velocidades, mantendo a direcção, não tiverem o mesmo sentido, a adição vectorial já não é convertível, como neste exemplo, numa adição de módulos, mas, sim, numa diferença de módulos. E se as velocidades tiverem direcções diferentes, o módulo do vector soma das velocidades é dado pelo *teorema de Carnot* (utilizado na Unidade 1, Questão 3 do G.E.1.7).

### 2.8.2 A aceleração é independente dos referenciais (inericiais)

Derivando, em ordem ao tempo, a relação

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_t,$$

vem

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} = \frac{d\vec{v}_2}{dt} + \frac{d\vec{v}_t}{dt} \iff \vec{a}_1 = \vec{a}_2 + \vec{a}_t,$$

Continuando a admitir que é uniforme a translação do referencial  $S_2$ , então  $\vec{a}_t = 0$  e, portanto,

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a},$$

designando por  $\vec{a}$  a aceleração comum nos referenciais  $S_1$  e  $S_2$ .

Conclusão:

— a aceleração da partícula  $P$  é a mesma nos dois referenciais inericiais  $S_1$  e  $S_2$  — fig. 2.37:  $S_1$  é inercial por hipótese e  $S_2$  é inercial quando a sua velocidade de transporte,  $\vec{v}_t$ , é constante, como veremos a seguir.

### 2.8.3 Os princípios da relatividade de Galileu e de Einstein

Na Mecânica newtoniana (válida para baixas velocidades), aceita-se que a massa da partícula  $P$  não depende do referencial. É a mesma para  $S_1$  e  $S_2$  — fig. 2.37:

$$m_1 = m_2$$

Este resultado, porém, é inaceitável no domínio da Mecânica relativista.

Então, se a aceleração  $\vec{a}$  não depende do referencial,  $S_1$  ou  $S_2$ , e a massa  $m$  também não, a relação

$$\vec{F} = m \vec{a},$$

que traduz a *segunda lei*, é válida para os dois referenciais,  $S_1$  e  $S_2$ :  $\vec{F}$  é o mesmo vector nos dois referenciais.

Verificando-se a 2.<sup>a</sup> lei, verifica-se também, por inerência, a 1.<sup>a</sup> lei nos dois referenciais  $S_1$  e  $S_2$ , uma vez que, sendo  $\vec{F} = \vec{0}$ , será:  $\vec{a} = \vec{0}$ . Então, a partícula tem velocidade constante num e noutro referencial (embora os valores sejam diferentes, no caso de  $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ ).

*Que concluímos, afinal? Ora, vejamos:*

- 1.<sup>o</sup> — Se, como estipulámos à partida,  $S_1$  é um referencial de inércia (são válidas para ele as leis de Newton), também  $S_2$  o é, pois, sendo  $\vec{v}_1$  constante, acabamos de verificar que são igualmente válidas para ele as leis de Newton. Por outras palavras: dado um *referencial de inércia*, todo e qualquer outro referencial que se move em relação àquele com *velocidade constante* é também *referencial de inércia*.
- 2.<sup>o</sup> — As leis do movimento são válidas em todos os referenciais que se movem uns em relação aos outros com velocidades constantes.

Esta segunda conclusão foi generalizada para todas as leis conhecidas da Mecânica por *Galileu*. Posteriormente, *Einstein* considerou-a extensível a todas as leis da Física. Constitui o chamado **princípio da relatividade, que se pode enunciar do modo seguinte:**

*As leis da Física são as mesmas em todos os referenciais que se movem com velocidade constante, isto é, em todos os referenciais de inércia.*

## Súmula

2.10

A aceleração de uma partícula é a mesma em qualquer referencial inercial, isto é, não depende do referencial, como sucede com a velocidade.

As leis da Mecânica, ou seja do movimento, são válidas em todos os referenciais de inércia — **princípio da relatividade de Galileu**.

Todas as leis físicas são válidas em qualquer referencial de inércia — **princípio da relatividade de Einstein**.

Segundo este princípio, as leis físicas que regem os fenómenos naturais têm a mesma forma em todos os referenciais de inércia. Por isso, todos os referenciais de inércia são *equivalentes* e fisicamente *indistinguíveis*.

Quer isto dizer que o exame dos fenómenos físicos não permite distinguir um referencial de inércia específico, isto é, com características diferentes de todos os outros e que, por isso, se possa tomar para referencial inercial absoluto. Só neste referencial se poderiam definir conceitos absolutos como repouso e movimento absolutos. Tal referencial inercial absoluto, porém, não existe. E por isso não podemos, a partir dele, definir um espaço absoluto.

**Q 2.26**

Um carro desloca-se horizontalmente com a velocidade de 40 km/h, quando passa sobre ele, e no mesmo plano vertical, um avião a jacto, em plena ascensão, com a velocidade de 300 km/h, fazendo um ângulo de  $30^\circ$  com a horizontal (as velocidades referem-se ao referencial Terra) — fig. 2.39.

Determinar a velocidade do avião em relação a um passageiro do carro.

**Q 2.27**

Um carro move-se horizontalmente com a velocidade de 70 km/h num dia chuvoso.

A chuva, ao cair com velocidade terminal constante, fá-lo relativamente às janelas laterais do carro segundo um ângulo de  $35^\circ$  com a vertical. Com o carro parado, a chuva cai verticalmente.

1. Qual é o valor da velocidade de queda da chuva com o carro parado?
2. Qual é o valor da velocidade de queda da chuva em relação ao carro em movimento?

**Q 2.28**

Uma pessoa sobe um lanço de escadas rolantes, sem caminhar ao longo das escadas, em 12s.

No dia seguinte, a mesma pessoa resolve caminhar ao longo das escadas em funcionamento e sobe o mesmo lanço em 8 s.

No outro dia verifica que as escadas não funcionam e resolve subir as escadas imprimindo a mesma cadência da véspera. Em quanto tempo sobe o lanço?

**Q 2.29**

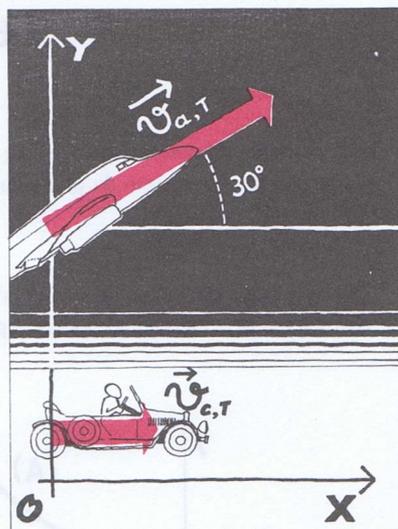
Calcular a massa  $m_1$  — fig. 2.40 — e a sua aceleração para que a massa  $m_2$  não se mova (em relação à Terra).

Desprezam-se as massas das cordas e das roldanas.

$$m_2 = 0,5 \text{ kg}, \quad m_3 = 1,0 \text{ kg}, \quad g = 10\text{ms}^{-2}$$

**Q. 2.30**

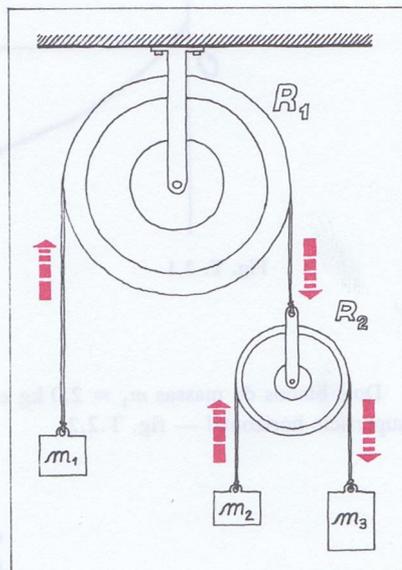
Num plano inclinado de 2,00 m de altura e 5,0 m de comprimento, coloca-se um cubo de mármore com a massa de 20,0 kg. Este cubo é mantido no plano encostando-o a um paralelepípedo de madeira, pregado este perpendicularmente ao plano. Determinar as forças exercidas pelo cubo de mármore sobre o plano e sobre o paralelepípedo de madeira, respectivamente.



**Fig. 2.39** No sistema de eixos adoptado ( $O, x, y$ ), as velocidades do carro e do avião em relação à Terra são (em km/h):

$$\vec{v}_{c,T} = 40 \vec{u}_x$$

$$\vec{v}_{a,T} = 300 \cos 30^\circ \vec{u}_x + 300 \sin 30^\circ \vec{u}_y$$



**Fig. 2.40**

# Teste de auto-avaliação

## I

Uma partícula de massa  $1,0 \times 10^{-2}$  kg move-se num plano ao qual se associou um referencial  $(O, x, y)$ .  
A equação do movimento da partícula é

$$\vec{r} = 5 t^2 \vec{u}_x + (5 - 10 t) \vec{u}_y \quad (\text{SI})$$

1. Qual é a força que actua na partícula? Caracterizar essa força.
2. Das curvas seguintes, qual poderá representar a trajectória da partícula no referencial  $(O, x, y)$ ? Justificar.

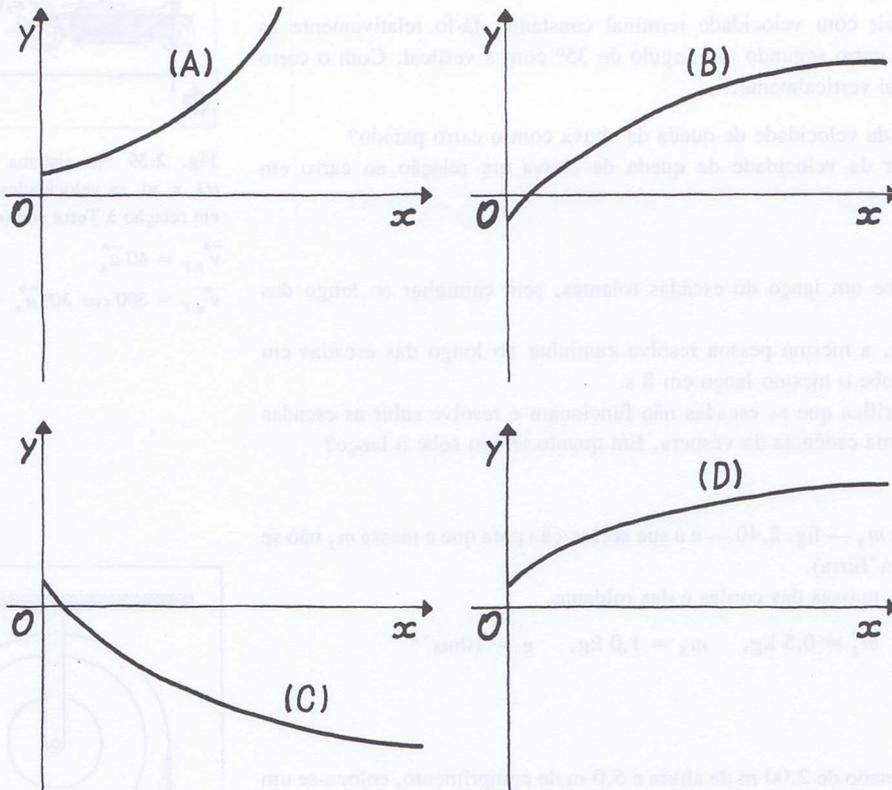


Fig. T. 2.1

## II

Dois blocos de massas  $m_1 = 2,0$  kg e  $m_2 = 8,0$  kg estão encostados um ao outro e podem deslizar sem atrito sobre uma superfície horizontal — fig. T.2.2.

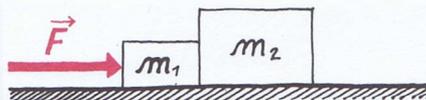


Fig. T. 2.2

1. Aplicando ao bloco  $m_1$  uma força  $\vec{F}$  de intensidade 20 N, quais são as intensidades das forças que se exercem entre os blocos  $m_1$  e  $m_2$ ?
2. E quais são as intensidades dessas forças de interacção se uma força  $-\vec{F}$  (20 N) for aplicada no bloco  $m_2$ , em conjugação com a força  $\vec{F}$ ?

### III

Um corpo, de massa 200 g, ligado à extremidade de uma corda de 1,0 m de comprimento, é posta a rodar num plano vertical. Considerando a posição mais elevada da trajectória — fig. T.2.3:

1. Representar as forças que actuam no corpo.
2. Determinar a velocidade mínima que o corpo pode ter nessa posição para a corda se manter esticada.
3. Calcular a tensão da corda quando o corpo passa nessa posição mais elevada com uma velocidade dupla da velocidade mínima possível.

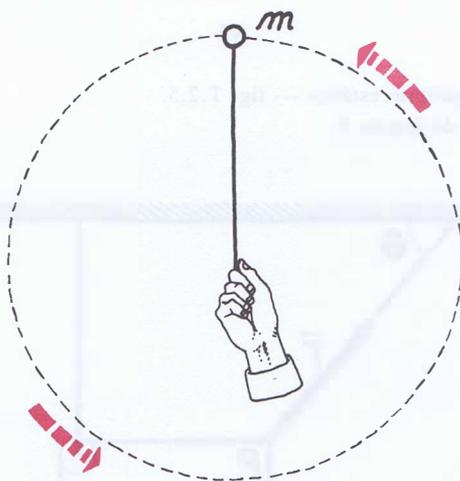


Fig. T. 2.3

### IV

Uma esfera de massa 10 g, abandonada na periferia A de uma tija semi-esférica, de raio 10 cm, rola com atrito desprezável no interior da mesma — Fig. T.2.4.

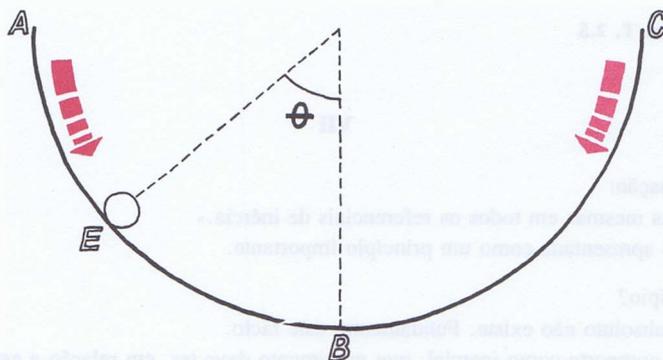


Fig. T. 2.4

1. Representar, por vectores convenientes, as forças que actuam na esfera ao passar na posição  $E$ .
2. Provar que a reacção a que está submetida a esfera, na posição  $E$ , é dada pela expressão

$$R = m \left( \frac{v^2}{r} + g \cos \theta \right)$$

3. Calcular a reacção da parede interior da tijela sobre a esfera, quando esta passa em  $B$  com a velocidade de  $1,4 \text{ ms}^{-1}$  ( $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ ).

V

Um carro de corrida move-se numa pista circular de ensaio, de raio  $40 \text{ m}$ , com a velocidade, constante, de  $60 \text{ ms}^{-1}$ . Na hipótese de não haver atrito entre o piso e os pneus, qual deveria ser o ângulo de «relevé» que a pista deveria ter para não haver derrapagem?

VI

Considerar o sistema da figura em equilíbrio estático — fig. T.2.5.  
Determinar os valores da tensão  $\vec{T}$  e do ângulo  $\theta$ .

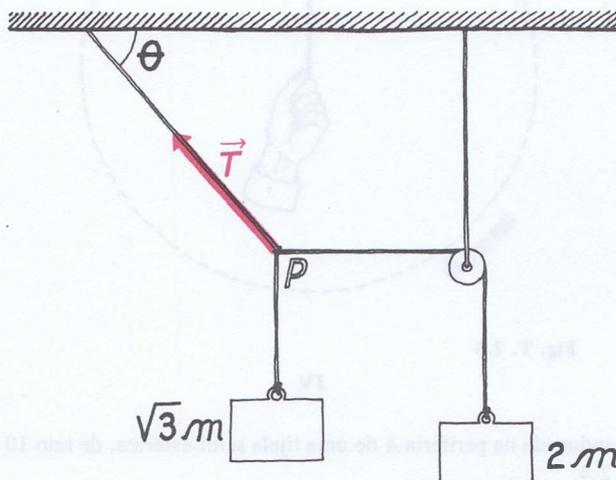


Fig. T. 2.5

VII

Considerar a seguinte afirmação:

«As leis da Dinâmica são as mesmas em todos os referenciais de inércia.»

Esta afirmação costuma ser apresentada como um princípio importante.

1. Como se designa tal princípio?
2. Um referencial de inércia absoluto não existe. Fundamentar este facto.
3. Se um dado referencial se comporta como inercial, que movimento deve ter, em relação a esse, um outro referencial para também ser inercial?
4. Fundamentar a afirmação inicial deste grupo do teste.

# As leis de força

UNIDADE



Leonardo da Vinci (1452-1519)

Pintor florentino, arquitecto, engenheiro e físico, escrevia com a mão esquerda e da direita para a esquerda — diz-se que com o fim de não facilitar a leitura dos seus escritos e esquivar-se a disputas com os cientistas contemporâneos... Por isso, os seus trabalhos de Física, que só foram decifrados dois séculos após a sua morte, não contribuíram de imediato para o renascimento científico. Têm, porém, valor histórico e testemunham a genialidade do seu talento.

Propunha, nos seguintes termos, um ideal científico cuja actualidade é flagrante:

«A Física deveria começar por um conjunto de princípios e de proposições, (enunciados) *primeiros* que forneceriam a base de desenvolvimentos ulteriores.»

Foi o que, no século XVII, fez Newton.



Jean Bernoulli (1667-1748)

Físico e matemático suíço, foi discípulo e depois sucessor de seu irmão *Jacobo* na cátedra da Universidade de Basileia.

Sendo um cartesiano de feito orgulhoso, teve disputas com este seu irmão, que era newtoniano, e com seu filho Daniel, de feito modesto.

Ombreou, no seu tempo, em prestígio e respeito, com *Newton* e *Leibnitz*.

Na Mecânica contribuiu para a resolução de vários problemas, entre eles o do *pêndulo*, tendo enunciado o *teorema* da «força viva» ( $m v^2$ ), considerado por *Leibnitz* como um *princípio*. Ficou célebre o problema com que, em 1696, desafiou os seus colegas, dando-lhes seis meses para o resolverem... *Newton*, então com 55 anos, resolveu-o de um dia para o outro: desta sua solução nasceu o *cálculo das variações*!



Foto: J. M. S. / Contrasto



Foto: J. M. S. / Contrasto

As leis de força são fundamentais para a compreensão da física. Elas descrevem como as forças atuam sobre os corpos e como estes respondem a essas forças. A primeira lei de Newton, a lei da inércia, estabelece que um corpo em repouso permanece em repouso e um corpo em movimento continua em movimento retilíneo e uniforme, a menos que seja submetido a uma força resultante não nula. A segunda lei de Newton, a lei da aceleração, afirma que a aceleração de um corpo é diretamente proporcional à força resultante que atua sobre ele e inversamente proporcional à sua massa. A terceira lei de Newton, a lei da ação e reação, afirma que para toda ação há uma reação de igual magnitude e sentido oposto.

As leis de força são fundamentais para a compreensão da física. Elas descrevem como as forças atuam sobre os corpos e como estes respondem a essas forças. A primeira lei de Newton, a lei da inércia, estabelece que um corpo em repouso permanece em repouso e um corpo em movimento continua em movimento retilíneo e uniforme, a menos que seja submetido a uma força resultante não nula. A segunda lei de Newton, a lei da aceleração, afirma que a aceleração de um corpo é diretamente proporcional à força resultante que atua sobre ele e inversamente proporcional à sua massa. A terceira lei de Newton, a lei da ação e reação, afirma que para toda ação há uma reação de igual magnitude e sentido oposto.

### 3.1 Leis de força

- 3.1.1 Lei de força da força de gravitação
- 3.1.2 Lei de força da força eléctrica
- 3.1.3 Lei de força da força elástica
- 3.1.4 Lei de força da força resistente num fluido
- 3.1.5 Lei de força da força de atrito de escorregamento
  - A — Força de atrito
  - B — Lei de força da força de atrito estático
  - C — Lei de força da força de atrito cinético

### 3.2 Aplicações da lei da acção e reacção a situações com atrito

As leis de força são fundamentais para a compreensão da física. Elas descrevem como as forças atuam sobre os corpos e como estes respondem a essas forças. A primeira lei de Newton, a lei da inércia, estabelece que um corpo em repouso permanece em repouso e um corpo em movimento continua em movimento retilíneo e uniforme, a menos que seja submetido a uma força resultante não nula. A segunda lei de Newton, a lei da aceleração, afirma que a aceleração de um corpo é diretamente proporcional à força resultante que atua sobre ele e inversamente proporcional à sua massa. A terceira lei de Newton, a lei da ação e reação, afirma que para toda ação há uma reação de igual magnitude e sentido oposto.

# As leis de força

3

## 3.1 Leis de força

Quando conhecemos a aceleração de uma partícula e as suas condições iniciais ( $\vec{r}_0$ , posição inicial, e  $\vec{v}_0$ , velocidade inicial), é possível, por integração, determinar a equação do movimento da partícula, isto é, obter

$$\vec{r} = f(t).$$

Esta equação permite prever todas as características do movimento em qualquer instante.

Ora, a aceleração pode obter-se a partir da equação fundamental

$$\vec{F} = m \vec{a} \iff \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = m \vec{a},$$

desde que se conheçam as **leis de força** a que obedecem as várias forças ( $n$ ) aplicadas na partícula.

Estas leis traduzem matematicamente o modo como as partículas interagem com a vizinhança, ou seja, mais precisamente: o modo como as forças dependem das grandezas físicas que, variando durante a interacção, se utilizam para definir e/ou determinar a força.

Vamos em seguida recordar duas leis de força respeitantes a forças fundamentais. Porém, como a análise dos fenómenos macroscópicos resultaria muito complexa se recorressemos apenas a estas leis, vamos acrescentar algumas leis respeitantes a forças não fundamentais (leis que traduzem macroscopicamente as acções microscópicas das forças fundamentais). Estas últimas leis são a lei da força elástica, a lei da força resistente num fluido e a lei da força de atrito.

Por último, lembramos que o nosso estudo se vai cingir a **cargas e a massas que estão em repouso ou se movem com baixa velocidade** (muito menos de 1% da velocidade da luz) num referencial inercial.

### 3.1.1 Lei de força da gravitação

Esta lei é a conhecida *lei da atracção universal de Newton*, cuja expressão vectorial é — fig. 3.1, (a):

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r,$$

onde

$G$  = constante de gravitação universal =  $6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$ ;

$r$  = distância da partícula de massa gravitacional  $m_2$  à partícula de massa gravitacional  $m_1$  ( $m_1$  = massa da Terra,  $m_T$ , na situação apresentada na fig. 3.1, e  $m_2$  = massa  $m$  do satélite);

$\vec{u}_r$  = versor do vector  $\vec{r}$  dirigido de  $m_1$  para  $m_2$ .

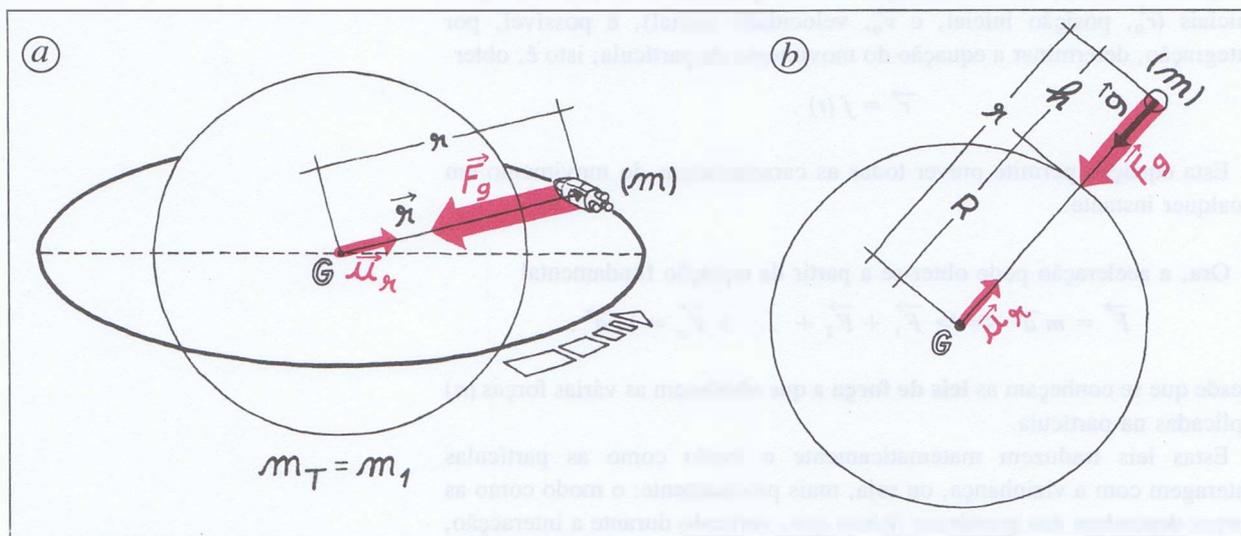


Fig. 3.1

- (a) O satélite de massa  $m$  é atraído para a Terra por uma força que obedece à lei da atracção universal

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_T \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

- (b) Um corpo, ao cair para a Terra, à altitude  $h$ , está actuado por uma força que obedece à expressão

$$\vec{F}_g = m \vec{g} = -G \frac{m_T \cdot m}{(R + h)^2} \cdot \vec{u}_r$$

Recorde-se, a propósito, que as massas gravitacionais, determinadas com a balança, são idênticas às massas inerciais referidas na Unidade anterior. Por exemplo: um corpo com a massa inercial de 3,0 kg terá também a massa gravitacional igual a 3,0 kg (ver secção 4.9.5 do Manual de Física para o 10.º ano).

A lei anterior assume a forma simples

$$\vec{F}_g = m \vec{g},$$

sendo  $\vec{g}$  a aceleração produzida pela força gravítica, ou seja a *aceleração da gravidade* — fig. 3.1, (b).

### 3.1.2 Lei de força da força eléctrica

Esta lei também é conhecida. Trata-se da *lei de Coulomb*, cuja expressão vectorial é — fig. 3.2:

$$\vec{F}_e = k \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r,$$

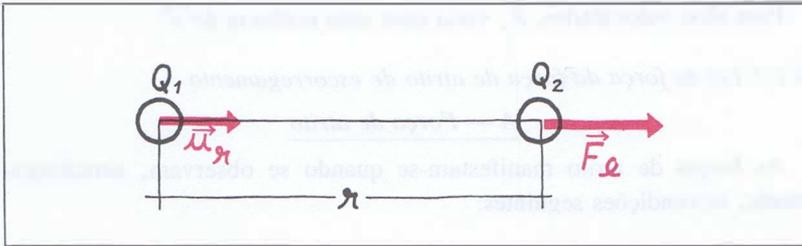


Fig. 3.2 Força electrostática,  $\vec{F}_e$ , exercida pela carga  $Q_1$  sobre a carga  $Q_2$ .

onde

$k$  = constante electrostática =  $9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2}$  (no SI e no vácuo);

$r$  = distância entre as partículas de cargas  $Q_1$  e  $Q_2$ , respectivamente;

$\vec{u}_r$  = versor do vector que liga  $Q_1$  a  $Q_2$ .

Nesta expressão, a força repulsiva tem valor (algébrico) positivo, e a força atractiva tem valor negativo.

### 3.1.3 Lei de força da força elástica

A força elástica é uma força de intensidade proporcional ao deslocamento da partícula relativamente à sua posição de equilíbrio, e está sempre orientada para esta posição. A sua expressão vectorial é a seguinte:

$$\vec{F}_e = -k_e \cdot \vec{r},$$

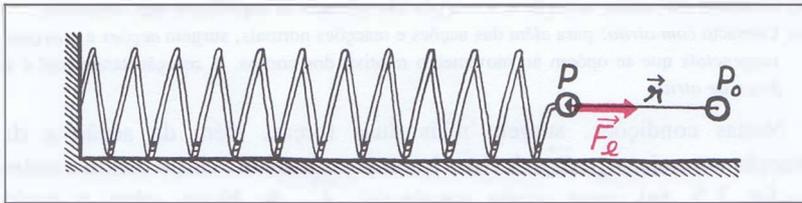


Fig. 3.3 A força elástica tem sempre o sentido oposto ao vector  $\vec{r} = \vec{P_0P}$  (vector posição em relação à posição de equilíbrio  $P_0$ ), tendo-se:

$$\vec{F}_e = -k_e \vec{r}.$$

onde

$k_e$  = constante elástica;

$\vec{r}$  = vector posição da partícula em relação à posição de equilíbrio.

Tratando-se da força que uma dada mola elástica exerce numa partícula ligada à sua extremidade (fig. 3.3), a constante elástica depende da flexibilidade da mola e exprime-se em  $\text{Nm}^{-1}$  no SI.

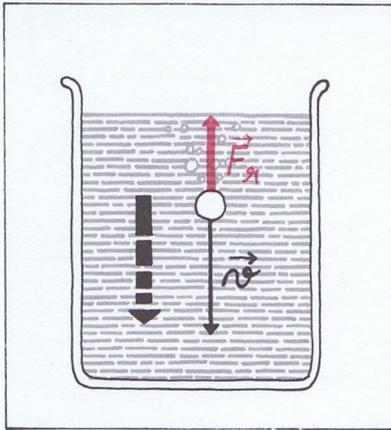


Fig. 3.4 Um corpo cai no interior de um fluido: contrariando a velocidade  $\vec{v}$ , o fluido opõe a força  $\vec{F}_r$  ao movimento da partícula.

### Súmula

3.1

Duas forças fundamentais, a *força de gravitação* e a *força eléctrica*, têm leis de força análogas. São, respectivamente:

$$\vec{F}_g = -G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

$$\vec{F}_e = k \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

A *força elástica* e a *força resistente num fluido*, não fundamentais, têm intensidades proporcionais, respectivamente, ao deslocamento e à velocidade:

$$\vec{F}_e = -k_e \vec{r}$$

$$\vec{F}_r = -k \vec{v}$$

### 3.1.4 Lei de força da força resistente num fluido

Esta força depende da velocidade do corpo em relação ao fluido (fig. 3.4) e está dirigida em sentido contrário ao da velocidade.

Exprime-se, vectorialmente, do modo seguinte:

$$\vec{F}_r = -k \vec{v}$$

O coeficiente  $k$  é um coeficiente positivo, característico do corpo e do fluido (gás ou líquido) onde se move.

Para altas velocidades,  $\vec{F}_r$  varia com uma potência de  $\vec{v}$ .

### 3.1.5 Lei de força da força de atrito de escorregamento

#### A — Força de atrito

As forças de atrito manifestam-se quando se observam, simultaneamente, as condições seguintes:

- 1.<sup>a</sup> — Os corpos estão em contacto e comprimem-se mutuamente.
- 2.<sup>a</sup> — Os corpos apresentam rugosidades superficiais.
- 3.<sup>a</sup> — Os corpos estão em *movimento relativo* ou, pelo menos, estão a ser *solicitados* a mover-se em movimento relativo — fig. 3.5.

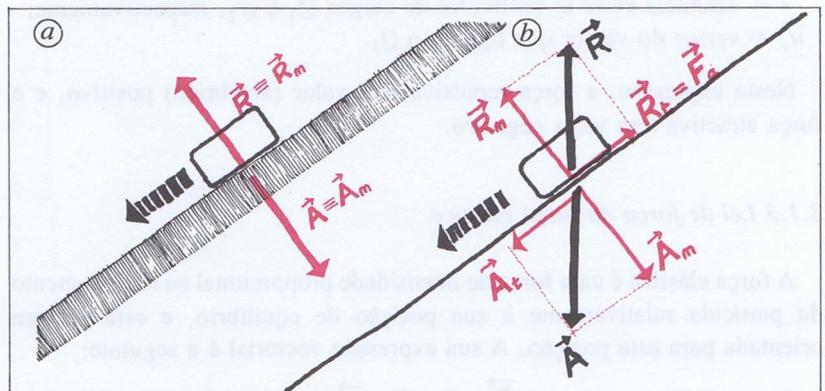


Fig. 3.5

(a) Contacto *sem* atrito: a acção e a reacção são normais às superfícies que contactam.

(b) Contacto *com* atrito: para além das acções e reacções normais, surgem acções e reacções tangenciais que se opõem ao movimento relativo dos corpos. A reacção tangencial é a *força de atrito*.

Nestas condições, surgem mais duas forças, além da acção e da reacção normais,  $\vec{A}_n$  e  $\vec{R}_n$ , devidas à compressão de um corpo contra o outro — fig. 3.5, (a): *uma acção tangencial*,  $\vec{A}_t$ , do bloco sobre o apoio — fig. 3.5, (b) — no sentido do movimento do bloco; e *uma reacção tangencial* sobre o bloco, em sentido contrário ao do movimento. Esta reacção chama-se **força de atrito**. Em consequência disto, a acção e a reacção globais,  $\vec{A}$  e  $\vec{R}$ , já não são perpendiculares às superfícies em contacto, mas, sim, oblíquas.

A **força de atrito**,  $\vec{F}_a$ , pode, em face do que acabamos de expor, definir-se como a *força que se opõe ao movimento relativo dos corpos em contacto*.

O atrito de escorregamento foi estudado experimentalmente, pela primeira vez, pelo físico francês *Coulomb* (1736-1806).

Para isso arranjou um corpo paralelepípedo, metálico e homogêneo, que assentou sobre uma mesa horizontal. Foi aplicando a esse corpo forças horizontais crescentes até o paralelepípedo se deslocar, e determinou, experimentalmente, a *força mínima necessária para arrancar o corpo da sua posição de equilíbrio estático* — fig. 3.6.

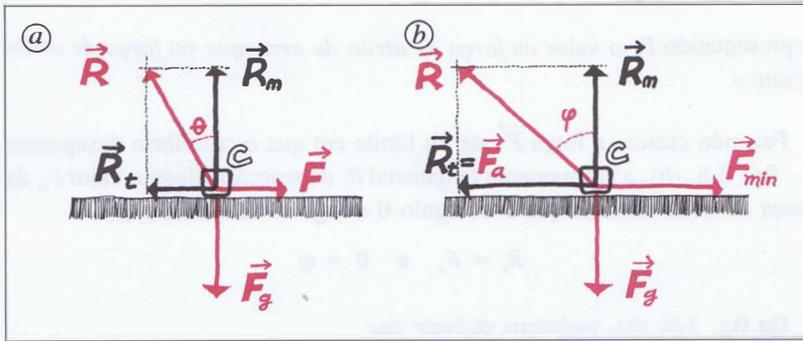


Fig. 3.6

(a) A força  $\vec{F}$  aplicada ainda não é suficiente para o corpo arrancar, pois tem-se:

$$\vec{F} + \vec{F}_g + \vec{R} = \vec{0}$$

(b) A força  $F_{min}$  é a força mínima necessária para que o corpo arranque, tem o módulo da força de atrito estático,  $\vec{R}_t = \vec{F}_a$ , e corresponde ao valor máximo,  $\varphi$ , do ângulo  $\theta$ .

Essa força mínima tem módulo igual ao do valor máximo da componente tangencial da reacção  $\vec{R}$ . Este valor máximo da reacção tangencial que se opõe ao movimento designa-se por **força de atrito estático**, *força de atrito de arranque* ou ainda *força de atrito de Coulomb*:

$$\vec{F}_a$$

Por este processo, *Coulomb* pôde estabelecer experimentalmente as três conclusões seguintes acerca da força de atrito de arranque em «seco», isto é, da força de atrito existente entre duas superfícies *não lubrificadas*, que escorregam uma sobre a outra:

**1.ª conclusão:**

A força de atrito estático é independente da extensão das superfícies em contacto.

**2.ª conclusão:**

A força de atrito estático depende da natureza das superfícies que contactam.

**3.ª conclusão:**

A força de atrito estático é proporcional à componente normal  $R_n$  da reacção.

Esta três conclusões experimentais podem condensar-se numa **lei de força** cuja expressão é

$$\frac{F_a}{R_n} = \mu \iff F_a = \mu R_n,$$

onde a constante de proporcionalidade,  $\mu$ , só depende da natureza das superfícies de contacto e se designa por **coeficiente de atrito estático**. Saliente-se que se trata de uma igualdade escalar e não de uma igualdade vectorial, dado que  $\vec{F}_a$  e  $\vec{R}_n$  são vectores de direcções diferentes.

No caso da fig. 3.6, (a), o corpo  $C$  ainda está em repouso, porque a componente tangencial  $R_t$  da reacção que é solicitada ainda é inferior à força de atrito de arranque. Haverá pois equilíbrio enquanto for

$$R_t < F_a ,$$

representando  $F_a$  o valor da *força de atrito de arranque* ou *força de atrito estático*.

Fazendo crescer a força  $\vec{F}$  até ao limite em que o equilíbrio desaparece — fig. 3.6, (b), a componente tangencial  $R_t$  da reacção atinge o valor  $F_a$  da força de atrito de arranque e o ângulo  $\theta$  atinge o valor limite  $\varphi$ :

$$R_t = F_a \quad \text{e} \quad \theta = \varphi$$

Da fig. 3.6, (b), podemos deduzir que

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_a}{R_n} ,$$

expressão esta que, comparada com

$$\frac{F_a}{R_n} = \mu ,$$

permite concluir que

$$\mu = \operatorname{tg} \varphi$$

Esta expressão mostra-nos que a linha de acção da força de reacção com atrito,  $\vec{R}$ , está inclinada, mas a sua inclinação, em relação à normal, não excede um valor limite  $\varphi$ . Este é *constante para superfícies da mesma natureza*, só dependendo desta.

### G.E. 3.3 ◀

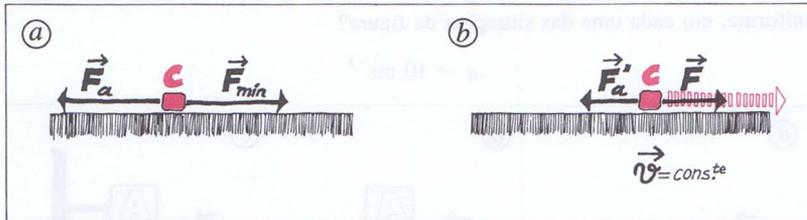
**Tabela de coeficientes médios de atrito estático**

<i>Superfícies de contacto (secas)</i>	$\mu$
aço/aço (doce)	0,74
níquel/níquel	1,10
cobre/aço (doce)	0,53
vidro/vidro	0,94
madeira/madeira	0,50

C — Lei de força da força de atrito cinético

Vimos que para arrancar um corpo do repouso, numa superfície plana, há que vencer a força de atrito estático. Isto requer uma força horizontal mínima,  $\vec{F}_{min}$  — fig. 3.7, (a).

A experiência mostra que para manter, a seguir, o corpo em movimento, a força mínima necessária é  $\vec{F}$ , de intensidade menor que a de  $\vec{F}_{min}$  — fig. 3.7, (b).



**Fig. 3.7**  
 (a) Para arrancar um corpo C, é necessário exercer uma força  $\vec{F}_{min}$ .  
 (b) Para manter o corpo C com velocidade constante, basta uma força menor,  $\vec{F}$ , porque  $\vec{F}_a' < \vec{F}_a$ .

A força de atrito, com o corpo em movimento, designa-se por **força de atrito cinético** e tem as seguintes características:

- é inferior à força de atrito estático para as mesmas superfícies;
- é também independente da área de contacto;
- para velocidades não muito elevadas, é independente da velocidade do móvel;
- é também proporcional à componente normal da reacção:

$$\frac{F'_a}{R_n} = \mu_c \iff F'_a = \mu_c R_n$$

A constante de proporcionalidade  $\mu_c$  designa-se por **coeficiente de atrito cinético**. Tem-se  $\mu_c < \mu$  (comparar as tabelas de  $\mu$  e  $\mu_c$ ).

**Tabela de coeficientes médios de atrito cinético**

Superfícies de contacto (secas)	$\mu_c$
aço/aço (doce)	0,57
níquel/níquel	0,53
cobre/aço (doce)	0,36
metal/metal	0,15—1,40
vidro/vidro	0,40
madeira/madeira	0,25—0,50

**Súmula**

3.2

A **força de atrito** entre dois corpos é uma reacção tangencial nas superfícies de contacto, e *opõe-se ao movimento relativo* dos corpos que contactam.

A **força de atrito estático** ou de **arranque** não depende da extensão da superfície de contacto mas, apenas, da sua natureza (grau de rugosidade e materiais que contactam).

É proporcional à componente normal da reacção:

$$\mu = \frac{F_a}{R_n}$$

A constante de proporcionalidade  $\mu$  chama-se *coeficiente de atrito estático*.

A **força de atrito cinético**, desenvolvida durante o movimento, é menor do que a força de atrito estático, mas é também proporcional à componente normal da reacção:

$$\mu_c = \frac{F'_a}{R_n},$$

sendo  $\mu_c < \mu$ .

QUESTÕES PROPOSTAS

Q 3.1

As massas dos blocos A e B da fig. 3.8 são

$$m_A = 4,0 \text{ kg e } m_B = 6,0 \text{ kg}$$

O coeficiente de atrito cinético entre todas as superfícies é 0,25:

$$\mu_c = 0,25$$

Que força é necessário empregar para manter o bloco B com movimento uniforme, em cada uma das situações da figura?

$$g = 10 \text{ ms}^{-2}$$

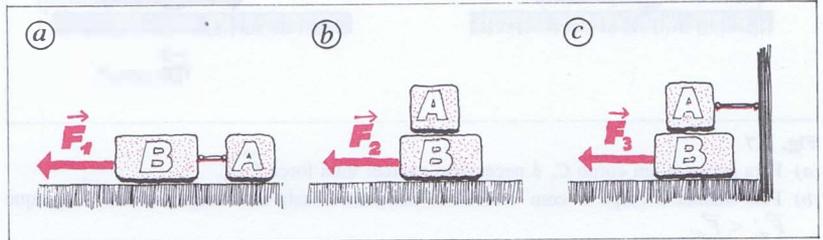


Fig. 3.8 Que forças são necessárias para manter o bloco B em movimento uniforme?

Q 3.2

1. Um homem está em cima de uns skis a tentar puxar um bloco que pesa 600 N. O homem exerce, através de cada ski, uma ação normal no chão de 400 N. O coeficiente de atrito entre os skis e o chão é 0,20 e entre o bloco e o chão é 0,30 (despreza-se a massa da corda).

Sabendo que o homem começa a exercer no bloco uma força  $\vec{F}$  de intensidade crescente, qual das opções seguintes se verifica?

- (A) O homem nunca consegue arrastar o bloco, mas é, em determinado momento, arrastado para ele.
- (B) O homem arranca o bloco do repouso e, passado algum tempo, é também arrastado para ele.
- (C) O homem e o bloco arrancam do repouso simultaneamente em sentidos contrários.
- (D) O homem é arrastado para o bloco e, passado algum tempo, consegue também arrancar o bloco do repouso.

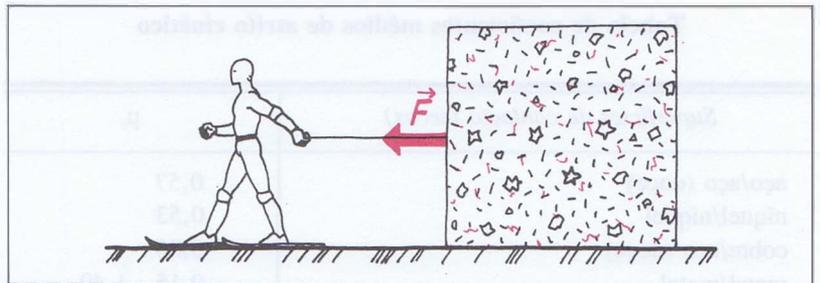


Fig. 3.9

2. A respeito da situação anterior e da figura, qual é o valor mínimo de  $\vec{F}$  para o qual se verifica qualquer movimento do homem e(ou) do bloco?

**Q 3.3**

Uma gota de chuva cai verticalmente de uma nuvem. Atendendo à lei da força resistente do ar

$$\vec{F} = -k \vec{v} \quad (\text{secção 3.1.4}),$$

qual dos movimentos seguintes deve possuir a gota até atingir o solo?

- (A) Movimento acelerado durante toda a queda.
- (B) Movimento acelerado até um certo instante e retardado a partir de então.
- (C) Movimento uniforme durante toda a queda.
- (D) Movimento acelerado até um certo instante e uniforme a partir de então.

Fundamentar a escolha.

**Q 3.4**

Um corpo de 10 kg está suspenso de uma mola elástica cuja constante é  $k = 1000 \text{ Nm}^{-1}$ . A mola, por sua vez, está pendurada do tecto de um elevador, que desce com velocidade constante.

Ao travar num dos pisos, um passageiro nota que o índice da mola acusa um aumento do seu alongamento de 0,5 cm

Com este dado e fazendo  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ , o passageiro consegue determinar a aceleração do elevador na travagem.

1. Como é que um observador inercial interpreta a distensão da mola?
2. Qual é o valor da aceleração de travagem do elevador?

**Q 3.5**

O corpo representado na fig. 3.10 está em equilíbrio no plano inclinado.

Entre a superfície deste e a do corpo há um coeficiente de atrito estático  $\mu$ . Sob a acção da força  $F$ , inclinada  $\theta^\circ$  em relação à linha de maior declive do plano, o corpo está na iminência de arrancar e subir o plano.

Estabelecer a relação em que a força  $F$  aparece como função da força gravítica  $F_g$ , do coeficiente  $\mu$  e de funções trigonométricas dos ângulos  $\alpha$  e  $\theta$ .

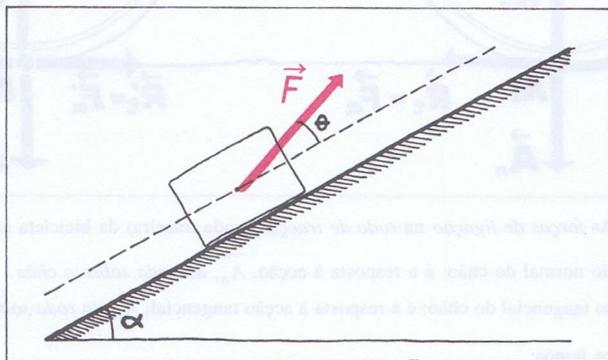


Fig. 3.10

**Q 3.6**

Sobre um tronco rugoso, deitado no chão, equilibra-se horizontalmente uma tábua homogénea — fig. 3.11, (a). Deslocando um pouco um dos seus extremos, observa-se que há equilíbrio-limite quando a tábua forma um ângulo  $\theta$  com a horizontal — fig. 3.11, (b).

Qual é o coeficiente de atrito estático e em que condições a tábua escorrega e cai?

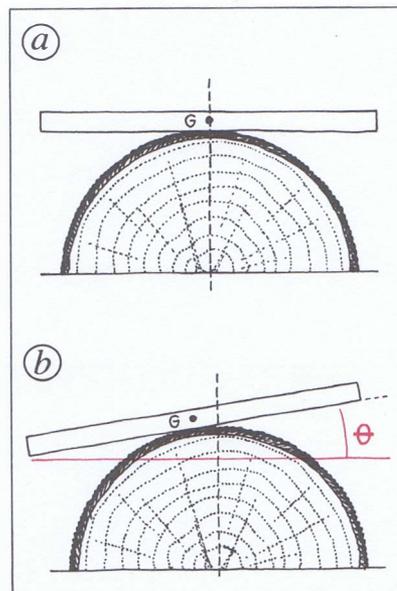


Fig. 3.11

### 3.2 Aplicações da lei da acção e reacção a situações com atrito

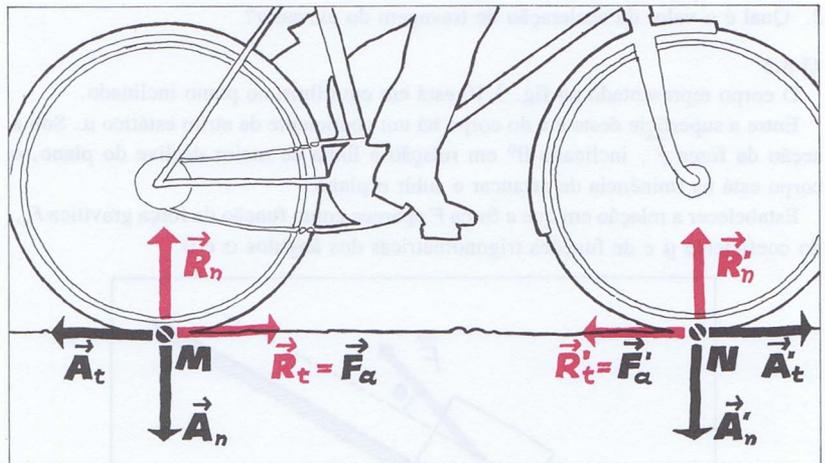
A força de atrito apresenta, em geral, desvantagens, pois é uma *força resistente dissipativa*, isto é, contribui para a dissipação de energia em todos os processos em que intervém.

Apesar disso, a sua existência é fundamental para as actividades da vida diária, pois, sem ela, começávamos por ter de prescindir do nosso processo de locomoção, porque não éramos capazes de caminhar. Com efeito, as solas dos sapatos escorregariam no chão e nem sequer nos conseguiríamos manter de pé...

Mais: sem atrito, as correias sem-fim não fariam mover as máquinas, os pregos e os parafusos não se manteriam presos na madeira, veríamos as bicicletas e os automóveis em funcionamento, com as respectivas rodas a rodar, mas sem progredirem!

Só que estas vantagens se pagam com energia, que é dissipada de modo irrecuperável.

Vejamos, por exemplo, o que sucede nas duas rodas de uma bicicleta: a *roda de tracção* (traseira) e a *roda livre* (dianteira) — fig. 3.12.



**Fig. 3.12.** As forças de ligação na roda de tracção (roda traseira) da bicicleta são:

$\vec{R}_n$  = reacção normal do chão: é a resposta à acção,  $\vec{A}_n$ , da roda sobre o chão.

$\vec{R}_t$  = reacção tangencial do chão: é a resposta à acção tangencial,  $\vec{A}_t$ , da roda sobre o chão.

Na roda livre temos:

$\vec{R}'_n$  = reacção normal do chão ou resposta à acção,  $\vec{A}'_n$ , da roda sobre o chão.

$\vec{R}'_t$  = reacção do chão ou resposta à acção,  $\vec{A}'_t$ , da roda sobre o chão.

Quando o ciclista exerce força no pedal, esta força põe a rodar a roda traseira ou roda tractora.

Esta roda está apoiada no solo, em  $M$ . A tendência do pneu da roda (que se apresenta ligeiramente deformada em  $M$ ) é escorregar para trás no sentido de  $\vec{A}_t$  (acção tangencial do pneu sobre o solo). A acção  $\vec{A}_t$ , sobre o

solo, dirigida para trás, desencadeia uma reacção  $\vec{R}_i$ , dirigida **para a frente**. Esta reacção, aplicada **na roda**, é uma **força de atrito estático**, pois **não ocorre deslizamento entre o pneu e o solo**.

Ora bem: é precisamente esta força de atrito,  $\vec{F}_a$ , *reacção tangencial do solo sobre o pneu*, **força exterior** ao sistema **bicicleta-ciclista**, que empurra o referido sistema, que faz com que ele progrida, que desempenha o papel de *força motora* do sistema.

Eliminando o atrito em  $M$  (com uma superfície de gelo, ou com óleo, por ex.), a roda de tracção continuará a rodar, se a tal a obrigar a força do ciclista exercida no pedal, mas o sistema bicicleta-ciclista, na ausência da força motora,  $\vec{F}_a$ , **não progredirá, não se deslocará**: patinará, rodará em falso!

O que sucede no contacto *roda livre-solo* (em  $N$ ) é algo diferente. A tendência de *escorregamento* desta roda, porque é empurrada pela própria bicicleta, é para a frente e não para trás. Mas a esse escorregamento para a frente, a essa acção tangencial  $\vec{A}_i'$  sobre o solo, corresponde uma reacção  $\vec{R}_i'$  **para trás**. Esta reacção, aplicada na roda, é também uma **força de atrito estático**, pois **não ocorre deslizamento entre o pneu e o solo**. Porém, esta força de atrito estático opõe-se ao movimento do sistema bicicleta-ciclista, quer dizer, é uma *força resistente* ou de *travagem* do sistema.

Em termos comparativos, podemos sintetizar:

Enquanto que na *roda de tracção*, em  $M$  — fig. 3.12, a *força de atrito favorece* o movimento de translação do sistema bicicleta-ciclista, na roda livre, em  $N$ , a *força de atrito opõe-se* ao movimento de translação.

Quando o ciclista aplica os travões da roda da frente e da roda da retaguarda, os dois pneus *deixam de rodar* e passam ambos a *escorregar* em relação ao solo. Nestas condições, a força de atrito cinético está dirigida para trás, tanto em  $M$  como em  $N$  — fig. 3.13. O ciclista bloqueia as rodas, mas também não é essa força, *interior* ao sistema, a responsável pela travagem da bicicleta. São, sim, as forças de atrito nos contactos com o solo. Numa pista de gelo, com atrito desprezável, as rodas ficam bloqueadas, mas a bicicleta não pára... porque escorrega bem!

O que acabámos de analisar no caso da bicicleta é extensível a todo e qualquer veículo com rodas, e prova, cremos que incontestavelmente, a importância do atrito.

Fixemos este facto notável: **não são as forças interiores** (caso da força do ciclista no pedal ou dos calços do travão nas rodas) que afectam os movimentos de translação, de deslizamento, dos sistemas. **As forças responsáveis pelos movimentos de translação dos sistemas são as forças exteriores — e só estas.**

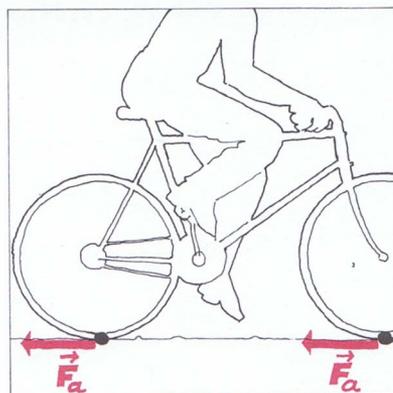


Fig. 3.13 Na travagem com os travões da frente e da retaguarda, as forças de atrito estão ambas dirigidas para trás.

### Súmula

3.3

Somente as **forças exteriores intervêm nos movimentos de translação** de um sistema, quer favorecendo-os quer, sendo opostas a estes, resistindo a eles.

**Q 3.7**

Um carro puxa um atrelado. Pela lei da acção-reacção, a força que o carro exerce no atrelado é simétrica da força que este exerce no carro. Se a força que o carro exerce no atrelado parece ser, assim, «contrabalançada pela outra», como explicar o facto de o atrelado ser, de facto, arrastado pelo carro?

**Q 3.8**

1. Os corpos *A* e *B* da fig. 3.14 deslocam-se por acção da força  $\vec{F}$ . Há atrito entre as superfícies de *A* e *B* que contactam, e entre a superfície de *B* e a mesa.

As forças que estão aplicadas nos corpos *A* e *B* são, respectivamente, em número de:

- |           |           |
|-----------|-----------|
| (A) 4 e 6 | (D) 3 e 7 |
| (B) 4 e 7 | (E) 2 e 6 |
| (C) 3 e 6 | (F) 2 e 7 |

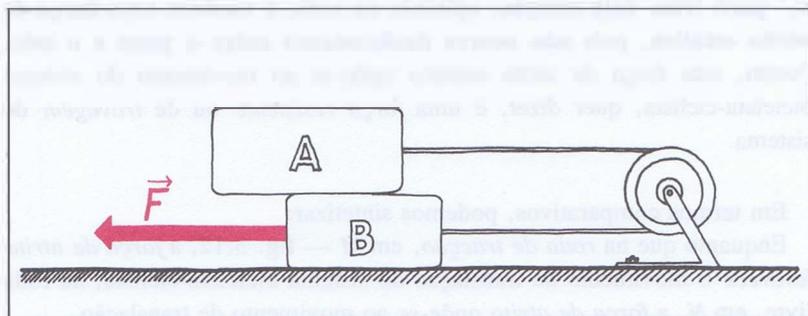


Fig. 3.14

2. Sendo

$$m_A = 6,0 \text{ kg}, \quad m_B = 4,0 \text{ kg}, \quad |\vec{F}| = 100 \text{ N}$$

e o coeficiente de atrito cinético entre os corpos e entre o corpo e a mesa,  $\mu_c = 0,20$ , determinar a aceleração dos corpos e a tensão do fio que os liga ( $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ ).

**Q 3.9**

Em cima de um copo cilíndrico de raio  $r$ , e centrado com ele, está assente um disco de cartão de raio  $R$  — fig. 3.15.

No centro do cartão (e da boca do copo) está colocada, em repouso, uma pequena esfera.

Seja  $\mu$  o coeficiente de atrito entre a esfera e o cartão.

Qual é a aceleração mínima com que se deve puxar o cartão para a esfera cair dentro do copo?

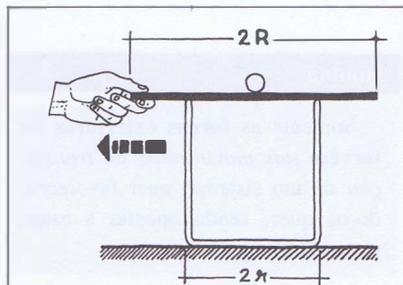


Fig. 3.15

# Teste de auto-avaliação

## I

Três blocos iguais e com igual massa estão dispostos como se indica na fig. T. 3.1, (a).

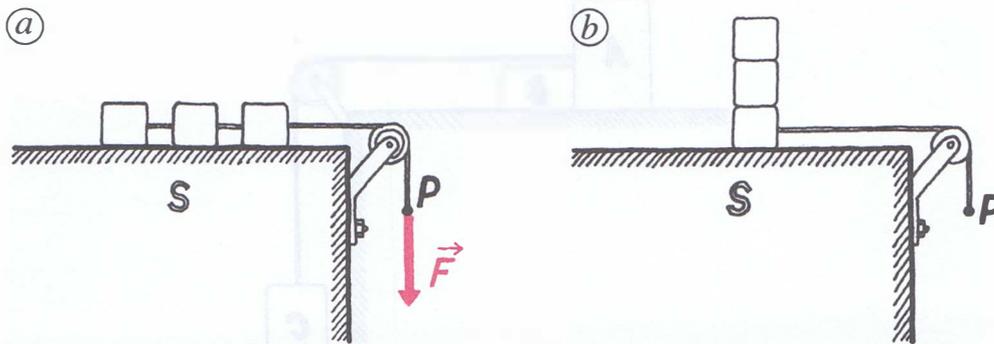


Fig. T. 3.1

Há atrito entre os blocos e a superfície S, que é constituída pelo mesmo material que os blocos. Foi necessário aplicar uma força mínima,  $\vec{F}$ , para arrancar os blocos do repouso.

Colocaram-se a seguir os três blocos, entre os quais também há atrito, na posição esquematizada na fig. T. 3.1, (b).

Nesta posição, qual é a força mínima que é necessário exercer na extremidade P do fio para arrancar os blocos do repouso?

- (A)  $\vec{F}/3$     (B)  $2\vec{F}/3$     (C)  $\vec{F}$     (D)  $3\vec{F}$

## II

1. Um fardo de algodão de massa 10 kg está assente na carroceria de uma camioneta. A certa altura, esta arranca com a aceleração de  $4,0 \text{ ms}^{-2}$  — fig. T.3.2.

Um homem fixo na carroceria mede  $2,0 \text{ ms}^{-2}$  como valor da aceleração de recuo do fardo. Qual é a intensidade da força de atrito cinético entre o piso da carroceria e o fardo?

- (A) 20 N    (B) 40 N    (C) 60 N    (D) 80 N

2. Determinar o coeficiente de atrito cinético entre o fardo e a carroceria.

( $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ )

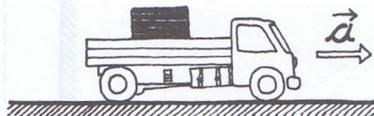


Fig. T. 3.2

### III

Os três corpos  $A$ ,  $B$  e  $C$  têm as massas

$$m_A = 10 \text{ kg}, \quad m_B = 4 \text{ kg}, \quad m_C = 8 \text{ kg}$$

Os corpos  $A$  e  $B$  são da mesma substância, sendo o coeficiente de atrito cinético entre as suas superfícies e a mesa  $\mu_C = 0,10$ . Determinar a aceleração com que se movem os corpos ( $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ ) e a reacção do corpo  $B$  sobre o corpo  $A$ .

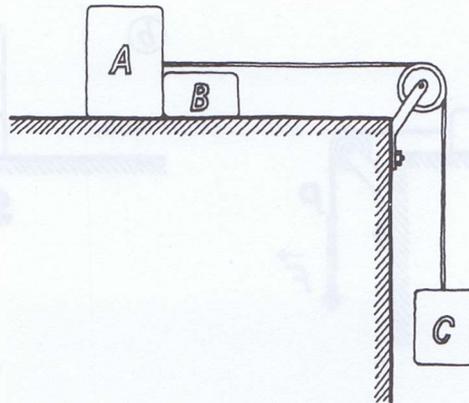


Fig. T. 3.3

### IV

Aplicou-se uma força  $\vec{F}$ , horizontal, na massa  $m$  — fig. T. 3.4. O ângulo do fio com a vertical foi aumentando lentamente até um valor  $\theta$  tal que se iniciou o deslizamento da massa  $2m$ . Sendo  $0,20$  o coeficiente de atrito entre as superfícies da massa  $2m$ , da massa  $4m$  e da mesa, qual é o valor do ângulo  $\theta$ ?

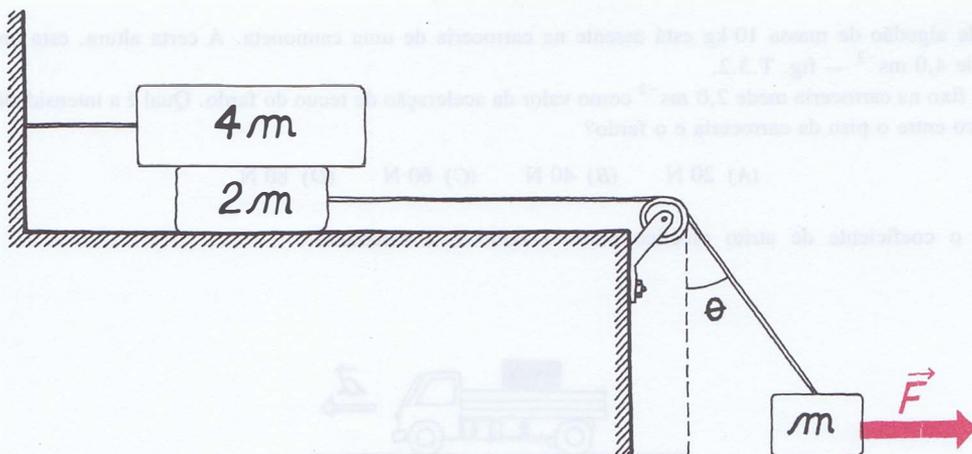


Fig. T. 3.4

## V

Um corpo de massa  $m_1$  está assente num plano inclinado de  $45^\circ$  e está ligado, por meio de um fio paralelo ao plano, que passa na gola de uma roldana colocada no cimo, a um outro corpo suspenso e de massa  $m_2$ .

Sendo  $\mu$  o coeficiente de atrito estático entre o corpo  $m_1$  e o plano, a que condições deve obedecer a massa  $m_2$  para que o corpo  $m_1$  não seja arrastado?

## VI

Um corpo é arrastado por uma força  $\vec{F}$  sem «descolar» da superfície da mesa horizontal — fig. T.3.5.

O coeficiente de atrito entre o corpo e a mesa é  $\mu$ .

Para que valor do ângulo,  $\theta$ , da força com a horizontal terá o corpo aceleração máxima?

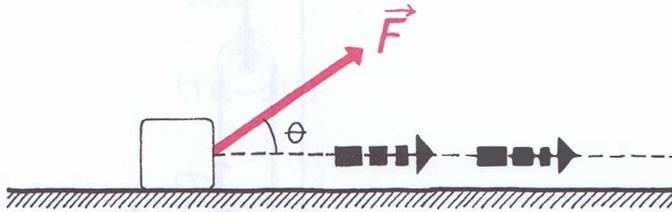


Fig. T. 3.5

## VII

Um corpo é lançado para cima ao longo de um plano inclinado, de ângulo de inclinação  $\alpha$ .

Sendo  $\mu_c$  o coeficiente de atrito cinético entre o corpo e o plano, provar que a aceleração do corpo em função do ângulo  $\alpha$  é

$$a = g (\sin\alpha + \mu_c \cos\alpha)$$

## VIII

Um bloco de 40 kg está assente numa superfície horizontal. Os coeficientes de atrito estático e cinético são, respectivamente,

$$\mu = 0,50 \quad \text{e} \quad \mu_c = 0,30$$

Com  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ , determinar a força horizontal que é necessário aplicar no bloco para:

1. Começar a movê-lo.
2. Mantê-lo com velocidade constante.
3. Imprimir-lhe uma aceleração de  $2,0 \text{ ms}^{-2}$

## IX

Determinar as acelerações dos corpos A e B e as tensões dos fios, considerando desprezáveis as massas destas e as das roldanas. Explicar as relações de grandeza entre as tensões dos fios e as acelerações dos corpos apresentados na figura.  
Dados:

$$\mu_c = 0,20 \quad m_A = 4,0 \text{ kg} \quad m_B = 4,0 \text{ kg}$$

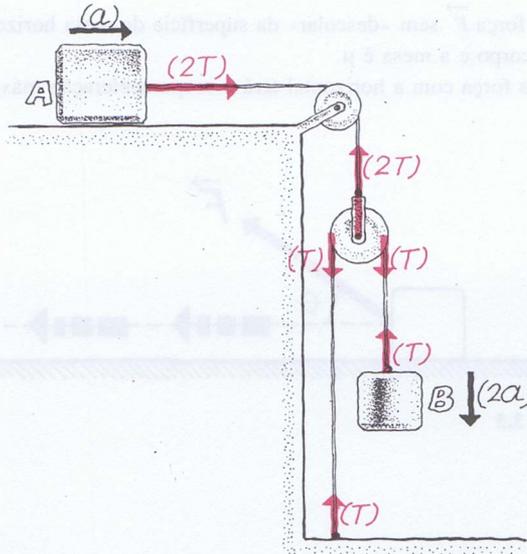


Fig. T.3.6

# Trabalho e energia cinética

# 4

## UNIDADE



Gottfried Wilhelm **LEIBNIZ** (1646-1716)

Matemático, físico, filósofo e diplomata alemão, contemporâneo de *Newton* e *Huyghens*.

Na Física, apresentou em 1683 os conceitos de *força viva* (expressa pelo produto  $mv^2$ ) e de *força morta* (não produzia movimento em virtude da resistência que se lhe opunha), assim como o *princípio da conservação da força viva*. Nasceu daqui a controvérsia com os cartesianos, que só aceitavam o princípio da conservação da quantidade de movimento. *D'Alembert* pôs termo a esta questão em 1748, mostrando que eram ambos válidos, mas diziam respeito a coisas diferentes.

1683 é uma data importante para a história da origem do princípio da conservação da energia.



Leonhard **EULER** (1707-1783)

Matemático e físico suíço, viveu na Rússia a maior parte da sua vida.

Deixou uma obra vasta em Matemática. Na Mecânica, estudou as colisões e o movimento de rotação. Distinguiu os conceitos de peso, massa e matéria, afirmando:

«a massa é o *factor próprio* dos corpos em movimento, factor que, multiplicado pela aceleração, exprime a força aplicada na direcção do movimento.»

Definiu *trabalho* como o produto *peso*  $\times$  *espaço*. Deve-se a *Poncelet*, no entanto, em 1826, a definição de trabalho com o sentido actual. *Euler* introduziu também o conceito de *potencial*.

# 4

UNIDADE

# Trabalho e energia cinética



Trabalho realizado por uma força constante ao longo de uma trajetória retilínea

Trabalho realizado por uma força de valor variável ao longo de uma trajetória retilínea

- 4.1 Trabalho realizado por uma força constante ao longo de uma trajetória retilínea
- 4.2 Trabalho realizado por uma força de valor variável ao longo de uma trajetória retilínea
- 4.3 Trabalho de uma força variável ao longo de uma trajetória plana qualquer
- 4.4 Trabalho realizado por uma força ao longo de uma trajetória fechada
- 4.5 Trabalho da resultante de um sistema de forças aplicadas numa partícula
- 4.6 Energia cinética e lei do trabalho-energia
  - 4.6.1 Energia cinética
  - 4.6.2 Lei do trabalho-energia
- 4.7 Potência e rendimento de uma máquina

# Trabalho e energia cinética

4

## 4.1 Trabalho realizado por uma força constante ao longo de uma trajectória rectilínea

Consideremos um corpo a mover-se numa trajectória rectilínea, desde o ponto O até ao ponto A — fig. 4.1. Se, durante este movimento, actuar sobre o corpo uma força constante,  $\vec{F}$ , define-se, nesta situação, o **trabalho** realizado pela força sobre o corpo como o produto interno do vector força pelo vector deslocamento:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r} \iff W = |\vec{F}| \cdot |\vec{\Delta r}| \cdot \cos \theta$$

Visto que o movimento é rectilíneo, escolhemos a trajectória para eixo dos  $xx$  e para sentido positivo o sentido do movimento. Nestas condições, é  $|\vec{\Delta r}| = \Delta x$  e, por isso, podemos escrever:

$$W = |\vec{F}| \cdot \Delta x \cdot \cos \theta$$

A expressão matemática

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r},$$

como produto interno que é (ver G.E.1.7), tem duas leituras — fig. 4.2:

1.<sup>a</sup> — O trabalho é igual ao produto do módulo do *deslocamento pela componente da força na direcção do deslocamento*, isto é,

$$W = |\vec{\Delta r}| \cdot F_r$$

2.<sup>a</sup> — O trabalho é igual ao produto da *intensidade da força pela componente do deslocamento na direcção da força*, quer dizer,

$$W = |\vec{F}| \cdot \Delta r_f$$

Utiliza-se uma ou outra destas leituras consoante a conveniência. Esta é ditada pelas condições do problema que tenhamos de resolver.

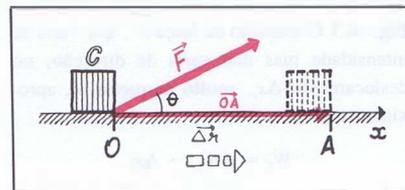


Fig. 4.1 O trabalho realizado pela força constante  $F$  sobre o corpo (C) é:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r} \iff W = |\vec{F}| \cdot |\vec{\Delta r}| \cdot \cos \theta$$

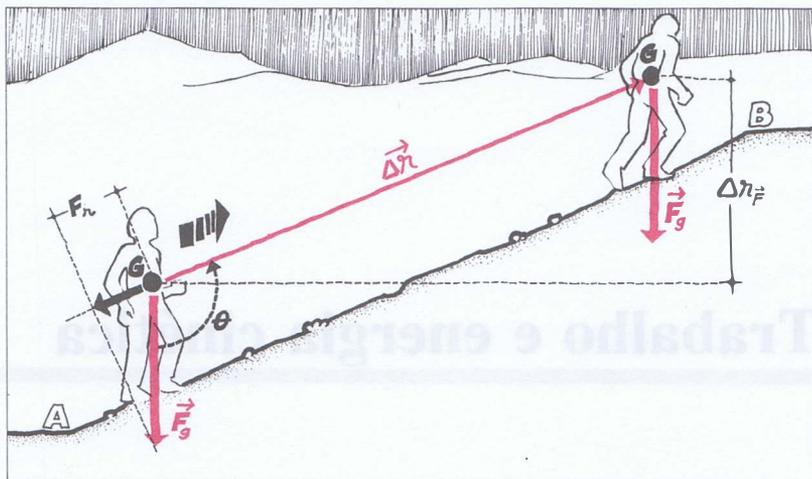


Fig. 4.2 Na subida da encosta AB, o trabalho realizado sobre o rapaz pela força gravítica  $F_g$  é:

$$W = \vec{F}_g \cdot \vec{\Delta r} = |\vec{F}_g| \cdot |\vec{\Delta r}| \cdot \cos \theta$$

O trabalho de uma força potente (favorável ao movimento), chamado *trabalho motor* ou *potente*, é positivo — fig. 4.1:

$$W_m > 0$$

O trabalho de uma força resistente (desfavorável ao movimento), chamado *trabalho resistente*, é negativo — fig. 4.2:

$$W_r < 0$$

O módulo do trabalho é máximo para  $\theta = 0^\circ$  ( $\cos \theta = 1 \Rightarrow W = |\vec{F}| \times |\vec{\Delta r}|$ ) e  $\theta = 180^\circ$  ( $\cos \theta = -1 \Rightarrow W = -|\vec{F}| \times |\vec{\Delta r}|$ ), e é nulo para  $\theta = 90^\circ$  ( $\cos \theta = 0 \Rightarrow W = 0$ ).

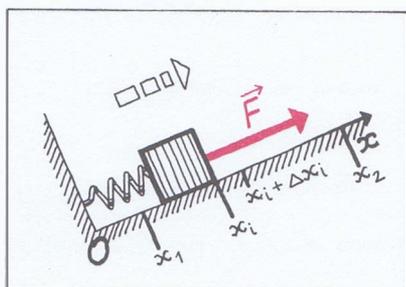


Fig. 4.3 O trabalho da força  $F$ , que varia de intensidade mas não varia de direcção, no deslocamento  $\Delta x_i$ , muito pequeno, é, aproximadamente:

$$W_i = F(x_i) \cdot \Delta x_i$$

Considera-se a força como sendo constante, no deslocamento muito pequeno, e de valor igual ao que possui no início desse deslocamento.

## 4.2 Trabalho realizado por uma força de valor variável ao longo de uma trajetória rectilínea

Seja  $\vec{F}$  a resultante das forças aplicadas num corpo movendo-se rectilíneamente num dado sentido — por exemplo, a força gravítica, a reacção normal, a força de atrito variável e a força elástica, na situação apresentada na fig. 4.3 (superfície com coeficiente de atrito não constante).

Uma vez que a trajectória é rectilínea, a aceleração  $\vec{a}$  tem a direcção desta, assim como a força resultante:  $\vec{F} = m \vec{a}$ .

Suponhamos ainda que conhecemos o modo como o valor (algébrico) da força,  $F$ , varia com a posição,  $x$ , do corpo, isto é, conhecemos a função matemática

$$F(x)$$

— seja, por exemplo,  $F(x) = 18 - 0,2x^2$  ( $F$  em newton,  $x$  em metro) — ou conhecemos a sua representação gráfica em  $\mathbb{R}^2$  — fig. 4.4, curva  $BC$ .

O valor da força é *positivo* se a força é *potente*, isto é, se tem o sentido do deslocamento. E é *negativo* se a força é *resistente*, ou seja se se opõe ao deslocamento.

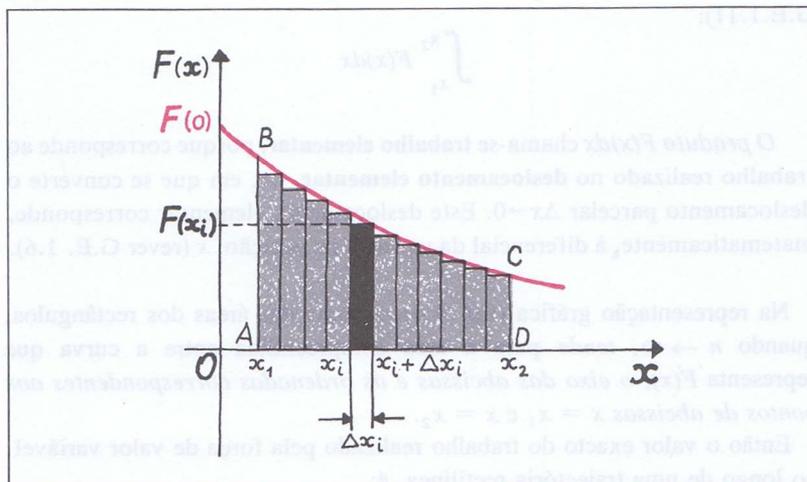
Nestas condições, dividamos o deslocamento total

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

num número grande,  $n$ , de deslocamentos parcelares,  $\Delta x_i$ , tão pequenos que, em cada um deles, possamos considerar aproximadamente constante o valor da força — fig. 4.3. No deslocamento de ordem  $i$ , o trabalho realizado pela força de valor variável,  $F(x)$ , será:

$$\Delta W_i = F(x_i) \Delta x_i$$

Este trabalho é **aproximado** (fig. 4.3) e é dado, no gráfico, pela área do pequeno rectângulo de lados  $F(x_i)$  e  $\Delta x_i$  — fig. 4.4.



O trabalho total realizado pela força de valor  $F(x)$ , no deslocamento  $\Delta x = x_2 - x_1$ , é dado, aproximadamente, pela soma dos trabalhos parciais aproximados, tendo a força valor diferente em cada deslocamento. Temos então:

$$W_{ap} = \sum_{i=1}^n F(x_i) \Delta x_i$$

Este trabalho é medido no gráfico pela soma das áreas dos rectângulos construídos entre os pontos de abscissas  $x = x_1$  e  $x = x_2$ .

Façamos agora tender para zero os deslocamentos  $\Delta x_i$ , o que equivale a fazer tender para infinito o número  $n$  de deslocamentos parcelares,

$$\Delta x_i \rightarrow 0 \iff n \rightarrow \infty$$

**Fig. 4.4** No deslocamento muito pequeno,  $\Delta x_i$ , o trabalho realizado pela força de valor variável  $F(x)$  é dado, aproximadamente, pela área do rectângulo de lados  $\Delta x_i$  e  $F(x_i)$ :

$$\Delta W_i = F(x_i) \cdot \Delta x_i$$

No deslocamento elementar  $dx_i$  ( $\Delta x_i \rightarrow 0$ ), o **trabalho elementar** realizado pela força de intensidade  $F(x_i)$ ,

$$dW_i = F(x_i) dx_i,$$

é dado pela pequena área limitada pela curva  $\widehat{BC}$  de variação de  $F(x)$ , pelo eixo dos  $xx$  e pelas ordenadas correspondentes às abscissas  $x_i$  e  $x_i + dx_i$ .

No deslocamento total

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

o trabalho realizado pela força de valor  $F(x)$  é dado pela área compreendida entre a curva  $\widehat{BC}$  de variação de  $F(x)$ , o eixo das abscissas e as ordenadas em  $x_1$  e  $x_2$ .

Quanto menor for cada deslocamento  $\Delta x_i$ , menor é o erro que resulta de se considerar constante a força nesse deslocamento, porque nos vamos aproximando cada vez mais do modo como a força realmente varia: continuamente e não por degraus. Portanto, *quando o número  $n$  de deslocamentos parcelares aumenta, tendendo para infinito, a soma dos trabalhos parcelares também se vai aproximando cada vez mais do trabalho total realmente realizado pela força.*

Podemos, pois, afirmar, que a soma de um número infinitamente grande de trabalhos parcelares nos dá o *valor exacto* do trabalho realizado no deslocamento de  $x_1$  a  $x_2$ .

E podemos traduzir este facto, recorrendo ao conceito de limite, do modo seguinte:

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} W_{ap} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(x_i) \Delta x_i$$

Ora, o limite deste somatório é um operador matemático chamado **integral**, entre  $x_1$  e  $x_2$ , da função força,  $F(x)$ , escrevendo-se (ver G.E.1.11):

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

O produto  $F(x)dx$  chama-se **trabalho elementar**, porque corresponde ao trabalho realizado no **deslocamento elementar**,  $dx$ , em que se converte o deslocamento parcelar  $\Delta x \rightarrow 0$ . Este deslocamento elementar corresponde, matematicamente, à diferencial da variável de posição,  $x$  (rever G.E. 1.6).

Na representação gráfica (fig. 4.4), a soma das áreas dos rectângulos, quando  $n \rightarrow \infty$ , *tende* para a área compreendida entre a curva que representa  $F(x)$ , o eixo das abcissas e as ordenadas correspondentes aos pontos de abcissas  $x = x_1$  e  $x = x_2$ .

Então o valor exacto do trabalho realizado pela força de valor variável, ao longo de uma trajectória rectilínea, é:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = \text{área [ABCD]}$$

A resolução deste integral por *via algébrica* sai fora do âmbito do nosso curso. Podemos, no entanto, calculá-lo pela *via geométrica*, quando as áreas que nos dão o resultado do integral correspondem a figuras geométricas simples. As áreas contam-se *positivamente* se as respectivas superfícies estão acima do eixo dos  $xx$  (valores positivos da força). E contam-se *negativamente* se as respectivas superfícies estão abaixo do eixo dos  $xx$  (valores negativos da força).

Se a força não estiver dirigida segundo o deslocamento, trabalha-se com a sua componente segundo este:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$$

#### Súmula

#### 4.1

O **trabalho elementar** realizado por uma força de valor variável, no deslocamento elementar  $dx$ , é:

$$dW = F(x)dx$$

O **trabalho realizado por uma força de valor variável**, numa trajectória rectilínea e entre os pontos de abcissas  $x = x_1$  e  $x = x_2$ , é:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

## QUESTÕES PROPOSTAS

### Q 4.1

Comprimiu-se uma mola da posição de equilíbrio  $O$  à posição  $P$  — fig. 4.5, (a). Abandonou-se em seguida.

Na fig. 4.5, (b), mostra-se a variação da força elástica de restituição,  $F$ , cuja lei de força é

$$F = -kx,$$

quando a mola se descomprime da posição  $P$  à posição  $O$ .

Calcular a expressão do trabalho realizado pela força  $F$  nesta descompressão.

### Q 4.2

Uma partícula deslocou-se ao longo de uma recta passando por uma posição  $A$  e por outra posição  $B$ . Estas posições, num dado referencial, podem ser definidas pelas coordenadas

$$x_A = -2,0 \text{ m} \quad x_B = +4,0 \text{ m}$$

Qual é o trabalho realizado sobre a partícula, entre  $A$  e  $B$ :

1. Por uma força

$$\vec{F}_1 = -40 \vec{u}_x \text{ (N)}$$

2. Por uma força

$$\vec{F}_2 = 10 \vec{u}_x - 20 \vec{u}_y \text{ (N)}$$

Em cada caso, representar graficamente a função  $x \rightarrow F_x$ , indicando a área que representa cada um dos trabalhos calculados.

### Q 4.3

Uma partícula desloca-se ao longo do eixo dos  $xx$ , passando pelas posições  $A(x_A = -1,0 \text{ m})$  e  $B(x_B = +3,0 \text{ m})$ .

A força que nela actua,  $\vec{F}$ , é dada pela seguinte expressão

$$\vec{F} = -20 x \vec{u}_x \text{ (N)}$$

1. Representar graficamente a variação do valor da força com a posição, entre  $x = -2,0 \text{ m}$  e  $x = +4,0 \text{ m}$ .

2. Determinar o trabalho da força no deslocamento entre  $A$  e  $B$  da partícula.

### Q 4.4

Na fig. 4.2, a pessoa pesa  $60 \text{ kgf}$  e o desnível entre  $A$  e  $B$  mede  $8,0 \text{ m}$ . Qual é o trabalho realizado pela força gravítica que actua na pessoa, de  $A$  a  $B$ ?

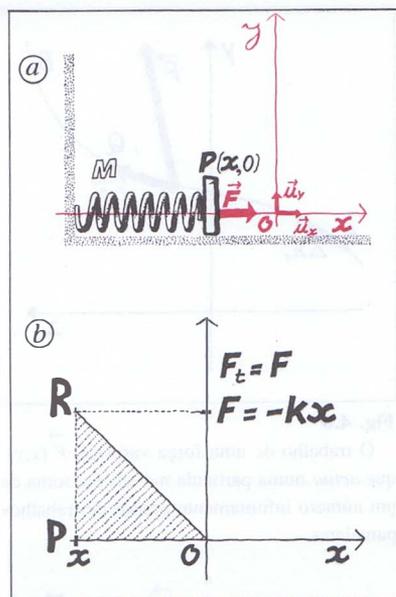


Fig. 4.5

(a) Mola comprimida desde a posição de equilíbrio  $O$  até à posição  $P$ .

(b) Variação da força elástica de restituição,  $\vec{F}$ , quando a mola se descomprime de  $P$  a  $O$ .

No caso da dilatação, escolheríamos outro referencial (a escolha é sempre arbitrária) de modo a respeitar a condição de  $W > 0$  para a força elástica motora, uma vez que se pode arbitrar um referencial para cada caso.

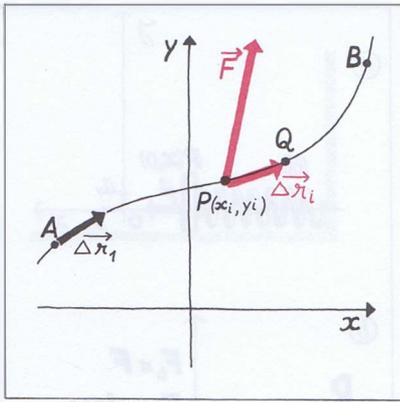


Fig. 4.6

O trabalho de uma força variável,  $\vec{F}(x,y)$ , que actua numa partícula móvel, é a soma de um número infinitamente grande de trabalhos parcelares:

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{F}(x_i, y_i) \cdot \Delta \vec{r}_i$$

$$= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

onde  $\vec{F}$  e  $d\vec{r}$  são, respectivamente, a força e o deslocamento elementar no ponto  $P$  de coordenadas  $(x,y)$ .

### 4.3 Trabalho de uma força variável ao longo de uma trajectória plana qualquer

Consideremos o caso de uma força  $\vec{F}$ , qualquer, a actuar numa partícula, enquanto esta se desloca ao longo de uma trajectória curvilínea plana — fig. 4.6.

Pretendemos determinar o trabalho realizado pela força  $\vec{F}$ , ao longo da trajectória, entre os pontos  $A$  e  $B$ .

Conhecemos a lei de força

$$\vec{F}(x,y),$$

isto é, o modo como a força, grandeza vectorial, varia com a posição  $P(x,y)$  da partícula. Por exemplo:  $\vec{F} = 2x \vec{u}_x - y^2 \vec{u}_y$

Vamos, então, considerar pontos sucessivos da trajectória, tão próximos (como  $P$  e  $Q$ ) que, no deslocamento entre eles, a força se pode considerar praticamente constante e a trajectória se pode considerar também rectilínea.

No deslocamento de ordem  $i$ , o trabalho realizado pela força variável,  $\vec{F}(x,y)$ , será:

$$\Delta W_i = \vec{F}(x_i, y_i) \cdot \Delta \vec{r}_i$$

Este trabalho é, evidentemente, aproximado, porque a força não se mantém rigorosamente constante e o movimento entre  $P$  e  $Q$  não é rigorosamente rectilíneo.

O trabalho total, realizado pela força entre  $A$  e  $B$ , é dado, aproximadamente, pela soma dos trabalhos parcelares aproximados, sendo a força diferente em cada deslocamento. Temos então

$$W_{ap} = \sum_{i=1}^n \vec{F}(x_i, y_i) \cdot \Delta \vec{r}_i$$

Façamos agora tender para zero os deslocamentos  $\Delta \vec{r}_i$ , o que equivale a fazer tender para infinito o número  $n$  de deslocamentos parcelares:

$$\Delta \vec{r}_i \rightarrow \vec{0} \iff n \rightarrow \infty$$

Quanto menor for cada deslocamento  $\Delta \vec{r}_i$ , menores serão os erros que resultam de considerarmos constante a força nesses deslocamentos e de considerarmos rectilíneas as pequenas porções de trajectória. Assim, vamos aproximando cada vez mais do modo como a força realmente varia ao longo da trajectória, entre  $A$  e  $B$ .

Portanto, à medida que o número  $n$  de deslocamentos parcelares aumenta, tendendo para infinito, também a soma dos trabalhos parcelares vai aumentando, tendendo para o trabalho realmente realizado pela força.

Podemos, pois, afirmar que a soma de um número infinitamente grande de trabalhos parcelares nos dá o valor exacto do trabalho realizado no trajecto de  $A$  e  $B$ .

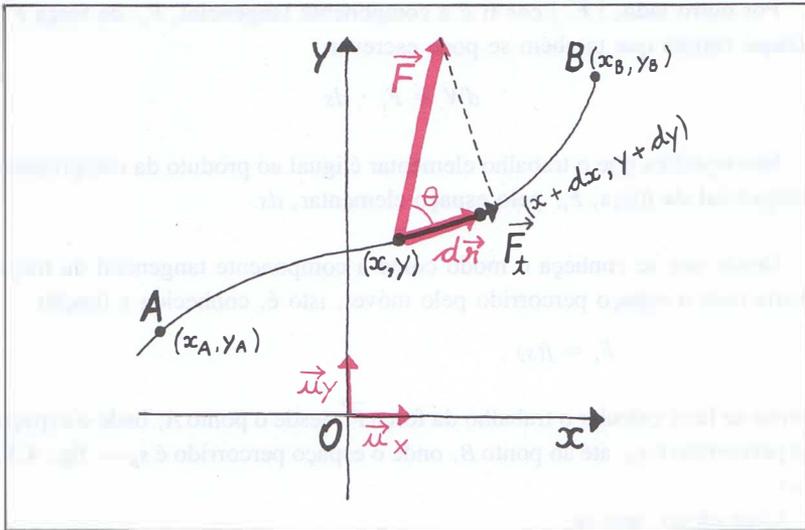


Fig. 4.7 O trabalho elementar da força variável,  $F$ , no deslocamento elementar,  $d\vec{r}$ , é

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \iff$$

$$dW = |\vec{F}| \times ds \times \cos \theta \iff$$

$$dW = F_x \times ds$$

E podemos traduzir este facto recorrendo ao conceito de limite, escrevendo:

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} W_{ap} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{F}(x_i, y_i) \cdot \Delta \vec{r}_i$$

O limite deste somatório é o operador matemático chamado **integral de linha**, entre A e B, da função força  $\vec{F}(x, y)$ . Podemos escrever, então,

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r}$$

O produto  $\vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r}$ , ou simplesmente  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ , chama-se **trabalho elementar**, porque corresponde ao **deslocamento elementar**

$$d\vec{r} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y \quad (\text{ver fig. 4.7})$$

em que se converte o deslocamento parcelar  $\Delta \vec{r}$ . O deslocamento elementar corresponde, matematicamente, à diferencial do vector posição  $\vec{r}$  (ver G.E. 1.6).

Como (fig. 4.7)

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \iff dW = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos \theta$$

e o deslocamento elementar  $d\vec{r}$  tem a direcção da tangente, o sentido do movimento e módulo igual ao espaço elementar, isto é,

$$d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt \quad \text{e} \quad |d\vec{r}| = ds,$$

podemos escrever:

$$dW = |\vec{F}| \cos \theta \times ds$$

#### ► G.E.4.2

Por outro lado,  $|\vec{F}| \cos \theta$  é a componente tangencial,  $F_t$ , da força  $\vec{F}$ .  
Daqui resulta que também se pode escrever:

$$dW = F_t \cdot ds$$

Isto significa que o trabalho elementar é igual ao produto da componente tangencial da força,  $F_t$ , pelo espaço elementar,  $ds$ .

Desde que se conheça o modo como a componente tangencial da força varia com o espaço percorrido pelo móvel, isto é, conhecida a função

$$F_t = f(s),$$

torna-se fácil calcular o trabalho da força  $\vec{F}$  desde o ponto  $A$ , onde o espaço já percorrido é  $s_A$ , até ao ponto  $B$ , onde o espaço percorrido é  $s_B$  — fig. 4.8, (a).

Com efeito, tem-se:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \iff$$

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{s_A}^{s_B} F_t \times ds$$

E este integral pode calcular-se por uma área, como já sabemos — fig. 4.8, (b). Cingir-nos-emos, neste curso, a casos em que esta área é fácil de determinar.

### Súmula

4.2

O **trabalho elementar** de uma força  $\vec{F}$ , num deslocamento elementar  $d\vec{r}$ , é a grandeza escalar

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_t \cdot ds,$$

que se obtém multiplicando a componente tangencial da força pelo espaço elementar percorrido pela partícula.

O **trabalho** de uma força  $\vec{F}$ , entre dois pontos  $A$  e  $B$  da trajectória da partícula, na qual actua, é a soma de um número infinitamente grande de trabalhos parcelares, ou seja:

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i \iff$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

ou

$$W = \int_A^B F_t \cdot ds$$

Este integral pode calcular-se, avaliando uma área no gráfico

$$(s, F_t)$$

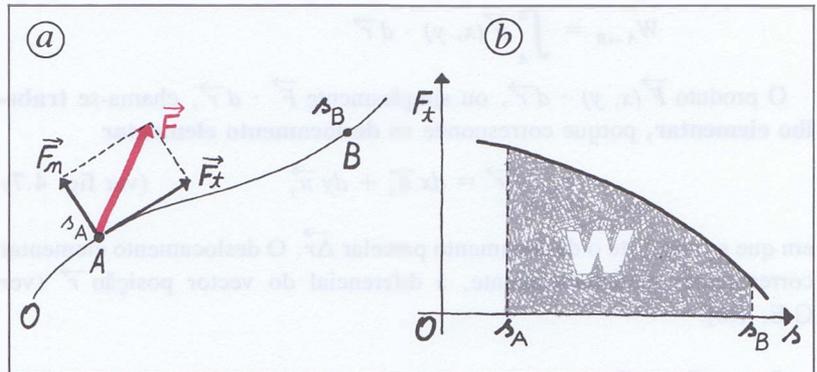


Fig. 4.8

(a) Uma partícula move-se de  $A$  a  $B$  ao longo de uma trajectória qualquer  
 $\vec{F}_t$  — é o vector componente tangencial da força que actua na partícula.

(b) O trabalho realizado pela força  $\vec{F}$  corresponde ao trabalho da sua componente tangencial (o da componente normal é nulo), e é dado pela área situada entre a curva representativa da função

$$F_t = f(s),$$

o eixo dos espaços, e as verticais tiradas pelas abcissas correspondentes aos espaços inicial e final.

## QUESTÕES PROPOSTAS

### Q 4.5

Quando uma força aplicada num corpo é permanentemente perpendicular à velocidade deste, realiza um trabalho nulo.

Fundamentar esta afirmação.

### Q 4.6

Uma partícula tem movimento circular sob a acção de uma força cuja componente tangencial,  $\vec{F}_t$ , tem módulo constante — fig. 4.9.

1. Poderá ser constante o módulo da componente centrípeta,  $\vec{F}_c$ ?
2. Calcular o trabalho da força tangencial durante uma volta.
3. Calcular o trabalho da força centrípeta durante uma volta.

### Q 4.7

A figura 4.10 mostra o modo como a componente, segundo a trajectória, da resultante das forças que actuam numa partícula varia com o espaço percorrido pela partícula.

1. Descrever uma situação concreta de movimento a que possa corresponder o gráfico da figura.
2. Determinar o trabalho que essa força resultante realiza sobre a partícula.

### Q 4.8

Na fig. 4.11 está representado o gráfico da componente tangencial da força que actua numa partícula em função do espaço por ela percorrido. As áreas obtidas são semi-circulares.

Qual é, aproximadamente, o trabalho realizado sobre a partícula durante os primeiros 60 m?

- (A)  $500 \pi$  J                      (C)  $250 \pi$  J  
 (B)  $300 \pi$  J                      (D)  $150 \pi$  J

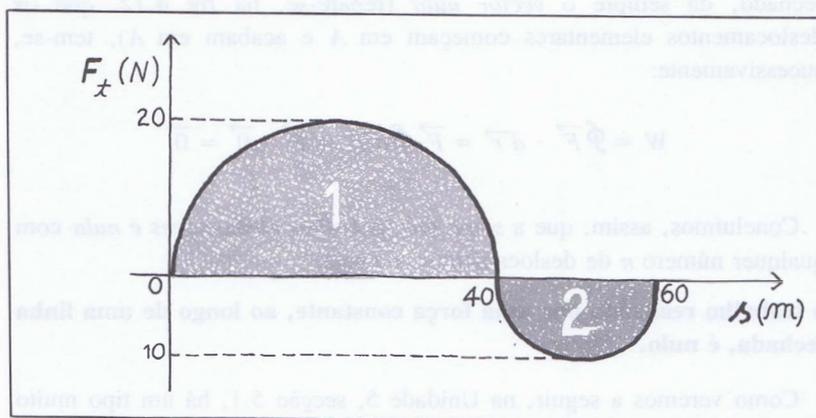


Fig.4.11

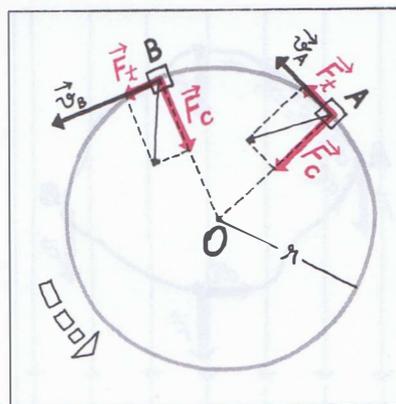


Fig. 4.9 Sendo  $|\vec{F}_t| = k$ , será constante ou variável  $|F_c|$ ?

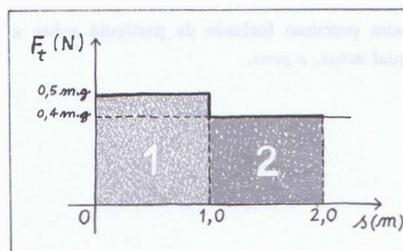


Fig. 4.10 Qual é o trabalho realizado nos 2,0 metros de percurso?

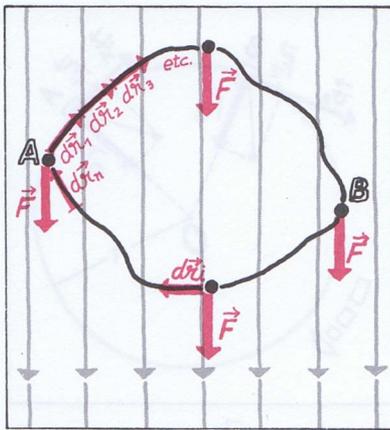


Fig. 4.12 O trabalho de uma força constante,

$$\vec{F} = \text{const.}^{\text{te}},$$

num percurso fechado da partícula sobre a qual actua, é zero.

#### 4.4 Trabalho realizado por uma força ao longo de uma trajetória fechada

Seja  $[A,B,A]$  a trajetória fechada de uma partícula. Vamos definir o trabalho realizado por uma das forças,  $\vec{F}$ , que actuam na partícula, ao longo dessa trajetória fechada — fig. 4.12.

Tal como no caso da trajetória aberta, o trabalho é dado pelo limite dum somatório de trabalhos parcelares quando o número destes tende para infinito:

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i) = \int_A^A \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Podemos, assim, dizer que o trabalho é o integral ao longo da linha fechada  $[A,B,A]$ .

Nestas condições, escreve-se:

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

O símbolo  $\oint$  representa um *integral cíclico* ou *integral ao longo de uma linha fechada*.

No caso de a força  $\vec{F}$  ser constante, como sucede na fig. 4.12, podemos pô-la em evidência na expressão do somatório ou do integral:

$$W = \vec{F} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta \vec{r}_i \quad \text{ou} \quad W = \vec{F} \oint d\vec{r}$$

E como a soma dos deslocamentos elementares,  $\oint d\vec{r}$ , no percurso fechado, dá sempre o vector nulo (repare-se, na fig. 4.12, que os deslocamentos elementares começam em A e acabam em A), tem-se, sucessivamente:

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \oint d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

Concluimos, assim, que a soma dos trabalhos elementares é nula com qualquer número  $n$  de deslocamentos, ou seja:

**o trabalho realizado por uma força constante, ao longo de uma linha fechada, é nulo.**

Como veremos a seguir, na Unidade 5, secção 5.1, há um tipo muito comum de forças cuja característica geral é precisamente esta propriedade do trabalho realizado por uma força constante: são as chamadas **forças conservativas**. As forças constantes são, pois, um caso particular destas.

#### Súmula

4.3

O trabalho de uma força ao longo de um *percurso fechado* é o integral cíclico

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

No caso de a força ser constante, este integral tem o valor zero. Isto significa que o trabalho de uma força constante, num percurso fechado, é nulo.

## 4.5 Trabalho da resultante de um sistema de forças aplicadas numa partícula

Suponhamos que numa partícula  $A$  estão aplicadas três forças constantes enquanto a partícula efectua o deslocamento  $\Delta\vec{r}$  — fig. 4.13.

Se somarmos os trabalhos realizados sobre a partícula por cada uma das forças constantes, no deslocamento comum  $\Delta\vec{r}$ , obtemos:

$$W = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r} + \vec{F}_3 \cdot \Delta\vec{r} \iff$$

$$W = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3) \cdot \Delta\vec{r}$$

Ora, a força resultante,  $\vec{F}$ , é precisamente

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 .$$

Se as forças  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}_3$  fossem variáveis, os trabalhos de cada uma delas seriam calculados por *integrais*. Mas, como, para cada deslocamento infinitesimal  $d\vec{r}$ , a soma  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$  é o valor instantâneo da resultante, a conclusão seria a mesma, isto é: *o trabalho da resultante de um sistema de forças, aplicadas numa partícula, é igual à soma dos trabalhos das suas componentes.*

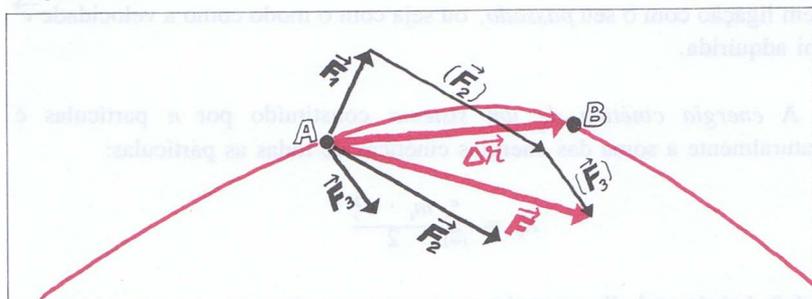


Fig. 4.13 A soma dos trabalhos das forças  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}_3$ , no deslocamento  $\Delta\vec{r}$  da partícula  $A$ , é igual ao trabalho da sua resultante  $\vec{F}$ .

### QUESTÕES PROPOSTAS

#### Q 4.9

Na figura 4.14 estão esquematizadas as forças que actuam numa esfera que se move, com atrito desprezável, no interior de um recipiente esférico.

Determinar o trabalho da resultante das forças que actuam na esfera, no trajecto de  $A$  a  $B$ .

#### Q 4.10

Dadas as forças

$$\vec{F}_1 = -2,0\vec{u}_x + 3,0\vec{u}_y \text{ (N)}$$

$$\vec{F}_2 = 1,0\vec{u}_x - 2,0\vec{u}_y \text{ (N)}$$

$$\vec{F}_3 = 3,0\vec{u}_x \text{ (N)},$$

que actuam numa partícula enquanto esta se desloca da posição  $A (-2; 1)$  m para a posição  $B (3; 2)$  m, determinar o trabalho realizado por estas forças no deslocamento  $AB$ .

### Súmula

4.4

O trabalho de um sistema de forças aplicadas numa partícula é igual ao trabalho da sua resultante.

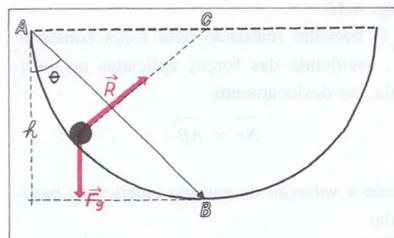


Fig. 4.14 Qual é o trabalho da resultante das forças,  $F_g$  e  $R$ , que actuam na esfera?

## 4.6 Energia cinética e lei do trabalho-energia

### 4.6.1 Energia cinética

A **energia cinética** de uma partícula é uma grandeza relativa (isto é, uma grandeza cujo valor depende do referencial), resulta de uma transferência de energia, para ela, do sistema que a põe em movimento, *mede o trabalho que a partícula é capaz de realizar sobre o exterior, devido ao seu estado de movimento*, e, em cada instante, é dada por

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2,$$

onde:

$m$  = massa da partícula

$v$  = valor da velocidade instantânea da partícula

A leitura atenta desta equação de definição revela-nos que se trata da energia do movimento da partícula, energia *actual*, instantânea, *presente*, sem ligação com o seu *passado*, ou seja com o modo como a velocidade  $\vec{v}$  foi adquirida.

A *energia cinética de um sistema* constituído por  $n$  partículas é naturalmente a soma das energias cinéticas de todas as partículas:

$$E_c = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \cdot v_i^2}{2}$$

### 4.6.2 Lei do trabalho-energia

Seja  $\vec{F}$  a *resultante* das forças constantes aplicadas numa partícula de massa  $m$ , movendo-se rectilaneamente — fig. 4.15. Escolhamos a direcção e o sentido comuns à força (resultante e constante),  $\vec{F}$ , e à aceleração correspondente,  $\vec{a}$ , para direcção e sentido positivos do eixo dos  $xx$ .

Nestas condições, o trabalho realizado pela *resultante*  $\vec{F}$ , que é igual à soma dos trabalhos realizados por cada uma das forças aplicadas, é dado simplesmente por:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r} \iff F \cdot (x_f - x_i)$$

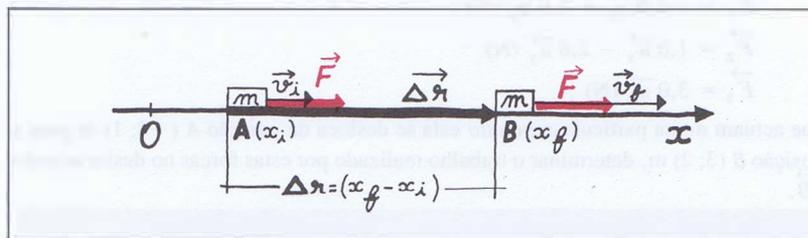
Fig. 4.15

O trabalho realizado pela força constante  $\vec{F}$ , resultante das forças aplicadas na partícula, no deslocamento

$$\vec{\Delta r} = \vec{AB},$$

mede a variação da energia cinética da partícula:

$$W = \frac{1}{2} mv_f^2 - \frac{1}{2} mv_i^2$$



De acordo com a 2.<sup>a</sup> lei do movimento, de Newton,  $\vec{F} = m \vec{a}$ , podemos escrever:

$$W = ma(x_f - x_i)$$

Como o movimento é uniformemente acelerado, temos

$$x_f - x_i = v_i t + \frac{1}{2} at^2 \quad \text{e} \quad v_f = v_i + at,$$

sendo  $t$  o tempo que a partícula levou a ir de  $A$  a  $B$ . Substituindo na expressão do trabalho, vem, sucessivamente:

$$W = ma(v_i t + \frac{1}{2} at^2) \iff$$

$$W = mat(v_i + \frac{1}{2} at)$$

Como  $at = (v_f - v_i)$ , vem:

$$W = m(v_f - v_i) [v_i + \frac{1}{2} (v_f - v_i)]$$

Pondo também em evidência o factor numérico  $\frac{1}{2}$ , obtemos, sucessivamente:

$$W = \frac{1}{2} m(v_f - v_i) (2v_i + v_f - v_i) \iff$$

$$W = \frac{1}{2} m(v_f - v_i) (v_f + v_i) \iff$$

$$W = \frac{1}{2} m(v_f^2 - v_i^2) \iff$$

$$W = \frac{1}{2} mv_f^2 - \frac{1}{2} mv_i^2$$

Se a resultante  $\vec{F}$  for uma **força variável**, este resultado *mantém-se*. Vamos confirmá-lo no caso particular da força  $\vec{F}$  variar apenas em módulo, realizando-se o deslocamento na direcção da força resultante. Neste caso, o trabalho realizado por esta será:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F \cdot dx \iff W = \int_{x_i}^{x_f} ma \cdot dx$$

O resultado desta integração (ver G.E.4.3) é:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F dx \iff W = \frac{1}{2} mv_f^2 - \frac{1}{2} mv_i^2$$

No caso de se tratar de um sistema de partículas em interacção, há *forças exteriores* e *forças interiores*. Então  $\vec{F}$  será a resultante de todas estas forças e o resultado que se obtém é *idêntico*.



► G.E.4.3

A **variação da energia cinética de uma partícula**, provocada pela intervenção de várias forças, é **medida pelo trabalho da resultante,  $\vec{F}$** , das forças durante o tempo de actuação destas:

$$W = \frac{1}{2} mv_f^2 - \frac{1}{2} mv_i^2$$

A **variação da energia cinética de um sistema de partículas** em interacção é **medida pelo trabalho da resultante das forças exteriores e das forças interiores** durante o tempo da referida variação, sendo por isso equivalente à soma do trabalho das forças exteriores com o das forças interiores:

$$W_e + W_i = \Delta E_c$$

Na secção 5.13.2 do Manual de Física para o 10.º ano, obtivemos este resultado global a partir da lei da conservação da energia mecânica. A linha que estamos a seguir é diferente, pois partimos da 2.ª lei de Newton. Os resultados obtidos por estas duas vias são, pois, coerentes.

Em síntese, podemos enunciar assim a **lei do trabalho-energia** (também chamada *lei da energia cinética*):

- **Numa partícula**, o trabalho realizado pela *resultante* de todas as forças que nela actuam é *sempre* igual à variação da sua energia cinética.
- **Num sistema mecânico**, o trabalho das *forças exteriores* ( $W_e$ ) mais o trabalho das *forças interiores* ( $W_i$ ) mede a variação da energia cinética do sistema:

$$W_e + W_i = \Delta E_c$$

Esta lei é de grande utilidade em Mecânica. Em primeiro lugar, permite calcular a velocidade de uma partícula a partir de uma velocidade conhecida e do cálculo do trabalho das forças aplicadas — a determinação da velocidade é um dos objectivos indicados na Cinemática, aqui realizado pela via da grandeza trabalho.

Em segundo lugar e inversamente, permite calcular o trabalho de certos tipos de força a partir de uma variação de velocidade da partícula. Em consequência, permite medir os diferentes tipos de energia transferidos para a partícula. Advêm daqui resultados coerentes com a lei geral da conservação da energia da partícula — uma das leis fundamentais do Universo.

### QUESTÕES PROPOSTAS

#### Q 4.11

Uma pedra está presa por um fio, de comprimento  $\ell$ , ao ponto fixo  $O$  — fig. 4.16.

Esticado o fio, foi abandonada em  $A$ , sem velocidade inicial. A partir de  $B$  inicia um movimento pendular.

Determinar, em função do comprimento do fio e da sua inclinação inicial,  $\theta$ , a velocidade com que passa no ponto mais baixo,  $C$ , da trajectória circular.

#### Q 4.12

Numa descida com a inclinação de 10%, a velocidade de um automóvel, com a massa de  $2,00 \times 10^3$  kg, passa de  $10,0 \text{ m.s}^{-1}$  a  $25,0 \text{ m.s}^{-1}$ , num percurso de 200 m.

Considera-se que não são significativas a resistência do ar e o atrito. Tomar  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ .

Nestas condições:

1. Qual é o trabalho efectuado pelo motor?
2. Qual seria o trabalho efectuado pelo motor se a velocidade tivesse passado de  $10 \text{ m.s}^{-1}$  a  $20 \text{ m.s}^{-1}$ ?
3. Comparar os resultados anteriores e interpretá-los.
4. Com o motor desligado (ponto morto), que velocidade atingiria o carro ao fim do percurso de 200 m?

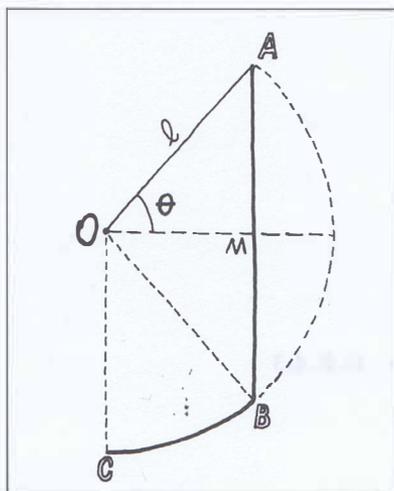


Fig. 4.16 Uma pedra cai de  $A$  a  $B$  em queda livre. A seguir, descreve o arco de circunferência  $\widehat{BC}$ .

### Q 4.13

O observador  $O_1$  está ligado ao referencial  $(O_1, x, y)$  fixo no solo. O observador  $O_2$  está ligado ao referencial  $(O_2, x', y')$  ligado a uma carruagem do comboio — fig. 4.17. Sobre o corpo de massa  $m$ , colocado no corredor da carruagem, actuam, durante um tempo  $t$ , forças de resultante  $\vec{F}$ , constante, paralela à via.

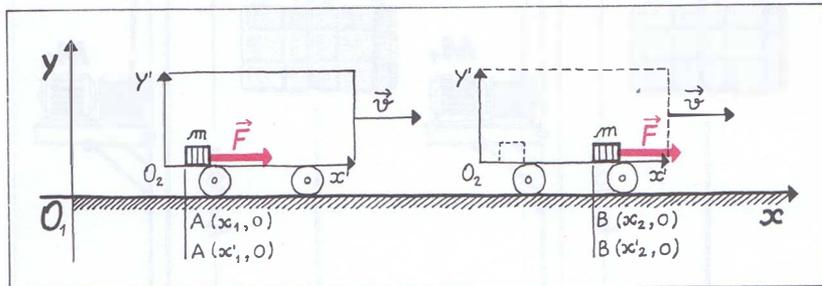


Fig. 4.17

Posição inicial do corpo de massa  $m$ : A

Posição do corpo de massa  $m$  decorrido o tempo  $t$ : B

A carruagem desloca-se com  $m.r.u.$

1. Determinar o espaço percorrido pelo corpo em cada um dos referenciais.
2. Mostrar que o trabalho da resultante  $\vec{F}$  é, em cada referencial, respectivamente:

$$W' = \frac{1}{2} ma^2 t^2$$

$$W = mavt + \frac{1}{2} ma^2 t^2$$

3. Interpretar os trabalhos diferentes realizados pela *mesma força* durante o mesmo tempo  $t$ , medidos pelos dois observadores, e bem assim as diferentes energias cinéticas adquiridas em cada referencial.

## 4.7 Potência e rendimento de uma máquina

Designa-se por *máquina* qualquer sistema destinado a realizar trabalho com utilidade (*trabalho útil*).

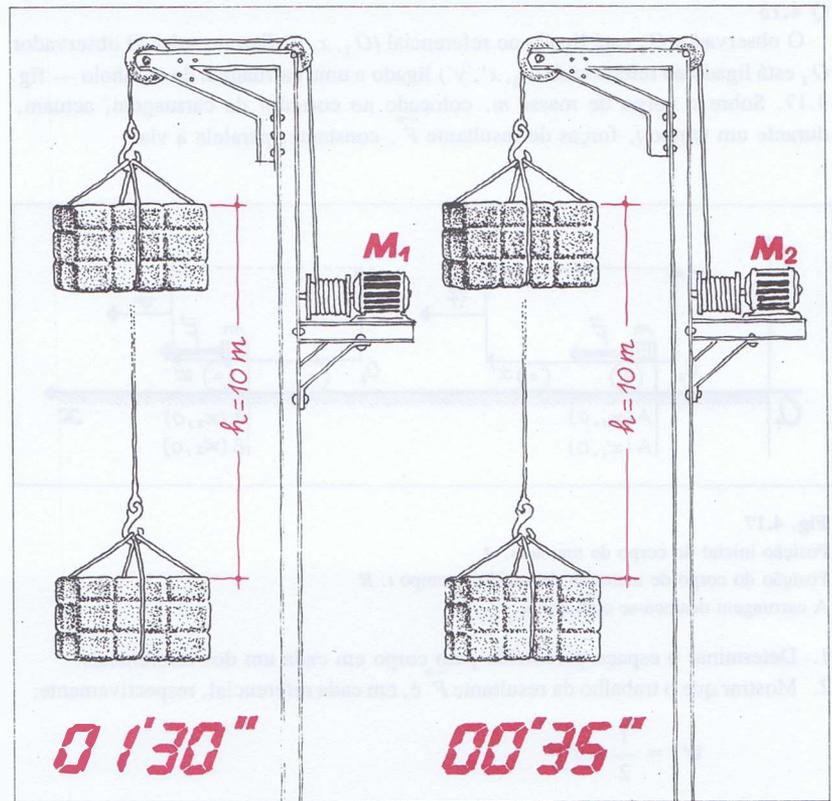
A **potência média** (útil) de qualquer máquina, quando num intervalo de tempo  $\Delta t$  transfere a energia útil  $\Delta E_u$  para o exterior, medida pelo trabalho útil  $\Delta W_u$ , realizado pela máquina, é dada pelo quociente

$$\frac{\Delta E_u}{\Delta t} = \frac{\Delta W_u}{\Delta t}$$

Este valor médio representa o *valor constante* da potência que a máquina *teria* se trabalhasse em *regime uniforme* (trabalho útil proporcional ao tempo) durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ , produzindo o mesmo trabalho  $\Delta W_u$ .

**Fig. 4.18** Cada fardo pesa 500 kgf. Subiram até uma altura de 10 m, gastando tempos diferentes.

- Qual dos motores —  $M_1$  e  $M_2$  — realizou *mais trabalho*?
- Qual dos motores desenvolveu *maior potência*?
- Feitos os cálculos, tirar a conclusão que os resultados implicam.



No caso das máquinas representadas na fig. 4.18, o *trabalho útil* realizado é o mesmo e é dado por

$$W_u = F \times \Delta r = 500 \times 9,8 \text{ N} \times 10 \text{ m} = 4,9 \times 10^4 \text{ J}$$

A *potência útil* é diferente. Para  $M_1$  a potência útil é

$$P_u = \frac{W_u}{\Delta t} = \frac{4,9 \times 10^4 \text{ J}}{90 \text{ s}} = 544 \text{ W} = 0,54 \text{ kW}$$

A *potência útil* de  $M_2$  é

$$P'_u = \frac{W_u}{\Delta t'} = \frac{4,9 \times 10^4 \text{ J}}{35 \text{ s}} = 1400 \text{ W} = 1,4 \text{ kW}$$

A **potência instantânea** (útil) da máquina será a energia útil que, em dado instante, **está** a transferir por unidade de tempo. É por isso o limite para que tende a potência média quando o intervalo de tempo  $\Delta t$  a que diz respeito tende para zero:

**G.E.4.4** ◀

$$P_u = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta E_u}{\Delta t} = \frac{dE_u}{dt} = \frac{dW_u}{dt}$$

A energia motora,  $E_m$ , que a máquina recebe, pode ser-lhe fornecida quer através de energia potencial química libertada por um combustível, sob a forma térmica, quer através de um trabalho motor,  $W_m$ , realizado por uma força exterior potente (é o que sucede, por exemplo, na roldana e outras máquinas simples).

A **eficácia** ou **rendimento** de qualquer máquina é a *fracção* da energia motora recebida ( $E_m$ ) que ela consegue transferir para o exterior sob a forma de energia útil ( $E_u$ ), medida pelo trabalho útil ( $W_u$ ) realizado:

$$\eta = \frac{E_u}{E_m} = \frac{W_u}{W_m}$$

Como há sempre trabalho resistente devido às forças não conservativas (o atrito nas engrenagens e nos contactos sólido-sólido, além da resistência do ar, que aumenta com a velocidade), há, por isso, *energia dissipada*,  $E_d$ , sob a forma não mecânica, como a energia térmica. Temos, assim:

$$E_d = E_m - E_u \quad \text{e} \quad \eta < 1$$

## QUESTÕES PROPOSTAS

### Q 4.14

1. Mostrar que a potência útil de qualquer máquina em movimento *não uniforme* é em cada instante, dada por

$$P_u = \vec{F}_u \cdot \vec{v},$$

sendo  $\vec{v}$  a velocidade no instante  $t$  e  $\vec{F}_u$  a força útil nesse instante (variável com a velocidade).

### Q 4.15

Um carro, com a massa de 1100 kg, sobe uma rampa que tem a inclinação de 5% — fig. 4.19. O carro mantém a velocidade constante de 54 km/h (valor indicado pelo velocímetro). Nestas condições, a força resistente dissipativa, resultante da resistência do ar e do atrito, na estrada, sobre as rodas dianteiras,  $\vec{F}_r$ , é igual à resultante da força gravítica e da reacção. Nestas condições:

1. Qual é a intensidade da *força potente* ou *motora*,  $\vec{F}_m$ , que faz subir o carro?
2. Qual é a potência correspondente a esta força durante a subida?
3. Sendo o rendimento médio do motor

$$\eta = 25\%$$

e desprezando as perdas de potência na transmissão, que potência motriz, fornecida pela combustão da gasolina, consome o motor?

### Q 4.16

Dispõe-se de um motor com a potência de 1/4 cv para erguer um fardo de 20,0 kgf à altura de 100 m. Sendo 1 cv = 735 W, indicar qual das seguintes afirmações está correcta, *justificando a escolha*:

- (A) Não é possível obter o efeito desejado.
- (B) Só ao fim de 30 min é possível obter este efeito.
- (C) É possível erguer o corpo à altura desejada em cerca de 2 min.
- (D) O tempo não depende da potência do motor.

Utilizar:  $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

A **potência** (útil) de uma máquina é a grandeza física que mede a *rapidez* com que ela produz trabalho ou com que transfere energia útil para o exterior.

O **rendimento** de uma máquina é a razão entre a energia utilizável transferida para o exterior e a energia recebida do exterior.

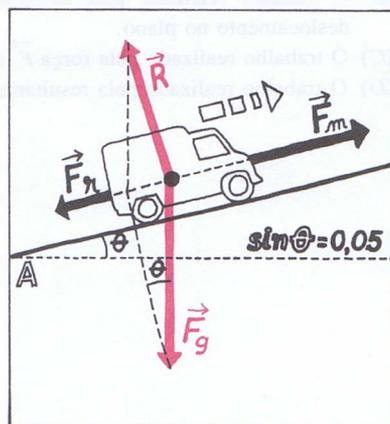


Fig. 4.19 Um carro sobe uma rampa com atrito e com resistência do ar não desprezável.

# Teste de auto-avaliação

## I

A extremidade de uma certa mola elástica foi comprimida, tendo-se deslocado de 5,0 cm. O gráfico da fig. T. 4.1 indica a variação da intensidade da força elástica da mola durante o meio ciclo que vai do encurtamento máximo (-5 cm) até à posição de equilíbrio e, depois, ao alongamento máximo (+5 cm).

Determinar:

1. O trabalho realizado pela força elástica no deslocamento entre os pontos  $x = -5$  cm e  $x = 0$ .
2. O trabalho realizado pela força elástica no deslocamento entre  $x = 0$  e  $x = +5$  cm.
3. A variação da energia cinética da mola entre  $x = -5$  cm e  $x = +5$  cm.

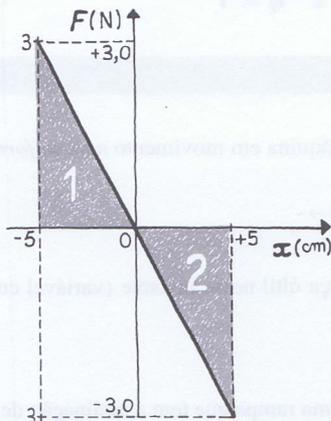


Fig. T. 4.1

## II

Um bloco de madeira de massa  $m = 2,00$  kg é arrastado no plano horizontal, deslocando-se com *m.r.u.a.* sob a acção da força  $\vec{F}$  de intensidade 10,0 N — fig. T. 4.2. A direcção da força faz um ângulo  $\theta = 30^\circ$  com o plano horizontal e o coeficiente de atrito cinético é 0,50. Tomando  $g = 10$  m  $\cdot$  s $^{-2}$ , indicar, justificando, qual das seguintes afirmações é a correcta:

- (A) O bloco está em equilíbrio.
- (B) O trabalho realizado pela componente normal da resultante das forças que actuam no bloco depende do valor do deslocamento no plano.
- (C) O trabalho realizado pela força  $\vec{F}$  num deslocamento de 2,0 m é 20 J.
- (D) O trabalho realizado pela resultante das forças num deslocamento de 2,0 m é 2,4 J.

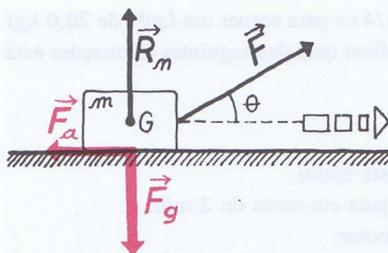


Fig. T. 4.2

### III

Uma partícula subiu um plano inclinado  $OP$ , puxada por uma força que, no referencial adoptado (fig. T. 4.3), é expressa por

$$\vec{F} = 10 \vec{u}_x + 30 \vec{u}_y \text{ (N)}$$

Por pesar 30 N, a partícula esteve também submetida à força gravítica

$$\vec{F}_g = -30 \vec{u}_y \text{ (N)}$$

Desprezando os atritos e todas as outras resistências, calcular:

1. O trabalho da força  $\vec{F}$  no deslocamento  $\vec{OP}$ .
2. A variação de energia cinética que a partícula sofreu entre  $O$  e  $P$ .

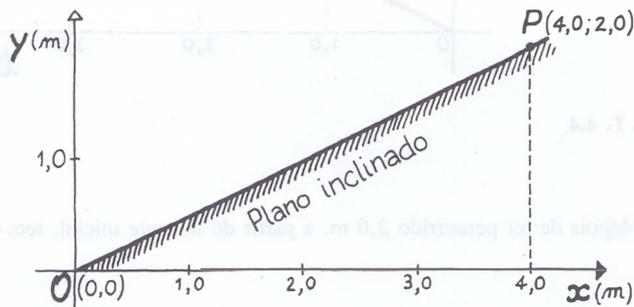


Fig. T.4.3

### IV

1. Uma partícula (em movimento rectilíneo) com a velocidade  $\vec{v}$ , a aceleração  $\vec{a}$ , a quantidade de movimento  $\vec{p}$  e a energia cinética  $E_c$  num dado instante, está a ser actuada pela força  $\vec{F}$ .

A potência que essa força está a desenvolver nesse instante, pode ser dada por

(A)  $\frac{F}{v}$

(B)  $\frac{p}{a}$

(C)  $\frac{dE_c}{dt}$

(D) nenhuma das expressões anteriores.

2. Fundamentar a escolha da opção à alínea anterior.

## V

O gráfico da figura T. 4.4 mostra a variação da quantidade de movimento de um móvel, com movimento rectilíneo, em função do tempo.

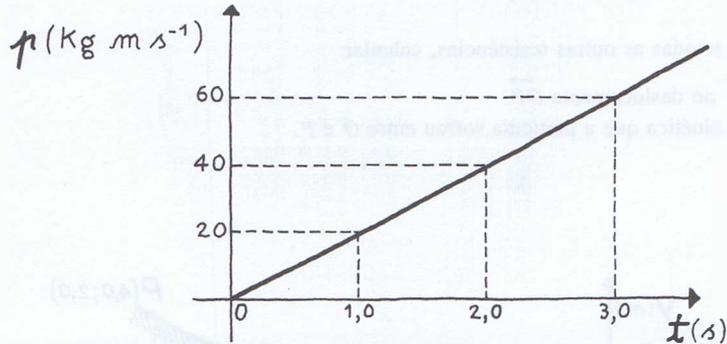


Fig. T. 4.4

A energia cinética do móvel depois de ter percorrido 2,0 m, a partir do instante inicial, tem o valor

- (A) 4,0 J
- (B) 20 J
- (C) 40 J
- (D) diferente dos anteriores.

## VI

Um automóvel de massa  $1,00 \times 10^3$  kg segue numa estrada horizontal com a velocidade de  $72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ , desenvolvendo o motor a potência de 40 cv. Encontra uma rampa com a inclinação de  $47\%$  e pavimento igual ao da estrada. Acelera para subir a rampa, mantendo constante a velocidade que trazia —  $72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Determinar:

1. O coeficiente de atrito entre o automóvel e o piso.
2. A força motora na subida.
3. A potência motora desenvolvida na subida.  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$

## VII

Uma camioneta de massa 3,00 toneladas, carregada com 6,00 toneladas de areia, segue com *m.r.u.* ao longo de uma estrada que está a ser consertada. Deixa cair areia nesta à razão de  $6,0 \text{ kg/m}$ . O coeficiente de atrito cinético médio é  $0,100$ . Utilizar:  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$

1. Em que ponto do percurso se esvaziou?
2. Estabelecer a expressão que permite calcular a força de tracção,  $\vec{F}$ , durante o movimento uniforme, em função do espaço percorrido  $s$ .
3. Desenhar o gráfico  $(s, F)$  e determinar o trabalho realizado pela força de tracção:
  - 3.1 Durante o primeiro quilómetro.
  - 3.2 No percurso de 1,50 km.

# Conservação da energia

UNIDADE

# 5

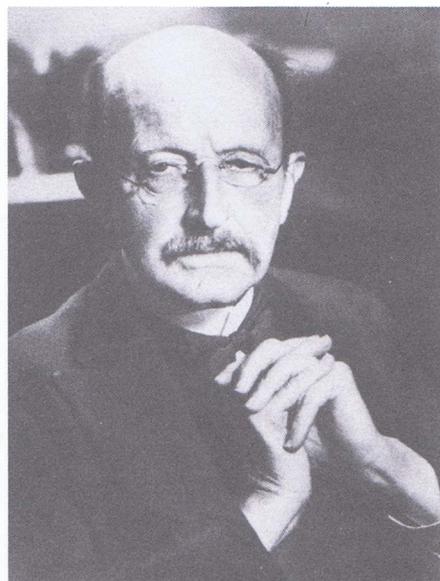


Julius Robert **MAYER** (1814-1879)

Médico, natural de Heilbronn, Alemanha. Teve a intuição da equivalência entre «calor» e «trabalho» nas transferências de energia, fazendo prevalecer, em 1842 e no meio hostil da época, o «seu» **princípio da conservação da energia**, assim enunciado:

«Quando uma quantidade de energia de qualquer natureza desaparece numa transformação, produz-se uma quantidade igual de energia de natureza diferente.»

Descobridor da mais universal das leis da Natureza, exprimiu-se no entanto com imprecisões (confundia, p. ex., força com energia) e alguns erros, que corrigiu. Teve muitos rivais e foi incompreendido no seu tempo.



Max **PLANCK** (1858-1947)

Físico alemão, expôs com rigor e clareza, em 1887, o conceito de *energia* e o *princípio da sua conservação*.

«Inaugurou» o século XX e a *Nova Física*, ao emitir, em 1900, por simples necessidade de ordem matemática (no cálculo de uma energia média em função da temperatura), a hipótese de a energia ser emitida ou absorvida por quantidades discretas e indivisíveis — os **quanta**.

Só a partir de 1911 ele próprio aceitou esta hipótese de trabalho como uma realidade física — o carácter descontínuo, granular, da energia, base da *Física Quântica*. Em 1918 recebeu o *prémio Nobel da Física* por esta descoberta do *quantum de energia*.



# Conservação da energia



Figura 5.1: Um pêndulo simples.



Figura 5.2: Um pêndulo simples em movimento.

Um pêndulo simples é um sistema mecânico que pode ser usado para estudar a conservação da energia mecânica.

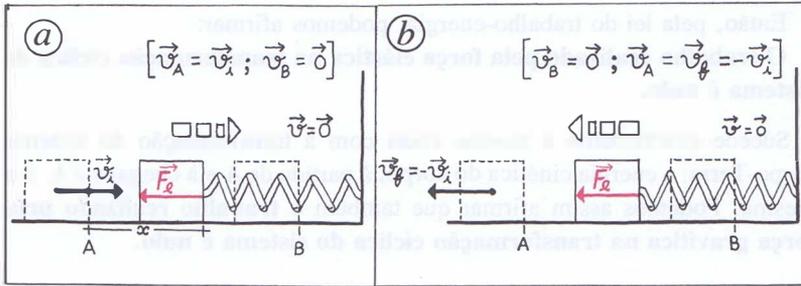
Um pêndulo simples é um sistema mecânico que pode ser usado para estudar a conservação da energia mecânica.

- 5.1 Forças conservativas e não conservativas
- 5.2 Energia potencial. Energias potenciais gravítica e elástica
  - 5.2.1 Energia potencial
  - 5.2.2 Energia potencial gravítica
  - 5.2.3 Energia potencial elástica
- 5.3 Conservação da energia mecânica
  - 5.3.1 Lei da conservação da energia mecânica
  - 5.3.2 Conservação da energia mecânica nos pêndulos gravítico e elástico
- 5.4 Lei geral da conservação da energia
  - 5.4.1 Balanço da energia transferida para um sistema não isolado
  - 5.4.2 Conservação da energia total num sistema isolado

# Conservação da energia

## 5.1 Forças conservativas e não conservativas

No estudo das transformações de energia é muito importante, para as compreender, distinguir dois tipos básicos de forças: **forças conservativas** e **forças não conservativas**.

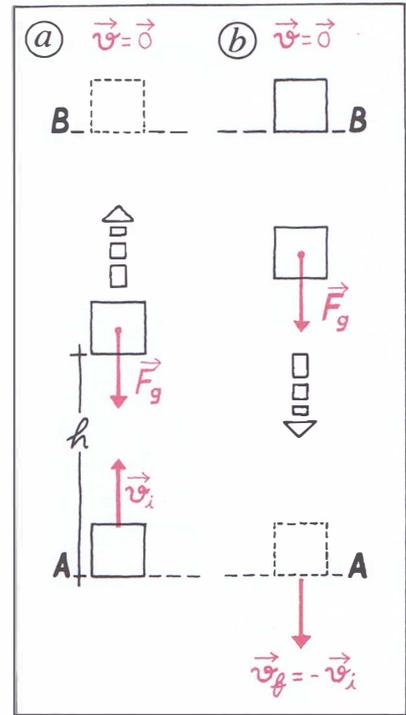


**Fig. 5.1** Na posição A, a mola começa a ser comprimida pelo bloco, que tem a velocidade inicial  $\vec{v}_i = \vec{v}_A$ .

- (a) A força elástica,  $F_e$ , faz parar o bloco na posição B.
- (b) A seguir, fá-lo regressar à posição inicial A, com velocidade simétrica da inicial:  $\vec{v}_f = -\vec{v}_i$ .

A força elástica é *resistente* no percurso AB, e é *potente* no percurso BA.

Consideremos então duas situações: na primeira, um móvel descreve o percurso [A,B] — figs. 5.1, (a), e 5.2, (a); na segunda, o móvel regressa à posição inicial, fazendo o percurso [B,A] — figs. 5.1, (b), e 5.2, (b). Admitimos que nestes movimentos são desprezáveis os atritos e a resistência do ar. Nestas condições, apenas actuam no móvel a força elástica da mola no primeiro caso (fig. 5.1), e a força gravítica no segundo caso (fig. 5.2).



**Fig. 5.2** Ascensão e queda no vácuo.

- Em (a) o bloco é lançado verticalmente e *sobe* da posição A para a posição B, onde pára.
- Em (b) o bloco *desce*, partindo da posição de repouso (B), e passa pela posição inicial A com a energia cinética que tinha à partida.
- A força gravítica é *resistente* no percurso AB, e é *potente* no percurso BA.

As forças elástica,  $\vec{F}_e$ , e gravítica,  $\vec{F}_g$ , traduzem as interacções que ocorrem, respectivamente, nos sistemas corpo-mola e corpo-Terra. Destas interacções resulta que os *sistemas estão a mudar de configuração* — esta define-se por um parâmetro: a abcissa  $x$  ou deslocamento da mola, e a altura  $h$  do móvel. Como os dois sistemas acabam por **retomar a configuração inicial** (valores iguais dos parâmetros  $x$  ou  $h$ ), diz-se que neles ocorreram **transformações fechadas** ou **cíclicas**.

Analisemos as duas fases destas transformações. Seja a transformação do sistema corpo-mola. Na posição inicial  $A$ , a energia cinética do corpo é

$$\frac{1}{2} m v_i^2;$$

esta energia cinética anula-se na posição  $B$  — final da 1.<sup>a</sup> fase. A partir desta posição, inicia-se a 2.<sup>a</sup> fase, regressando o corpo à posição inicial, onde a energia cinética volta a ser

$$\frac{1}{2} m v_i^2.$$

A variação de energia cinética, nesta transformação fechada, é, pois, nula:  $\Delta E_c = 0$ .

Então, pela lei do trabalho-energia, podemos afirmar:

**O trabalho realizado pela força elástica na transformação cíclica do sistema é nulo.**

Sucedem exactamente a mesma coisa com a transformação do sistema corpo-Terra: a energia cinética do corpo, à partida de  $A$  e à chegada a  $A$ , é a mesma. Podemos assim afirmar que também **o trabalho realizado pela força gravítica na transformação cíclica do sistema é nulo.**

Repare-se, ainda, que, nas duas transformações apresentadas, o trabalho realizado quer pela força elástica quer pela força gravítica é:

**resistente** ( $W < 0$ ), na 1.<sup>a</sup> fase da transformação ( $A \rightarrow B$ );

**potente** ( $W > 0$ ), na 2.<sup>a</sup> fase da transformação ( $B \rightarrow A$ ).

Verifica-se assim que, deixando a força gravítica,  $\vec{F}_g$ , e a força elástica,  $\vec{F}_e$ , de actuar sobre o corpo, num dado instante, *regressando* o sistema, neste mesmo instante (posição  $A$ ), à *configuração inicial*, o corpo (de massa  $m$ ) *readquiriu* também a energia cinética inicial. Ora, isto significa:

- 1 — Que o corpo conservou a capacidade de realizar trabalho, já que a sua energia cinética não se alterou e esta é a capacidade de o corpo realizar trabalho devido ao seu movimento.
- 2 — Que o trabalho da força actuante é resistente numa parte do percurso ( $W < 0$ ) e potente na outra parte do percurso ( $W > 0$ ).
- 3 — Que o trabalho da força actuante, num percurso fechado, é nulo.

Todas as forças que têm este comportamento chamam-se **forças conservativas**, atendendo ao significado referido em 1.

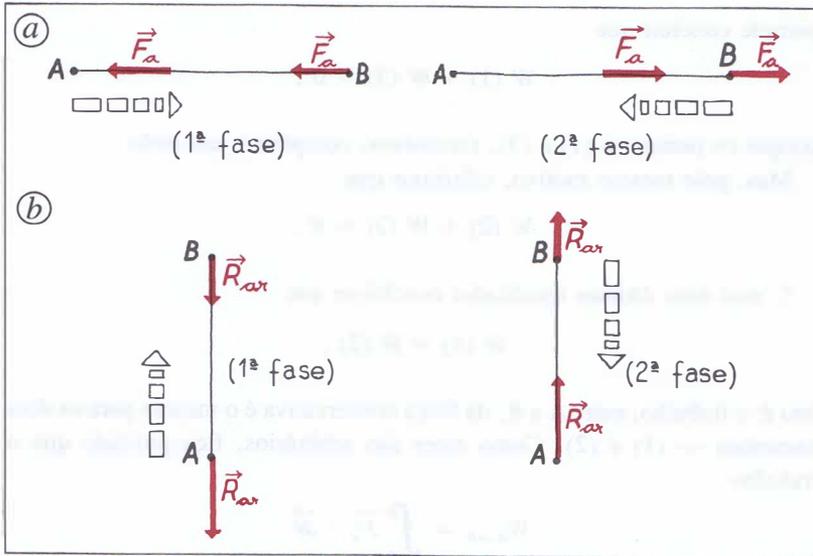
Esta é uma *definição operacional*, já apresentada no 10.º ano (ver secção 5.11.2 do Manual de Física para o 10.º ano).

Consideremos agora que *há atrito* no deslocamento do bloco e que *há resistência do ar* na ascensão e queda do bloco. Os trabalhos destas forças,  $\vec{F}_a$  e  $\vec{R}_{ar}$ , são *sempre resistentes*, isto é, são negativos tanto na 1.ª fase como na 2.ª fase do percurso fechado — fig. 5.3. Ora, isto quer dizer:

- 1 — Que o corpo não conservou a capacidade de realizar trabalho, uma vez que houve variação da sua energia cinética (diminuição).
- 2 — Que, pela lei do trabalho-energia, o trabalho destas forças, num percurso fechado, não é nulo.

Todas as forças que têm este comportamento dizem-se **forças não conservativas**, em face do significado referido em 1.

Quando o trabalho das forças não conservativas é sempre resistente, há uma perda irrecuperável de energia mecânica. A esta perda, que é irreversível, chama-se dissipação. Neste caso, as forças não conservativas são, também, **forças dissipativas**. O *trabalho* realizado por elas *mede a energia mecânica que se dissipa*, geralmente para a *forma térmica* e, mais raramente, para outras formas (para a forma eléctrica, por exemplo, na triboelectrização).



**Fig. 5.3** A força de atrito,  $\vec{F}_a$ , e a resistência do ar,  $\vec{R}_{ar}$ , *contrariam* sempre o deslocamento e acarretam a perda irrecuperável de energia cinética.

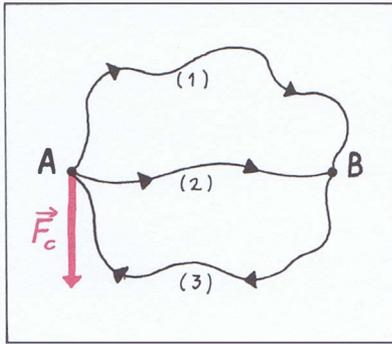


Fig. 5.4 Se o trabalho de uma força conservativa,  $F_c$ , ao longo de um percurso fechado, é nulo, então temos:

$$W(1) + W(3) = 0,$$

$$W(2) + W(3) = 0$$

Donde:

$$W(1) = W(2)$$

### Súmula

5.1

Num **percurso fechado**, o trabalho realizado sobre uma partícula pelas *forças conservativas* é nulo e o trabalho realizado pelas *forças não conservativas* é não nulo:

$$W_c = \oint \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = 0$$

$$W_{nc} = \oint \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r} \neq 0$$

O símbolo  $\oint$  representa o integral ao longo de uma linha fechada e chama-se *integral cíclico*.

Consequentemente, só as primeiras fazem com que o sistema conserve a sua capacidade de realizar trabalho.

Num **percurso aberto**, o trabalho realizado sobre uma partícula pelas *forças conservativas* é uma grandeza posicional, isto é, *não depende* do caminho seguido desde a posição inicial à final mas, apenas, destas posições extremas, enquanto que o *trabalho* realizado pelas *forças não conservativas* depende da trajectória seguida entre as posições inicial e final.

Há, no entanto, forças não conservativas, como as forças magnéticas (ver a Unidade Campos do 2.º volume deste Manual — Ondas e Campos), que não são dissipativas. Embora não obedeçam às condições das forças conservativas, o seu trabalho não é sempre resistente: por isso não dissipam energia mecânica, podendo até aumentá-la, como sucede nos aceleradores de partículas.

Vamos, finalmente, dar a *definição conceptual*, matemática, de forças conservativas. Para isso, consideramos a chamada **circulação da força**, que é o trabalho realizado por uma força ao longo de um ciclo ou percurso fechado.

Um modo sucinto de distinguirmos então as forças conservativas das forças não conservativas é o seguinte:

— **Forças conservativas** — são forças cuja circulação é nula:

$$W_{ciclo} = \oint \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = 0$$

— **Forças não conservativas** — são forças cuja circulação não é nula:

$$W_{ciclo} = \oint \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r} \neq 0$$

Também podemos definir as forças conservativas e não conservativas num **percurso aberto**. Assim, consideremos três percursos quaisquer (1), (2) e (3), entre dois pontos A e B — fig. 5.4. Os percursos (1) e (2) têm o sentido de A para B. O percurso (3) tem o sentido de B para A.

Sendo a força  $F_c$  conservativa, a definição acabada de dar,

$$W_{ciclo} = \oint \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = 0,$$

permite concluir que

$$W(1) + W(3) = 0,$$

porque os percursos (1) e (3), sucessivos, completam um ciclo.

Mas, pelo mesmo motivo, inferimos que

$$W(2) + W(3) = 0,$$

Das duas últimas igualdades conclui-se que

$$W(1) = W(2),$$

isto é: o trabalho, entre A e B, da força conservativa é o mesmo para os dois caminhos — (1) e (2). Como estes são arbitrários, fica provado que o trabalho

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{r}$$

não depende do caminho entre A e B, mas, apenas, das posições dos pontos A e B.

Podemos então definir do modo seguinte as forças conservativas: **o trabalho realizado sobre uma partícula pelas forças conservativas é independente da forma da trajetória seguida pela partícula, mas depende das posições inicial, A, e final, B, desta.**

Para uma *força não conservativa*, diremos que o trabalho realizado sobre uma partícula depende da trajetória seguida por esta e depende das suas posições inicial e final.

As duas definições que demos de forças conservativas e não conservativas são *equivalentes*: uma é consequência da outra. Em cada situação, optar-se-á pela que for mais conveniente.

## QUESTÕES PROPOSTAS

### Q 5.1

1. Em que condições há conservação da energia cinética de uma partícula no final de um percurso fechado?
2. Em que condições o dispêndio de energia para levar uma partícula de um lugar a outro é independente do percurso seguido?
3. Uma força constante será sempre conservativa?

## 5.2 Energia potencial.

### Energias potenciais gravítica e elástica

#### 5.2.1 Energia potencial

Nas transformações cíclicas que acabamos de estudar nos sistemas mola-corpo e grave-Terra, a energia cinética diminuiu na 1.<sup>a</sup> fase da transformação e aumentou na 2.<sup>a</sup> fase até retomar o valor inicial.

Como interpretar estas variações de energia cinética à luz da conservação da energia?

Em que se transformou a energia cinética na 1.<sup>a</sup> fase? De que resultou a energia cinética adquirida na 2.<sup>a</sup> fase? Tem de haver, naturalmente, outra forma de energia em jogo. Esta nova forma de energia foi-se *armazenando* no sistema durante a 1.<sup>a</sup> fase e foi, a seguir, sendo transformada em energia cinética na 2.<sup>a</sup> fase da interacção. Esta nova forma de energia mecânica, *oculta mas real*, chama-se **energia potencial do sistema** —  $E_p$ . Podemos então descrever o que se passou na 1.<sup>a</sup> fase da interacção, *contabilizando* as variações de energia do modo seguinte:

$$\begin{cases} |\Delta E_c| = |\Delta E_p| \\ \Delta E_c < 0 \\ \Delta E_p > 0 \end{cases} \implies \Delta E_c = -\Delta E_p$$

A **energia potencial de um sistema** ou *energia de configuração de um sistema* é uma energia que resulta da interacção das suas partículas, e é função das suas posições relativas.

É, além disso, uma *propriedade do sistema*, cujo valor varia sempre que o sistema muda de configuração.

A energia potencial para a configuração  $C$  é definida matematicamente pela expressão

$$E_p(C) = E_p(R) - W_{R \rightarrow C}(\vec{F}_c),$$

onde  $R$  representa a configuração tomada para referência e  $\vec{F}_c$  a resultante das *forças interiores conservativas*.

O *decréscimo de energia cinética* corresponde, precisamente, ao *aumento de energia potencial*.

Durante a 2.<sup>a</sup> fase da interacção verifica-se exactamente o contrário: a energia cinética do sistema foi totalmente recuperada à custa da correspondente diminuição de energia potencial. A *contabilização* das variações de energia, agora inversas, é a seguinte:

$$\begin{cases} |\Delta E_c| = |\Delta E_p| \\ \Delta E_c > 0 \\ \Delta E_p < 0 \end{cases} \implies \Delta E_c = -\Delta E_p$$

Desta análise sucinta resultam dois corolários imediatos:

- A **energia potencial** de um sistema representa uma forma de energia mecânica armazenada no sistema, *podendo* (donde o nome de potencial) converter-se integralmente em energia cinética.
- A **energia potencial só pode estar associada às forças conservativas**, visto que, intervindo forças não conservativas e, cumulativamente, dissipativas, não haverá recuperação total da energia cinética.

Por outro lado, segundo a lei do trabalho-energia, a variação de energia cinética nos dois sistemas *corpo-mola* e *corpo-Terra*, e que corresponde praticamente à variação da energia cinética do corpo, é medida pelo trabalho realizado pelas forças interiores conservativas dos sistemas — interiores porque traduzem a acção de uma parte do sistema (a mola ou a Terra) sobre a outra parte do sistema (o corpo). Com efeito, as variações de energia cinética do corpo são devidas ao trabalho da força elástica da mola e da força gravítica, respectivamente. E as reacções aplicadas na mola (cuja massa consideramos não significativa) e na Terra (cujo deslocamento é nulo) realizam trabalho nulo nestas condições.

Portanto, para ser válida a relação

$$\Delta E_p = -\Delta E_c$$

e, simultaneamente, a lei do trabalho-energia terá de ser:

$$\Delta E_p = -W_c \text{ (trab. das f. interiores, conservativas)}$$

Esta expressão é geral, porque é satisfeita por qualquer força conservativa em qualquer situação em que produza trabalho. Podemos, pois, escrever, para duas configurações  $C$  e  $R$ ,

$$E_p(C) - E_p(R) = -W_{R \rightarrow C}(\vec{F}_c)$$

Por meio desta expressão podemos, pois, *determinar a variação de energia potencial*.

Mas, como obter a energia potencial na configuração  $C$ , por exemplo, quando o grave — fig. 5.2 — está a uma dada altura, ou quando o móvel — fig. 5.1 — está numa dada posição?

O único processo consiste em escolher uma dada configuração de referência,  $R$ , à qual atribuímos um dado valor, constante e arbitrário, da energia potencial:

$$E_p(R) = k.$$

De acordo com a expressão anterior, tem-se então:

$$E_p(C) = E_p(R) - W_{R \rightarrow C}(\vec{F}_c)$$

Esta última expressão mostra que a **energia potencial**,  $E_p(C)$ , que procuramos obter, **só pode ser medida a menos de uma constante arbitrária**: precisamente o valor  $k$  atribuído à energia potencial de referência,  $E_p(R)$ . (Ver G.E. 5.2).

► G.E. 5.2

## QUESTÕES PROPOSTAS

### Q 5.2

Será legítimo falar em energia potencial de uma partícula? E em energia potencial de um corpo isolado?

### 5.2.2 Energia potencial gravítica

Vamos considerar apenas baixas altitudes para que a força conservativa, neste caso a força gravítica, seja constante. Escolhemos para configuração de referência do sistema *corpo-Terra* a que corresponde à altitude nula,  $h = 0$  — fig. 5.5.

De acordo com a expressão geral que define a energia potencial, podemos escrever:

$$E_p(C) = E_p(R) - W_{R \rightarrow C}(\vec{F}_g)$$

Costuma-se considerar, por simplicidade,  $E_p(R) = 0$  (altitude nula).

Como o trabalho de  $R$  a  $C$  da força gravítica é resistente ( $-mgh$ ), obtém-se, finalmente:

$$E_p(C) = 0 - (-mgh) \iff E_p = mgh$$

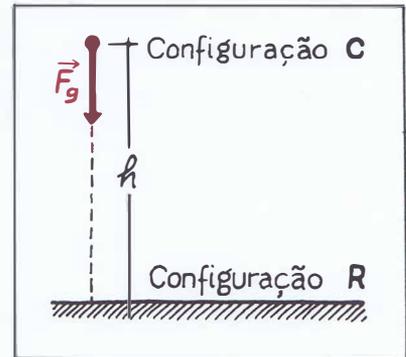


Fig. 5.5 A energia potencial gravítica à altura  $h$  (configuração  $C$  do sistema *corpo-Terra*) é:

$$E_p = mgh$$

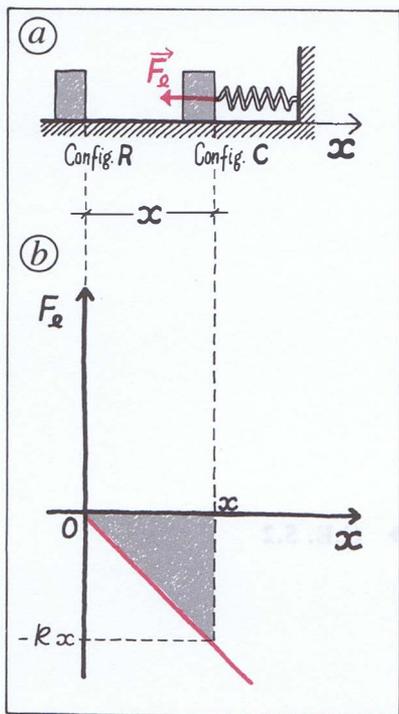


Fig. 5.6 A energia potencial elástica para a deformação  $x$  da mola (configuração  $C$  do sistema corpo-mola) é:

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

### 5.2.3 Energia potencial elástica

Escolhemos para configuração de referência do sistema corpo-mola a que corresponde à deformação nula,  $x = 0$  — fig. 5.6, (a).

De acordo com a expressão geral que define a energia potencial, vem:

$$E_p (C) = E_p (R) - W_{R \rightarrow C} (\vec{F}_e)$$

Considerando, por simplicidade,  $E_p (R) = 0$  (deformação nula), tem-se:

$$E_p (C) = - \int_0^x - kx \cdot dx$$

Este integral é, como já sabemos, dado pela área assinalada na fig. 5.6, (b), ou seja

$$- \frac{1}{2} kx^2$$

A energia potencial elástica é, pois,

$$E_p (C) = - ( - \frac{1}{2} kx^2 ) \iff E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

## 5.3 Conservação da energia mecânica

### 5.3.1 Lei da conservação da energia mecânica

Consideremos um **sistema isolado**, onde, portanto, só actuam forças interiores. Vamos supor ainda que as **forças interiores** que actuam ou não produzem trabalho ou, se o produzem, são **conservativas**. É o caso do sistema corpo-plano-Terra, na situação apresentada na fig. 5.7, se forem desprezáveis as forças de atrito e a resistência do ar.

Numa transformação qualquer do sistema (por exemplo, a passagem do corpo de  $A$  a  $B$ ), vimos que o trabalho das forças interiores conservativas é simétrico da variação de energia potencial:

$$W_c = - \Delta E_p$$

Mas, por outro lado, sendo elas as únicas forças que realizam trabalho, este é igual à variação da energia cinética, de acordo com a lei do trabalho-energia:

$$W_c = + \Delta E_c$$

Identificando, concluímos que

$$- \Delta E_p = + \Delta E_c,$$

ou seja:

a energia potencial e a energia cinética variam simetricamente, isto é, à diminuição de uma corresponde o aumento, de igual valor absoluto, da outra.

Resulta daqui que a *variação da energia mecânica total* (energia cinética mais energia potencial) é *nula*. Isto equivale a afirmar que a *energia mecânica se mantém constante*:

$$\Delta(E_c + E_p) = 0 \iff E_c + E_p = \text{const.}^{\text{te}} \iff$$

$$E_m = \text{cons.}^{\text{te}}$$

Na transformação cíclica de um sistema isolado, onde apenas realizam trabalho forças interiores conservativas, as transformações de energia mecânica que ocorrem processam-se em duas fases:

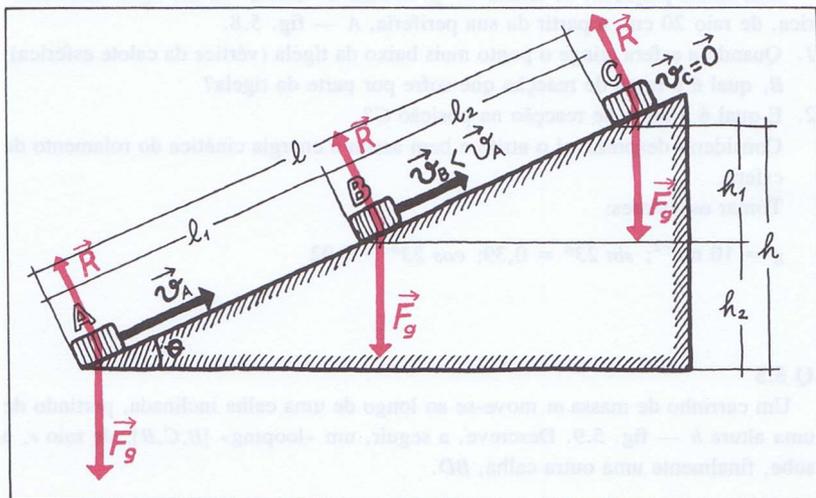


Fig. 5.7

Durante a subida do plano:

$$\begin{aligned} W_c &= -mgh \\ &= -\Delta E_p = +\Delta E_c \end{aligned}$$

Durante a descida do plano:

$$\begin{aligned} W_c &= +mgh \\ &= -\Delta E_p = +\Delta E_c \\ W_c &= \text{trabalho da força} \\ &\quad \text{gravítica conservativa} \end{aligned}$$

— Enquanto as forças conservativas realizam trabalho resistente, a energia cinética transforma-se *integralmente* em energia potencial:

$$E_c \rightarrow E_p$$

É o que se passa na subida de A a C no plano inclinado — fig. 5.7

— Enquanto as forças conservativas realizam trabalho potente, a energia potencial transforma-se *integralmente* em energia cinética:

$$E_p \rightarrow E_c$$

É o que se passa na descida de C a A, no plano inclinado — fig. 5.7.

No final do percurso fechado tem-se:  $W_c = 0$ . A energia mecânica não variou. Estes resultados constituem a chamada **lei da conservação da energia mecânica**.

### Súmula

5.3

#### Lei da conservação da energia mecânica:

Num sistema *isolado*, onde só realizam trabalho forças interiores conservativas, a energia mecânica mantém-se constante em qualquer transformação do sistema.

## QUESTÕES PROPOSTAS

### Q 5.3

Verificar a conservação da energia mecânica na subida de um grave, sem atrito, ao longo de um plano inclinado, calculando, em função da altura, as quantidades

$$E_c, E_p, (E_c + E_p)$$

em três posições — fig. 5.7:

- A — de partida, com a velocidade  $\vec{v}_A$ ;
- B — intermédia;
- C — de chegada.

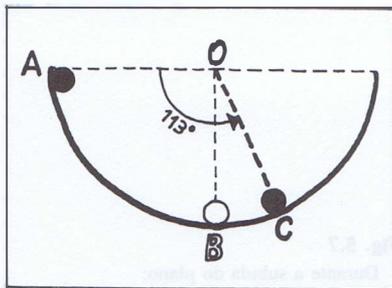


Fig. 5.8

### Q 5.4

Uma esfera pequena, de massa 10 g, desliza no interior de uma tigela semi-esférica, de raio 20 cm, a partir da sua periferia, A — fig. 5.8.

1. Quando a esfera atinge o ponto mais baixo da tigela (vértice da calote esférica), B, qual é a força de reacção que sofre por parte da tigela?
  2. E qual é a força de reacção na posição C?
- Considerar desprezável o atrito e bem assim a energia cinética do rolamento da esfera.

Tomar os valores:

$$g = 10 \text{ ms}^{-2}; \sin 23^\circ = 0,39; \cos 23^\circ = 0,92$$

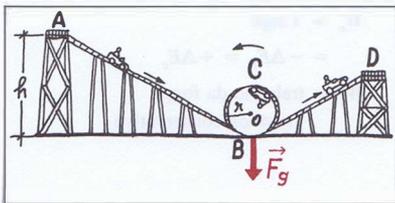


Fig. 5.9

### Q 5.5

Um carrinho de massa  $m$  move-se ao longo de uma calha inclinada, partindo de uma altura  $h$  — fig. 5.9. Descreve, a seguir, um «looping» [B,C,B], de raio  $r$ , e sobe, finalmente, uma outra calha, BD.

1. Qual é a intensidade da força exercida pela calha no ponto C?
2. Qual é a intensidade da força exercida pela calha no ponto M — ponto médio da subida BC?
3. Qual é a altura mínima,  $h$ , do ponto A, para o carrinho descrever o looping?

### Q 5.6

Uma esfera de massa 2,0 kg, suspensa verticalmente de um eixo horizontal, por uma corda de comprimento 2,0 m, está em equilíbrio e é actuada horizontalmente por uma régua. Esta, por meio de uma pancada brusca, comunica-lhe instantaneamente a energia cinética de 70 J.

Determinar:

1. A diferença das tensões da corda antes e imediatamente a seguir à pancada.
2. A altura máxima atingida pela esfera.

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

**Q. 5.7**

Um rapaz de massa  $m$  está sentado no cume de um bloco de gelo com a forma semi-esférica — fig. 5.10. Começa a deslizar, partindo do repouso. Considerando que no gelo o atrito se pode desprezar, em que ponto  $P$  o rapaz perderá o contacto com o bloco?

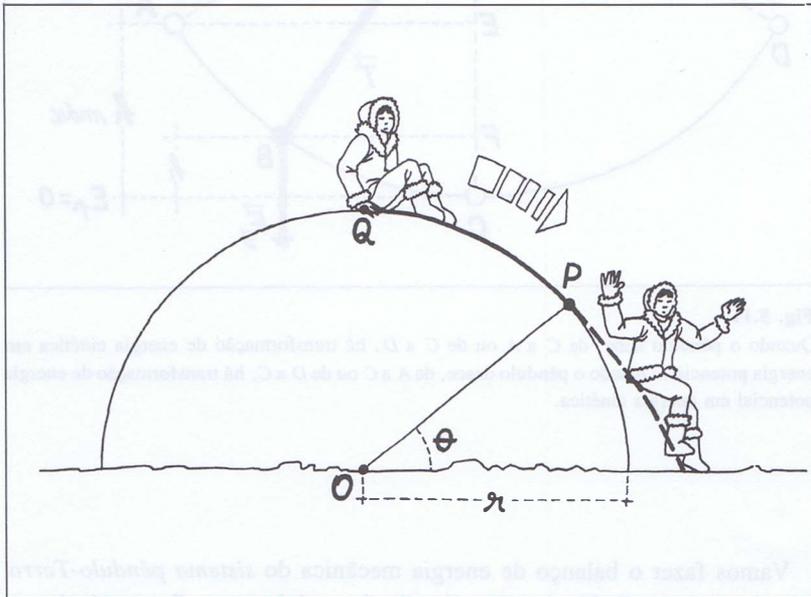


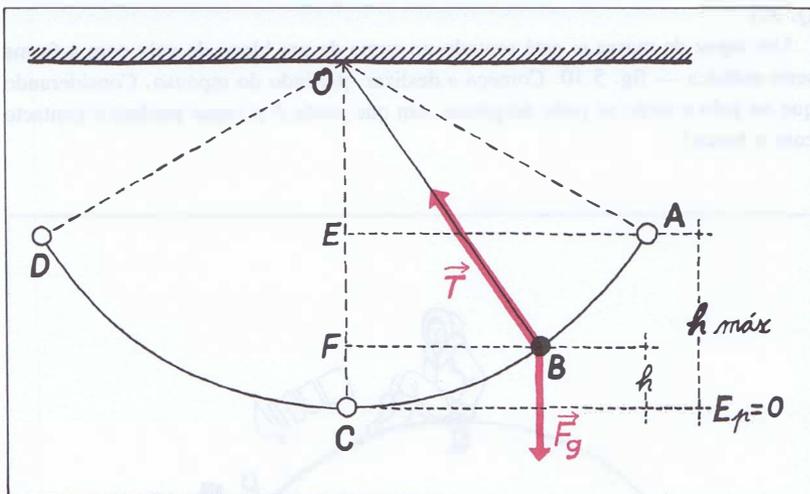
Fig. 5.10 Em que ponto  $P$  o rapaz perde o contacto?

### 5.3.2 Conservação da energia mecânica nos pêndulos gravítico e elástico

Estamos a estudar **sistemas conservativos**, isto é, sistemas isolados em que as forças de interacção são forças conservativas. Vamos agora referir-nos, em particular, a dois desses sistemas que assumem uma importância especial em Física: o *pêndulo gravítico simples* e o *pêndulo elástico*. Vamos supor que os respectivos movimentos ocorrem em condições de se poderem desprezar as forças dissipativas (forças de atrito e resistência do ar).

#### A — Pêndulo gravítico simples

Trata-se, como já sabemos, de uma partícula de massa  $m$ , suspensa de um fio de comprimento  $\ell$ , e que oscila em torno de uma posição de equilíbrio,  $OC$  — fig. 5.11.



**Fig. 5.11**

Quando o pêndulo sobe, de C a A ou de C a D, há transformação de energia cinética em energia potencial. Quando o pêndulo desce, de A a C ou de D a C, há transformação de energia potencial em energia cinética.

Vamos fazer o balanço de energia mecânica do sistema *pêndulo-Terra* em três posições C, B e A, tomando a horizontal do ponto C para nível zero da energia potencial.

Tem-se, então, esquematizando:

**Na posição A:**

$$\begin{cases} E_p = mgh_{\text{máx.}} \\ E_c = 0 \end{cases} \Rightarrow E_m = mgh_{\text{máx.}}$$

**Na posição B:**

$$\begin{cases} E_p = mgh \\ E_c = \frac{1}{2} mv_B^2 \end{cases} \Rightarrow E_m = mgh + \frac{1}{2} mv_B^2$$

**Na posição C:**

$$\begin{cases} E_p = 0 \\ E_c = \frac{1}{2} mv_C^2 \end{cases} \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} mv_C^2$$

Para mostrar que estas três expressões da energia mecânica são equivalentes, isto é, correspondem ao mesmo valor da energia mecânica, vamos servir-nos da *lei do trabalho-energia* e do *conceito de trabalho*.

Ora, o *trabalho da tensão* do fio,  $\vec{T}$ , é **nulo**, porque esta força é perpendicular à trajetória:

$$W(\vec{T}) = 0$$

Por outro lado, o trabalho da força gravítica, por esta força ser constante, é igual ao produto do módulo,  $mg$ , da força, pela projecção do deslocamento sobre a força. Assim, entre *A* e *B* temos:

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_g) = mg \times \overline{EF} = mg(h_{\text{máx}} - h)$$

Entre *A* e *C* o trabalho é:

$$W_{A \rightarrow C}(\vec{F}_g) = mg \times \overline{EC} = mgh_{\text{máx}}$$

Aplicando, então, a *lei do trabalho energia* entre *A* e *B*, vem:

$$\frac{1}{2} mv_B^2 - 0 = mg(h_{\text{máx}} - h) \iff \frac{1}{2} mv_B^2 = mgh_{\text{máx}} - mgh$$

E entre *A* e *C*, obtém-se:

$$\frac{1}{2} mv_C^2 - 0 = mgh_{\text{máx}} \iff \frac{1}{2} mv_C^2 = mgh_{\text{máx}}$$

Voltando às expressões da energia mecânica, e substituindo estas expressões da energia cinética, tem-se, finalmente:

Em *A*:

$$E_m = mgh_{\text{máx}}$$

Em *B*:

$$E_m = mgh + \frac{1}{2} mv_B^2 = mgh + (mgh_{\text{máx}} - mgh) \iff E_m = mgh_{\text{máx}}$$

Em *C*:

$$E_m = \frac{1}{2} mv_C^2 \iff E_m = mgh_{\text{máx}}$$

Concluimos, assim, que se verifica a conservação da energia mecânica para qualquer posição, pois *B* representa uma posição qualquer entre *A* e *C*.

Este resultado, que acabamos de obter considerando a descida do grave, obtém-se igualmente se considerarmos a subida do grave, como o estudante facilmente poderá verificar.

Na fig. 5.12, estão representadas três posições de um pêndulo elástico que oscila verticalmente: na posição A, a mola está indeformada; a posição B é de equilíbrio estável; e a posição C é a posição extrema, inferior, atingida durante a oscilação. É nesta posição que vamos considerar a energia potencial gravítica nula (nível zero de  $E_p$ ).

Como sabemos, a constante elástica da mola é, segundo a *lei de Hooke*, dada por

$$k = \frac{mg}{y_1} \quad [\text{fig. 5.12, (b)}]$$

Nestas condições, tendo em conta que  $y_2 = 2y_1$  e designando por  $E_{p,g}$  a *energia potencial gravítica* e por  $E_{p,e}$  a *energia potencial elástica*, temos o seguinte balanço de energia nas três posições:

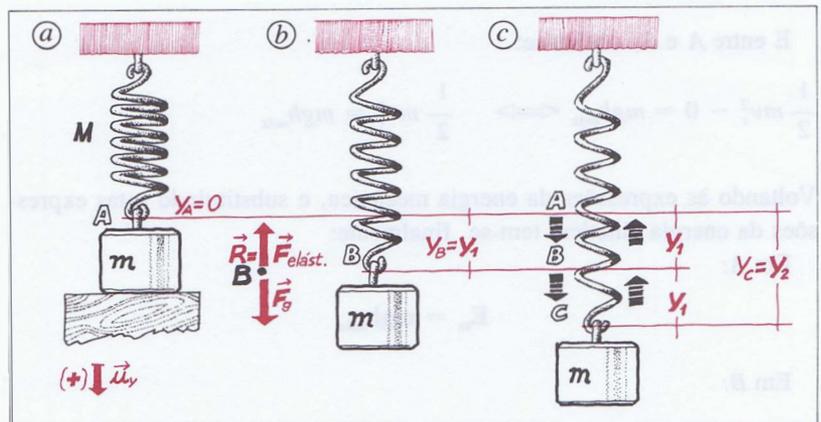


Fig. 5.12

(a) A mola está em repouso e indeformada (nem comprimida nem distendida) — posição A ou configuração definida pela coordenada:

$$y_A = 0$$

(b) Suspende-se o corpo de massa  $m$  e desce-se lentamente, até à posição de equilíbrio estável B, onde fica em repouso:

$$y_B = y_1$$

(c) Solta-se bruscamente o corpo, na posição A: obtém-se uma distensão máxima

$$y_C = y_2,$$

e o sistema mola-corpo passa a oscilar em torno da posição de equilíbrio B — **pêndulo elástico** em oscilação vertical.

Na posição A

$$\begin{cases} E_c = 0 \\ E_{p,g} = mgy_2 \\ E_{p,e} = 0 \end{cases} \implies \mathbf{E}_m = mgy_2$$

Na posição B (e quando segue a caminho de C):

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} mv_B^2 \\ E_{p,g} = mgy_1 \\ E_{p,e} = \frac{1}{2} ky_1^2 = \frac{1}{2} \frac{mg}{y_1} y_1^2 = \frac{1}{2} mgy_1 \end{cases} \implies E_m = \frac{1}{2} mv_B^2 + \frac{3}{2} mgy_1$$

Na posição C

$$\begin{cases} E_c = 0 \\ E_{p,g} = 0 \\ E_{p,e} = \frac{1}{2} ky_2^2 = \frac{1}{2} \frac{mg}{y_1} (4y_1^2) = 2mgy_1 = mgy_2 \end{cases} \implies \mathbf{E}_m = mgy_2$$

Verifica-se, imediatamente, a conservação da energia mecânica total em A e C. Resta provar a conservação em B. Para isso, vamos calcular a energia cinética em B,

$$\frac{1}{2} mv_B^2,$$

a partir do trabalho resultante das forças que actuam no pêndulo,  $\vec{F}_g$  e  $\vec{F}_{elást}$ , entre A e B.

Pela lei da energia cinética tem-se:

$$E_c(B) - E_c(A) = W_{A \rightarrow B}$$

$$\frac{1}{2} mv_B^2 - 0 = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_g) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{el.})$$

Ora, os trabalhos da força gravítica e da força elástica já foram determinados (ver secção 4.1 e Q 4.1). Tem-se

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_g) = \vec{F}_g \cdot \vec{AB} = mgy_1 \quad (\text{trabalho motor})$$

e

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{el.}) = -\frac{1}{2} ky_1^2 \quad (\text{trabalho resistente})$$

Vem, pois:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} mv_B^2 &= mgy_1 - \frac{1}{2} ky_1^2 = mgy_1 - \frac{1}{2} \frac{mg}{y_1} y_1^2 \\ &= \frac{1}{2} mgy_1 \end{aligned}$$



Substituindo na expressão da energia total em  $B$ , temos, finalmente:

$$E_m = \frac{1}{2} mgy_1 + \frac{3}{2} mgy_1 = 2mgy_1 = mgy_2$$

Verifica-se, assim, a conservação da energia mecânica total nos três casos.

### QUESTÕES PROPOSTAS

#### Q 5.8

No pêndulo elástico, a energia cinética é máxima na posição de equilíbrio —  $B$ . Esta energia cinética provém da energia potencial elástica ou da energia potencial gravítica?

Qual é o seu valor, em  $B$  — fig. 5.12?

#### Q 5.9

Utilizando a *lei da conservação da energia mecânica*, provar que as deformações  $y_1$  e  $y_2$ , na fig. 5.12, são tais que

$$y_2 = 2y_1$$

#### Q 5.10

Um bloco de 2,0 kg cai da altura de 0,5 m sobre uma mola dura assente no chão:  $k = 1,96 \times 10^3$  N/m. Desprezando o atrito, qual foi a compressão máxima da mola? Considerar  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

#### Q 5.11

Um pêndulo gravítico simples oscila a partir da posição  $A$ , fazendo um ângulo  $\theta_M$  com a posição de equilíbrio  $OC$  — fig. 5.13.

Exprimir a velocidade com que passa em  $B$ , em função do ângulo  $\theta$  correspondente e do comprimento do pêndulo.

#### Q 5.12

Relativamente ao pêndulo gravítico representado na fig. 5.13, mostrar que a energia mecânica se mantém constante nas três posições  $A$ ,  $B$  e  $C$ , e é dada por

$$E_m = mg\ell(1 - \cos \theta_M)$$

#### Q 5.13

Um pêndulo gravítico, com a massa de 100 g, atinge a altura máxima de 0,5 m para uma amplitude de 30°. Tomando para nível zero da energia potencial a sua posição mais baixa, determinar:

1. A energia mecânica total do sistema pêndulo-Terra.
2. O comprimento do pêndulo.
3. Os valores das velocidades linear e angular do pêndulo no instante em que a amplitude é 20°.
4. O valor da velocidade máxima.  
( $g = 10$  m/s<sup>2</sup>)

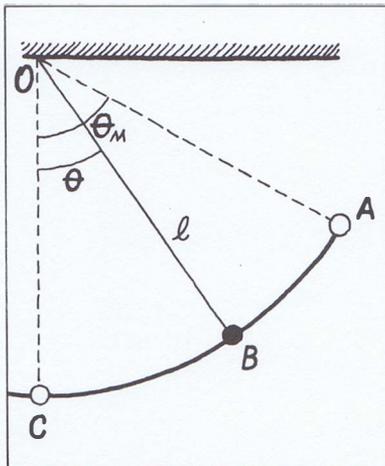


Fig. 5.13

### Q 5.14

Um canhão de mola, cuja constante elástica é  $7,0 \times 10^2 \text{ N/m}$ , faz um ângulo de  $45^\circ$  com a horizontal. A mola está comprimida, sofrendo um encurtamento de  $5,0 \text{ cm}$ , e na extremidade comprimida coloca-se uma bala com a massa de  $15,0 \text{ g}$ .

1. Calcular a velocidade com que a bala sai do cano, considerando não significativas as forças de atrito.
2. Qual é o alcance no vácuo.  $g = 10 \text{ m/s}^2$

## 5.4 Lei geral da conservação da energia

### 5.4.1 Balanço da energia transferida para um sistema não isolado

Consideremos um **sistema não isolado** onde actuam algumas *forças interiores não conservativas*. Seja, para concretizar, o sistema

*corpo + rampa + Terra*,

no caso de um corpo que sobe uma rampa puxado por uma força  $\vec{F}$  — fig. 5.14.

Neste sistema, a força  $\vec{F}$  é uma *força exterior*, pois é exercida por um agente exterior ao sistema. Porém, a força gravítica,  $\vec{F}_g$ , é *interior* (interior, porque é devida à Terra, que consideramos pertencente ao sistema) e, além disso, é *conservativa*. Mas a força de atrito,  $\vec{F}_a$ , sendo também uma força *interior*, pois trata-se de uma força resistente que uma parte do sistema (a rampa) exerce sobre outra parte (o corpo), já não é uma força conservativa.

Em sistemas como este, não isolados e onde algumas das forças interiores são dissipativas, o trabalho das forças exteriores,  $W_e$ , dá-nos o balanço de energia transferida, na forma mecânica, do exterior para o sistema. Assim, no caso da fig. 5.14, o trabalho da força  $\vec{F}$  mede a energia mecânica que o agente que exerce a força transfere para o sistema.

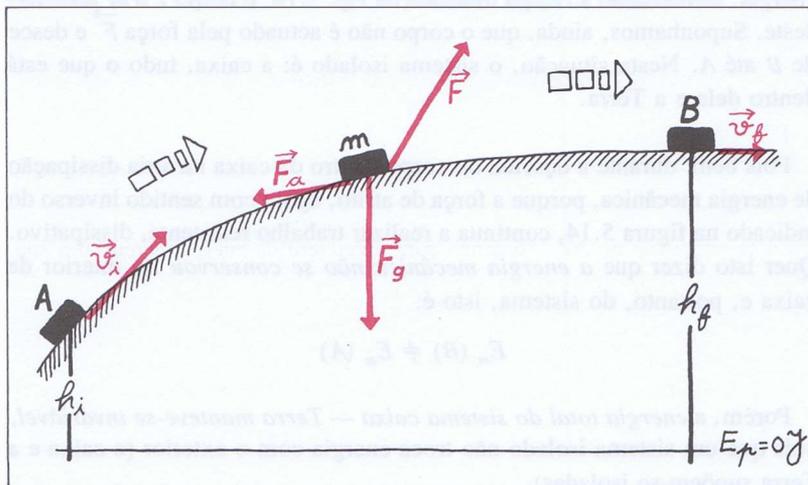


Fig. 5.14 Considerando o sistema *corpo m—rampa—Terra*, a evoluir da configuração A à configuração B, podemos concluir que

$$\begin{aligned} W_F + W_a &= \Delta E_c + \Delta E_p \\ &= \left( \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 \right) + (mg h_f - mg h_i) \end{aligned}$$

Actuando, porém, forças dissipativas interiores, esta energia, proveniente do exterior, não vai corresponder integralmente ao acréscimo de energia mecânica do sistema,

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p,$$

já que uma parte da energia mecânica transferida é transformada em energia não mecânica (térmica ou não térmica) resultante do trabalho,  $W_{nc}$ , das forças interiores não conservativas. Este trabalho mede, precisamente, a energia que passou para a forma não mecânica.

Concretizando para o caso da fig. 5.14, à energia mecânica transferida para o sistema através do trabalho da força exterior,  $\vec{F}$ , é descontada a energia dissipada no trabalho da força de atrito. Considerando que este trabalho é negativo (resistente), podemos, em termos algébricos, contabilizar a variação da energia mecânica do sistema por meio da expressão

$$W_F + W_a = \Delta E_m$$

ou, mais geralmente,

$$W_e + W_{nc} = \Delta E_c + \Delta E_p$$

Esta conclusão, obtida intuitivamente, pode ser demonstrada com todo o rigor matemático. Não o fazemos aqui porque a sua dedução exige o uso do Cálculo Integral.

#### 5.4.2 Conservação da energia total num sistema isolado

Finalmente, consideremos também **sistemas isolados**, mas onde as forças interiores são umas conservativas e outras não conservativas.

Seja, por exemplo, uma caixa de paredes *impermeáveis* a toda a forma de energia, envolvendo a rampa indicada na fig. 5.14, o corpo e o ar próximo deste. Suponhamos, ainda, que o corpo não é actuado pela força  $\vec{F}$  e desce de  $B$  até  $A$ . Nesta situação, o sistema isolado é: a caixa, tudo o que está dentro dela e a Terra.

Pois bem: durante a descida do corpo dentro da caixa haveria dissipação de energia mecânica, porque a força de atrito, agora com sentido inverso do indicado na figura 5.14, continua a realizar trabalho resistente, dissipativo. Quer isto dizer que *a energia mecânica não se conservou* no interior da caixa e, portanto, do sistema, isto é:

$$E_m(B) \neq E_m(A)$$

Porém, a *energia total do sistema caixa — Terra manteve-se invariável*, pois que um sistema isolado não troca energia com o exterior (a caixa e a Terra supõem-se isoladas).

Nesta situação dizemos que a energia mecânica se transformou, **parcialmente**, em **energia interna do sistema**,  $U_i$ . Esta energia interna engloba todas as formas de energia possíveis (térmica, química, eléctrica, etc.) respeitantes às partículas do sistema.

No nosso exemplo da caixa, parte da energia mecânica ter-se-ia convertido em energia térmica da rampa e do ar. Em condições ideais de isolamento da caixa, aceitamos que aquilo que o sistema perdeu em energia mecânica ganhou em energia interna, e reciprocamente. Genericamente, podemos escrever para as transformações que ocorrem num sistema isolado, entre as configurações  $A$  e  $B$ :

$$\Delta E_{A,B} + \Delta U_i = 0$$

Esta expressão tem, então, a seguinte leitura: a **variação global de energia** entre duas configurações  $A$  e  $B$  do sistema é **nula**.

Isto equivale a dizer, por outras palavras, que a **totalidade de energia, num sistema isolado, se conserva**, embora se transfira de umas partículas para outras ou passe de umas formas para outras. Se actuarem forças interiores não conservativas, ocorre necessariamente não conservação da energia mecânica porque esta, em parte, se dissipa, passando para outras formas. Se apenas actuarem forças conservativas, então, além da conservação da energia total, também ocorre conservação da energia mecânica: o que desaparece em energia cinética aparece em energia potencial e vice-versa.

### QUESTÕES PROPOSTAS

#### Q 5.15

Na situação da fig. 5.14, vamos considerar a força  $\vec{F}$  constante, da intensidade

$$|\vec{F}| = 100 \text{ N},$$

e formando um ângulo de  $60^\circ$  com a direcção da recta que passa por  $A$  e  $B$ , pontos estes que distam  $8,0 \text{ m}$ .

Suponhamos que o corpo, de massa  $10 \text{ kg}$ , passa da altura  $h_i = 1,0 \text{ m}$  e velocidade  $10 \text{ ms}^{-1}$  à altura  $h_f = 3,0 \text{ m}$  e velocidade  $4,0 \text{ ms}^{-1}$ .

Nestas condições, qual é a energia mecânica dissipada pela força de atrito? ( $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ ).

#### Q 5.16

Uma criança de  $40 \text{ kg}$  abandona-se do alto de um «escorrega» de  $3,0 \text{ m}$  de altura e  $6,0 \text{ m}$  de comprimento.

Atinge o final do «escorrega» com uma velocidade de  $6,0 \text{ ms}^{-1}$  — fig. 5.15.

Qual é a força de atrito, suposta constante, que actuou na criança? ( $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ ).

Num **sistema isolado**, onde só há *forças interiores conservativas*, a energia mecânica total mantém-se constante:

$$E_c + E_p = k \iff \Delta E_c + \Delta E_p = 0$$

Num **sistema isolado**, onde há *forças interiores conservativas e não conservativas*, a energia mecânica não se conserva, mas mantém-se constante a totalidade da energia do sistema, isto é, a soma da energia mecânica com a energia não mecânica interna:

$$\Delta E_m + \Delta U_i = 0$$

Num **sistema não isolado**, o balanço da energia transferida para o sistema é dado pelo trabalho das forças exteriores:

$$W_e = \Delta E_c + \Delta E_p - W_{nc}$$

onde  $W_{nc}$  é o trabalho das forças não conservativas interiores.

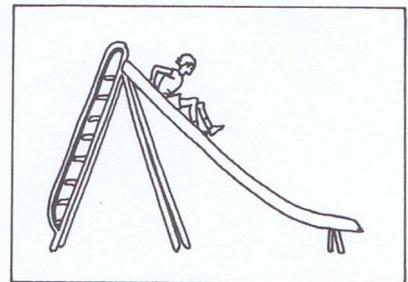


Fig. 5.15

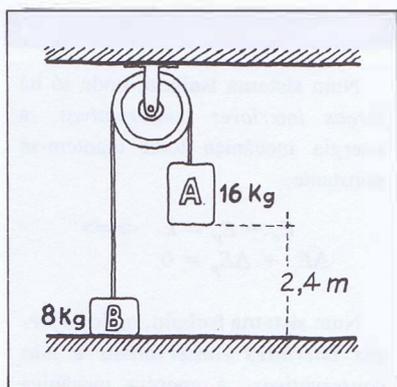


Fig. 5.16

**Q 5.17**

1. Com que velocidade atinge o solo o corpo de 16 kg representado na figura 5.16, se cair do repouso e se desprezarem todas as forças não conservativas? ( $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ )
2. E com que velocidade chegará ao solo o mesmo corpo se as forças de atrito no eixo da roldana e a resistência do ar dissiparem 5% da energia mecânica inicial do sistema?

**Q 5.18**

Um corpo de massa  $m$  desce um plano inclinado, desde o cimo até à base. Sendo  $\ell$  o comprimento do plano,  $\theta$  o seu ângulo de inclinação e  $\mu$  o coeficiente de atrito cinético, determinar:

1. A velocidade com que o corpo chega à base.
2. A distância percorrida, a seguir, no plano horizontal até parar, sendo esta superfície semelhante à do plano inclinado.

Apresentar duas soluções e compará-las — uma recorrendo à aplicação das leis de Newton e outra utilizando o processo dos balanços de energia (ou aplicação da lei geral da conservação da energia).

**Q 5.19**

Um carro desce e sobe uma pista montada em forma de «montanha russa» — fig. 5.17. Relacionar as velocidades,  $v_2$ , em B, e  $v_1$ , em A, com as ordenadas  $y_1$  e  $y_2$ , se as forças de atrito absorverem 20% da energia cinética que o carro tem em A.

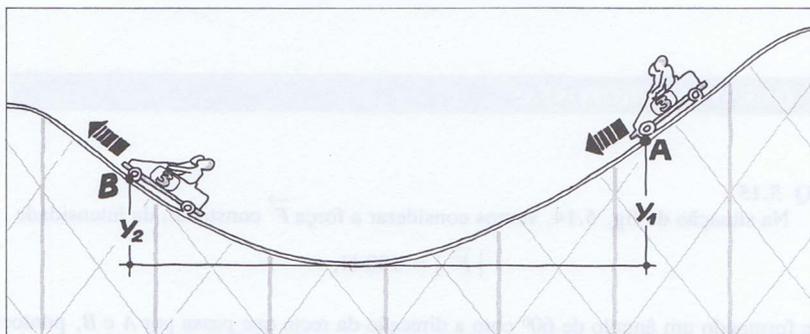


Fig. 5.17 «Montanha russa», onde se faz o aproveitamento da variação de energia potencial gravítica.

# Teste de auto-avaliação

## I

Uma partícula de massa  $m$  percorre um espaço  $s$ , entre dois pontos  $A$  e  $B$ , sob a acção de uma força resultante  $\vec{F}$ , constante.

São feitas, a seguir, algumas afirmações acerca do trabalho dessa força  $\vec{F}$ , em diferentes situações. Escolher as afirmações verdadeiras e fundamentar a escolha.

- (A) Se a partícula se mover rectilaneamente, o trabalho é dado por  $W_F = |\vec{F}| \times s$ .
- (B) Se as forças que nela actuam forem conservativas, o trabalho é dado por  $W_F = \Delta E_p$ .
- (C) Se a partícula adquirir a velocidade  $v$  a partir do repouso, o trabalho é dado por

$$W_F = \frac{1}{2} mv^2$$

## II

2. Do ponto  $D$  deixa-se cair, escorregando, um corpo sem velocidade inicial. Considerando não significativo o atrito, determinar entre que valores pode variar a altura  $h$  de modo que o corpo possa descrever a trajectória indicada — fig. T.5.1.

(Adaptado da prova escrita de Física, 12.º ano, 1984, 2.ª chamada da 1.ª fase)

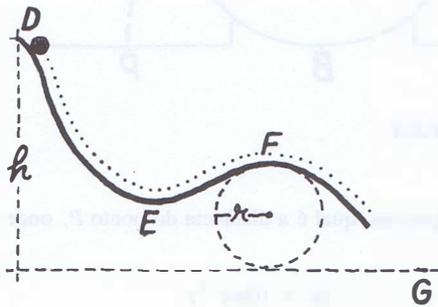


Fig. T.5.1

## III

Uma esfera pequena, de massa  $m$  e com energia cinética de rotação desprezável, rola sem atrito num plano inclinado, partindo do repouso em  $A$  — fig. T.5.2. Ao passar em  $B$ , move-se, sem atrito, no aro circular  $\widehat{BCD}$ , de raio  $r$ .

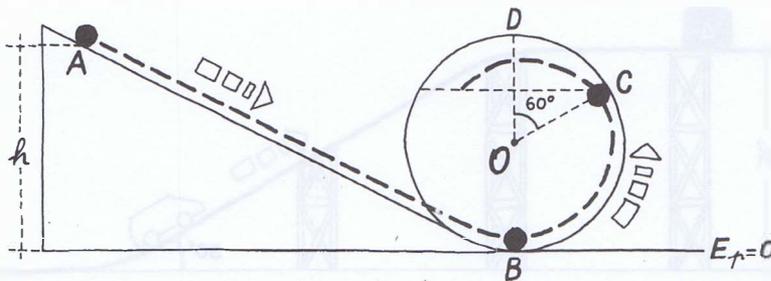


Fig. T.5.2

No ponto  $C$ , a esfera «descola» do aro, entrando em movimento balístico, isto é, descreve uma trajetória parabólica sob a ação da força gravítica (também é desprezável a resistência do ar).

Determinar, em função do raio  $r$ :

1. A velocidade com que a esfera atinge a posição  $C$ .
2. A altura  $h$  donde partiu.
3. A altura máxima,  $H$ , que a esfera pode atingir.

$$g = 10 \text{ ms}^{-2}.$$

#### IV

Um pequeno corpo, de massa  $m$ , é abandonado, sem velocidade inicial, do cimo  $A$  de uma esfera de raio  $3,0 \text{ m}$ , apoiada num plano horizontal — fig. T.5.3.

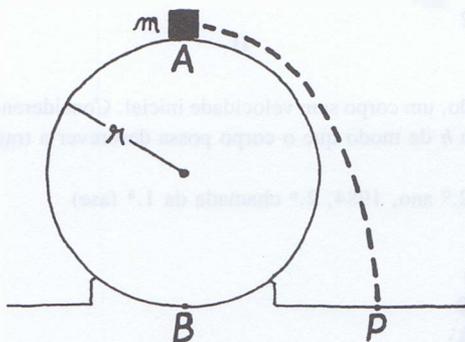


Fig. T.5.3

Se forem desprezáveis as resistências dissipativas, qual é a distância do ponto  $P$ , onde o corpo atinge o solo, ao ponto mais baixo,  $B$ , da esfera?

$$(g = 10 \text{ ms}^{-2})$$

#### V

Numa das diversões das Feiras Populares, um carrinho de  $2,0 \text{ kg}$  é lançado para cima numa calha com a inclinação de  $30^\circ$  — fig. T.5.4. Se o coeficiente de atrito cinético for  $0,20$  e se o carrinho for lançado com a energia cinética inicial de  $64 \text{ J}$ , atingirá a plataforma situada à altura  $h = 2,5 \text{ m}$ , produzindo um disparo na colisão com o bloco  $A$ ?  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ .

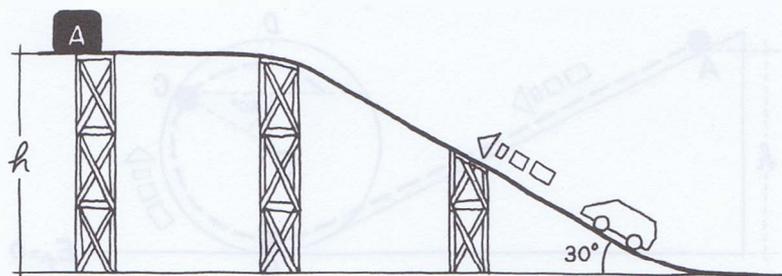


Fig. T.5.4

## VI

Uma esfera de massa  $m$  está presa na extremidade de uma haste rígida, de comprimento  $\ell$  e massa não significativa comparada com  $m$ , e roda, sem atrito, em torno de um eixo horizontal representado pela projecção ortogonal  $O$  — fig. T.5.5. A esfera parte de  $A$  com a velocidade inicial  $\vec{v}_0$ , descreve um arco de circunferência no plano vertical e pára no ponto  $D$ .

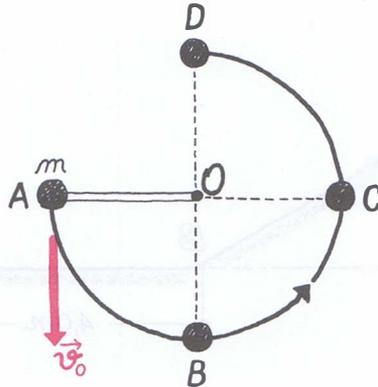


Fig. T.5.5

1. Deduzir a expressão de  $|\vec{v}_0|$ .
2. Qual é a tensão da haste no ponto  $B$ ? E no ponto  $D$ ?
3. Deita-se um pouco de terra na articulação do eixo de modo que, com a  $\vec{v}_0$  anterior, a esfera pára no ponto  $C$ . Qual foi o trabalho realizado pelo atrito durante este movimento?
4. Após algumas oscilações, a esfera acabou por parar em  $B$ . Qual foi o trabalho total realizado pelo atrito?

## VII

Um corpo é lançado para cima, ao longo de um plano inclinado que forma um ângulo de  $30^\circ$  com o plano horizontal. A velocidade de lançamento é  $12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . O corpo atinge novamente o ponto de partida com uma velocidade de  $6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Qual é o coeficiente de atrito, suposto constante, entre o plano e o corpo?

## VIII

Um carrinho é abandonado, sem velocidade inicial, do cimo  $A$ , de um aro circular de raio  $2,0 \text{ m}$ . Desprezando os atritos e outras forças resistentes exteriores ao sistema corpo-Terra, e considerando nula a energia potencial do sistema ao nível horizontal do ponto  $A$ :

1. Provar que, nestas condições, o carrinho atinge o ponto  $C$  ao nível de  $A$ .
2. Com que velocidade passa, nestas condições, no ponto mais baixo,  $B$ ?  
Qual é a energia mecânica neste ponto?
3. Qual é o valor da velocidade em  $P$ ?

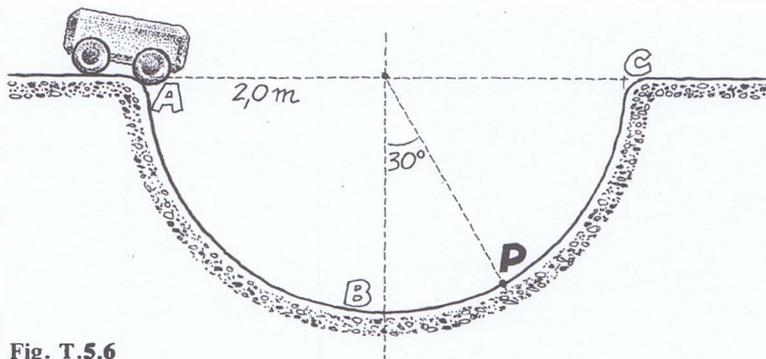


Fig. T.5.6

Um bloco de massa 3,0 kg desce uma rampa, partindo do repouso em A.

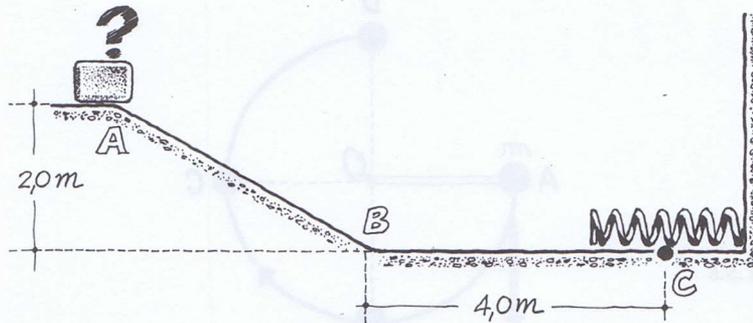


Fig. T.5.7

De A até B o atrito é desprezável. De B até C o coeficiente de atrito cinético é 0,25.

O bloco colide com a mola, comprime-a e vai parar instantaneamente na posição C, invertendo, a seguir, o sentido do seu movimento.

A constante elástica da mola é:  $k = 1,5 \times 10^5 \text{ Nm}^{-1}$

1. Indicar as transformações de energia nos percursos AB e BC.
2. São conservativas todas as forças que actuam no bloco?
3. Calcular os trabalhos realizados pelas forças gravítica, de atrito e elástica da mola.
4. Determinar a compressão máxima da mola.
5. Onde irá parar o bloco após a inversão de sentido do seu movimento?

# Conservação do momento linear

UNIDADE

6



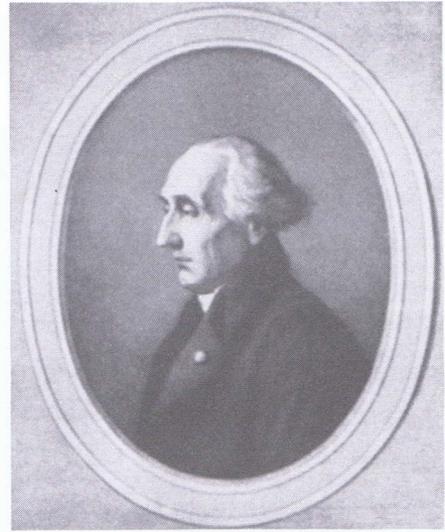
Christopher **WREN** (1632-1723)

Matemático e arquitecto inglês. Determinou a posição do *centro de gravidade do cicloide* — trabalho que lhe valeu, em 1660, a cátedra de Matemática na Universidade de Oxford e, em 1663, a entrada para a Royal Society de Londres.

Em 1668, esta Sociedade convidou *Wren*, *Huyghens* e *Wallis* para procederem ao estudo das leis do choque. Quase simultaneamente, chegaram à conclusão de que o momento linear se conservava em todos os casos.

*Wren* e *Huyghens* estudaram os **choques perfeitamente elásticos**, verificando que neles também se conservava o produto  $mv^2$  ou «força viva». *Wallis* estudou ainda o **choque não elástico**.

Em 1668, *Wren* foi nomeado arquitecto da cidade de Londres, onde deixou o seu nome ligado a monumentos famosos: Observatório de Greenwich, Teatro de Oxford, Basílica de S. Paulo.



Joseph Louis de **LAGRANGE** (1736-1813)

Matemático francês nascido em Turim (Itália). Reestruturou a Mecânica clássica, desenvolvendo e sintetizando os conceitos mecânicos até então elaborados. Entre os quatro princípios que adoptou, contam-se o princípio da conservação da «força viva» e o «*princípio da conservação do centro de gravidade*», este já assinalado por *Newton* e *d'Alembert*.

Colaborou no estabelecimento do sistema métrico e, em 1788, publicou a sua *Mécanique Analytique*, que «está para a Mecânica geral como a lei de gravitação de *Newton* está para a Mecânica celeste». Desenvolveu o conceito de *potencial* iniciado por *Euler*, a quem sucedeu na Academia de Ciências de Berlim.

Vivendo numa época politicamente conturbada, o seu comportamento foi de uma integridade exemplar, quer como cidadão quer como cientista.



Fig. 6.1. Movimento de um sistema de partículas.



Fig. 6.2. Movimento de um sistema de partículas.

- 6.1 Impulso de uma força
- 6.2 Momento linear de uma partícula e de um sistema discreto de partículas. Lei da variação do momento linear de uma partícula
- 6.3 Centro de massa de um sistema discreto de partículas. Centro de massa de um corpo (referência)
- 6.4 Movimento do centro de massa
  - 6.4.1 Momento linear do centro de massa
  - 6.4.2 Lei do movimento do centro de massa
- 6.5 Lei da conservação do momento linear
- 6.6 O pêndulo balístico
- 6.7 Energia cinética interna. Energia cinética de translação de um corpo e de um sistema de corpos
- 6.8 Movimento dos sistemas de massa variável
  - 6.8.1 Generalidades
  - 6.8.2 Movimento das máquinas a reacção
- 6.9 Colisões
  - 6.9.1 Significado geral
  - 6.9.2 Colisões elásticas e inelásticas
  - 6.9.3 Coeficiente de restituição em colisões directas, frontais ou unidimensionais

# Conservação do momento linear

## 6.1 Impulso de uma força

É fácil verificar que forças diferentes poderão originar *acréscimos iguais de velocidade na mesma partícula*, desde que actuem de modo a manter-se *constante o produto da força pelo seu tempo de actuação*.

O produto

$$\vec{I} = \vec{F} \times \Delta t$$

da força constante,  $\vec{F}$ , pelo tempo de actuação,  $\Delta t$ , representa, pois, uma grandeza física importante. A esta grandeza chama-se **impulso da força** constante,  $\vec{F}$ , durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ .

No gráfico  $(t, F)$  de uma força constante (fig. 6.1), o valor do impulso durante o intervalo de tempo

$$\Delta t = t_f - t_i,$$

é dado pela «área» do rectângulo cujos lados têm as medidas  $\Delta t$  e  $F$ , ou seja:

$$I = F \times \Delta t$$

Vamos agora considerar o caso de a força  $\vec{F}$  **variar** continuamente de **intensidade, mantendo**, porém, invariável a **linha de acção e o sentido**. Neste caso podemos decompor o intervalo  $[t_1, t_2]$  de actuação da força — fig. 6.2 — num número  $n$ , muito grande, de intervalos muito pequenos,  $\Delta t_i$ , suficientemente pequenos para que a *força* se possa considerar *praticamente constante em cada um deles*. Nestas condições podemos utilizar a definição acabada de dar de impulso, aplicando-a a cada um dos intervalos.

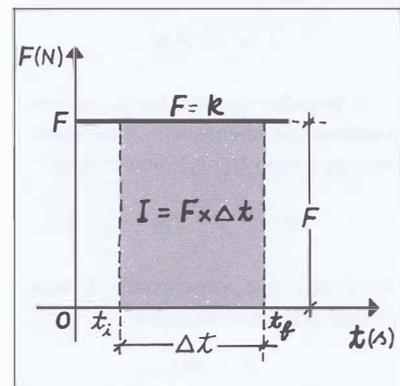


Fig. 6.1

O valor do impulso de uma força constante, de intensidade  $F$ , no intervalo de tempo  $[t_i, t_f]$ , é dado pela «área» do rectângulo indicado na figura.

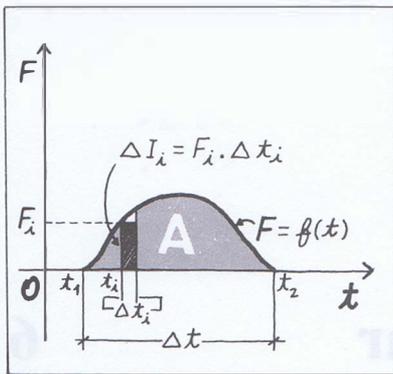


Fig. 6.2

Quando uma força varia apenas de intensidade, segundo uma curva  $F = f(t)$ , o impulso da força no intervalo  $[t_1, t_2]$  é medido pela «área» da superfície situada entre a curva e o eixo dos tempos.

O impulso em cada um destes intervalos muito pequenos,  $\Delta t_i$ , é então o **impulso muito pequeno**

$$\Delta I_i = F_i \cdot \Delta t_i ,$$

dado pela pequena área rectangular assinalada na figura 6.2.

Ora, à medida que  $n \rightarrow \infty$ , isto é, que os intervalos de tempo  $\Delta t_i$  vão sendo cada vez menores, a soma dos sucessivos impulsos muito pequenos vai-se aproximando, cada vez mais, do impulso real, porque a variação descontínua da força (aos socos) vai-se aproximando, também cada vez mais, da sua variação real e contínua. Matematicamente, podemos traduzir este facto afirmando que o impulso  $I$ , real, é o limite do somatório dos impulsos parciais à medida que o número deles,  $n$ , cresce para infinito:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F_i \cdot \Delta t_i$$

Observe-se, entretanto, que este somatório de impulsos parciais é traduzido na fig. 6.2 por um somatório de pequeníssimas áreas rectangulares, somatório este que tende para a área situada por baixo da curva  $F = f(t)$  (área  $A$  da fig. 6.2) à medida que  $n \rightarrow \infty$ .

Concluimos, assim, que o **impulso real é medido pela «área» da superfície** limitada pela curva  $F = f(t)$  e pelo eixo dos tempos.

Também sabemos que esta área, medida do limite do somatório que figura na expressão algébrica anterior, é o **integral** da função  $F = f(t)$  entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ , respectivamente o início e o final da acção da força:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F \cdot dt = \text{«Área» } A \text{ (fig. 6.2)}$$

O impulso

$$d\vec{I} = \vec{F} dt ,$$

num intervalo infinitesimal de tempo  $dt$ , chama-se **impulso elementar**. E o impulso de uma força qualquer  $\vec{F}$ , num intervalo de tempo finito  $[t_i, t_f]$ , obtém-se *integrando* o impulso elementar:

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} d\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt .$$

Este integral de uma função vectorial,  $\vec{F}(t)$ , é uma generalização do integral de uma função escalar, porque se obtém à custa dos integrais das componentes de  $\vec{F}$ , que são escalares.

Nas aplicações práticas, neste Curso, cingir-nos-emos ao cálculo de impulsos de forças que não variam em direcção.

### Súmula

6.1

O **impulso** de uma força constante  $\vec{F}$ , num intervalo de tempo  $\Delta t$ , é

$$\vec{I} = \vec{F} \times \Delta t$$

O **impulso** de uma força, apenas variável em intensidade, num intervalo de tempo  $[t_1, t_2]$ , tem o valor

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F dt ,$$

valor este que corresponde à área situada por baixo da curva

$$F = f(t)$$

A unidade SI de impulso é o *newton-segundo*: N.s.

**6.2 Momento linear de uma partícula e de um sistema discreto de partículas. Lei da variação do momento linear de uma partícula.**

A grandeza vectorial que se obtém multiplicando a velocidade  $\vec{v}$  de uma partícula pela sua massa  $m$  chama-se **momento linear da partícula** ou, segundo a designação de Newton, **quantidade de movimento da partícula**:

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

Para um sistema *discreto* de partículas, isto é, para um sistema constituído por  $n$  partículas, de massas  $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$ , de velocidades, respectivamente,  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_n$ , o **momento linear do sistema**,  $\vec{p}_s$ , é igual à *soma vectorial dos momentos lineares* das diferentes partículas:

$$\vec{p}_s = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$$

Se uma partícula de massa  $m$  é actuada por uma força  $\vec{F}$ , a sua velocidade  $\vec{v}$  varia. A variação correspondente do momento linear determina-se facilmente, recorrendo à lei fundamental de Newton relativa ao movimento:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Com efeito, esta relação é equivalente às seguintes:

$$\vec{F} \cdot dt = d\vec{p} \iff d\vec{I} = d\vec{p}$$

Isto significa que o **impulso elementar**,  $d\vec{I}$ , de uma força é igual à **variação elementar do momento linear** da partícula que sofreu esse impulso.

Para um intervalo de tempo qualquer,  $\Delta t = t_f - t_i$ , o **impulso da força**  $\vec{F}$ , é, como vimos no final da secção anterior:

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} d\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} d\vec{p} \iff \vec{I} = \vec{p}_f - \vec{p}_i \iff \vec{I} = m \vec{v}_f - m \vec{v}_i$$

No caso da força  $\vec{F}$  não variar em direcção, podemos escrever a expressão escalar

$$I = p_f - p_i \iff I = mv_f - mv_i,$$

em que  $v_f$  e  $v_i$  são os valores final e inicial da velocidade, respectivamente. O impulso de uma força sobre uma partícula, num intervalo de tempo finito,  $\Delta t = t_f - t_i$ , é pois igual à *variação* correspondente do momento linear da partícula.

Este enunciado traduz a chamada **lei da variação do momento linear de uma partícula**.



**Súmula 6.2**

O **momento linear de um sistema discreto de  $n$  partículas** é a soma dos momentos lineares das suas partículas:

$$\vec{p}_s = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n$$

O **impulso elementar** de uma força sobre uma partícula é igual à **variação elementar do momento linear** da partícula:

$$d\vec{I} = d\vec{p} \iff d\vec{I} = m d\vec{v},$$

para  $m$  invariável.

O **impulso de uma força**, variável ou constante, sobre uma partícula é **igual à variação do momento linear** da partícula durante o tempo em que a força actuou:

$$\vec{I} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i$$

► **G.E.6.2**

**Q 6.1**

Um corpo de massa 20 kg move-se sob a acção da força

$$\vec{F} = 100 t \cdot \vec{u}_x \quad (\text{N})$$

Se, no instante  $t_i = 2,0$  s, fôr

$$\vec{v}_i = 30 \cdot \vec{u}_x \quad (\text{ms}^{-1}),$$

determinar:

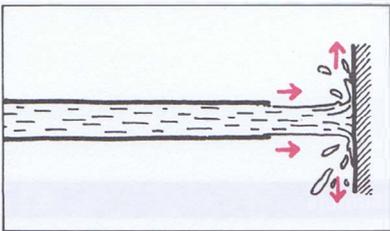
1. O impulso transmitido ao corpo (partícula) no intervalo [2,0; 10,0] s.
2. O momento linear do corpo no instante  $t_f = 10$  s.
3. O trabalho realizado sobre o corpo no intervalo [2,0; 10,0] s.

**Q6.2**

Um jacto de água sai de um tubo-conduta de 5 cm de diâmetro e incide, com a velocidade de  $20 \text{ ms}^{-1}$ , perpendicularmente numa parede — fig. 6.3. A densidade da água,  $\rho$ , ou massa de água por cada unidade de volume, é

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

1. Que força normal sobre a parede exerce este jacto de água se, após a colisão, toda a água sair paralelamente à parede?
2. E que força normal exercerá se 20% da água sair, após a colisão, em várias direcções, tendo a componente média da velocidade de retrocesso, na direcção normal à parede, o valor de  $8 \text{ ms}^{-1}$ ?



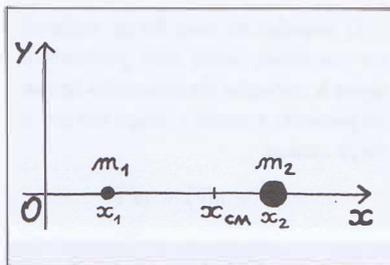
**Fig. 6.3**  
Jacto de água incidindo perpendicularmente na parede

**6.3 Centro de massa de um sistema discreto de partículas. Centro de massa de um corpo (referência)**

Tanto no movimento de um sistema discreto de partículas como no movimento de um corpo, trate-se de uma translação, de uma rotação ou de um movimento misto, há um ponto do corpo ou do sistema de partículas que goza de propriedades especiais. Uma destas, e a mais fundamental, é a seguinte: tal ponto desloca-se como se deslocaria uma partícula com a massa do corpo ou do sistema na qual se aplicassem as forças exteriores a que está submetido o corpo ou o sistema. Esta propriedade é a chamada lei do movimento desse ponto e será estudada a seguir (na secção 6.4.2). Tal ponto é muito importante, porque as suas propriedades permitem simplificar o estudo do movimento, e chama-se **centro de massa — CM**.

A posição do centro de massa, *CM*, é dada pela média ponderada das coordenadas das partículas do sistema ou do corpo, quando se toma para «peso» de cada partícula, nesta média, o valor da sua massa individual.

Assim, considerando duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2 > m_1$ , temos — fig. 6.4:



**Fig. 6.4**  
O centro de massa, *CM*, das partículas  $m_1$  e  $m_2$  está mais próximo da partícula de maior massa ( $m_2$ ).

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Como  $m_2 > m_1$ , por hipótese, verifica-se que o CM fica mais próximo da partícula com maior massa — esta tem, pois, mais influência na contribuição para a posição do CM.

Se as massas fossem iguais,

$$m_1 = m_2 = m,$$

o CM ficaria a meio da distância entre as partículas:

$$x_{CM} = \frac{mx_1 + mx_2}{2m} \iff x_{CM} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Se considerarmos um sistema de  $n$  partículas *complanares*, de massas

$$m_1, m_2, \dots, m_n,$$

cujas soma é a massa total do sistema

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{i=1}^n m_i,$$

as coordenadas do CM são, por **definição**, as **médias ponderadas** — fig. 6.5:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m}$$

No caso de as partículas não serem *complanares*, teríamos mais uma coordenada:

$$z_{CM} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{m}$$

Estas três equações escalares podem condensar-se numa única equação vectorial — é a **equação do vector posição do CM**.

Com efeito, sendo — fig. 6.6,

$$\vec{r}_i = x_i \cdot \vec{u}_x + y_i \cdot \vec{u}_y + z_i \cdot \vec{u}_z$$

o vector posição de cada partícula (de ordem  $i$ ), e sendo também

$$\vec{r}_{CM} = x_{CM} \cdot \vec{u}_x + y_{CM} \cdot \vec{u}_y + z_{CM} \cdot \vec{u}_z$$

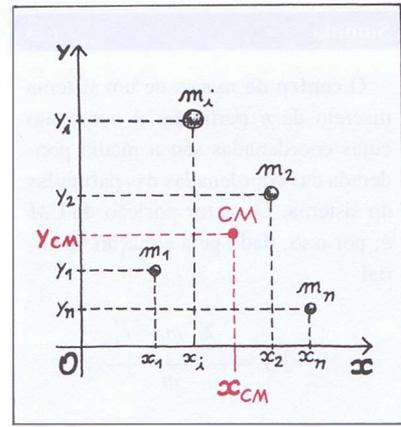


Fig. 6.5

As coordenadas do centro de massa de  $n$  partículas *complanares* são:

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m}$$

$$y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m}$$

### ► G.E. 6.3

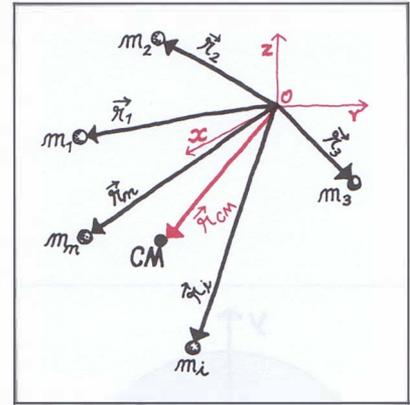


Fig. 6.6 O vector posição do centro de massa, num referencial ortonormado  $(O, x, y, z)$ , é

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m},$$

sendo  $\vec{r}_i$  o vector posição da partícula de massa genérica  $m_i$  do sistema formado por  $n$  partículas discretas.

O **centro de massa** de um sistema discreto de  $n$  partículas é um ponto cujas coordenadas são a média ponderada das coordenadas das partículas do sistema. O vector posição do  $CM$  é, por isso, dado pela equação vectorial

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i}{m}$$

desdobrável em três equações escalares.

A propriedade fundamental do  $CM$  é a de se mover como se fosse uma partícula com a massa  $m$  do sistema e sujeita às forças exteriores que actuam no sistema.

o vector posição do  $CM$ , então temos — fig. 6.6:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_n\vec{r}_n}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m}$$

porque as coordenadas deste vector são as coordenadas  $x_{CM}$ ,  $y_{CM}$  e  $z_{CM}$  atrás escritas.

Para determinar a *posição do  $CM$  de um corpo*, divide-se este em porções infinitesimais de volume  $dV$ , a que correspondem as *massas elementares*  $dm$ , e aplicam-se as fórmulas escritas, substituindo os somatórios por integrais. O problema, em geral, não é simples. Apresentamos no G.E.6.4 dois casos particulares de simetria e, consequentemente, de fácil resolução.

**G.E.6.4**

**QUESTÕES PROPOSTAS**

**Q 6.3**

Experiências de difracção de electrões mostram que a distância entre os centros dos átomos de carbono e de oxigénio na molécula de monóxido de carbono,  $CO$  é  $1,130 \times 10^{-10}m$ .

Localizar o centro de massa da molécula de monóxido de carbono em relação ao átomo de carbono, sabendo que as massas atómicas relativas são:

$$A_r(C) = 12; A_r(O) = 16.$$

**Q 6.4**

Determinar a posição do centro de massa do sistema discreto de partículas indicado na fig. 6.7. As massas das partículas são:

$$m_1 = 2,0 \text{ kg} , \quad m_2 = 6,0 \text{ kg} , \quad m_3 = 4,0 \text{ kg}$$

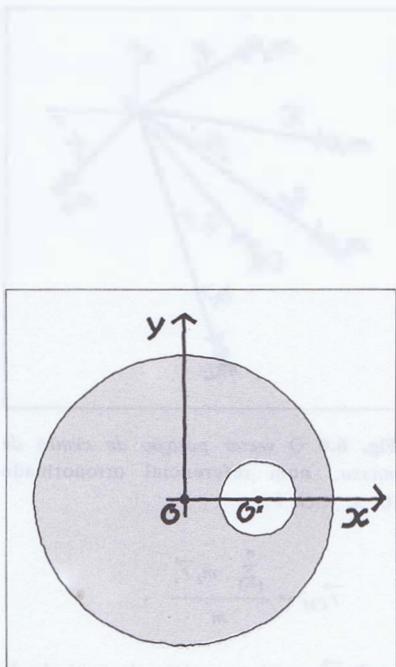


Fig. 6.8 Qual é a posição do centro de massa da chapa em relação à origem  $O$ ?

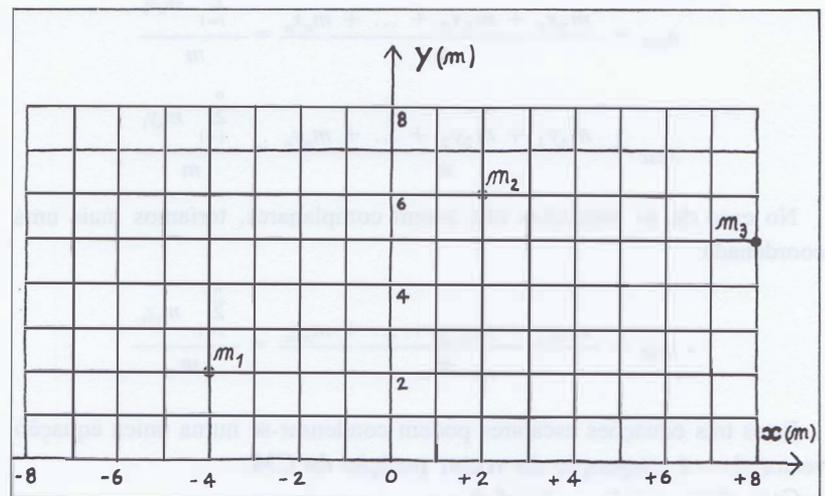


Fig. 6.7

**Q 6.5**

Determinar o centro de massa de uma chapa circular, homogénea, de raio 4,0 dm, com uma cavidade circular de raio 1,0 dm. Os dois centros distam um do outro 2,0 dm — fig. 6.8.

### Q 6.6

Na fig. 6.9 estão representados um parafuso e as respectivas dimensões da cabeça, corpo e rosca. As massas de cada uma das partes são proporcionais aos volumes. Determinar a posição do *CM*.

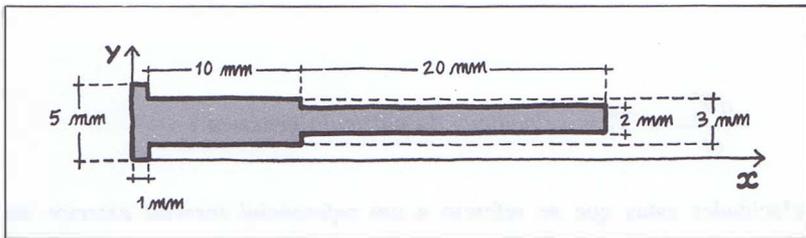


Fig. 6.9



## 6.4 Movimento do centro de massa

A partir da equação do vector posição do centro de massa de um sistema de partículas materiais,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m},$$

é fácil deduzir algumas das propriedades deste ponto importante. Podemos começar pela sua **unicidade** e **invariância**. Assim, o centro de massa, para cada sistema rígido, é um ponto **único** e **não varia** relativamente a um referencial fixo no sistema, porque esta equação tem uma solução única.

### 6.4.1 Momento linear do centro de massa

Da equação do vector posição do centro de massa,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} \iff m \vec{r}_{CM} = \sum m_i \vec{r}_i,$$

em que  $m$  é a *massa do sistema* (soma das massas das suas partículas), podemos deduzir, derivando em ordem ao tempo:

$$m \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

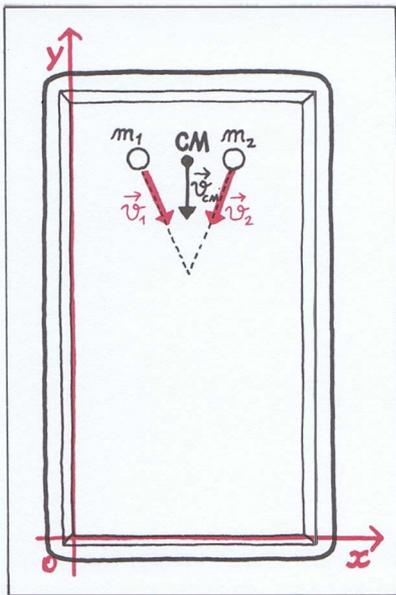


Fig. 6.10

Sejam  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  as velocidades das bolas de bilhar em relação ao sistema  $(O, x, y)$ , ligado às tabelas, o centro de massa  $CM$  terá uma velocidade  $\vec{v}_{CM}$ , em relação ao mesmo referencial, tal que:

$$m \vec{v}_{CM} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2,$$

com

$$m = m_1 + m_2$$

Vejam qual é o significado físico desta expressão.

Como

$$\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \vec{v}_{CM} = \text{velocidade do centro de massa } CM$$

e

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i = \text{velocidade da partícula genérica } i,$$

velocidades estas que se referem a um referencial inercial exterior ao sistema (fig. 6.10), resulta da igualdade anterior:

$$m \vec{v}_{CM} = \sum m_i \vec{v}_i \iff$$

$$m \vec{v}_{CM} = \sum \vec{p}_i = \vec{p}_s$$

Que concluímos? Muito simplesmente o que a leitura da expressão explicita:

O **momento linear,  $\vec{p}_s$ , de um sistema** — soma dos momentos lineares das suas partículas — **é igual ao momento linear do seu centro de massa  $CM$ , se considerarmos este como uma partícula com massa igual à do sistema.**

Em particular, para o caso de um sistema de duas partículas, duas bolas de bilhar por exemplo — fig. 6.10, e em movimento, temos:

$$\vec{p}_s = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m \vec{v}_{CM}$$

Esta conclusão implica que seja **nulo o momento linear total das partículas do sistema em relação ao seu centro de massa**, facto este comprovado experimentalmente — fig. 6.11:

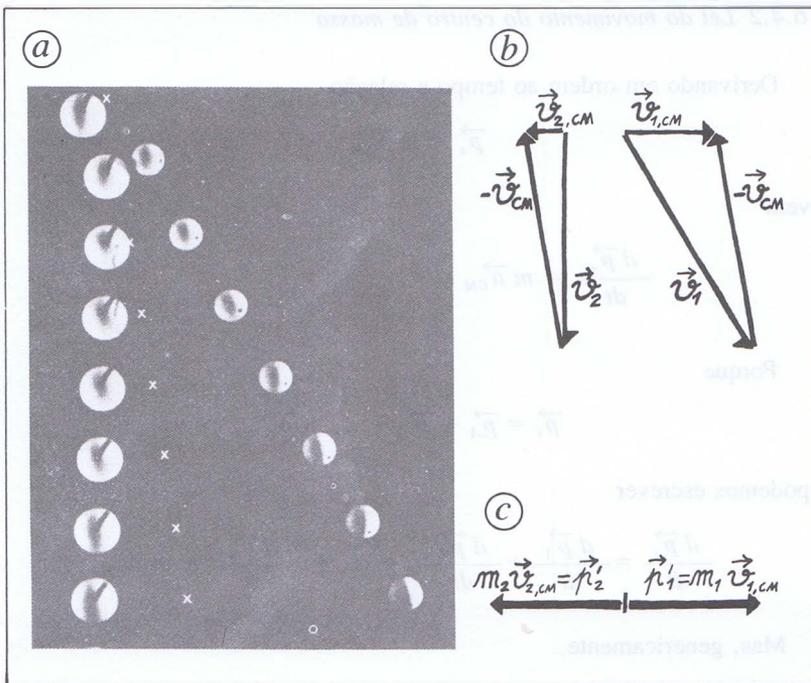
$$\sum m_i \vec{v}_{i,CM} = \vec{0}, \quad \vec{v}_{i,CM} \text{ — velocidade da partícula genérica } i \text{ em relação a um referencial fixo no centro de massa}$$

Com efeito, num referencial inercial ( $RI$ ) ligado ao centro de massas ( $CM$ ), é:

$$\vec{v}_{CM} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\vec{p} = \vec{0}$$

Nestas condições temos, pois:



**Fig. 6.11**

- (a) Fotografia de exposição múltipla de duas bolas de bilhar, movendo-se depois de terem colidido. Observe-se o movimento do respectivo centro de massa, assinalado por uma cruz.
- (b) Com base em medições sobre a fotografia, representaram-se as velocidades  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  das bolas em relação à Terra, às quais se subtraíram a velocidade do centro de massa,  $\vec{v}_{CM}$ , obtendo-se assim as velocidades  $\vec{v}_{1,CM}$  e  $\vec{v}_{2,CM}$  das bolas em relação ao centro de massa.
- (c) Multiplicaram-se estas velocidades pelas massas respectivas, obtendo-se os momentos lineares das bolas em relação ao centro de massa. Obtiveram-se dois vectores simétricos:

$$m_1 \vec{v}_{1,CM} + m_2 \vec{v}_{2,CM} = \vec{0}$$

$$\vec{p}_s = \vec{0} \iff \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{i,CM} = \vec{0}$$

Este resultado — *é nulo o momento linear do sistema em relação ao centro de massa* — está comprovado pela experiência.

Resulta, assim, que há coerência entre o facto experimental e as propriedades deduzidas da equação de definição do centro de massa.

#### Súmula

6.4

O momento linear de um sistema é o do seu centro de massa, se considerarmos este como uma partícula com a massa do sistema:

$$\vec{p}_s = m \vec{v}_{CM}$$

Daqui resulta que é nulo o momento linear de um sistema em relação a um referencial ligado ao centro de massa:

$$\sum m_i \vec{v}_{i,CM} = \vec{0}$$

### 6.4.2 Lei do movimento do centro de massa

Derivando em ordem ao tempo a relação

$$\vec{p}_s = m \vec{v}_{CM} .$$

vem

$$\frac{d\vec{p}_s}{dt} = m \vec{a}_{CM}$$

Porque

$$\vec{p}_s = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n ,$$

podemos escrever

$$\frac{d\vec{p}_s}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \dots + \frac{d\vec{p}_n}{dt} = m \vec{a}_{CM}$$

Mas, genericamente,

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

representa, pela lei fundamental de Newton, a resultante das forças (exteriores ao sistema umas, interiores outras) que actuam em cada partícula  $i$ .

A expressão anterior é equivalente, então, à seguinte

$$\Sigma \vec{F}_{ext} + \Sigma \vec{F}_{int} = m \vec{a}_{CM}$$

Como

$$\Sigma \vec{F}_{int} = \vec{0} \quad (\text{pela lei da acção-reacção}),$$

vem:

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_{CM}$$

Obtivemos assim uma expressão que traduz a **lei fundamental de Newton** aplicada aos *sistemas de partículas*:

*A resultante das forças exteriores que actuam num sistema de partículas é igual ao produto da sua massa pela aceleração do respectivo centro de massa.*

Concluimos, então, que *o centro de massa de um sistema tem o movimento que teria uma partícula com a massa total do sistema e onde estivessem aplicadas todas as forças exteriores que actuam no sistema.*

### Súmula

6.5

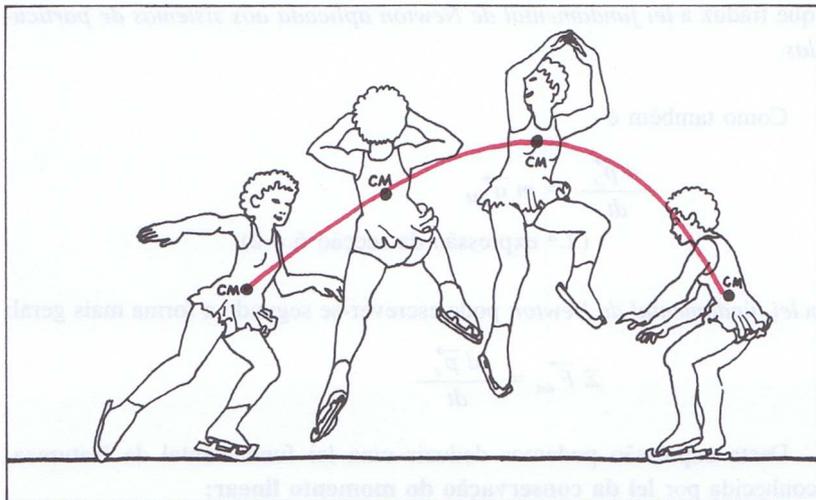
#### Lei fundamental de Newton dos sistemas de partículas:

A *aceleração do centro de massa de um sistema de partículas* é o quociente da resultante das forças exteriores pela massa do sistema:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\Sigma \vec{F}_{ext}}{m}$$

Por consequência: O movimento do centro de massa é o movimento de uma partícula com massa igual à do sistema, onde estejam aplicadas todas as forças exteriores que actuam no sistema (*lei do movimento do centro de massa*).

É esta a propriedade mais importante do centro de massa, referida no início da secção 6.3 e conhecida muitas vezes como **lei do movimento do centro de massa** — fig. 6.12.



**Fig. 6.12** Quando uma bailarina, no «passo» representado, levanta os braços, o seu centro de massa fica mais perto da cabeça. Entretanto, o centro de massa, indiferente a esse gesto ou a qualquer outro, descreve uma parábola por ser esta a trajetória de uma partícula lançada obliquamente e meramente sujeita à ação da força gravítica (única força significativa exterior).

## QUESTÕES PROPOSTAS

**Q 6.7**

Quais são os comportamentos possíveis do centro de massa de um sistema não actuado por forças exteriores (ou em que a resultante destas é zero), no decorrer de uma interacção? Apresentar exemplos.

**Q 6.8**

Poderá um sistema mover-se e ter momento linear nulo? Justificar a resposta.

## 6.5 Lei da conservação do momento linear

Acabámos de estabelecer, recorrendo às derivadas, a expressão

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_{CM} ,$$

que traduz a *lei fundamental de Newton aplicada aos sistemas de partículas*.

Como também é

$$\frac{d\vec{p}_s}{dt} = m \vec{a}_{CM}$$

(2.<sup>a</sup> expressão da secção 6.4.2),

a *lei fundamental de Newton* pode escrever-se segundo a forma mais geral:

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}_s}{dt}$$

Desta expressão podemos deduzir uma lei fundamental da Natureza, conhecida por **lei da conservação do momento linear**:

«Quando a *resultante das forças exteriores* que actuam num sistema é nula, o *momento linear* do sistema mantém-se constante.»

Com efeito, se

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}_s}{dt} = \vec{0} ,$$

é

$$\vec{p}_s = \text{cons.}^{\text{te}} \text{ (no tempo)}$$

Isto significa que, num *sistema isolado* ( $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ ), quaisquer que sejam as forças interiores de interacção, o momento linear não varia.

Na secção 4.17.2, Manual de Física do 10.<sup>o</sup> ano, já tínhamos feito esta dedução, ainda que por um processo mais elementar e, por isso mesmo, mais trabalhoso e menos geral.

### Súmula

### 6.6

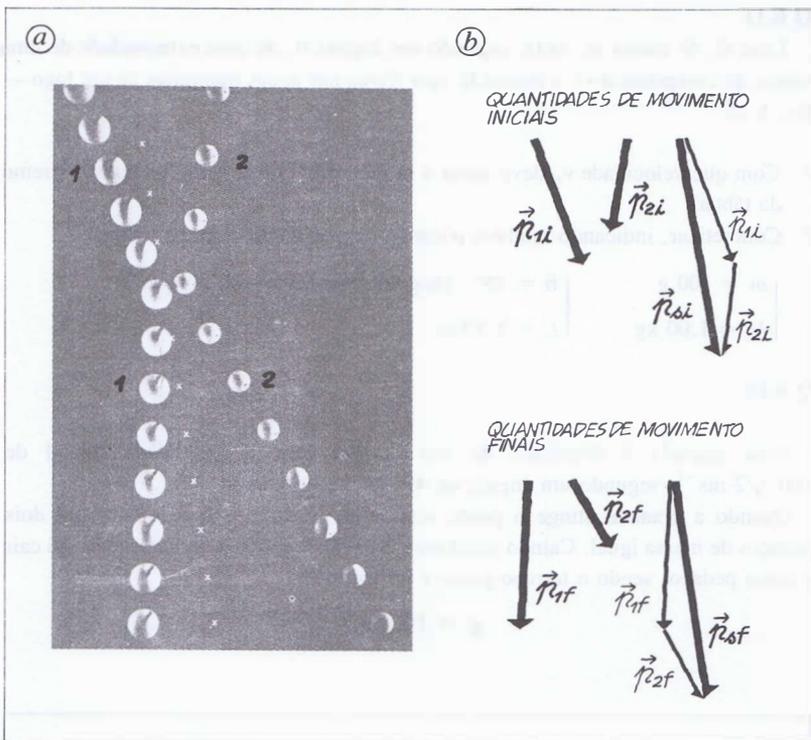
#### Lei da conservação do momento linear:

Mantém-se invariável o momento linear de um sistema enquanto nele não actuarem forças exteriores — *sistema isolado* — ou enquanto estas se mantiverem equilibradas.

Esta lei da conservação, que acaba de ser *deduzida* da lei fundamental, foi *induzida* a partir da experiência sobre colisões.

Quem pela primeira vez induziu a lei foi John Wallis, matemático inglês. Seguiram-se-lhe Christopher Wren, cientista e arquitecto inglês, e Huyghens, físico holandês. Estes físicos eram contemporâneos de Newton, que, aliás, também estabeleceu a lei, e trabalharam independentemente, na sequência de um prémio instituído em 1668 pela *Royal Society of London*.

A lei da conservação do momento linear pode induzir-se facilmente de variadas experiências, em particular de experiências com colisões de bolas de bilhar — fig. 6.13.



**Fig. 6.13**

(a) Fotografia de exposição múltipla das duas bolas de bilhar, 1 e 2, que colidiram.

(b) A partir de medidas na fotografia, determinaram-se as velocidades das bolas, multiplicaram-se pelas massas conhecidas e construíram-se os momentos lineares respectivos:

$\vec{p}_{1i}$  e  $\vec{p}_{2i}$  — antes da colisão

$\vec{p}_{1f}$  e  $\vec{p}_{2f}$  — após a colisão

Somando os momentos lineares, obtiveram-se os momentos lineares do sistema, verificando-se que:

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \Leftrightarrow \vec{p}_{si} = \vec{p}_{sf}$$

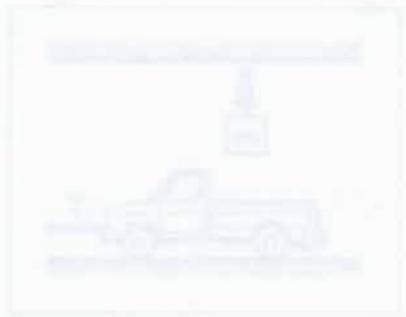
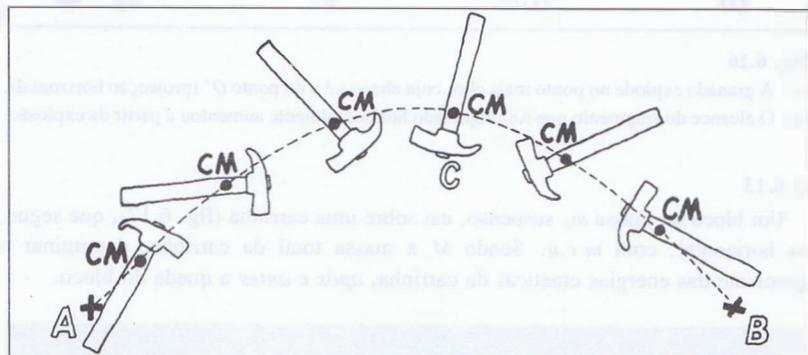
### QUESTÕES PROPOSTAS

**Q 6.9**

A Clarinha e o Rui, que pesa 76 kgf, disfrutaram de um passeio nas águas tranquilas de um lago, utilizando uma canoa cuja massa é 30 kg. Quando a canoa está parada, eles trocam de assentos, distantes um do outro 2,0 m, e localizados simetricamente em relação ao centro da canoa. O Rui observa então que a canoa se moveu 0,50 m em relação a um tronco de árvore submerso. Com este dado, ele calcula o peso da Clarinha, que se recusara a dizer-lho. Qual teria sido o cálculo do Rui?

**Q 6.10**

A figura 6.14 representa a trajectória do centro de massa  $CM$  de um martelo, lançado obliquamente, de um trabalhador para outro. Se, ao chegar à posição C, o *batente* do martelo se separasse do *cabo*, a trajectória do centro de massa  $CM$ , a partir de então, seria diferente ou igual? Justificar.



**Fig. 6.14** A trajectória do centro de massa  $CM$  seria a mesma, entre C e B, se o batente do martelo, em C, se separasse do cabo?

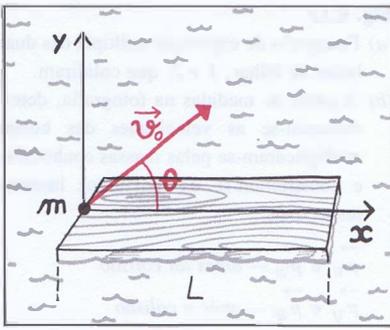


Fig. 6.15

**Q 6.11**

Uma rã, de massa  $m$ , salta, segundo um ângulo  $\theta$ , de uma extremidade de uma tábua, de comprimento  $L$  e massa  $M$ , que flutua nas águas tranquilas de um lago — fig. 6.15.

1. Com que velocidade  $v_0$  deve saltar a rã para cair exactamente no outro extremo da tábua?
2. Concretizar, indicando também o tempo de voo da rã, para os valores:

$$\begin{cases} m = 100 \text{ g} \\ M = 1,00 \text{ kg} \end{cases} \quad \begin{cases} \theta = 45^\circ \text{ (ângulo mais favorável: porquê?)} \\ L = 2,50 \text{ m} \end{cases}$$

**Q 6.12**

Uma granada é disparada de um canhão com a velocidade inicial de  $100\sqrt{2} \text{ ms}^{-1}$ , segundo um ângulo de  $45^\circ$  com a horizontal — fig. 6.16.

Quando a granada atinge o ponto mais alto, explode e fracciona-se em dois pedaços de massa igual. Caindo um destes pedaços segundo a vertical, onde irá cair o outro pedaço, sendo o terreno plano e horizontal?

$$g = 10 \text{ ms}^{-2}$$

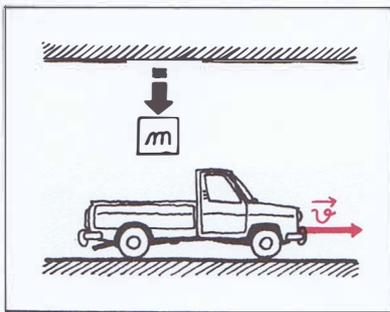


Fig. 6.17

Quando a carrinha, de massa  $M$ , segue em movimento rectilíneo e uniforme, cai sobre ela um bloco, de massa  $m$ , que estava suspenso.

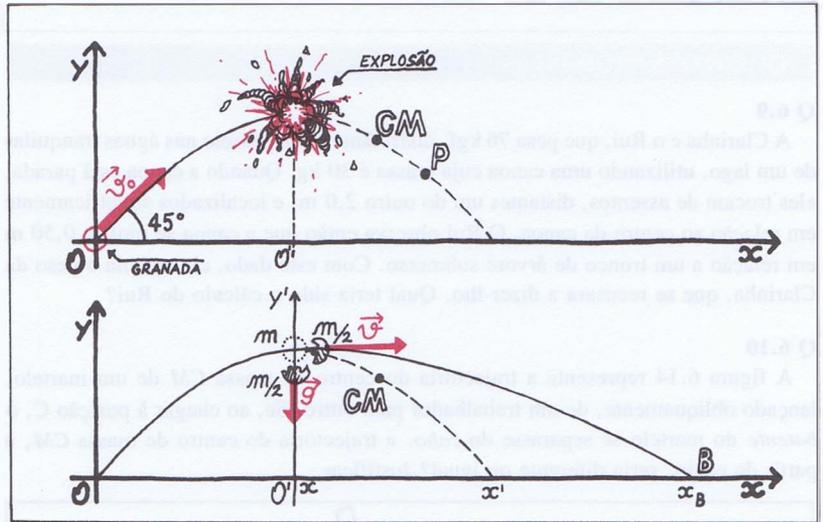


Fig. 6.16

- (a) A granada explode no ponto mais alto, cuja abcissa é a do ponto  $O'$  (projectção horizontal).
- (b) O alcance do fragmento que foi projectado horizontalmente aumentou a partir da explosão.

**Q 6.13**

Um bloco de massa  $m$ , suspenso, cai sobre uma carrinha (fig. 6.17), que segue, na horizontal, com *m.r.u.* Sendo  $M$  a massa total da carrinha, determinar o quociente das energias cinéticas da carrinha, *após* e *antes* a queda do bloco.

## 6.6 O pêndulo balístico

Um bloco de grande massa,  $M$ , suspenso de dois fios paralelos, pode oscilar como um pêndulo e permite determinar, a partir do seu deslocamento vertical,  $h$ , a velocidade da bala (ou de outro bólido qualquer) de massa  $m$ , que colide com ele — fig. 6.18. Daqui lhe vem o nome de **pêndulo** e o qualificativo de **balístico**.

Se o tempo  $\Delta t$  da colisão for muito pequeno, comparado com o período  $T$  da oscilação pendular, o que se verifica quando  $M$  for muito superior a  $m$ , as cordas permanecem *verticais durante a colisão*. Nestas condições, é nula a componente horizontal da resultante das forças exteriores que actuam no sistema ( $m + M$ ), pois tem-se

$$\vec{T} + \vec{T} + \vec{F}_g = \vec{F}_c,$$

sendo esta resultante centrípeta uma força vertical. Verifica-se, por isso, a *lei da conservação do momento linear* durante a colisão horizontal.

Vamos relacionar a velocidade do projectil  $m$ , antes de colidir e se incrustar no bloco, com a velocidade do sistema ( $m + M$ ), imediatamente após a colisão. Segundo a *lei da conservação do momento linear*, vem:

$$m v_0 = (m + M) v \Leftrightarrow$$

$$v_0 = \frac{m+M}{m} \cdot v$$

Tomando o plano horizontal em que ocorre o impacto para nível zero da energia potencial, a **energia mecânica total** antes da colisão é:

$$E_i = E_c + 0 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

A **energia mecânica total imediatamente após** essa colisão é:

$$E_i = E_c(A) + 0 = \frac{1}{2} (m + M) v^2$$

$$= \frac{1}{2} (m+M) \frac{m^2}{(m+M)^2} v_0^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m^2}{m+M} v_0^2$$

Daqui concluímos que durante a colisão *diminuiu a energia mecânica*

( $m > m \cdot \frac{m}{m+M}$ , porque  $\frac{m}{m+M}$  é um número fraccionário inferior a 1).

Isto deve-se de parte da energia mecânica ter sido convertida em energia não mecânica (energia interna) durante a colisão.

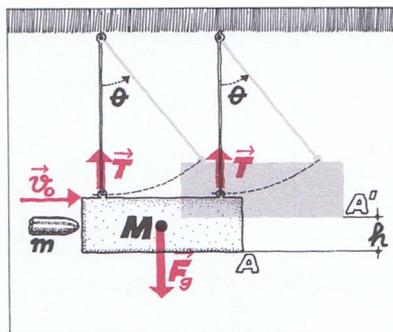


Fig. 6.18

Para  $m/M = 1/1000$ , apenas cerca de 0,10% da energia cinética da bala se converte em energia cinética do bloco (porque

$$\frac{E_{t,f}}{E_{c,i}} = \frac{m}{m+M} = \frac{1}{1001} = 0,10\%).$$

Mas esta pequena fracção de energia cinética, convertendo-se em energia mecânica  $(m + M)gh$ , permite determinar o valor da velocidade,  $v_0$ , da bala.

A expressão

$$v_o = \frac{m+M}{m} v$$

permite determinar a velocidade  $v_o$  do projectil, conhecidos  $m$  e  $M$  e determinando a velocidade  $v$ .

Para determinar esta, vamos considerar que, a partir do final da colisão, o pêndulo balístico se comporta como um pêndulo gravítico onde, como vimos, se verifica a *lei da conservação da energia mecânica*.

Temos, então:

Na **posição A** (imediatamente após a colisão):

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} (m+M) v^2 \\ E_p = 0 \end{cases} \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} (m+M) v^2$$

Na **posição A'** (posição mais alta atingida no movimento pendular)

$$\begin{cases} E_c = 0 \\ E_p = (m+M) g h \end{cases} \Rightarrow E_m = (m+M) g h$$

Iguando as expressões da energia mecânica total, vem:

$$\frac{1}{2} (m+M) v^2 = (m+M) g h \Rightarrow v^2 = 2 g h$$

Então a velocidade  $v_o$  do projectil antes do impacto será dada por

$$v_o = \frac{m+M}{m} \sqrt{2 g h}$$

O pêndulo balístico é um aparelho muito útil nos bons laboratórios de Física. Permite, por exemplo, medir a velocidade de um batente accionado mecanicamente. A partir da velocidade, conhece-se o momento linear. O conhecimento desta grandeza permite depois estudar experimentalmente colisões entre esse batente e vários corpos.



**Q 6.14**

A massa do bloco de um pêndulo balístico, de comprimento 10 cm, é 1,000 kg e a massa da bala que colide com ele é 1,0 g. Após a colisão, o bloco, com a bala incrustada, subiu 2,0 cm. Considerando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ :

1. Determinar a velocidade da bala.
2. Determinar as variações de energia cinética e potencial do sistema projétil-bloco durante a colisão, e tirar conclusões do resultado.
3. Determinar a relação

$$\frac{E_{c,f}}{E_{c,i}}$$

entre as energias cinéticas final e inicial na colisão.

4. Determinar a tensão  $T$  de cada um dos dois fios, antes e imediatamente após a colisão.  
Aumentou ou diminuiu? De quanto (em percentagem)?

**6.7 Energia cinética interna. Energia cinética de translação de um corpo e de um sistema de corpos**

A energia cinética de um corpo tem valores diferentes em referenciais diferentes, porque a velocidade varia com o referencial. Em particular, será nula num referencial onde o corpo esteja em repouso.

Reflectindo um pouco nesta última afirmação, ela suscita crítica e não parece passível de aceitação unânime. De facto, considerando que o corpo é um sistema de partículas em interacção e com movimentos relativos, será que, mesmo num referencial em que o corpo está parado, a energia cinética do corpo é realmente nula?

Vamos procurar uma resposta, escolhendo dois referenciais — um inercial, exterior ao corpo, e outro com origem no centro de massa, CM, do corpo — fig. 6.19. A seguir, calculamos a energia cinética das partículas que constituem o corpo nos dois referenciais e comparamos os resultados obtidos em cada referencial.

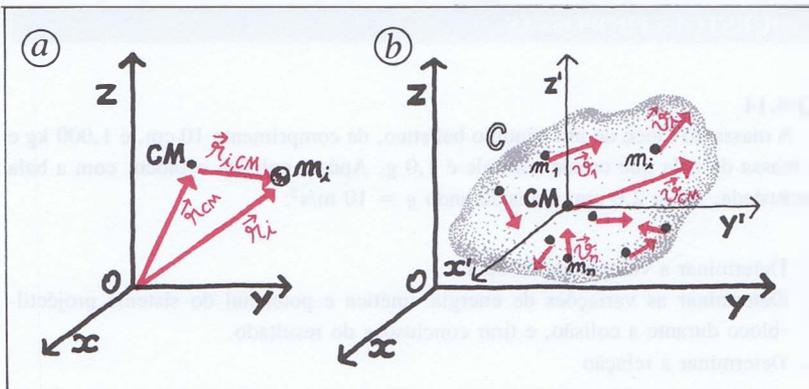


Fig. 6.19

(a) Os vectores posição de uma partícula  $m_i$ , no referencial inercial  $(O, x, y, z)$  e num referencial ligado ao centro de massa,  $CM$ , são, respectivamente:

$$\vec{r}_i \text{ e } \vec{r}_{i,CM}$$

(b) A energia cinética do corpo  $(C)$  no referencial  $(O, x, y, z)$  é a soma da energia cinética interna,  $E_c(i)$ , com a energia cinética de translação ou do centro de massa,  $E_c(CM)$ :

$$E_c = E_c(i) + E_c(CM)$$

Consideremos o corpo formado por um número  $n$  de partículas discretas.

Designamos, genericamente, por  $m_i$  a massa da partícula de ordem  $i$  (ou partícula número  $i$ ), por  $\vec{v}_i$  a sua *velocidade no referencial inercial* (representada na figura) e por  $\vec{v}_{i,CM}$  a sua *velocidade no referencial ligado ao centro de massa* (não representada na figura).

A velocidade do centro de massa,  $\vec{v}_{CM}$ , no referencial inercial, é a *velocidade de transporte*.

Para a partícula genérica  $i$ , podemos escrever — fig. 6.19, (a):

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_{i,CM}$$

Derivando em ordem ao tempo, obtemos:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{i,CM} ,$$

expressão esta que traduz a regra de composição de velocidades já estudada.

Vamos, em seguida, multiplicar internamente, membro a membro, a relação anterior por ela própria (corresponde a elevá-la ao quadrado). Vem:

$$\begin{aligned} \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i &= (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_{i,CM}) \cdot (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_{i,CM}) \iff \\ v_i^2 &= v_{CM}^2 + v_{i,CM}^2 + 2 \vec{v}_{i,CM} \cdot \vec{v}_{CM} \end{aligned}$$

Multiplicando por

$$\frac{1}{2} m_i$$

ambos os membros, considerando o conjunto de todas as partículas e somando, fica:

$$\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_{i,CM}^2 + \sum m_i \vec{v}_{i,CM} \cdot \vec{v}_{CM}$$

Analisemos separadamente cada um destes termos.

No **primeiro membro**, a soma das energias cinéticas das partículas no referencial inercial exterior representa a energia cinética do corpo nesse referencial:

$$\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = E_c, \quad \text{no referencial } (O, x, y, z)$$

No **primeiro termo do segundo membro** aparece uma soma em que o factor  $v_{CM}^2$  é constante. Tem-se, então, pondo-o em evidência:

$$\sum \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 = \frac{1}{2} v_{CM}^2 (\sum m_i) = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

Este termo, em que  $m$ , soma das massas das partículas, representa a massa do corpo, não é senão a energia cinética do corpo se toda a sua massa estivesse concentrada no centro de massa.

Trata-se da chamada **energia cinética do centro de massa** ou **energia cinética de translação**:  $E_c (CM)$ .

É, pois,

$$\sum \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 = E_c (CM)$$

No **segundo termo do segundo membro** aparece a soma das energias cinéticas das partículas em relação ao centro de massa, já que  $v_{i,CM}$  representa a velocidade de cada partícula  $i$  em relação a esse ponto. Essa energia cinética do corpo em relação ao referencial com origem no centro de massa é a chamada **energia cinética interna** do corpo,  $E_c (i)$ :

$$\sum \frac{1}{2} m_i v_{i,CM}^2 = E_c (i)$$

Finalmente, o **último termo do segundo membro é nulo**. E porquê? Pondo em evidência  $\vec{v}_{CM}$  na soma, vem:

$$\sum m_i \vec{v}_{i,CM} \cdot \vec{v}_{CM} = \vec{v}_{CM} (\sum m_i \vec{v}_{i,CM})$$

O que está dentro de parêntesis representa o momento linear do sistema em relação ao centro de massa, que é nulo, constituindo este facto uma das principais propriedades do centro de massa (rever secção 6.4.1).

Num referencial inercial, a energia cinética de um sistema de partículas é a soma de duas parcelas:

- a **energia cinética interna** ou energia cinética num referencial ligado ao centro de massa;
- a **energia cinética de translação** ou energia cinética do centro de massa.

Concluimos, portanto, que a igualdade analisada se pode traduzir, simplificada, por

$$E_c = E_c(CM) + E_c(i),$$

isto é: a **energia cinética de um corpo num referencial inercial exterior** (*referencial de laboratório, RL*) é a soma da **energia cinética do seu centro de massa ou energia cinética de translação** com a **energia cinética interna** (ou energia cinética num referencial ligado ao centro de massa, isto é, ligado ao referencial próprio — *RP*).

Apliquemos esta conclusão geral ao sistema de duas partículas de massas tão diferentes como são a Terra e um corpo próximo, de massa  $m$ , mas não pertencente à Terra. Somos levados a concluir que o centro de massa do sistema é o da Terra, devido à enorme diferença entre as massas. Portanto, a energia cinética da Terra, em relação ao centro de massa, é nula, e a *energia cinética interna do sistema é a do corpo em relação à Terra*. Por outro lado, a *energia cinética de translação* do sistema pode-se considerar a *energia cinética da Terra em relação ao Sol* (consideramos este como referencial inercial).

É evidente que, neste sistema, a parcela  $E_c(i)$  é desprezável perante  $E_c(CM)$ , pelo que se pode considerar

$$E_c = E_c(CM)$$

No entanto, há situações em que é importante considerar as variações da *energia cinética do corpo* como autênticas *variações da energia cinética interna do sistema corpo-Terra*.

Finalmente, chamamos a atenção para o facto de que a energia cinética interna *não é detectável* através da *variação de posição* (do corpo ou das partículas do sistema), mas é denunciada por um *aumento de temperatura*.

#### QUESTÕES PROPOSTAS

##### Q 6.15

Num sistema grave-Terra, sendo  $m$  a massa do grave e  $M$  a massa da Terra:

1. Determinar a relação entre a velocidade do grave e a velocidade da Terra relativamente ao *CM* do sistema.
2. Determinar a relação entre as energias cinéticas do grave e da Terra num referencial ligado ao *CM* do sistema.
3. Mostrar que é desprezável a energia cinética da Terra, concretizando para um grave de massa  $m = 1,00$  kg e sabendo que a massa da Terra é  $6,0 \times 10^{24}$  kg.

## 6.8. Movimento dos sistemas de massa variável.

### 6.8.1 Generalidades

Chamam-se **forças reactivas** as forças desenvolvidas nas máquinas a reacção. A fig. 6.20 mostra quatro exemplos de máquinas a reacção.

Em todas estas máquinas há uma certa massa — **massa propulsora** — que adquire momento linear em determinado sentido. Em consequência disso e da *lei da conservação do momento linear*, a máquina adquire momento linear em sentido oposto.

O momento linear comunicado à massa propulsora depende quer da *velocidade de escape* dessa massa, de que a seguir falaremos, quer do valor da massa.

Com propulsores químicos, obtêm-se velocidades de escape da ordem de grandeza de 2 km/s.

Por cada kg dum satélite que se põe em órbita (para o que é necessário comunicar-lhe a *velocidade orbital* ou *1.ª velocidade cósmica* de 8 km/s), gastam-se cerca de 1000 kg de propulsor.

Nos *foguetões*, a massa propulsora é a massa dos gases produzidos por combustão. Os foguetões podem ser de dois tipos:

- *de combustível líquido* — há dois tanques, um para o combustível (hidrogénio líquido ou diferente), outro para o comburente (oxigénio líquido ou diferente);
- *de combustível sólido*.

Nos *balões*, a massa propulsora é, como sabemos, o ar que vai saindo do balão, à medida que este se esvazia.

Nos *aviões a jacto*, o comburente é o ar admitido pela parte da frente dos motores a reacção; a seguir, é comprimido e queimado com o combustível na câmara de combustão.

As *lulas* admitem água no interior do corpo; esta é depois ejectada, por meio de forças de tensão muscular, a alta velocidade.

### 6.8.2 Movimento das máquinas a reacção

Vamos estudar o movimento das máquinas a reacção como um movimento de *sistemas que se movem por perda de massa* — **sistemas de massa variável**.

Consideremos um sistema de **massa total**  $m$  a mover-se *na ausência de forças exteriores*. Nestas condições, o  $CM$  ou está em repouso ou está a mover-se com velocidade constante,  $\vec{v}_{CM}$ , passando da posição  $A$  para a posição  $B$  no intervalo de tempo  $\Delta t$  — fig. 6.21.

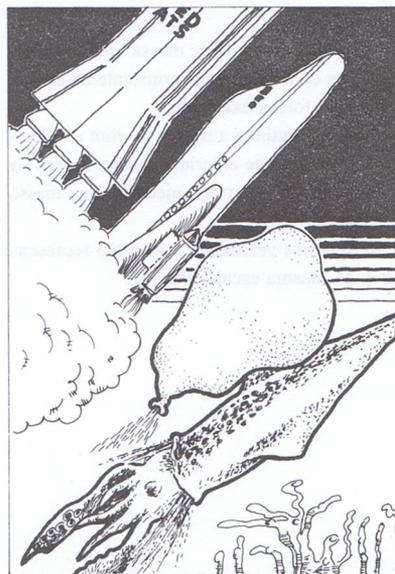
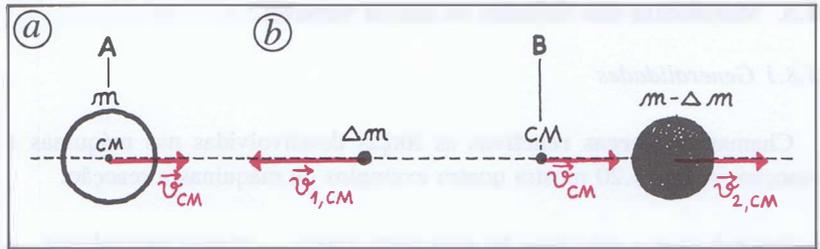


Fig. 6.20 Exemplos de máquinas a reacção: foguetão, avião a jacto, balão e lula.

**Fig. 6.21**

- (a) O CM do sistema de massa total  $m$  desloca-se com velocidade constante na ausência de forças exteriores.  
 (b) O CM continua a mover-se com a velocidade constante anterior, mesmo depois da interação interna (ejeção da massa  $\Delta m$ ).

Os vectores velocidade não estão representados na mesma escala. Porquê?



Se neste intervalo de tempo ocorrer uma **interacção interna** da qual resulte, por exemplo, a ejeção de uma pequena porção  $\Delta m$  de massa, o movimento do CM não se modificará, isto é, continuará a mover-se com a velocidade anterior, *indiferente* à interacção — fig. 6.21, (b): a sua posição, após a interacção, continuará a ser B, porque ela só depende das forças exteriores e estas não foram alteradas (no nosso exemplo, nem sequer existem).

Daqui resulta que, se uma parte da massa do sistema, a **massa ejectada**  $\Delta m$ , se atrasou em relação à posição B do CM, a outra parte da massa do sistema, a **massa sobranete** ( $m - \Delta m$ ), terá de se adiantar em relação a essa posição B. Porquê? Não só porque o CM tem de se situar entre as duas massas, mas, também, porque o momento linear total das diferentes partes do sistema, em relação ao CM, tem de ser nulo — uma das propriedades fundamentais do CM: portanto, se o momento linear de uma parte do sistema diminuiu após a interacção, o momento linear da outra parte do sistema aumentou de quantidade igual, mantendo-se nulo o momento linear resultante.

Exprimindo esta propriedade do CM, no sistema de massa total  $m$ , temos:  
 — **antes** da interacção:

$$\vec{p}_{s,CM} = \vec{0}$$

— **após** a interacção — fig. 6.21, (b):

$$\Delta m \cdot \vec{v}_{1,CM} + (m - \Delta m) \vec{v}_{2,CM} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Delta m (\vec{v}_{1,CM} - \vec{v}_{2,CM}) + m \cdot \vec{v}_{2,CM} = \vec{0}$$

A expressão

$$\vec{v}_{1,CM} - \vec{v}_{2,CM} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2,$$

onde  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  são, respectivamente, as velocidades da massa ejectada  $\Delta m$  e da massa sobranete ( $m - \Delta m$ ) num referencial ligado à Terra, representa precisamente a **velocidade relativa** da massa ejectada em relação à massa sobranete e chama-se **velocidade de escape** — fig. 6.22.

Conclui-se, então, que

$$\vec{v}_{2,CM} = - \frac{\Delta m}{m} \cdot \vec{v}_{esc}$$

A velocidade de escape e a velocidade da massa sobran-te têm, pois, sentido contrário.

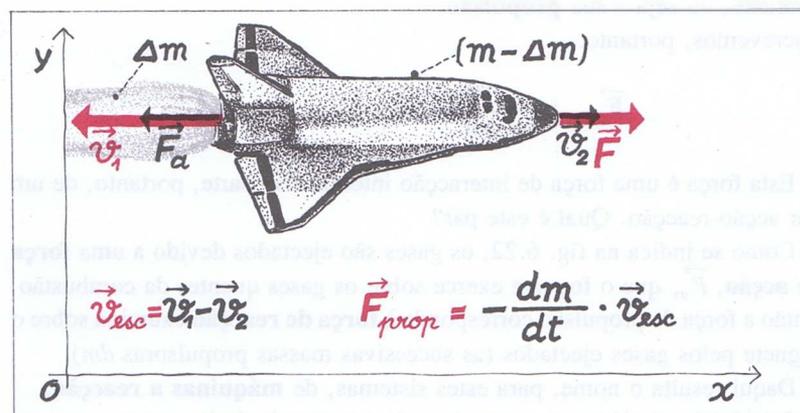


Fig. 6.22

Num foguetão, a velocidade de escape

$$\vec{v}_{esc} = \vec{v}_{1,CM} - \vec{v}_{2,CM} \iff$$

$$\vec{v}_{esc} = (\vec{v}_{1,CM} + \vec{v}_{CM}) - (\vec{v}_{2,CM} + \vec{v}_{CM})$$

é também

$$\vec{v}_{esc} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

num referencial inercial e é, ainda, a velocidade dos gases ejetados relativamente ao foguetão.

Consideremos novamente o intervalo de tempo  $\Delta t$  em que é ejetada a massa  $\Delta m$ . Durante este tempo, qual é o acréscimo,  $\Delta \vec{v}$ , da velocidade da massa sobran-te?

Antes da ejeccção de  $\Delta m$ , é  $\vec{v}_{2,CM} = \vec{0}$ , como se vê na fig. 6.21, (a).

Após a ejeccção de  $\Delta m$ , é precisamente

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_{2,CM},$$

como se mostra na fig. 6.21, (b).

Podemos então escrever:

$$\Delta \vec{v} = -\frac{\Delta m}{m} \cdot \vec{v}_{esc}$$

Dividindo por  $\Delta t$  e multiplicando por  $m$  ambos os membros desta igualdade, obtemos:

$$m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = -\frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \vec{v}_{esc}$$

Tomando os limites quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , e admitindo que é constante a velocidade de escape dos gases ejetados, vem:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{dm}{dt} \cdot \vec{v}_{esc}$$

O primeiro membro representa uma força. De que força se trata, visto que não há forças exteriores?

Em primeiro lugar, ela surge devido à ejeccção da massa  $dm$  e tem sentido oposto ao da velocidade de escape.

Em segundo lugar, é essa força que determina a aceleração da massa sobran-te ( $\frac{d\vec{v}}{dt}$ ).

Designa-se por **força propulsora**, por ser precisamente a única força que, na ausência de forças exteriores, provoca a aceleração da massa sobranete, ou seja a sua **propulsão**.

Escrevemos, portanto:

$$\vec{F}_{\text{prop}} = - \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v}_{\text{esc}}$$

Esta força é uma força de interacção interna. Faz parte, portanto, de um par acção-reacção. Qual é este par?

Como se indica na fig. 6.22, os gases são ejectados devido a uma **força de acção**,  $\vec{F}_a$ , que o foguete exerce sobre os gases quentes da combustão. Então a força de propulsão corresponde à **força de reacção** exercida sobre o foguete pelos gases ejectados (as sucessivas massas propulsoras  $dm$ ).

Daqui resulta o nome, para estes sistemas, de **máquinas a reacção**.

Pela 3.ª lei de Newton, estas duas forças são **simétricas**.

Mudemos agora de sistema. Vamos tomar para **novo sistema** a *massa que fica após cada ejeção*.

Neste caso trata-se de um sistema de massa variável (o foguete, por exemplo). Se é actuado por forças exteriores, como a força gravítica,  $\vec{F}_g$ , a lei de Newton que, **em cada instante**, se aplica ao sistema, toma a forma:

$$\vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{prop.}} = m \vec{a} \iff$$

$$\vec{F}_{\text{ext}} - \frac{dm}{dt} \vec{v}_{\text{esc}} = m \vec{a} ,$$

onde:

$m$  = massa do sistema no instante  $t$ ;

$\vec{a}$  = aceleração do sistema no instante  $t$ ;

$\frac{dm}{dt}$  = massa expelida por unidade de tempo no instante  $t$  (grandeza sempre positiva).

Se, porém, considerarmos a grandeza  $dm$  não como massa expelida no tempo  $dt$  (sempre positiva), mas como variação de massa do sistema no instante  $t$ , temos:

$dm > 0$ , se o sistema ganha massa (gota de chuva que aumenta a sua massa por condensação do vapor de água);

$dm < 0$ , se o sistema perde massa (foguete, arma a disparar, etc.).

Nestas condições, a fórmula geral que contempla as duas situações (perda ou ganho de massa) será, designando por  $\vec{v}_{\text{rel}}$  a *velocidade relativa*:

$$\vec{F}_{\text{reacção}} = \frac{dm}{dt} \vec{v}_{\text{rel}}$$

### Súmula

6.8

Nos sistemas que se movem por perda de massa, como nas máquinas a reacção, actuam as *forças exteriores* e a **força propulsora** ou *de reacção* (devida à ejeção da massa propulsora).

A força propulsora é

$$\vec{F}_{\text{reac}} = \vec{F}_{\text{prop}} = - \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v}_{\text{rel}}$$

A lei fundamental do movimento aplicada às máquinas a reacção toma a forma seguinte:

$$\vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{reac}} = m \vec{a}$$

Esta expressão geral apenas é aplicável *em cada instante*  $t$ , devido ao facto de a massa do sistema variar com o tempo:

$$m = f(t)$$

porque:

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} < 0 \Rightarrow \vec{F}_{\text{reação}} = - \left| \frac{dm}{dt} \right| \vec{v}_{\text{rel}} ; \\ \frac{dm}{dt} > 0 \Rightarrow \vec{F}_{\text{reação}} = \frac{dm}{dt} \vec{v}_{\text{rel}} \end{cases}$$

Tudo o que fica dito é aplicável a diversos sistemas de massa variável, como: uma metralhadora enquanto dispara rajadas de balas; uma gota de chuva cuja massa vai diminuindo por evaporação ou aumentando por condensação da humidade ambiente; um depósito que deixa cair areia ou minério sobre uma correia transportadora; etc.

► G.E.6.5

QUESTÕES PROPOSTAS

Q 6.16

Um míssil é lançado verticalmente. Tem, ao partir, a massa de 100 kg e ejecta gases, nos sucessivos instantes da partida, à razão de 2 kg por segundo, com a velocidade de escape de  $2 \times 10^3$  m/s.

Considerando  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ , calcular a aceleração do míssil no instante da partida.

Q 6.17

Uma metralhadora está montada sobre um vagão que se pode mover, com atrito não significativo, em carris horizontais — fig. 6.23.

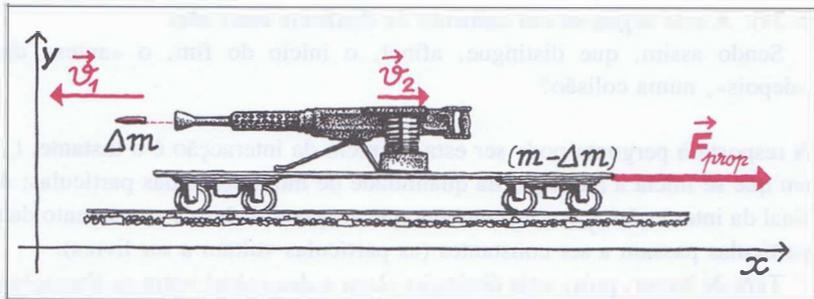


Fig. 6.23

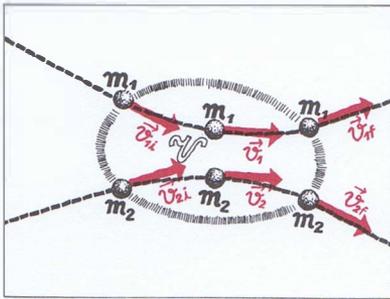
Quando a metralhadora começa a disparar, o vagão inicia o seu deslocamento horizontal e de sentido oposto ao do movimento das balas.

A metralhadora dispara, horizontalmente e na direcção da via férrea, 10 balas por segundo, de 10 g cada uma e com a velocidade de escape, constante, de  $500 \text{ ms}^{-1}$ .

Quando começa a disparar e antes do primeiro disparo, a massa do vagão e da metralhadora é 200 kg.

Determinar:

1. A aceleração do vagão quando inicia os disparos.
2. A força propulsora no instante em que inicia os disparos.



**Fig. 6.24.** As partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$ , que se aproximam, **interactuam**, sem se tocarem, numa região de vizinhança  $V$ , passando depois a afastar-se.

As velocidades no início, *detectável*, da interacção eram  $\vec{v}_{1i}$  e  $\vec{v}_{2i}$ , para as massas  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente; no final, igualmente *detectável*, eram  $\vec{v}_{1f}$  e  $\vec{v}_{2f}$ .  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  são as velocidades das partículas quando estão *mais próximas*.

## 6.9 Colisões

### 6.9.1 Significado geral

Em Física, a **colisão** ou **choque** de duas partículas, de massas  $m_1$  e  $m_2$ , entende-se como uma *interacção próxima*, que não envolve necessariamente o contacto entre as partículas — fig. 6.24.

Por exemplo, a deflexão da trajectória de um cometa quando ele se aproxima do sistema solar é considerada uma *colisão*.

A nível macroscópico ou dos corpos, na maioria dos casos ocorre o contacto. Mas a nível microscópico ou das partículas elementares, em geral não ocorre o contacto mesmo quando as partículas têm carga de sinal oposto. Há situações, porém, em que o contacto pode acontecer, como são, por exemplo, as reacções nucleares com partículas a penetrar no núcleo dos átomos: mesmo assim, o contacto não é sempre garantido, porque tanto o átomo como o núcleo são espaços onde as partículas estão distribuídas discretamente, isto é, não encostadas.

Por vezes usa-se o termo *espalhamento* (do inglês *scattering*) para indicar colisões em que as partículas finais são as mesmas que as iniciais.

Duas partículas ou dois corpos, a distância infinita, não interactuam, quer dizer, são *partículas livres*. À medida, porém, que, por qualquer razão, no seu movimento livre, se vão aproximando, inicia-se a interacção. Esta, depois, vai crescendo com a aproximação. Em consequência, a distância entre as partículas vai diminuindo até um *valor mínimo* (fig. 6.24). A este segue-se um aumento da distância entre elas.

Sendo assim, que distingue, afinal, o início do fim, o «antes» do «depois», numa colisão?

A resposta à pergunta pode ser esta: o início da interacção é o instante,  $t_i$ , em que se inicia a alteração da quantidade de movimento das partículas; o final da interacção,  $t_f$ , é o instante em que as quantidades de movimento das partículas passam a ser constantes (as partículas voltam a ser livres).

Terá de haver, pois, uma distinção *clara e detectável* entre as alterações de velocidade. A nitidez desta distinção depende do tipo de colisões e da precisão do instrumento com que se cronometra o intervalo de tempo  $[t_i, t_f]$ .

Partindo desta convenção, passamos a usar a notação seguinte, de leitura fácil e contendo muita informação:

$v_{1i}$  e  $v_{2i}$  — valores das velocidades das partículas no instante inicial,  $t_i$ , da colisão;

$v_{1f}$  e  $v_{2f}$  — valores das velocidades das partículas no instante final,  $t_f$ , da colisão.

## 6.9.2 Colisões elásticas e inelásticas

Durante uma colisão, as massas das partículas,  $m_1$  e  $m_2$ , poderão ou não permanecer invariáveis, quer porque pode haver variação de massa com a velocidade, quer porque as partículas finais podem também não ser as mesmas, como frequentemente ocorre nas colisões entre partículas atômicas e nucleares (reações nucleares), quer porque podem interagir sistemas de tipo massa variável (como o que estudamos na secção anterior).

No nosso estudo vamos considerar apenas *colisões de partículas* cuja *massa se mantém constante*, isto é, nem se desintegram, nem perdem nem ganham massa, nem a sua velocidade é tão grande que exija o emprego das fórmulas relativistas para o momento linear e para a energia.

Há dois tipos fundamentais de colisões: as elásticas e as não elásticas.

### Nas colisões elásticas:

1.ª Não há diferenças entre a *energia cinética final* e a *energia cinética inicial* do sistema, ou seja:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

2.ª Há conservação do momento linear, isto é:

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}$$

Uma **colisão inelástica** é aquela em que *não se conserva a energia cinética*, continuando, porém, a haver conservação do momento linear se o sistema estiver isolado.

O caso limite das colisões inelásticas, por exemplo, é aquele em que as partículas, após a colisão, *seguem juntas* (**colisões perfeitamente inelásticas**).

**Tanto nas colisões elásticas como nas inelásticas**, ocorrem *trocadas de energia* e de *momento linear* entre as partículas. Em todas as colisões em sistemas isolados se observa a conservação do momento e também da energia total. Porém, nas colisões inelásticas, a variação de energia cinética é convertida, p. ex., em energia térmica e/ou em energia potencial de deformação na colisão (energia potencial interna).

A *nível dos fenómenos atômicos*, muitas das colisões são perfeitamente elásticas — são, até, as únicas colisões realmente elásticas que se conhecem.

A *nível macroscópico*, as colisões são inelásticas, devido à intervenção de forças não conservativas — atrito e resistência dos fluidos ao movimento, o que não sucede no «vácuo» interatômico. No entanto, em muitos casos, consideram-se as colisões ordinárias *aproximadamente elásticas*.

► G.E.6.6

### 6.9.3 Coeficiente de restituição em colisões directas, frontais ou unidimensionais

Consideremos uma colisão simples — a *colisão frontal elástica*, também chamada *colisão unidimensional*, fig. 6.25 — de duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$ , movendo-se no mesmo sentido.

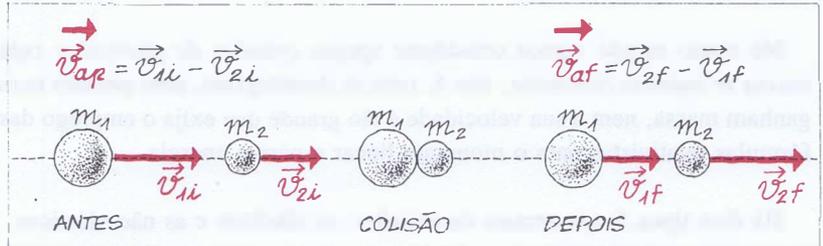


Fig. 6.25 Colisão frontal elástica (ou unidimensional)

— Velocidade de aproximação das partículas **antes** da colisão — é a velocidade relativa da partícula  $m_1$  em relação à partícula  $m_2$ :

$$\vec{v}_{ap} = \vec{v}_{1i} - \vec{v}_{2i} \iff v_{ap} = v_{1i} - v_{2i}$$

— Velocidade de afastamento das partículas **depois** da colisão — a velocidade relativa da partícula  $m_2$  em relação à partícula  $m_1$ :

$$\vec{v}_{af} = \vec{v}_{2f} - \vec{v}_{1f} \iff v_{af} = v_{2f} - v_{1f}$$

Como, neste caso, todas as velocidades têm a mesma direcção, podemos escrever a equação da conservação do momento linear em termos escalares (algébricos).

Conjuntamente com a equação da conservação da energia cinética (válida nas transformações elásticas), obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \\ m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \end{cases}$$

Isolando os termos referentes à mesma partícula, obtemos:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = \frac{1}{2} m_2 (v_{2f}^2 - v_{2i}^2) \\ m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i}) \end{cases}$$

Ou ainda, desdobrando a diferença de quadrados:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m_1 (v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = \frac{1}{2} m_2 (v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i}) \\ m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i}) \end{cases}$$

Dividindo ordenadamente e simplificando, vem:

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2i} + v_{2f} \iff v_{1i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{1f}$$

Atendendo a que, antes da colisão, a **velocidade de aproximação** das partículas (ver fig. 6.25 e respectiva legenda) é

$$v_{ap} = v_{1i} - v_{2i}$$

e que a **velocidade de afastamento** das partículas é

$$v_{af} = v_{2f} - v_{1f}$$

a leitura da expressão deduzida mostra-nos que:

— na **colisão elástica**, a *velocidade de aproximação no instante inicial é igual à velocidade de afastamento no instante final*.

Numa **colisão frontal**, também chamada *directa* ou *unidimensional*, seja elástica ou inelástica, chama-se **coeficiente de restituição**,  $e$ , ao quociente

$$e = \frac{v_{af}}{v_{ap}}$$

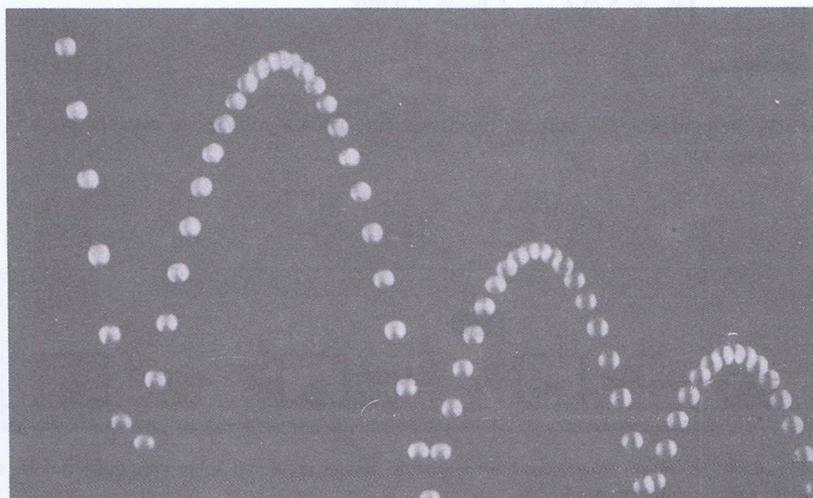
Para as colisões *perfeitamente elásticas*, temos:

$$v_{ap} = v_{af} \Rightarrow e = 1$$

Para as colisões *perfeitamente inelásticas* ( $m_1$  e  $m_2$  seguem juntos após a colisão), temos:

$$v_{af} = 0 \Rightarrow e = \frac{0}{v_{ap}} = 0$$

Portanto, o intervalo, fechado, de variação do coeficiente de restituição é o intervalo  $[0, 1]$  — fig. 6.27.



## Súmula

6.9

Em toda a **colisão** ocorrida entre partículas que constituem um *sistema isolado*, há *conservação do momento linear* (segundo a respectiva lei de conservação):

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} + \dots = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} + \dots$$

Se a **colisão for elástica**, há, além disso, *conservação da energia cinética*, antes e depois da colisão, e *conservação da energia potencial* (interna) no início e no fim:

$$E_c \text{ (antes)} = E_c \text{ (depois)}$$

$$E_p \text{ (antes)} = E_p \text{ (depois)}$$

Se a **colisão for inelástica**, estas grandezas antes e depois *não conservam os respectivos valores*.

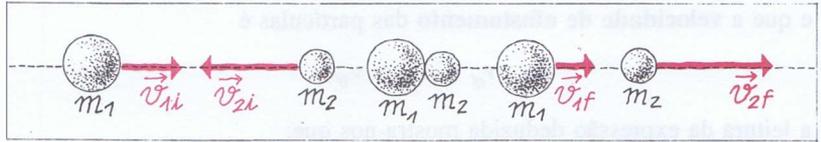
## ► G.E. 6.7

**Fig. 6.26**

No choque bola-chapa que a rebate (Terra), o *coeficiente de restituição* está compreendido entre 0 e 1, porque a colisão não é perfeitamente elástica nem é perfeitamente inelástica. Esse coeficiente é dado por  $\sqrt{\frac{h'}{h}}$ , sendo  $h'$  e  $h$  as alturas máximas consecutivas que a bola atinge (ver Q 6.20).

**Q 6.18**

1. Escrever as expressões das velocidades de aproximação e de afastamento na situação apresentada na fig. 6.27.



**Fig. 6.27**

2. Mostrar que nesta colisão elástica se verifica também que a velocidade de aproximação inicial é igual à velocidade de afastamento final.

**Q 6.19**

Uma bola bate perpendicularmente numa parede. Se o choque for elástico, com que velocidade retrocede? Justificar.

**Q 6.20**

Deixa-se cair verticalmente uma bola sobre uma chapa polida e indeformável. Cai de um altura  $h_i$ , que se mede, e retoma a altura  $h_f < h_i$ , que igualmente se mede. Mostrar que o coeficiente de restituição é

$$e = \sqrt{\frac{h_f}{h_i}}$$

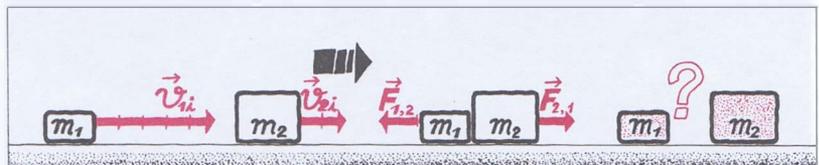
**Q 6.21**

Sendo dados (fig. 6.28)

$$\begin{cases} m_1 = 1,00 \text{ kg} \\ v_{1i} = 5 \text{ m/s} \end{cases} \quad \begin{cases} m_2 = 2,00 \text{ kg} \\ v_{2i} = 2,0 \text{ m/s} \end{cases},$$

determinar:

1. As velocidades dos corpos, imediatamente após a colisão, se esta for perfeitamente elástica.



**Fig. 6.28** Na colisão frontal entre os corpos de massas  $m_1$  e  $m_2$ , sobre uma placa polida, o atrito não é significativo.

- As velocidades dos corpos, imediatamente após a colisão, se esta for perfeitamente inelástica.
- A variação de energia cinética do sistema no 2.º caso.

### Q 6.22

Na fig. 6.29 voltamos a apresentar a fotografia de exposição múltipla do choque elástico de duas bolas de massas

$$m_1 = 6,0 \text{ kg} \quad \text{e} \quad m_2 = 1,0 \text{ kg}$$

em condições tais que o sistema das duas bolas se pode considerar actuado por forças exteriores de resultante nula.

- Antes e depois do choque elástico, o *CM* do sistema, cujas posições estão assinaladas por cruzes, desloca-se com velocidade constante. Justificar este resultado.

- Considerando os seguintes dados:

veloc. de  $m_1$  antes do choque —  $v_{1i} = 10 \text{ ms}^{-1}$

veloc. de  $m_2$  antes do choque —  $v_{2i} = 40 \text{ ms}^{-1}$

veloc. de  $m_1$  após o choque —  $v_{1f} = 10 \text{ ms}^{-1}$

ângulo das direcções do movimento de  $m_1$  com a direcção do movimento do *CM*, antes e após o choque:

$$\alpha_1 = \beta_1 = 30^\circ ;$$

- Provar que são iguais os ângulos  $\alpha_2$  e  $\beta_2$  que formam as direcções do movimento de  $m_2$  com a direcção do movimento do *CM*.
- Determinar o valor comum de  $\alpha_2$  e  $\beta_2$ .
- Determinar a velocidade do *CM*.

### Q 6.23

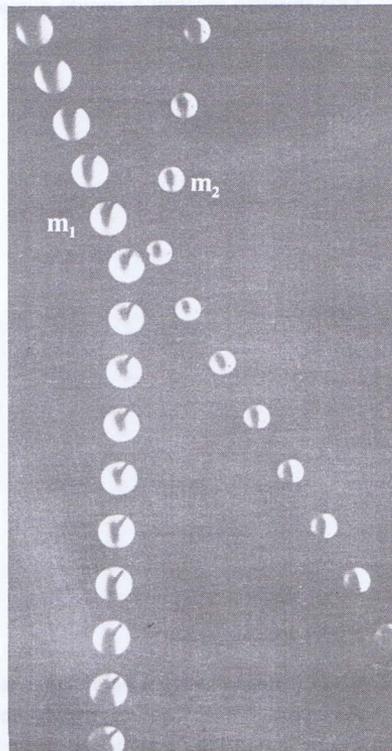
Mostrar que na colisão **não frontal** (*bidimensional*) entre duas esferas pequenas, iguais (pode-se ignorar o movimento de rotação das esferas), sendo uma esfera móvel e estando a outra fixa, as duas esferas são sempre projectadas *perpendicularmente* desde que a *colisão* seja *elástica*.

### Q 6.24

Um bloco em repouso explode, dividindo-se em três pedaços. Dois deles, com massa igual, deslocam-se em direcções perpendiculares e com velocidades de  $30 \text{ ms}^{-1}$ . Que velocidade adquire o terceiro, com massa tripla da de qualquer dos outros?

### Q 6.25

Um rapaz, de massa  $40,0 \text{ kg}$ , puxa para si um objecto, do qual dista  $40,0 \text{ m}$ , por meio de uma corda inextensível. Desprezam-se os atritos. Após um rápido puxão, o rapaz e o objecto deslizaram até se encontrarem num ponto situado a  $10,0 \text{ m}$  da posição inicial do objecto. Qual é a massa do objecto?



**Fig. 6.29**  
Colisão elástica de duas bolas de massas diferentes.

# Teste de auto-avaliação

## I

1. Uma molécula de massa  $m = 4,65 \times 10^{-26}$  kg colidiu com uma parede nas condições indicadas na fig. T. 6.1, quando seguia com a velocidade de  $600 \text{ ms}^{-1}$ . O choque foi *elástico*.  
Que impulso recebeu a parede durante o choque?

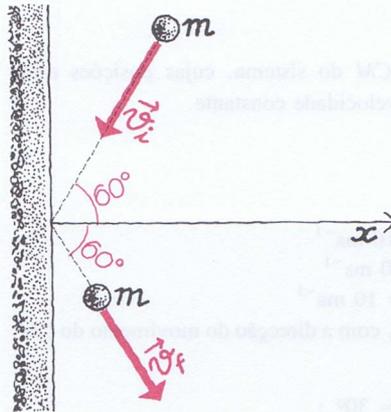


Fig. T.6.1

2. Duas canoas navegam paralelamente, mas em sentidos opostos, com velocidades de módulo igual — fig. T.6.2. As canoas e as respectivas tripulações têm massa igual,  $M$ , e transportam um fardo cada uma, também com massa igual,  $m$ . Ao passarem lado a lado, é lançado um dos fardos, lateralmente, de uma para a outra. Determinar a relação entre os valores das velocidades das canoas,  $v_1$  e  $v_2$ , depois de passarem uma pela outra.

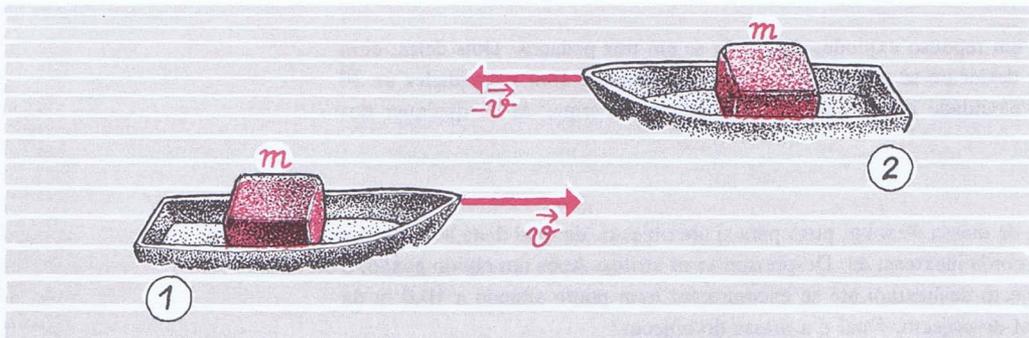


Fig. T.6.2

## II

Um corpo de massa  $2,0 \text{ kg}$  segue com a velocidade constante de  $10,0 \text{ ms}^{-1}$  e colide com outro de massa  $4,0 \text{ kg}$ , quando este se desloca perpendicularmente à direcção do movimento daquele com a velocidade constante de  $20,0 \text{ ms}^{-1}$ .

Após o choque, os corpos seguem juntos. Nestas condições, determinar:

1. A velocidade com que seguem após o choque.
2. O ângulo desta velocidade com a velocidade inicial do segundo.

## III

A fig. T.6.3 mostra três esferas iguais, cujos centros se situam na mesma recta. Consideram-se desprezáveis o atrito, a resistência do ar e a energia cinética de rotação.

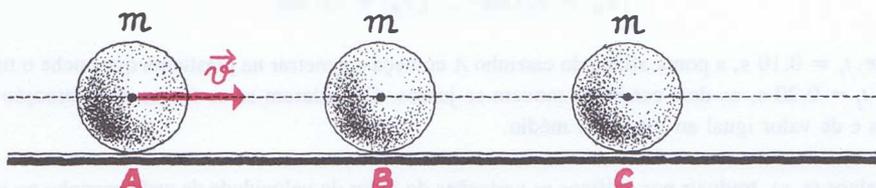


Fig. T.6.3

A esfera A desloca-se com velocidade constante,  $\vec{v}$ , até colidir com a esfera B em repouso. Esta vai colidir com a esfera C, também em repouso. Admitindo que há interacção elástica entre as três esferas, indicar, justificando, qual das seguintes afirmações é a correcta:

- (A) — A esfera A pára, e as esferas B e C adquirem cada uma a velocidade  $\vec{v}/2$ .
- (B) — As esferas A e B páram, e a esfera C adquire a velocidade  $\vec{v}$ .
- (C) — As três esferas passam a ter a mesma velocidade  $\vec{v}/3$ .
- (D) — A esfera A adquire a velocidade de sentido oposto,  $-\vec{v}/2$ ; a esfera B pára e a esfera C adquire a velocidade  $\vec{v}/2$ .

## IV

O corpo A, de massa  $m_1 = 4,0 \text{ kg}$ , move-se com a velocidade de  $10 \text{ ms}^{-1}$  e choca com o corpo B, de massa  $m_2 = 16,0 \text{ kg}$ , em repouso. Após o choque, A segue com a velocidade de  $5 \text{ ms}^{-1}$ , na direcção indicada na fig. T.6.4.

1. Determinar o ângulo  $\theta$  e a velocidade de B após o choque.
2. Determinar a velocidade do centro de massa do sistema de corpos (A + B).

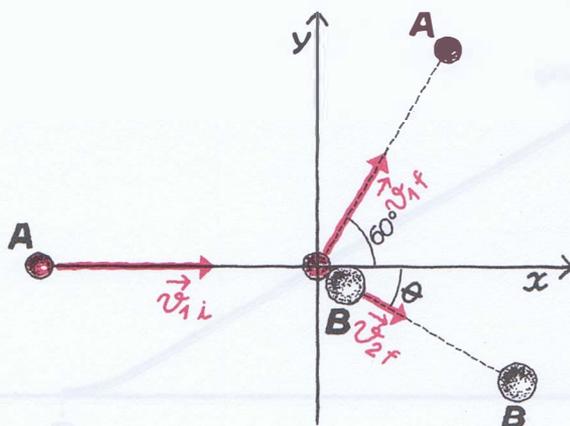


Fig. T.6.4

V

Duas partículas  $X$  e  $Y$ , de massas, respectivamente,  $0,10\text{ g}$  e  $0,30\text{ g}$ , estão inicialmente em repouso e separadas pela distância de  $1,0\text{ m}$ . Em determinado momento, as partículas, atraídas mutuamente com a força constante de  $1,0 \times 10^{-14}\text{ N}$ , passam a mover-se de encontro uma à outra. Não actuam forças exteriores.

1. Descrever o estado cinético do centro de massa.
2. A que distância da posição original de  $X$  colidem as partículas?

VI

Dois carrinhos  $A$  e  $B$ , de massas  $m_A = 1,0\text{ kg}$  e  $m_B = 3,0\text{ kg}$ , movem-se sem atrito nas condições indicadas na fig. T.6.5. As suas velocidades, constantes, antes de se encontrarem, têm os módulos:

$$|\vec{v}_A| = 5,0\text{ ms}^{-1}, \quad |\vec{v}_B| = 3,0\text{ ms}^{-1}$$

Num dado instante,  $t_i = 0,10\text{ s}$ , a ponta afiada do carrinho  $A$  começa a penetrar na plasticina que enche o tubo do carrinho  $B$ . A partir do instante  $t_f = 0,20\text{ s}$ , os dois carrinhos movem-se juntos. Consideram-se as forças de interacção entre a ponta e a plasticina constantes e de valor igual ao seu valor médio.

1. Num sistema de eixos  $(t, v)$ , traduzir por gráficos as variações do valor da velocidade de cada carrinho no intervalo de tempo  $[0; 0,30]\text{ s}$ . Justificar a construção.
2. Verificar, partindo dos gráficos, se durante a interacção foi respeitada a lei da acção-reacção.

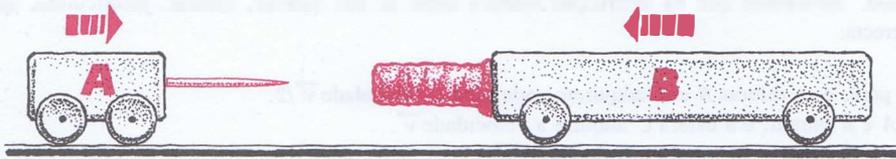


Fig. T.6.5

VII

Um carrinho, com a massa de  $4,0\text{ kg}$ , desce sem velocidade inicial e com atrito desprezável ao longo de uma rampa  $AB$  — fig. T.6.6, arredondada na base de modo a evitar a colisão com o plano horizontal. No final da descida, em  $B$ , já no plano horizontal, choca com um bloco que tem a massa de  $6,0\text{ kg}$  e está assente no plano horizontal.

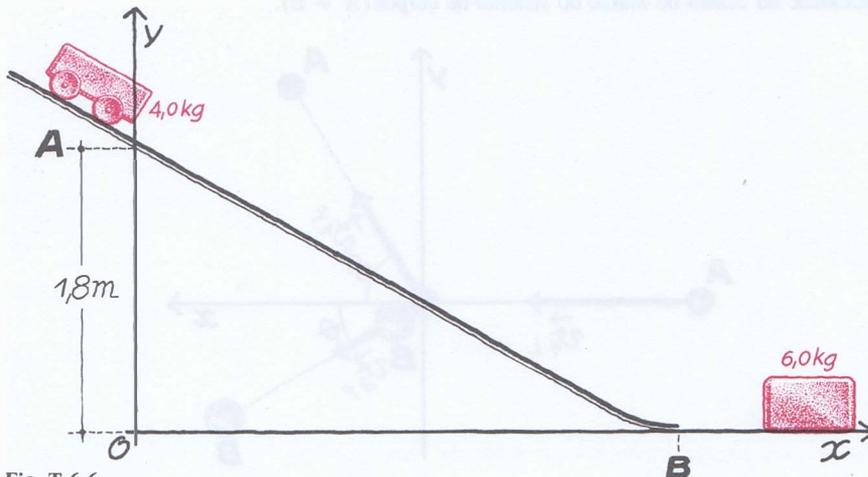


Fig. T.6.6

O coeficiente de atrito cinético entre as superfícies horizontal e do bloco é 0,10. Admite-se a conservação do momento linear durante a colisão horizontal.

Utilizar:  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$

1. Se o carro se encostar ao bloco e o arrastar à sua frente, que distância percorre o conjunto até parar, admitindo que o atrito entre o carro e a superfície horizontal é desprezável?
2. Durante quanto tempo se move o conjunto carro-bloco no plano horizontal?

### VIII

Os dois blocos da figura T.6.7 estão ligados por uma certa mola e colocados sobre uma dada mesa em cuja superfície o atrito é desprezável. Comprimiu-se o sistema contra uma parede e, a seguir, abandonou-se o sistema dos blocos e mola.

Indicar, **justificando**, qual das seguintes opções se verifica:

- (A) O bloco B passou a oscilar e o bloco A manteve-se encostado à parede.
- (B) Os dois blocos moveram-se para a direita, sem oscilar, de modo que o seu centro de massa teve movimento uniforme.
- (C) Os dois blocos moveram-se para a direita, oscilando, de modo que o seu centro de massa teve movimento uniforme.
- (D) O bloco B moveu-se para a direita sem oscilar, arrastando o bloco A, que passou a oscilar.

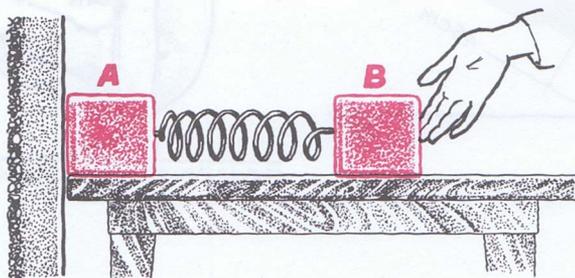


Fig. T.6.7

### IX

A areia contida no funil cai na correia transportadora à taxa de variação, suposta constante, de  $2,5 \text{ kg por segundo}$  — fig. T.6.8. A correia desloca-se com a velocidade constante de  $2,0 \text{ ms}^{-1}$

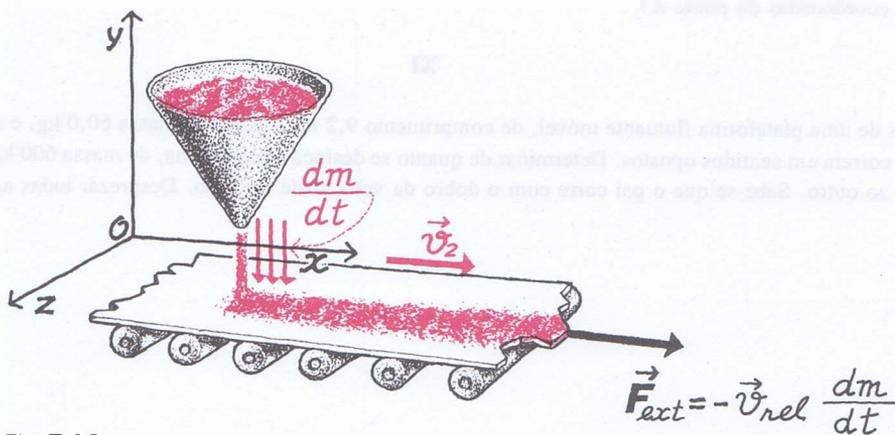


Fig. T.6.8

1. Que força é necessário exercer para manter o movimento da correia?
2. Qual é a potência desenvolvida por esta força?

X

1. Determinar o centro de massa do corpo humano do atleta, *na posição da figura*, e sem contar com os braços.

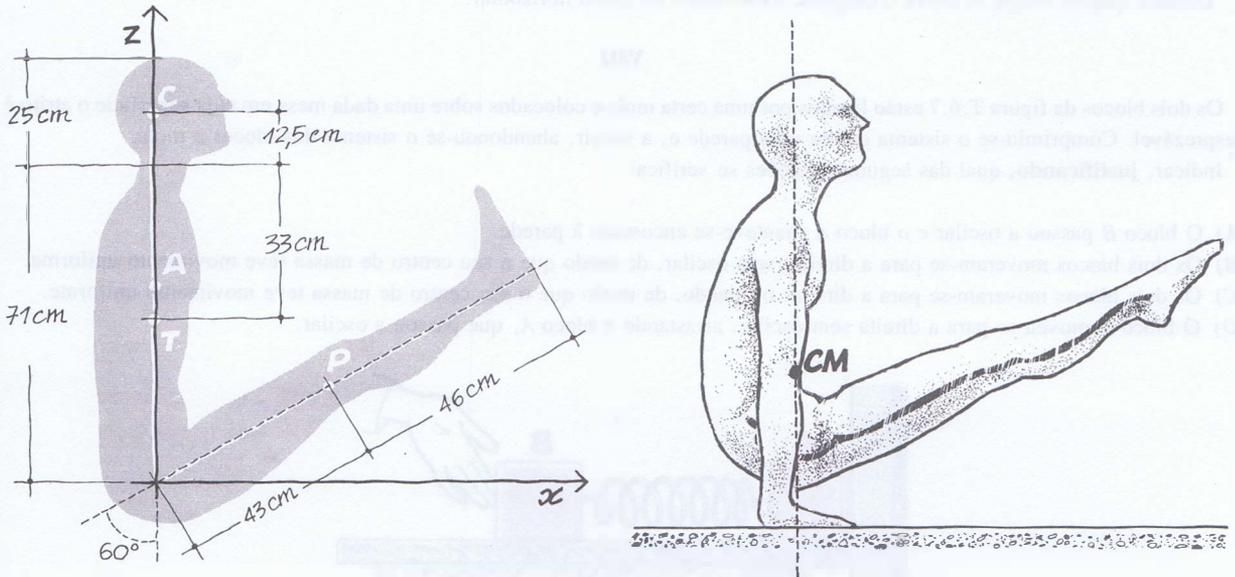


Fig. T.6.9

O ponto A é o centro de massa do sistema cabeça-tronco.

Os pontos, C, T e P representam, respectivamente, os centros de massa da cabeça, tronco e pernas.

São dados os seguintes pesos:

$$P_C = 53 \text{ N} \quad P_T = 436 \text{ N} \quad P_P = 267 \text{ N}$$

2. Em que condições os braços apenas afectam a coordenada Z do centro de massa do corpo?

Quais são as coordenadas do ponto A?

XI

Dos extremos de uma plataforma flutuante móvel, de comprimento 9,2 m, o João, de massa 60,0 kg, e seu filho Manuel, de massa 30,0 kg, correm em sentidos opostos. Determinar de quanto se desloca a plataforma, de massa 600 kg, quando o João vai de um extremo ao outro. Sabe-se que o pai corre com o dobro da velocidade do filho. Desprezar todas as resistências.

# Movimento em referenciais acelerados

UNIDADE

7



Jean d'ALEMBERT (1717-1783)

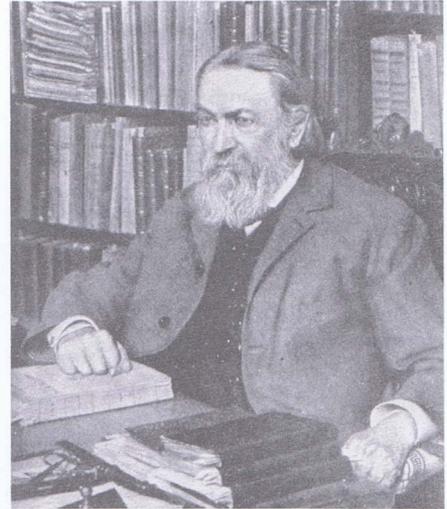
Matemático francês e continuador da obra de *Newton* na Mecânica. Publicou em 1743 o seu célebre *Traité de Dynamique*, onde expôs o chamado princípio de d'Alembert.

Neste princípio surge o conceito de *força de inércia*, graças ao qual se converte um problema de movimento acelerado num problema de equilíbrio.

Em 1749, publicou um trabalho de astronomia — *Investigações sobre as Precessões dos Equinócios*. Prefaciou a Enciclopédia de Diderot, onde também escreveu artigos científicos e filosóficos.

Nunca esqueceu o casal humilde que o adoptou quando criança abandonada e, mais tarde, distinguido por Frederico II da Prússia e Catarina II da Rússia, recusou os convites destes soberanos para trabalhar ao seu serviço.

Temia a amizade dos grandes e preferia, ao luxo que lhe era oferecido, viver modesta e livremente, com independência, sem todavia deixar de frequentar a sociedade.



Ernst MACH (1838-1916)

Físico e filósofo austríaco, distinguiu-se como pensador e crítico dos princípios e das teorias físicas.

Na sua notável obra *Mecânica* descreve muito bem a evolução desta ciência.

Crítica o conceito mecanicista da ciência, porque — argumenta — somente explica os fenómenos mecânicos e não deve aplicar-se abusivamente a todos os fenómenos físico-químicos.

Foi um dos precursores da teoria da relatividade. Já insistia em que «um ponto material isolado, sem ser acelerado, não deve mover-se relativamente ao espaço, mas, sim, *relativamente ao conjunto de massas do Universo*».

Punha grande ênfase no valor das experiências conceptuais, nas linhas de *Galileu* e de *Einstein*. Este afirmou a respeito de *Mach*, ao mesmo tempo que confessava que lhe devia muito: «se ele tivesse conhecido a tempo as controvérsias acerca da velocidade da luz, teria estabelecido a teoria da relatividade.»



# Movimento em referenciais acelerados



Um sistema de referência acelerado é aquele em que a aceleração do referencial não é nula em relação a um referencial inercial.

Um sistema de referência inercial é aquele em que a aceleração do referencial é nula em relação a um referencial inercial.

Um sistema de referência inercial é aquele em que a aceleração do referencial é nula em relação a um referencial inercial.

## 7.1 Forças de inércia

### 7.1.1 Um diálogo possível

### 7.1.2 Forças de inércia

## 7.2 Aplicações — comparando os resultados das descrições e interpretações de observadores inerciais e acelerados

### 7.2.1 Pêndulo gravítico ligado a um referencial acelerado

### 7.2.2 Referenciais rotativos: forças centrífugas de reacção e de inércia

## 7.3 Os conceitos relativos de peso e de vertical

### 7.3.1 O peso medido por uma balança-dinamómetro

### 7.3.2 O conceito de peso é relativo. A imponderabilidade

### 7.3.3 Os conceitos relativos de «em cima», «em baixo» e de vertical

# Movimento em referenciais acelerados

7

## 7.1 Forças de inércia

### 7.1.1 Um diálogo possível

Vamos imaginar a seguinte situação entre dois jovens amigos: o João André (J.A.) é o Pedro Inácio (P.I.).

O primeiro viaja numa nave espacial,  $N$ ; e o segundo, no observatório da plataforma espacial,  $P$ , situada a enorme distância, observa o movimento da nave, que pode orientar por meio de um telecomando — fig. 7.1.

Os dois amigos comunicam entre si por intermédio de emissores-receptores.

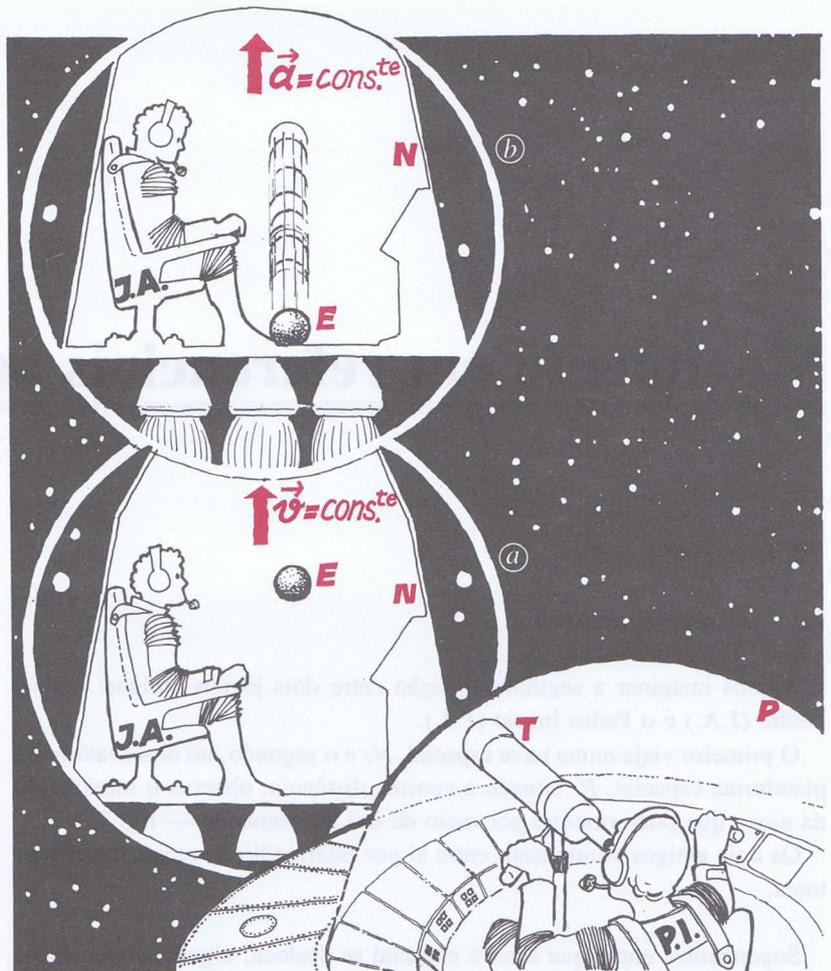
Suponhamos então que a nave espacial se desloca, algures no Cosmos, com **velocidade constante**, longe de qualquer campo gravitacional, e que dentro dela se encontra, preso a uma cadeira, o João André — fig. 7.1, (a). Para este, as paredes da nave são perfeitamente opacas.

Muito distante dele, no observatório da plataforma espacial  $P$ , em **movimento uniforme**, está o Pedro Inácio, observando através dum telescópio especial,  $T$ , o que se passa na nave, que pode comandar à distância, quando assim o entender.

Em determinada altura, o João André, disfrutando o insólito da imponderabilidade, resolve abandonar uma esfera  $E$  — fig. 7.1, (a). E trava, então, com o Pedro Inácio o seguinte diálogo, através da rádio:

*J.A.* — Abandonei uma esfera e ela não caiu. E compreendo porquê: como estou *em repouso*, longe de qualquer campo gravitacional, e coloquei a esfera *em repouso*, ela, que *não foi nem está actuada por qualquer força*, permanece *em repouso*. Verifica-se, pois, a **lei da inércia**.

*P.I.* — Em minha opinião, estás enganado. Nem tu nem a esfera estais em repouso, mas, sim, *em movimento uniforme*, com *velocidade igual à da vossa nave*.



**Fig. 7.1** O Pedro Inácio (P.I.), na plataforma espacial, P, observa com um telescópio, T, os movimentos da nave onde viaja o João André (J.A.).

Os amigos dialogam através dos seus emissores-receptores.

Quando abandonaste a esfera, ela já possuía velocidade, igual à tua própria velocidade e à da nave em que te moves. Uma vez que não foi actuada por qualquer força, manteve essa mesma velocidade, de acordo com a **lei da inércia**. Portanto, acompanha o movimento da nave e não se desloca relativamente a ela.

*J.A.* — Eu, porém, não dou conta de que estou em movimento. Vejo tudo parado: as paredes, o tecto e os objectos da minha nave. Como poderei saber se me movo ou não? Não disponho de qualquer referencial além da minha nave! Não serás tu que te moves em relação a mim?

Quando estávamos na Terra, movíamo-nos no espaço, em volta do Sol, com a velocidade de 30 km/s e não dávamos conta da existência dessa velocidade. Os cientistas só se convenceram desse facto através de medições astronómicas em relação às estrelas consideradas fixas.

De uma só coisa tenho eu a certeza: estou em repouso relativamente à minha nave. Tu dirás possivelmente o mesmo em relação à tua plataforma.

*P.I.* — Sim, estamos ambos em *referenciais de inércia*, porque ambos verificámos a lei da inércia. Ora, tanto quanto sei, não há referenciais de inércia privilegiados que se possam considerar em repouso absoluto. Por

isso, concordo que é legítimo afirmares que sou eu que me movo em relação à tua nave, como é igualmente legítimo eu afirmar que és tu quem se move em relação à minha plataforma.

Entretanto, o João André não pensa mais na esfera suspensa e adormece. Enquanto dorme, o seu amigo resolve pregar-lhe uma partida: acelera-lhe a nave no sentido dos pés para a cabeça — fig. 7.1, (b), com uma aceleração de  $9,8 \text{ ms}^{-2}$ .

O João André acorda, vê a esfera caída no chão da nave e sente-se comprimido contra a sua cadeira. Suspende a esfera de um dinamómetro e este acusa um determinado peso — fig. 7.2. Liberta-se das correias que o prendem à cadeira e passa a caminhar no chão da nave como o fazia em Terra.

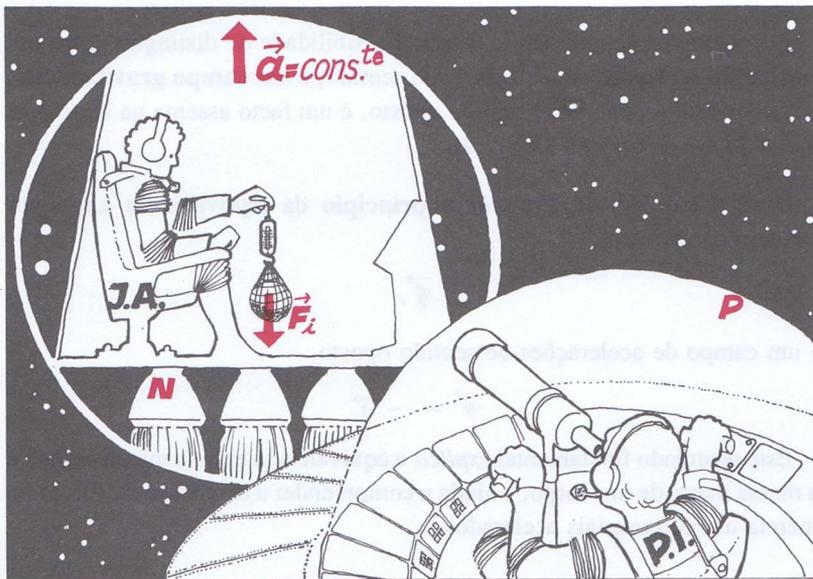


Fig. 7.2 O João André afirma que existe uma força a actuar na esfera, que facilmente mede com uma balança-dinamómetro. Trata-se de uma força de inércia,  $F_i$ .

É nesta situação que recomeça o diálogo entre os dois amigos.

*J.A.* — Atenção, Pedro: adormeci e, ao acordar, verifiquei que a minha esfera já tem peso. E eu também. Largo a esfera e ela cai para o chão da nave. *Será que estarei em algum campo gravitacional?*

Procurei saber se uma esfera pequena e uma esfera grande caem com a mesma aceleração, como sucede nos campos gravitacionais. Para isso, realizei a experiência e verifiquei, de facto, que a aceleração é a mesma —  $9,8 \text{ ms}^{-2}$ , em todas as quedas que experimentei! Verifica-se a lei de Galileu da queda dos graves. Estarei na Terra ou noutra planeta de massa igual? Será que estamos sendo actuados por forças gravitacionais? Se eu coloco as esferas em repouso e elas se movem, é porque nelas actuam forças!

*P.I.* — Nesse aspecto, João, posso esclarecer-te: não estás em campo gravitacional algum! O que sentes e vês são os efeitos da aceleração que comuniquei à tua nave, no sentido dos teus pés para a cabeça. Quando abandonas os corpos, estes possuem uma dada velocidade, que é a da nave no instante em que os abandonas. Eles, *por inércia*, mantêm-na.

Ora, o chão da nave acelera, aumenta de velocidade e aproxima-se dos corpos. É, pois, o chão da nave que *vai ao encontro* dos corpos e não os corpos que caem para o chão da nave. Não há qualquer força a actuar em ti e nos corpos. Insisto: trata-se de um efeito da aceleração que comuniquei ao teu referencial.

*J.A.* — Terei alguma possibilidade de verificar por mim próprio se realmente estou numa nave acelerada, com a aceleração de  $9,8 \text{ ms}^{-2}$  no sentido da minha cabeça, ou se estou num campo gravítico dirigido para os meus pés, com a intensidade de  $9,8 \text{ N/kg}$ ?

*P.I.* — Ouvi dizer que *Einstein*, na Teoria da Relatividade Geral, afirma que não tens, de facto, essa possibilidade.

G.E.7.2 ◀ E o diálogo terminou aqui. Esta impossibilidade de distinguir entre um **campo de acelerações**,  $\vec{a}$ , num dado sentido, e um **campo gravitacional**,  $\vec{g}$ , de módulo igual a  $\vec{a}$  e sentido oposto, é um facto assente na *Teoria da Relatividade Geral* (ver G.E.7.2).

Deste facto induziu *Einstein* o **princípio da equivalência** entre um campo gravitacional.

$$\vec{g},$$

e um campo de acelerações de sentido oposto,

$$\vec{g} = -\vec{a}$$

Este postulado fundamental *explica* a equivalência entre a massa pesada e a massa inerte de um corpo, e ajuda a compreender a existência de forças de inércia nos referenciais acelerados.

### 7.1.2 Forças de inércia

Vamos analisar o diálogo exposto e inferir algumas conclusões.

Enquanto o Pedro e o João se moviam com velocidade constante, eram **ambos observadores inerciais**, estavam ligados a *referenciais inerciais* e ambos verificavam a lei da inércia na esfera, **sem recorrer a quaisquer forças aplicadas nesta**. As suas opiniões só diferiam no que respeitava ao estado cinético da esfera: para um, o *repouso*; para outro, *movimento uniforme*.

Quando, porém, o João André passou a ser um **observador não inercial**, isto é, **acelerado**, por estar ligado a uma nave acelerada, ele, *para poder continuar a aceitar como válidas as leis da Mecânica* na sua nave, teve de **admitir a existência de forças a actuar em todos os corpos** da nave, *no sentido oposto ao da aceleração* desta.

Aceitando o conceito de que as forças estão na origem das acelerações e das deformações dos corpos, ou seja o conceito newtoniano de força traduzido pela expressão

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

o João André tinha que aceitar a existência de forças dirigidas para o chão da nave, porque só elas lhe permitiam explicar a queda dos corpos, a deformação das molas pelos corpos suspensos, a compressão por ele exercida na cadeira e no chão da nave, a alteração, enfim, do momento linear  $\vec{p}$  dos corpos da nave.

Estas forças a que os observadores acelerados têm de recorrer para continuar a aplicar as leis da Física chamam-se **forças de inércia**.

É o caso das forças que o João André afirmava actuarem nos corpos da sua nave — fig. 7.2.

Sendo  $\vec{a}$  a aceleração de um referencial, um corpo de massa  $m$  é actuado, **relativamente a esse referencial**, pela **força de inércia**

$$\vec{F}_i = m (-\vec{a}) = -m\vec{a},$$

pois, como se pode ver através do diálogo entre o Pedro e o João, e através da leitura do G.E.7.3, essa força tende a produzir na massa  $m$  a aceleração  $-\vec{a}$  em relação ao referencial acelerado — fig. 7.2.

As forças de inércia são, assim, *forças adicionais*, isto é, não são forças de interacção mas, sim, consequência das acelerações do referencial.

Estas forças de inércia **não existem para os observadores inerciais**, porque estes não carecem de recorrer a elas para explicar o movimento.

Também verificámos este facto através do diálogo, quando o Pedro, observador inercial, deu a sua interpretação para a «queda» da esfera sem recorrer a qualquer força nela aplicada.

Mas, afinal, as forças de inércia existem ou não? São forças reais ou forças fictícias?

Segundo o ponto de vista dos observadores inerciais, essas **forças não existem**, são *fictícias*, isto é, «*inventadas*» pelos observadores acelerados por «desconhecerem» o seu estado de aceleração. Mas será que os seres vivos, que nascem, crescem e morrem num mundo acelerado e não podem abstrair da sua condição de seres acelerados, distinguirão, de facto, as forças de inércia (isto é, não provenientes de interacções) das que não são de inércia (quer dizer, provenientes de interacções)?

Para não termos de imaginar o que sucederia a um homem que vivesse sempre num mundo fortemente acelerado, como, por exemplo, uma enorme centrífugadora, vamos ver o que poderá acontecer a uma planta em condições semelhantes.

### ► G.E.7.3

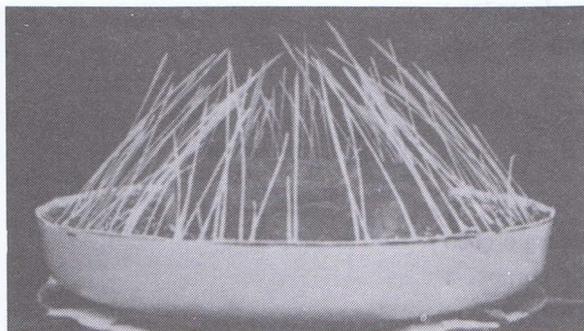
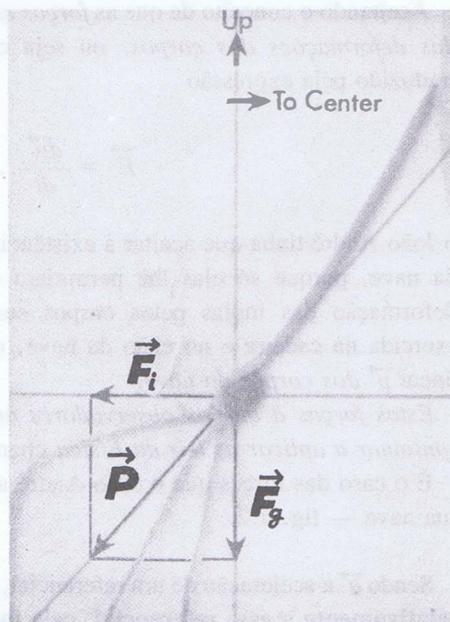


Fig. 7.3. Uma fotografia de plantas a crescer num sistema rotativo.

Fig. 7.4. Como se vê pelo diagrama vectorial, cada planta cresce de acordo com as duas forças:

- a força gravítica,  $\vec{F}_g$ ;
- a força inercial  $\vec{F}_i = -m\vec{a}_c$ , oposta à aceleração centrípeta do sistema rotativo.



Fizeram-se crescer plantas numa plataforma que se pôs a rodar com a velocidade angular, constante, de 1,3 voltas por segundo.

Se as plantas não «sentissem» o efeito das forças de inércia, deveriam crescer segundo a direcção da força gravítica: a raiz crescendo no sentido dessa força e o caule no sentido oposto, como é da observação corrente nos referenciais em repouso na Terra.

Mas as plantas cresceram submetidas a *forças de inércia centrífugas* (já que as acelerações na plataforma rotativa são centrípeta: estão dirigidas para o eixo de rotação).

Estas *forças de inércia* centrífugas farão sentir o seu efeito durante o crescimento das plantas?

As fotografias apresentadas — figs. 7.3 e 7.4 — são concludentes. Trata-se do veredicto da experiência, a verdadeira «voz da Natureza»: as plantas crescem sem distinguir as forças de inércia das forças gravíticas, isto é, crescem influenciadas por umas e outras.

Aceitamos, pois, como verídica — e até prova em contrário! — a seguinte afirmação, que se pode ler em muitos livros actuais de Física: **para os observadores acelerados, as forças de inércia são tão reais como as outras!**

Claro: têm efeitos análogos, embora proveniências diferentes.

Esta análise e a leitura dos G.E. 7.2 e 7.3, permite-nos salientar os seguintes aspectos:

1.º — Todos os fenómenos físicos que se observam nos sistemas acelerados, em particular o trajecto da luz e a queda dos corpos (fig. 7.5), são idênticos aos que ocorrem em sistemas que estão em repouso em campos gravitacionais. Em consequência disto, não podemos distinguir entre o efeito de uma aceleração e o de um campo gravitacional. O modo como Einstein concebeu a sua Teoria da Relatividade Geral é uma elaboração deste «não podemos».

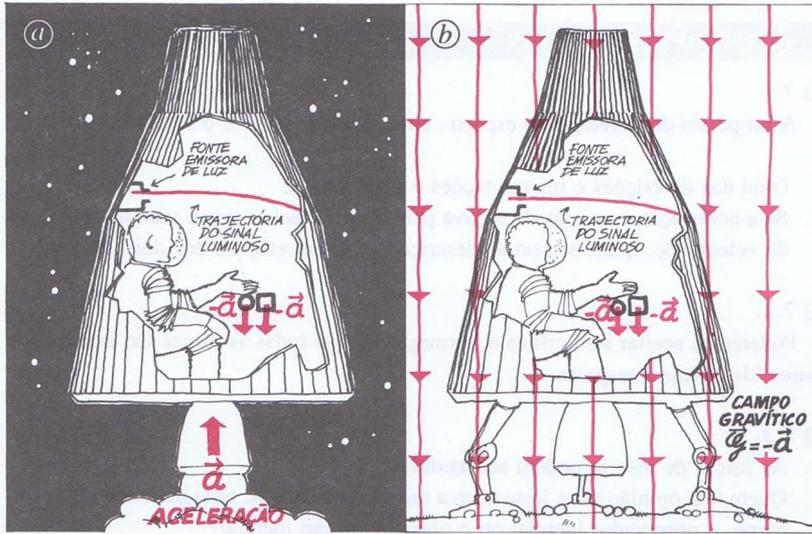


Fig. 7.5 Os fenómenos mecânicos são idênticos num sistema com aceleração  $\vec{a}$  e ausência de campo gravítico — é o caso (a), e no mesmo sistema quando em repouso num campo gravítico  $\vec{g} = -\vec{a}$  — é o caso (b).

2.º — As descrições e interpretações dos observadores acelerados e dos observadores considerados inerciais são igualmente aceitáveis e perfeitamente equivalentes. Mas devemos ter sempre em conta o seguinte: enquanto o observador inercial não recorre a forças de inércia para explicar os fenómenos mecânicos, o observador acelerado recorre a essas forças para poder aplicar as leis da Mecânica à interpretação desses mesmos fenómenos. Em suma, aquele recorre às forças devidas às acções de vizinhança para explicar o movimento; este recorre a estas e às forças de inércia para interpretar o movimento ou o repouso no seu referencial acelerado.

3.º — Para os observadores acelerados, as forças de inércia são tão reais como as outras, contribuindo, aquelas e estas, para as deformações dos corpos e as acelerações dos mesmos.

4.º — Não há referenciais privilegiados, sejam eles inerciais ou acelerados. Como tal, sempre que for detectada uma alteração do momento linear de um corpo e, portanto, uma aceleração desse corpo em qualquer referencial, há uma força não equilibrada a actuar no corpo, seja qual for a origem, detectável ou não, dessa aceleração no referencial. Isto é, tem-se sempre:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

### Súmula

7.1

As forças de inércia são forças a que os observadores acelerados têm de recorrer para interpretar, com base nas leis da Física, os fenómenos mecânicos que ocorrem nos seus referenciais.

Se for  $\vec{a}$  a aceleração do referencial, a força de inércia que, neste referencial, actua na massa  $m$  é:

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}$$

As forças de inércia não podem ser observadas em referenciais inerciais e, nos referenciais acelerados, são consequência da aceleração do referencial. Não podem, pois, ser atribuídas a corpos da vizinhança, isto é, a interacções.

Quer para as forças inerciais, quer para as não inerciais, é sempre válida, no respectivo referencial, a relação quantitativa, newtoniana:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Concluindo, podemos finalmente afirmar:

Tanto as forças de inércia, devidas à aceleração do referencial, como as forças de interação, observadas nos pares acção-reacção e devidas aos corpos da vizinhança, são, matemática e quantitativamente, variações, em cada instante, do momento linear por unidade de tempo.

Todavia, convém não esquecer: **as forças de inércia pertencem ao universo dos referenciais acelerados mas não pertencem ao universo dos referenciais inerciais.**

#### QUESTÕES PROPOSTAS

##### Q 7.1

A propósito do «diálogo no espaço» entre o João André e o Pedro Inácio:

1. Qual das descrições e interpretações é mais válida?
2. Se a aceleração comunicada à nave pelo Pedro Inácio tivesse sentido oposto ao da velocidade, quais seriam as descrições e interpretações dos dois amigos?

##### Q 7.2.

Poderemos aceitar sem crítica a afirmação de que todas as forças são criadas aos pares? Justificar a resposta.

##### Q 7.3.

1. As forças de inércia podem ser medidas?
2. Quem tem opinião mais justa acerca dos movimentos de uma partícula ou de um corpo: o observador inercial ou o observador não inercial?
3. A equivalência entre os efeitos de um campo de acelerações e de um campo gravitacional pressupõe uma relação de igualdade *intrínseca*, uma equivalência não accidental, entre que grandezas físicas?

##### Q 7.4

Um condutor trava bruscamente o seu automóvel e o ocupante do lado bate com a cabeça no vidro. Segue-se o depoimento de três testemunhas,  $O_i$ ,  $O'_i$  e  $O_a$ : as duas primeiras estavam paradas à beira da estrada e  $O_a$  seguia no assento detrás do automóvel:

- *testemunha*  $O_i$ : o carro foi travado, mas o ocupante referido continuou em movimento;
- *testemunha*  $O'_i$ : o ocupante referido só continuou em movimento pelo facto de vir a alta velocidade e o condutor travar bruscamente;
- *testemunha*  $O_a$ : o ocupante referido foi arremessado para a frente por uma força devida à travagem (aceleração negativa).

De um ponto de vista dos seus sistemas de referência, qual ou quais dos depoimentos estão cientificamente correctos?

- (A) Os três depoimentos
- (B)  $O_i$  e  $O'_i$
- (C)  $O_i$  e  $O_a$
- (D)  $O'_i$  e  $O_a$
- (E)  $O_i$

## 7.2 Aplicações — comparando os resultados das descrições e interpretações de observadores inerciais e acelerados

### 7.2.1 Pêndulo gravítico ligado a um referencial acelerado

Consideremos uma carruagem de comboio em translação rectilínea uniforme. Dentro da carruagem, dependurada do tecto, está uma esfera de massa  $m$  — fig. 7.6. Imaginemos que a carruagem nos permite uma visão perfeita dos fenómenos que ocorrem no seu interior.

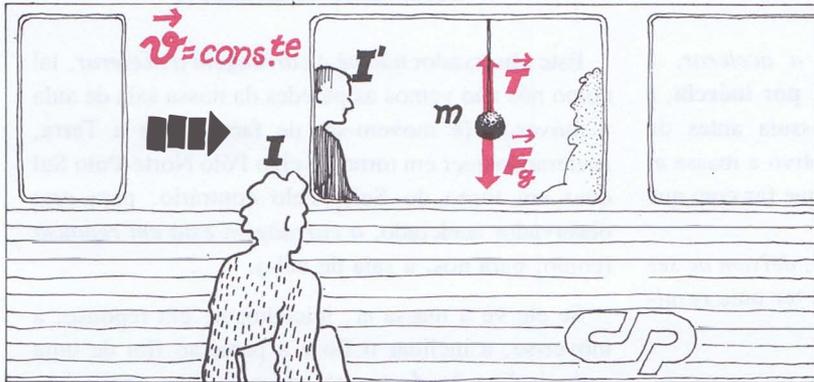


Fig. 7.6 Os observadores  $I$  e  $I'$ , ambos inerciais, explicam o estado cinético da esfera afirmando que

$$\vec{T} + \vec{F}_g = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \text{conste} \begin{cases} \neq \vec{0} & (\text{obs. } I) \\ = \vec{0} & (\text{obs. } I') \end{cases}$$

Consideremos o fio quando se encontra na direcção vertical, o que acontece com o comboio em m.r.u.

Os dois observadores  $I$ , em repouso na estação, e  $I'$ , em repouso na carruagem, são **ambos observadores inerciais** e interpretam, por isso, o estado cinético da esfera (*m.r.u.* para  $I$  e *repouso* para  $I'$ ) de igual modo. Assim, na esfera actuam as forças

$$\begin{cases} \vec{F}_g & \text{— força gravítica} \\ \vec{T} & \text{— tensão do fio.} \end{cases}$$

Estas forças têm resultante nula

$$\vec{F}_g + \vec{T} = \vec{0},$$

e, portanto, a esfera está *em repouso* (para  $I'$ ) e está *em m.r.u.* (para  $I$ ), de acordo com a **lei da inércia**.

Suponhamos agora que a carruagem passa a ter aceleração constante,  $\vec{a}$ . Nessas condições, o fio começa a inclinar-se, atinge rapidamente uma inclinação  $\theta$ , máxima, e permanece com esta inclinação — fig. 7.7.

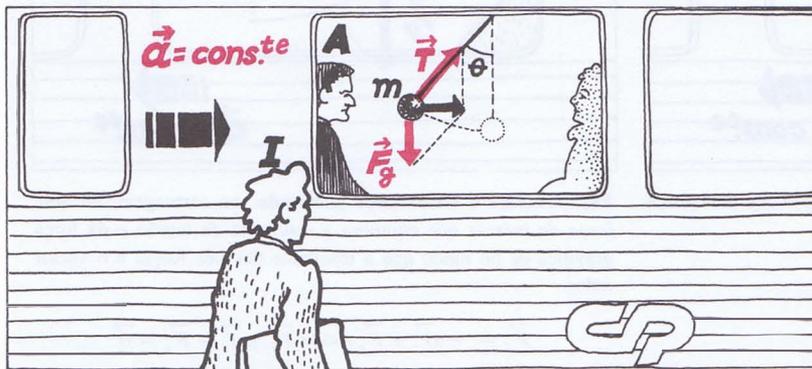


Fig. 7.7 Para os observadores  $I$  e  $A$ , descrições e interpretações são diferentes, quando a carruagem acelera.

A partir do momento em que a carruagem acelera em relação à estação, o observador sentado na carruagem passa a ser um **observador acelerado**. O observador da estação continua a ser um **observador inercial**.

Vamos comparar as duas descrições e interpretações, de *I* e de *A*, que são diferentes, embora equivalentes:

### Observador inercial, I

Este observador vê a carruagem a acelerar, a aumentar de velocidade, e a massa *m*, **por inércia**, a tender manter a velocidade que possuía antes da aceleração da carruagem. Por este motivo a massa *m* *atrasa-se em relação à carruagem*, o que faz com que o fio se incline — fig. 7.8.

A tensão,  $\vec{T}$ , e a força gravítica,  $\vec{F}_g$ , deixam de ser forças simétricas. Portanto, passam a ter uma resultante:  $\vec{F}_g + \vec{T}$ .

Esta força resultante vai crescendo com o ângulo  $\theta$ .

Quando a força resultante for igual ao produto da massa *m* pela aceleração da carruagem,  $\vec{a}$ ,

$$\vec{F}_g + \vec{T} = m \vec{a},$$

ela passa a imprimir à massa *m* uma aceleração  $\vec{a}$  igual à da carruagem. Então, a esfera passa a acompanhar o movimento da carruagem na referida posição enquanto a aceleração se mantiver constante.

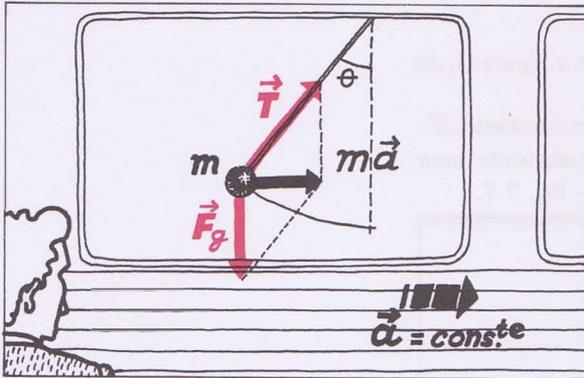


Fig. 7.8 Para o **observador inercial**, na estação, há uma força resultante que imprime aceleração à massa *m*:

$$\vec{T} + \vec{F}_g = m \vec{a}$$

### Observador acelerado, A

Este observador *não vê a carruagem a acelerar*, tal como nós não vemos as paredes da nossa sala de aula a mover-se (e movem-se, de facto, com a Terra, acelerando quer em torno do eixo Pólo Norte-Pólo Sul quer em torno do Sol). Pelo contrário, para este observador acelerado, a carruagem está em repouso (como, para nós, a sala de aula).

Se ele vê a massa *m*, inicialmente em repouso, a mover-se, a inclinar o fio e a parar ao fim de uma certa inclinação deste, só encontra uma explicação compatível com o seu referencial em repouso: na esfera actuou uma força de inércia  $\vec{F}_i$  — fig. 7.9.

E se a esfera acaba por ficar em repouso, isso fica a dever-se ao equilíbrio das três forças actuantes: a tensão,  $\vec{T}$ , do fio, a força gravítica,  $\vec{F}_g$ , e a força de inércia,  $\vec{F}_i$ . Tem-se, então

$$\vec{F}_i + \vec{T} + \vec{F}_g = \vec{0}$$

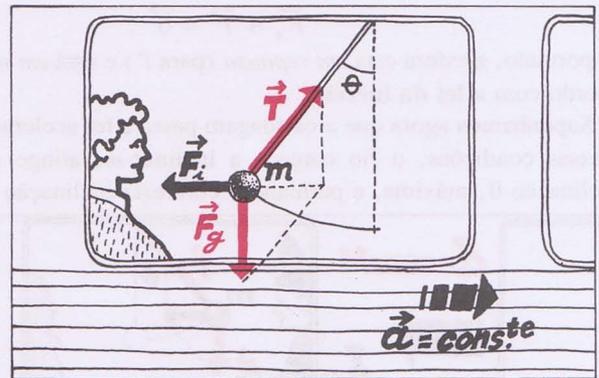


Fig. 7.9 Para o **observador acelerado**, na carruagem, há uma força de inércia que equilibra a resultante da tensão e da força gravítica de tal modo que a resultante das três forças é o vector nulo:

$$\vec{F}_i = -(\vec{T} + \vec{F}_g) \Leftrightarrow \vec{F}_i + \vec{T} + \vec{F}_g = \vec{0}$$

As duas interpretações são, de facto, **equivalentes**, porque:

O **observador inercial** explica a *aceleração*  $\vec{a}$  da massa  $m$ , **no referencial estacionário**, através da actuação das forças  $\vec{T}$  e  $\vec{F}_g$ :

$$\vec{T} + \vec{F}_g = m \vec{a}$$

O **observador acelerado** explica o *repouso* da massa  $m$ , **no referencial da carruagem**, através da actuação destas forças  $\vec{T}$  e  $\vec{F}_g$  e de uma outra, a força de inércia,  $\vec{F}_i$ , obtendo-se uma *situação de equilíbrio*:

$$\vec{F}_i + \vec{T} + \vec{F}_g = \vec{0}$$

Comparando as duas expressões, vem:

$$\vec{F}_i + m \vec{a} = \vec{0} \iff \vec{F}_i = -m \vec{a},$$

expressão esta que já conhecíamos para a força de inércia.

Precisamente porque as duas interpretações, embora diferentes, são equivalentes, ambas conduzem ao *mesmo ângulo*  $\theta$  de inclinação do pêndulo:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m a}{m g} = \frac{a}{g}$$

A equivalência entre as duas interpretações, a do observador inercial e a do observador acelerado, tem por base a *não existência de referenciais privilegiados*, facto assente na Teoria da Relatividade. Em todos os referenciais se aplicam as mesmas leis mecânicas e se define do mesmo modo a grandeza força, seja ela de interacção ou de inércia:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

A não existência de referenciais privilegiados baseia-se, por sua vez, na *equivalência entre as forças inerciais e as forças gravitacionais*. Uma das características importantes das forças inerciais é a seguinte: as *acelerações* que essas forças permitem determinar *não dependem das propriedades físicas dos corpos* onde actuam e, em particular, *não dependem da massa* dos mesmos. É um exemplo disto o facto de, numa nave acelerada, os corpos «caírem» todos com a mesma aceleração. Essa característica é localmente comum às forças gravitacionais já que estas, num dado ponto do campo gravitacional, imprimem a *mesma aceleração a corpos de massa diferente*. Esta é mais uma particularidade que realça a equivalência atrás referida.

Escolhendo convenientemente os referenciais podemos alterar ou até anular o efeito das forças gravitacionais, criando campos equivalentes a campos gravitacionais.

### 7.2.2 Observadores em referenciais rotativos.

#### Forças centrífugas de reacção e de inércia.

Consideremos uma plataforma giratória cujo piso é muito escorregadio e onde o atrito se pode considerar, portanto, quase nulo.

Nesta plataforma encontram-se dois experimentadores: um,  $A$ , *fixo*, preso à plataforma, sem se poder deslocar sobre a mesma; outro,  $M$ , *agarrado* a  $A$ , descrevendo ambos um mesmo ângulo  $\theta_1$  — fig. 7.10.

A plataforma roda com m.c.u.

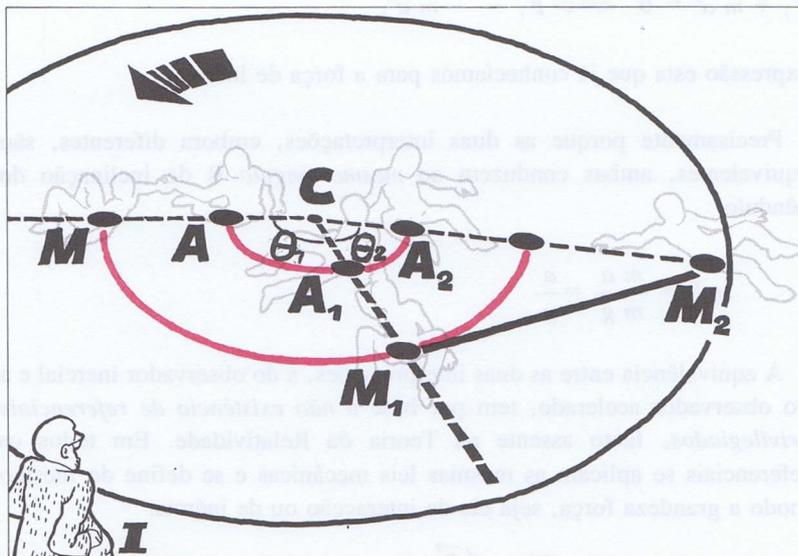


Fig. 7.10 O observador acelerado  $A$  está *fixo* na plataforma giratória. O experimentador  $M$  está *agarrado* a  $A$ , mas pode vir a deslizar na plataforma. O observador inercial  $I$  está parado na parte exterior da plataforma.

No exterior da plataforma, a vê-los girar, está um observador inercial  $I$ , parado.

Comparemos as descrições e interpretações do movimento de  $M$  dadas pelos **observadores inercial  $I$**  e **acelerado  $A$**  (acelerado porque, estando a rodar com movimento circular uniforme, possui *aceleração dirigida para o centro,  $C$ , da plataforma*).

Vamos comparar primeiro essas interpretações enquanto  $M$  se encontra agarrado a  $A$ , descrevendo ambos um mesmo ângulo  $\theta_1$  — fig. 7.10.

## Observador inercial, I

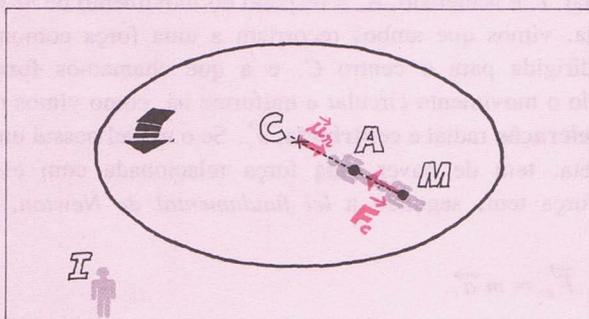
O experimentador  $M$  descreve o arco de circunferência  $\widehat{MM}_1$ , em virtude de  $A$  estar a exercer nele uma **força centrípeta**. Esta força centrípeta provoca no experimentador  $M$  uma *aceleração centrípeta*,  $\vec{a}_c$ , correspondente ao *movimento circular uniforme* que, nestas condições, ele possui.

A *força centrípeta*, representada de modo esquemático na fig. 7.11, tem a seguinte expressão:

$$\vec{F}_c = m \vec{a}_c \iff$$

$$\vec{F}_c = -m \frac{v^2}{r} \vec{u}_r,$$

sendo  $m$  e  $v$  a *massa* e o *módulo da velocidade* do experimentador  $M$ , e  $\vec{u}_r$  o *versor do raio vector*, dirigido para fora.



**Fig. 7.11** Segundo o observador inercial,  $I$ , o observador  $A$  exerce em  $M$  uma força dirigida para o centro  $C$  — **força centrípeta**,  $\vec{F}_c$ , que imprime aceleração centrípeta ao experimentador  $M$ .

## Observador acelerado, A

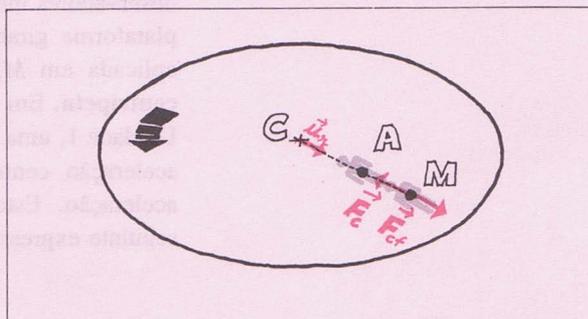
O experimentador  $M$  está em repouso, em virtude da **força centrípeta** que estou a aplicar-lhe. Como, para ele estar em repouso, sou obrigado a exercer nele uma força centrípeta,  $\vec{F}_c$ , concluo que nele também deve estar a actuar uma força simétrica dessa, dirigida para fora, uma **força centrífuga**  $\vec{F}_{cf}$  — fig. 7.12. Enquanto essas duas forças coexistirem, ele deverá manter-se em repouso. Mas, logo que eu deixe de exercer a força centrípeta, ele será impelido para fora por acção da força centrífuga  $\vec{F}_{cf}$ .

A *força centrífuga*

$$\vec{F}_{cf} = -m \vec{a}_c \iff$$

$$\vec{F}_{cf} = +m \frac{v^2}{r} \vec{u}_r,$$

é, evidentemente, uma **força centrífuga de inércia**.



**Fig. 7.12** Para observador  $A$ ,  $M$  está em repouso. Então, em  $M$  terão de estar aplicadas duas forças, a *força centrípeta*,  $\vec{F}_c$ , que  $A$  exerce, e a *força centrífuga de inércia*,  $\vec{F}_{cf}$ .

Vamos agora comparar as duas descrições quando o observador  $A$  larga o experimentador  $M$ . Este, quando é abandonado, está *em repouso na plataforma*; mas move-se com uma *velocidade tangente à trajetória circular*  $\widehat{MM}_1$ , em relação ao exterior.

## Observador inercial, I

O experimentador  $M$ , dado que  $A$  deixou de exercer sobre ele a *força centrípeta*  $\vec{F}_c$  — fig. 7.11, que o mantinha em trajetória circular, passou a deslocar-se, **por inércia**, com a velocidade que possuía em  $M_1$  — fig. 7.10; portanto segundo a tangente à trajetória, indo sair da plataforma numa posição próxima da posição  $M_2$ .

### G.E.7.4

## Observador acelerado A

O experimentador  $M$ , dado que deixou de actuar nele a *força centrípeta*, passou a deslocar-se «radialmente e para fora» em virtude da *força centrífuga* que nele actua. Note-se que  $A$  não se apercebe do movimento tangencial e rectilíneo  $M_1 M_2$  (fig. 7.10) de  $M$ , tem sim a sensação de que ele se desloca ao longo do raio, pois  $A$  e  $M$  estão, de facto, sobre o mesmo raio, aproximadamente. Quando  $M$  atinge  $M_2$  e sai da plataforma, já  $A$  está na posição  $A_2$  — fig. 7.10. (Ver G. E. 7.4).

### A — A força centrípeta como origem permanente do movimento circular

Ao compararmos as duas interpretações, igualmente aceitáveis, dos observadores inercial,  $I$ , e acelerado,  $A$ , a respeito do movimento de  $M$  na plataforma giratória, vimos que ambos recorriam a uma força comum, aplicada em  $M$ , dirigida para o centro  $C$ , e a que chamamos **força centrípeta**. Em todo o movimento circular e uniforme há, como vimos na Unidade 1, uma **aceleração** radial e **centrípeta**,  $\vec{a}_c$ . Se o móvel possui uma aceleração centrípeta, tem de haver uma força relacionada com esta aceleração. Esta força tem, segundo a *lei fundamental de Newton*, a seguinte expressão

$$\vec{F}_c = m \vec{a}_c.$$

Sob a forma escalar e considerando o valor da aceleração centrípeta, temos:

$$F_c = m \frac{v^2}{r},$$

sendo  $m$  a massa em movimento circular,  $v$  o módulo da velocidade e  $r$  o raio da trajetória.

Essa força centrípeta pode ser obtida de várias formas. Vejamos alguns exemplos.

No caso do **pêndulo cónico**, a força centrípeta é a resultante da *força gravítica* e da *tensão* do fio — fig. 7.13:

$$\vec{F}_g + \vec{T} = m \vec{a}_c$$

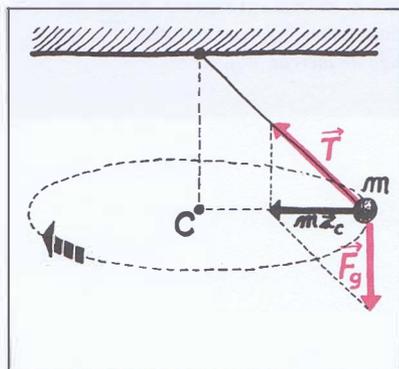


Fig. 7.13 No pêndulo cónico, a força centrípeta é a resultante das forças que actuam na massa  $m$ .

No caso de um **satélite** a gravitar (supõe-se que gravita no plano equatorial e com *m.c.u.*) em torno da Terra — fig. 7.14, a **força centrípeta** identifica-se com a **força gravítica** que o campo gravítico terrestre exerce no satélite. Sendo *r* o raio da órbita do satélite, *g* a intensidade do campo gravítico à altitude *h* a que o satélite gravita e *r<sub>T</sub>* o raio equatorial terrestre, tem-se, sucessivamente:

$$F_g = m a_c \iff m g = m \frac{v^2}{r}$$

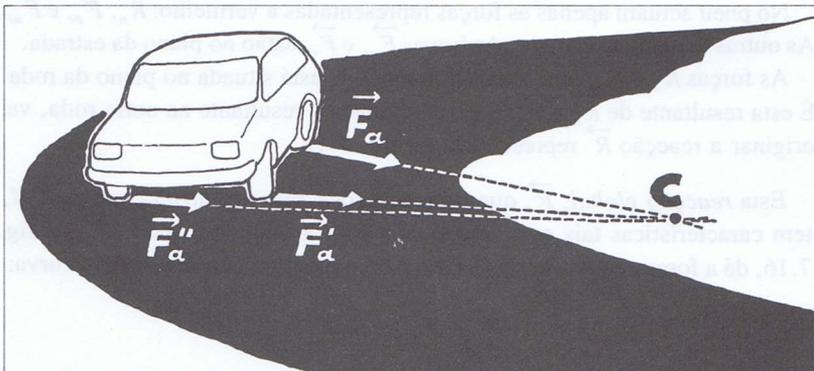
$$v = \sqrt{g (r_T + h)}$$

Se, por exemplo, se pretender colocar um satélite a gravitar à altitude de 300 km, onde o campo gravítico tem o valor  $8,9 \text{ N kg}^{-1}$  (a aceleração da gravidade é  $8,9 \text{ ms}^{-2}$ ), a velocidade do satélite tem de ser

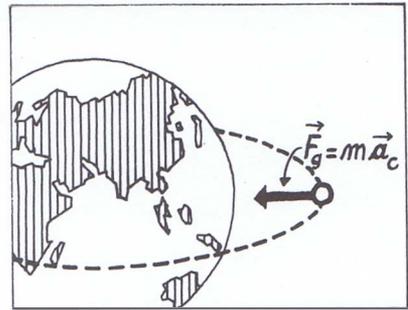
$$v = \sqrt{8,9 (6,4 \times 10^6 \text{ m} + 0,3 \times 10^6 \text{ m})} = 7,7 \times 10^3 \text{ m/s} = 7,7 \text{ km/s} \rightarrow 8 \text{ km/s (um pouco mais de 27 000 km/h)}$$

É esta a chamada **1.ª velocidade cósmica** ou velocidade necessária para um satélite gravitar a baixa altitude.

Vejamus mais outro caso: o de um **automóvel** que descreve uma curva horizontal. Neste caso são as **forças de atrito** normais ou **centrípetas**, exercidas nos pneus do carro, que produzem a aceleração centrípeta necessária para ele rodar — fig. 7.15. Saliente-se que, para além dessas forças de atrito centrípetas da estrada sobre os pneus, há outras forças de atrito responsáveis pela progressão e pela travagem, tal como no caso da bicicleta analisada na Unidade 2. E há também a força gravítica equilibrada pelas reacções normais nos pneus.



**Fig. 7.15** Quando um automóvel descreve uma curva plana, são as forças de atrito nas rodas que originam a resultante centrípeta, causadora da aceleração centrípeta do automóvel.



**Fig. 7.14** Um satélite que gravita em torno da Terra está submetido a uma força gravítica, que provoca a aceleração centrípeta do satélite e que, portanto, se identifica com uma força centrípeta.

Sendo *r* e *r<sub>T</sub>*, respectivamente, o raio da órbita do satélite e o raio equatorial terrestre, e *h* a altitude do satélite, temos:

$$r = r_T + h$$

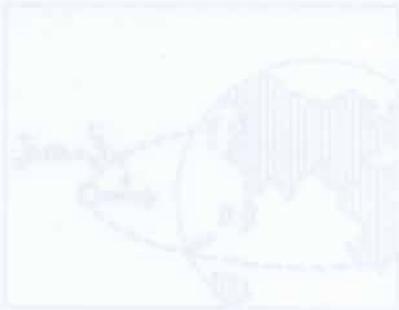


Fig. 7.16

O motociclista, ao inclinar-se no percurso da curva, faz com que a força gravítica e a reacção, adicionadas, criem a força centrípeta necessária para descrever a curva.

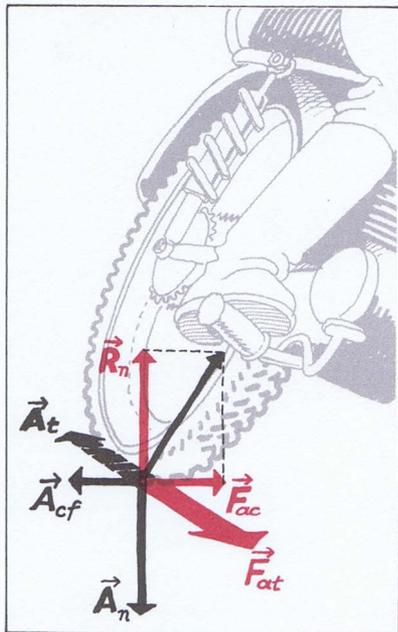
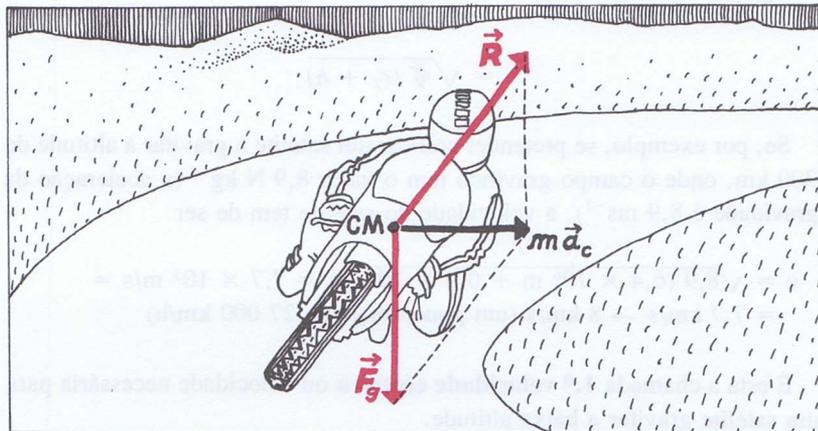


Fig. 7.17 Parcs acção-reacção, no contacto com o solo, do pneu da roda tractora da motocicleta da fig. 7.16.

Consideremos agora um **motociclista** a descrever uma curva plana — fig. 7.16. Intuitivamente, o motociclista inclina-se para o lado de dentro da curva. Vamos compreender porquê.

Ao inclinar-se, o motociclista obriga os pneus a «trocarem» com o solo os seguintes pares acção-reacção, representados na fig. 7.17 para o caso de o pneu pertencer à roda de tracção:



$\vec{A}_n$  e  $\vec{R}_n$  — acção normal na estrada e reacção normal da estrada sobre o pneu.

$\vec{A}_{cf}$  e  $\vec{F}_{ac}$  — acção centrífuga do pneu sobre a estrada e reacção desta, que é a força centrípeta de atrito que se opõe ao deslizamento para fora do pneu.

$\vec{A}_t$  e  $\vec{F}_{at}$  — acção do pneu sobre o solo no sentido contrário ao do movimento e reacção do solo, que é a força de atrito oposta ao deslizamento do pneu no sentido em que este roda; esta força de atrito, tendo o sentido da progressão translativa do pneu, é responsável pela *progressão* da motocicleta.

No pneu actuam apenas as forças representadas a vermelho:  $\vec{R}_n$ ,  $\vec{F}_{ac}$  e  $\vec{F}_{at}$ . As outras actuam na estrada. As forças  $\vec{F}_{ac}$  e  $\vec{F}_{at}$  estão no plano da estrada.

As forças  $\vec{R}_n$  e  $\vec{F}_{ac}$  têm uma resultante que está situada no plano da roda. É esta resultante de  $\vec{R}_n$  e  $\vec{F}_{ac}$  que, adicionada à resultante na outra roda, vai originar a reacção  $\vec{R}$  representada na fig. 7.16.

Esta *reacção global*,  $\vec{R}$ , que transportamos para o *centro de massa* CM, tem características tais que, adicionada com a *força gravítica*,  $\vec{F}_g$  — fig. 7.16, dá a força centrípeta necessária para o motociclista descrever a curva:

$$\vec{R} + \vec{F}_g = m \vec{a}_c$$

O motociclista inclina-se, exactamente para criar o par de forças ( $\vec{A}_{cf}$ ,  $\vec{F}_{ac}$ ) de modo a gerar a reacção  $\vec{R}$  de características adequadas à curva e à sua velocidade.

QUESTÕES PROPOSTAS

Q 7.5

Um automóvel descreve uma curva com inclinação ou «relevé» e velocidade tais que não desencadeia qualquer par *acção centrífuga do pneu sobre a estrada — reacção centrípeta no pneu* — fig. 7.18.

Que relação há entre o ângulo  $\theta$  de inclinação da estrada e a velocidade do carro? Terá influência a massa deste?

Q 7.6

Um tubo de vidro é atravessado por um fio que tem nas suas extremidades duas massas de valor diferente:  $m$  e  $M$  — fig. 7.19. O corpo  $m$  é posto a girar horizontalmente em torno do tubo de modo que a massa  $M$  não suba nem desça. Utilizando um *referencial ligado à massa  $m$* , mostrar que se pode determinar experimentalmente a aceleração da gravidade recorrendo à expressão

$$g = 4\pi^2 \ell \frac{\phi}{T^2},$$

onde:

$$\phi = \frac{m}{M};$$

$\ell$  — comprimento livre do fio;  $T$  — período (tempo de uma rotação)

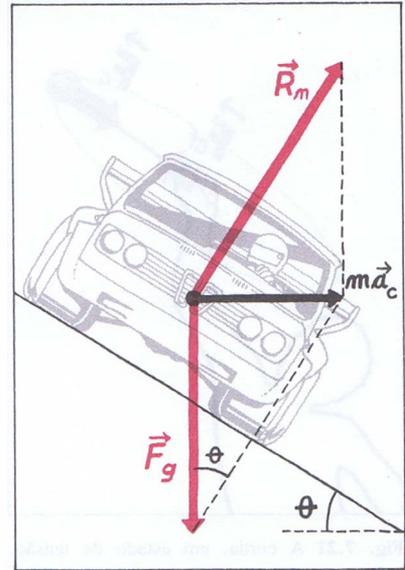


Fig. 7.18 Que relação há entre o ângulo  $\theta$  e a velocidade do carro?

B — A força centrífuga de reacção

Retomemos a interpretação do observador inercial  $I$  a respeito do movimento do experimento  $M$ , na plataforma giratória da fig. 7.10.

Segundo  $I$ , **observador inercial**,  $M$  roda porque o observador acelerado  $A$ , exerce nele uma *acção centrípeta*, representada por  $\vec{F}_c$  nas figs. 7.11 e 7.12. Portanto, segundo a *lei da acção-reacção*, se  $A$  exerce em  $M$  uma *acção centrípeta*, então  $M$  exercerá **em  $A$**  uma **reacção centrífuga** — fig. 7.20. É esta *reacção centrífuga* que o observador acelerado  $A$  sente aplicada em si, o que mais o convence de que em  $M$  actua uma força para fora, isto é, uma *força centrífuga*.

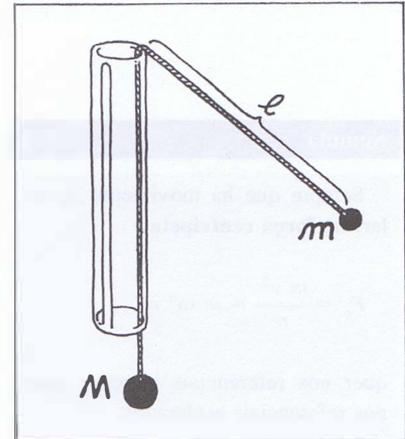


Fig. 7.19

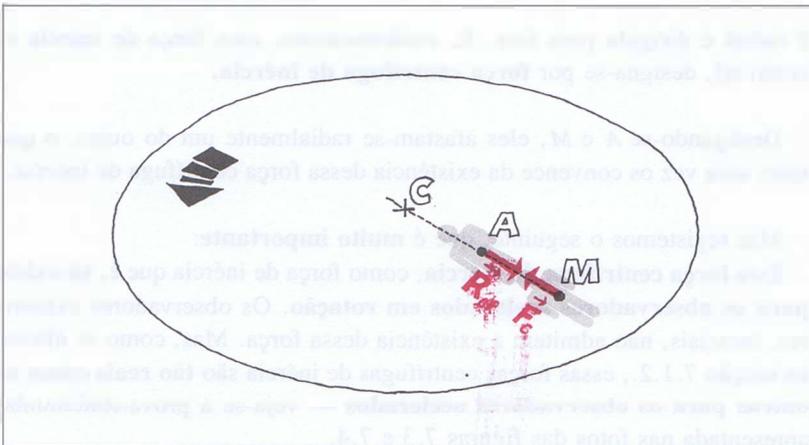


Fig. 7.20 Se  $A$  exerce em  $M$  uma *acção centrípeta*,  $M$  exerce em  $A$  uma *reacção centrífuga* (pela lei da *acção-reacção*). Esta existe quer para os observadores inerciais quer para os observadores não inerciais.

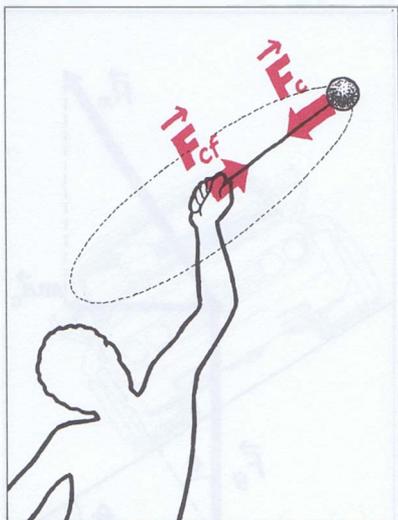


Fig. 7.21 A corda, em estado de tensão, exerce uma *força centrípeta na pedra* e uma *força centrífuga na mão*. Esta existe também para os observadores inerciais.

### Súmula

7.2

Sempre que há movimento circular, há **força centrípeta**,

$$F_c = \frac{m v^2}{r} = m \omega^2 r,$$

quer nos referenciais inerciais quer nos referenciais acelerados.

#### A força centrífuga de reacção

$$\vec{F}_{cf} = -\vec{F}_c$$

está *aplicada* não na partícula móvel mas no *suporte* do movimento circular, e existe em qualquer tipo de referencial.

A **força centrífuga de inércia** só existe nos referenciais acelerados rotativos e está aplicada em qualquer partícula ligada a esses referenciais.

Observe-se e registre-se o seguinte aspecto **muito importante**:

Esta **força centrífuga de reacção**, que ambos os observadores (inercial e acelerado) admitem existir, **não está aplicada no móvel  $M$** , cujo movimento circular está a ser estudado, **mas, sim, no suporte** que o obriga a rodar, seja ele um eixo ou uma pessoa (neste caso, o observador  $A$ ). Se, por exemplo, com a nossa mão pusermos a rodar uma pedra atada a uma corda, é esta que, em estado de tensão, exerce, numa extremidade, uma **força centrípeta na pedra**, responsável pela aceleração centrípeta desta, e, na outra extremidade, uma **força centrífuga na mão** (não na pedra) — fig. 7.21.

A força centrífuga de reacção surgiu em todos os exemplos que atrás foram tratados.

Assim, na fig. 7.17 pode ver-se essa *força centrífuga de reacção*,  $\vec{A}_{cf}$ , oposta à força centrípeta de atrito,  $\vec{F}_{ac}$ , aplicada na estrada e não no móvel que roda (neste caso, o pneu da motocicleta).

No caso do satélite terrestre — fig. 7.14, à acção centrípeta da Terra sobre o satélite, corresponde uma reacção centrífuga aplicada no centro da Terra, que é a atracção exercida pelo satélite sobre a Terra.

### C — A força centrífuga de inércia

Retomemos agora a interpretação do observador  $A$ , observador acelerado na plataforma rotativa da fig. 7.10, ou mesmo — porque não? — a interpretação do próprio experimentador  $M$ . Segundo os seus pontos de vista, eles estão em repouso na plataforma, agarrados um ao outro (não esquecer que o *estado de repouso é relativo* e a distância entre  $A$  e  $M$  não varia). Dado que ambos sentem que  $A$  está exercendo em  $M$  uma força centrípeta, e isto é um facto, para justificar o repouso de  $M$  têm de considerar uma força aplicada em  $M$ , simétrica dessa força centrípeta — fig. 7.12. Essa força

$$\vec{F}_{cf} = -\vec{F}_c = -m\vec{a}_c$$

é radial e dirigida para fora. É, evidentemente, uma força de inércia e, como tal, designa-se por **força centrífuga de inércia**.

Desligando-se  $A$  e  $M$ , eles afastam-se radialmente um do outro, o que mais uma vez os convence da existência dessa força centrífuga de inércia.

Mas registemos o seguinte, que é **muito importante**:

Esta **força centrífuga de inércia**, como força de inércia que é, **só existe para os observadores acelerados em rotação**. Os observadores exteriores, inerciais, não admitem a existência dessa força. Mas, como se afirma na secção 7.1.2., essas forças centrífugas de inércia são **tão reais como as outras para os observadores acelerados** — veja-se a prova-testemunho apresentada nas fotos das figuras 7.3 e 7.4.

Qualquer motociclista a rodar — fig. 7.16, sente bem o efeito dessa força centrífuga de inércia e é para a contrariar que ele se inclina para o lado do centro da curva. É essa força centrífuga de inércia que o equilibrista do «poço da morte» ou os visitantes do «cilindro ou roda de mistério» experimentam — fig. 7.22; é ela também que faz secar a roupa nas centrifugadoras.

## QUESTÕES PROPOSTAS

### Q 7.7

Em termos dinâmicos, isto é, no que diz respeito às forças utilizadas na lei fundamental, em que se distingue, *fundamentalmente*, a descrição do movimento de um corpo feita por um observador inercial ou feita por um observador acelerado que acompanha o movimento do corpo?

### Q 7.8

Dispomos de um vaso cilíndrico cheio de líquido e pomo-lo a rodar, rapidamente, em torno de um eixo vertical que coincide com o eixo do vaso — fig. 7.23. A sua velocidade angular é constante. Mostrar que, nesta situação, a superfície livre do líquido toma a forma de um *parabolóide* — superfície gerada por uma parábola que roda em torno do eixo  $Oy$ .

**Sugestão:** Mostrar que a equação  $y = f(x)$  correspondente aos pontos  $P$  da curva  $\widehat{AOB}$  é da forma

$$y = p x^2.$$

Esta é a equação de uma parábola, sendo  $p$  uma constante.

### Q 7.9

O bloco  $m$  pode mover-se, com atrito desprezável, no tejadilho plano e inclinado  $30^\circ$  de um carro — fig. 7.24. Este possui uma aceleração  $\vec{a}$  constante, cujo valor é tal que o bloco  $m$  não se move relativamente ao carro (não desce nem sobe o plano).

1. Como é que o observador inercial,  $I$ , interpreta o facto de  $m$  não descer nem subir o plano, e que valor calcula para a aceleração deste?
2. Como é que o observador acelerado,  $A$  (fixo no plano), interpreta o facto de  $m$  não descer nem subir o plano, e que valor calcula para a aceleração deste?
3. Mostrar que a reacção do plano é maior quando o carro está em movimento acelerado do que *parado* ou em *m.r.u.* Estabelecer ainda a relação entre elas.

Dados trigonométricos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \theta + 1 &= \sec^2 \theta \\ \sec \theta &= \frac{1}{\cos \theta} \end{aligned}$$

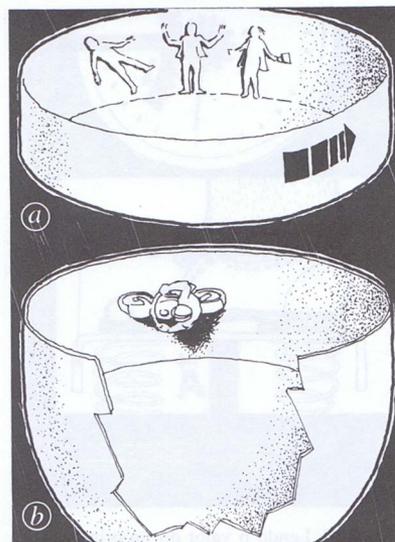


Fig. 7.22

- (a) O «cilindro ou roda do mistério».  
(b) O «poço da morte».

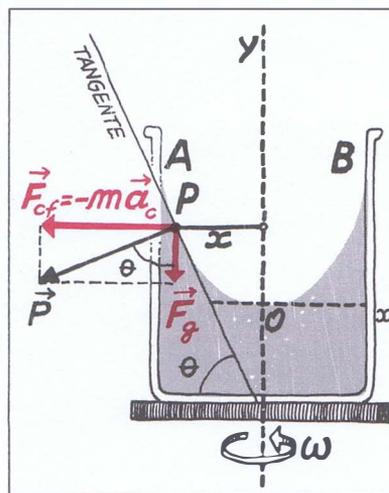


Fig. 7.23

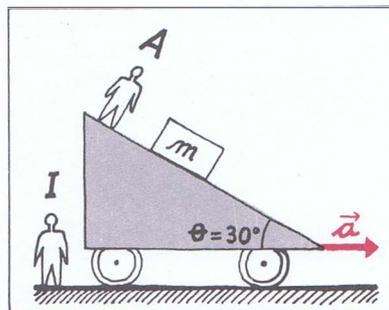


Fig. 7.24

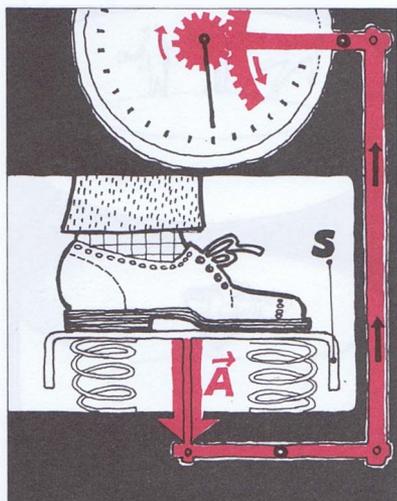


Fig. 7.25 Lendo o valor do próprio peso.

### 7.3 Os conceitos relativos de peso e de vertical

#### 7.3.1 O peso medido por uma balança-dinamómetro

No Manual de Física para o 10.º de escolaridade, definimos o **peso** de um corpo como a *resultante das forças que actuam no corpo e é equivalente à acção resultante que esse corpo exerce no suporte ou suportes a que está ligado*. Dito de modo mais resumido: é a **força que actua no corpo e é equivalente à acção dele sobre o suporte**.

Salientámos, então, tratar-se de uma *força resultante de forças aplicadas no corpo, sendo uma destas a força gravitacional*.

Estamos em condições, agora, de concretizar e explicar melhor esta noção de peso, que, como vamos ver, é mais geral do que a noção seguinte: «o peso é a força gravitacional».

Coloquemo-nos em cima do suporte de uma balança-dinamómetro, prontos a determinar com ela o nosso peso — fig. 7.25. Estamos a exercer uma determinada acção  $\vec{A}$  nesse suporte e, por intermédio deste, na mola da balança. O peso que a balança regista é precisamente o valor dessa acção  $\vec{A}$ .

Será que esta acção corresponde exactamente à força atractiva gravitacional? No caso negativo, a que corresponde?

Para respondermos a esta questão, vamos considerar o suporte  $S$  da balança (não respeitando escalas, evidentemente) a rodar, com a Terra, em torno do eixo desta — fig. 7.26.

E em cima do suporte  $S$  nós próprios a rodar também.

Relativamente a um **referencial inercial** ( $O, x, y, z$ ) — que tem de ser exterior à Terra, uma vez que não estamos a desprezar a rotação desta e, como tal, a Terra é um corpo acelerado —, são as seguintes as forças que nos *actuam* — fig. 7.26, (a):

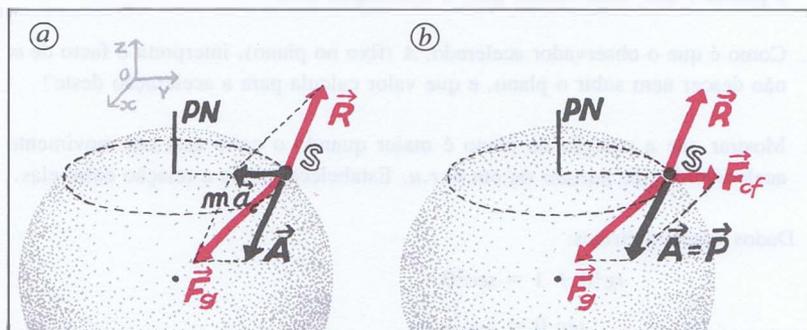


Fig. 7.26 A interpretação de um observador inercial exterior à Terra — (a) — e a nossa própria interpretação — (b) — acerca das forças que nos actuam conduzem à mesma conclusão: a **acção que exercemos numa balança difere da força gravítica**.

$\vec{R}$  = reacção do suporte

$\vec{F}_g$  = força gravítica atractiva, dirigida para o centro da Terra

Como, relativamente a esse referencial inercial, estamos a rodar com *m.c.u.* e, por isso, possuímos *aceleração radial e centrípeta*, as únicas forças exteriores que nos actuam,  $\vec{F}_g$  e  $\vec{R}$ , têm de admitir uma resultante também radial e centrípeta (segundo a lei fundamental):

$$\vec{R} + \vec{F}_g = m \vec{a}_c$$

Como

$$\vec{a}_c \neq \vec{0},$$

concluimos então que

$$\vec{R} \neq -\vec{F}_g.$$

Portanto, como a acção  $\vec{A}$  aplicada na balança é simétrica da reacção  $\vec{R}$ , que a balança exerce em nós (pela lei da acção-reacção), tem-se:

$$\vec{A} = -\vec{R} \neq \vec{F}_g \quad (\text{ver fig. 7.26})$$

Abandonemos o ponto de vista imaginário de um observador exterior à Terra e adoptemos o nosso próprio ponto de vista. Como nos consideramos, e bem, *em repouso na Terra*, quando nos estamos a pesar, atribuímos a diferença existente entre  $\vec{F}_g$  e  $\vec{A}$  — fig. 7.26, (b) — à actuação de uma *força centrífuga de inércia*,  $\vec{F}_{cf}$ , tal que

$$\vec{F}_{cf} + \vec{R} + \vec{F}_g = \vec{0} \iff \vec{a} = \vec{0} \iff \text{Repouso}.$$

A **acção** na balança é, pois, a **soma da força gravítica com a força de inércia** — fig. 7.26, (b), e, portanto, o peso, segundo a definição que adoptámos, é:

$$\vec{P} = \vec{A} = \vec{F}_g + \vec{F}_i$$

### 7.3.2 O conceito de peso é relativo. A imponderabilidade

Estamos agora perante um dilema:

— Ou aceitamos que o *peso é equivalente à acção que exercemos na balança* e então, sim, podemos considerar que estamos efectivamente a pesar-nos: de facto, nas condições desta definição, a balança está a determinar a intensidade do nosso peso.

- Ou afirmamos que o nosso *peso* é a *força gravítica*  $\vec{F}_g$ , com que somos atraídos para o centro da Terra: então, como a balança regista *só* a acção  $\vec{A}$  nela exercida, concluimos que a balança *não pode* indicar o valor do nosso peso, porque é

$$\vec{A} \neq \vec{F}_g$$

Classicamente seguia-se a segunda opção e ainda hoje nada impede que o façamos. Afinal, trata-se de definir algo e uma definição tem sempre muito de arbitrário — é um ponto de partida.

Após as *Teorias da Relatividade de Einstein* e dada a importância que elas vieram dar às *forças de inércia*, que hoje, para os observadores acelerados, são consideradas tão reais ou tão imaginárias como as outras, porque têm uma definição matemática comum,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

preferimos, a exemplo do que fazem muitos autores modernos, seguir a primeira das opções. E assim definimos:

- o **peso** de um corpo é a **força**, aplicada **no corpo**, **equivalente à acção que ele exerce no suporte a que está ligado** (no exemplo anterior, a balança). Intrinsecamente, é a **soma da força gravitacional com a força de inércia**.

É óbvio que a fig. 7.26 está exageradíssima, com o intuito, é evidente, de tornar fácil a sua leitura e salientar o papel da força de inércia no referencial acelerado. Também se sabe que o efeito da rotação da Terra é desprezável devido ao pequeno valor da respectiva aceleração. Nestas condições, a Terra pode perfeitamente considerar-se um referencial inercial e, sendo assim, o papel da força centrífuga de inércia da Terra,  $\vec{F}_{cf}$  — fig. 7.26, (b), deixa de ser considerado.

Em tal situação, as duas opções anteriores fundem-se numa só e deste modo temos o *peso* simultaneamente como *força equivalente à exercida no suporte* e como *força gravítica*.

Mas não será verdade que no mundo actual estamos inúmeras vezes ligados a referenciais **mais acelerados do que a Terra** e, por isso, na situação de **observadores acelerados**?

Consideremos, por exemplo, um experimentador em cima de uma balança-dinamómetro colocada dentro de um elevador — fig. 7.27, (a).

Na fig. 7.27, (b), representaram-se as seguintes forças, aplicadas no homem de massa  $m$ :

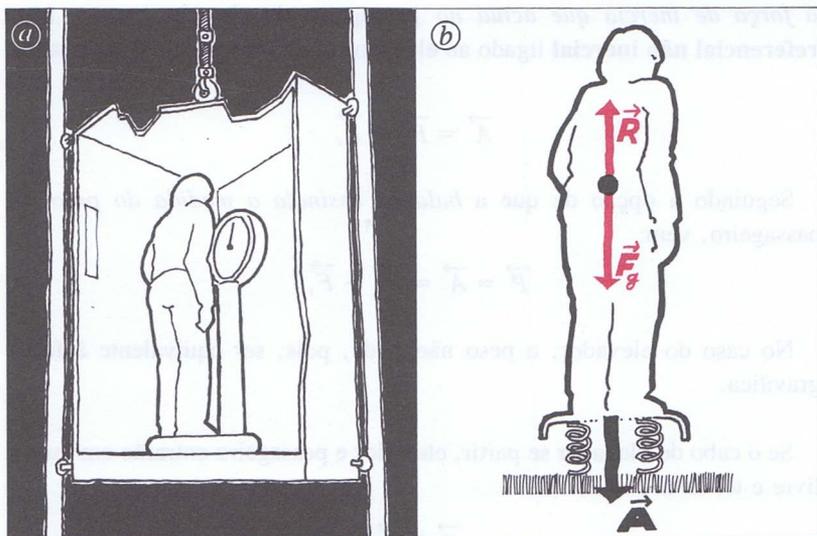


Fig. 7.27

- (a) O peso, cuja intensidade a balança assinala, é igual à soma da força gravítica com a força de inércia:

$$\vec{P} = \vec{A} = \vec{F}_g + \vec{F}_i$$

- (b) Forças que actuam no passageiro do elevador,  $R$  e  $F_g$ , e acção  $A$  que o passageiro exerce na balança, segundo um observador inercial.

$\vec{F}_g = m \vec{g} \rightarrow$  força gravítica aplicada no centro de gravidade do homem (o centro de gravidade é um ponto dos corpos que coincide com o seu  $CM$ , como veremos na Unidade 9).

$\vec{R} = -\vec{A} \rightarrow$  reacção do piso da balança aplicada nos pés do homem, mas transportada para o seu centro de gravidade (para aplicar a lei do movimento do centro de massa).

Note-se que a acção  $\vec{A}$  não está aplicada no homem mas, sim, na balança.

A resultante das forças que actuam no homem tem de ser igual ao produto da sua massa pela aceleração que possui, que há-de ser a do elevador.

Tem-se, então, num referencial inercial (ligado à Terra):

$$\vec{F}_g + \vec{R} = m \vec{a} \quad (\vec{a} = \text{aceleração do elevador})$$

Desde que o elevador arranque ou trave, na subida ou na descida, será  $\vec{a} \neq \vec{0}$  e, portanto,

$$\vec{R} \neq -\vec{F}_g$$

Neste caso, não podemos considerar o valor registado na balança, que é a acção  $\vec{A}$  exercida sobre ela, igual à força gravítica, porque:

$$\vec{A} = -\vec{R} = \vec{F}_g - m \vec{a}$$

Sendo, por outro lado,

$$-m \vec{a} = \vec{F}_i$$

O **peso de um corpo**, entendido como uma força aplicada *no* corpo e equivalente à força que o corpo exerce no suporte a que está ligado, é a soma vectorial da força gravítica com a força de inércia:

$$\vec{P} = \vec{A} = \vec{F}_g + \vec{F}_i$$

O conceito de peso é *relativo*, porque:

— nos referenciais inerciais é  $\vec{F}_i = \vec{0}$ , e portanto,

$$\vec{P} = \vec{F}_g;$$

— nos referenciais acelerados é  $\vec{F}_i \neq \vec{0}$ , e, por isso,

$$\vec{P} = \vec{F}_g + \vec{F}_i.$$

a força de inércia que actua no passageiro do elevador, temos **num referencial não inercial** ligado ao elevador (cujo movimento é acelerado):

$$\vec{A} = \vec{F}_g + \vec{F}_i$$

Seguindo a opção de que a *balança assinala a medida do peso* do passageiro, vem:

$$\vec{P} = \vec{A} = \vec{F}_g + \vec{F}_i$$

No caso do elevador, o peso não pode, pois, ser equivalente à força gravítica.

Se o cabo do elevador se partir, elevador e passageiro entrarão em queda livre e ter-se-á

$$\vec{a} = \vec{g}$$



**Fig. 7.28** O avião desta fotografia tem uma *aceleração igual à da gravidade*.

Os passageiros estão em **imponderabilidade** e as suas sensações são em tudo semelhantes às experimentadas na *ausência de qualquer campo gravítico significativo*.

$$\vec{F}_i = -m \vec{a} = -m \vec{g}$$

e, portanto,

$$\vec{P} = \vec{F}_g + \vec{F}_i = \vec{0}$$

Nesta situação, a balança não acusará peso algum, o passageiro também não sentirá peso algum e estará, por isso, em **imponderabilidade**. É o que se verifica num avião em queda livre — fig. 7.28.

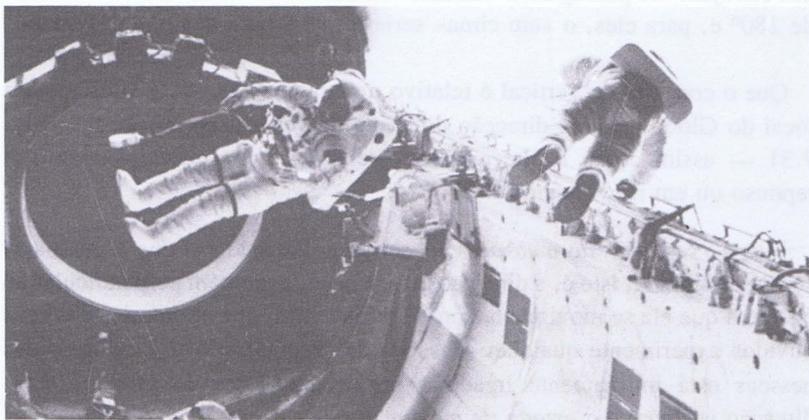
A acção do campo gravítico terrestre  $\vec{g}$  que se faz sentir é compensada pelo campo de acelerações  $\vec{g}$  que existe no interior do avião. Este campo, segundo o *princípio de equivalência* de Einstein, é equivalente a um campo gravítico (a tão falada *gravidade artificial*):  $\vec{g} = -\vec{g}$ .

Daqui resulta o facto de os passageiros do avião *não sentirem peso algum*.

É claro que, para nós, que estamos de fora a ver cair o avião e os passageiros, eles **têm de facto peso**, e esse peso identifica-se com a força gravítica que os atrai. Para nós, observadores exteriores, e que **nos consideramos** observadores inerciais, as forças de inércia não existem.

Os passageiros do avião *não têm peso* segundo o **seu** ponto de vista, isto é, *relativamente ao seu referencial*. Mas *já possuem peso* segundo o ponto de vista de um observador exterior, isto é, *relativamente a um referencial inercial*.

Outra situação de **imponderabilidade** é a que se verifica numa nave quando viaja numa órbita estacionária à volta da Terra com movimento uniforme —fig. 7.29.



A velocidade orbital, constante, é

$$v = \sqrt{g r},$$

sendo neste caso  $g$  o valor do campo gravítico à distância  $r$  do centro da Terra (rever 7.2.2, A).

Sendo relativo o conceito de peso, também é relativo o conceito de **imponderabilidade**.

De facto, o mesmo corpo pode estar em *imponderabilidade* num referencial e *ter peso* noutro.

Quando, por exemplo, um corpo, ligado a um dinamómetro, está em *queda livre*, verificamos que:

— o corpo não tem peso no *sistema acelerado* corpo-dinamómetro:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= m \vec{g} + \vec{F}_i \\ &= m \vec{g} - m \vec{g} = \vec{0} ; \end{aligned}$$

— o corpo tem peso num *referencial inercial* ligado à Terra:

$$\vec{P} = m \vec{g} + \vec{0} = m \vec{g} .$$

Fig. 7.29 O astronauta sai da nave e acompanha-a no seu movimento, porque se encontra numa situação de imponderabilidade.



Fig. 7.30 Se um elevador caísse com uma aceleração superior a  $g$ , os passageiros teriam o peso dirigido para cima.

Para um observador em Terra, o astronauta tem peso

$$\vec{P} = m \vec{g} = \vec{F}_g,$$

ao passo que na nave o seu peso é nulo:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{F}_g + \vec{F}_i \iff \\ \vec{P} &= m \vec{g} - m \vec{a} = \vec{0}, \end{aligned}$$

visto que a aceleração do astronauta é a aceleração da gravidade  $\vec{g}$  de valor igual ao campo  $\vec{g}$ , sendo a força de inércia

$$-m \vec{a} = -m \vec{g}$$

### 7.3.3 Os conceitos relativos de «em cima», «em baixo» e de vertical

Tal como o peso e a imponderabilidade, também os conceitos de «em cima» ou «em baixo», e o próprio conceito de *vertical* são relativos.

Se, por exemplo, a aceleração de um elevador, dirigida para baixo, fosse de módulo superior a  $g$ , teríamos a situação apresentada na fig. 7.30.

Observe-se que, neste caso, a força de inércia, dirigida no sentido das cabeças, teria módulo superior à força gravítica, dirigida no sentido dos pés, e a sua soma,

$$\vec{P} = \vec{F}_g + \vec{F}_i,$$

estaria dirigida no sentido das cabeças. Quer dizer: o peso teria o sentido das cabeças! Os passageiros ficariam comodamente instalados se rodassem de 180° e, para eles, o «em cima» seria o que é para nós o «em baixo».

Que o conceito de vertical é relativo mostra-o o facto de a vertical num local do Globo ter uma direcção diferente da vertical noutro local — fig. 7.31 — assim como a direcção em que uma planta cresce quando em repouso ou em movimento — fig. 7.4.

Mas a «vertical» de uma pessoa, sendo a direcção em que a pessoa se sente equilibrada, isto é, a direcção do seu peso, é também perpendicular ao chão em que ela se movimenta com facilidade sem que no interior dos seus ouvidos experimente qualquer sensação de desequilíbrio (o equilíbrio das pessoas está intimamente ligado a órgãos interiores do ouvido). Esta direcção varia com o estado de movimento da pessoa.

Assim, por exemplo, num autocarro, quando arranca ou quando trava, fig. 7.32, a «nossa vertical» é oblíqua! Se, ao iniciar o arranque ou a travagem, nos inclinarmos na direcção da «nova» vertical, não nos desequilibraremos....

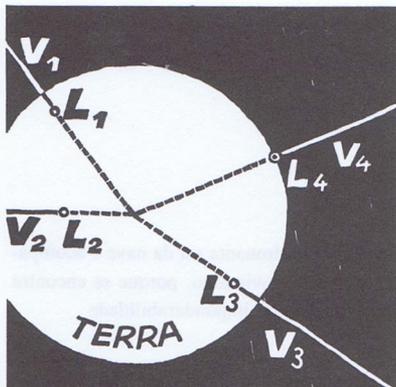
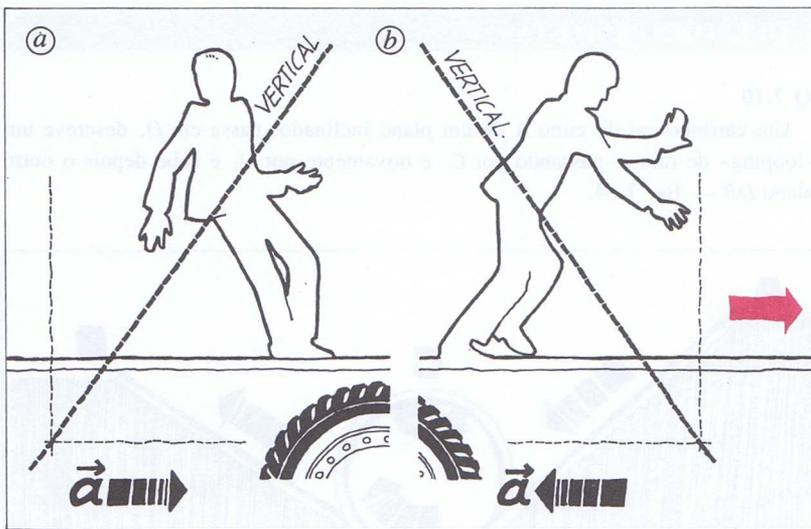
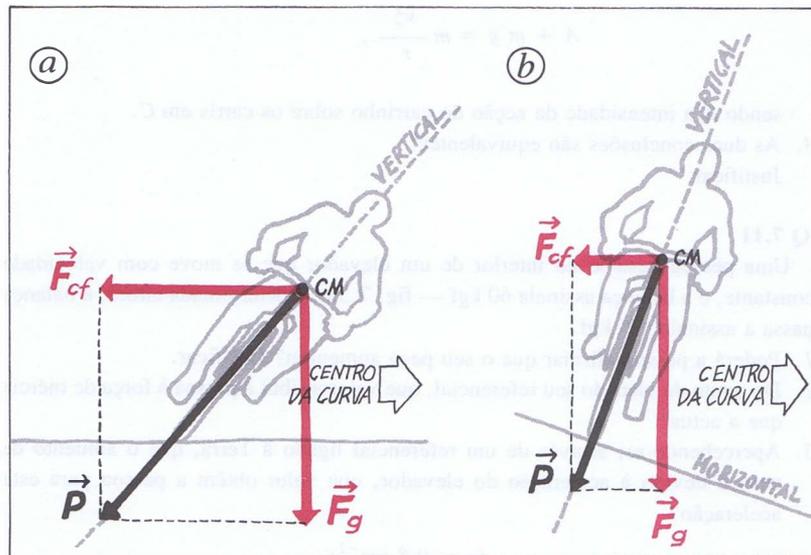


Fig. 7.31 As verticais  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  e  $V_4$ , em locais diferentes,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$ , da Terra, têm direcções diferentes.



**Fig. 7.32**  
 (a) Quando um autocarro arranca, o passageiro sente-se actuado por uma força de inércia para trás. A «parte de cima» do passageiro é «atirada para trás». Para evitar cair, ele quer encontrar a sua «vertical», que é a direcção do seu peso.  
 (b) Quando o autocarro trava, a força de inércia passa a estar dirigida para a frente. A sua «parte de cima» é «atirada para a frente». E ele volta a ficar em desequilíbrio por estar fora da sua vertical.

E o mesmo sucede com um ciclista que descreve uma curva. Para ele se sentir equilibrado, terá de se colocar na «sua vertical», isto é, na direcção do seu peso —fig. 7.33, (a). Para que ele sinta a bicicleta a andar com segurança num piso «horizontal», este terá de ter uma certa inclinação —fig. 7.33, (b).



**Súmula** 7.5

«Vertical» de um corpo é a direcção do seu peso.  
 «Em baixo» é o lado para onde está dirigido o peso.  
 «Em cima» é o lado oposto.

**Fig. 7.33**  
 (a) Quando um ciclista descreve uma curva, ele inclina-se para o centro da curva de modo a situar-se na «sua vertical», que é a direcção do seu peso:

$$\vec{P} = \vec{F}_g + \vec{F}_{cf}$$

( $\vec{F}_{cf}$  é a força centrífuga de inércia).  
 (b) Sentir-se-á num piso «horizontal» se este tiver uma certa inclinação de modo a ser perpendicular ao seu peso.

**Q 7.10**

Um carrinho cai do cimo A de um plano inclinado, passa em D, descreve um «looping» de raio  $r$ , passando por C, e novamente por D, e sobe depois o outro plano DB — fig. 7.34.

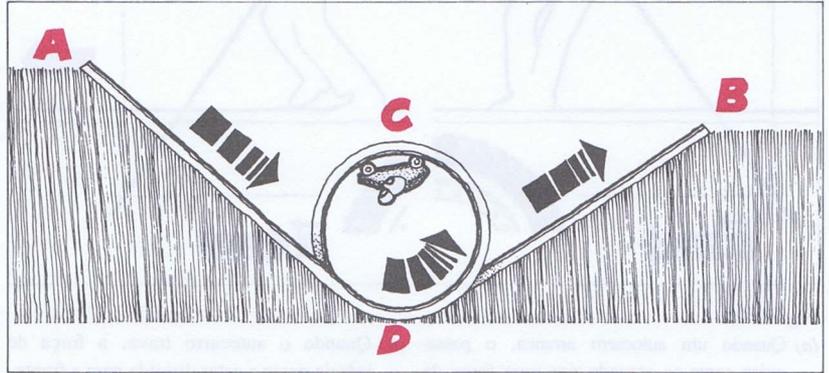


Fig. 7.34 Caminho-de-ferro aéreo.

A respeito do instante de passagem do carrinho em C, com a velocidade  $v_c$ :

1. Apresentar o raciocínio de um observador inercial para chegar à expressão

$$R + m g = m \frac{v_c^2}{r},$$

sendo  $R$  a intensidade da reacção dos carris sobre o carrinho em C.

2. Apresentar o raciocínio do observador transportado no carrinho para chegar à expressão

$$A + m g = m \frac{v_c^2}{r},$$

sendo  $A$  a intensidade da acção do carrinho sobre os carris em C.

3. As duas conclusões são equivalentes?

Justificar.

**Q 7.11**

Uma pessoa pesa-se no interior de um elevador que se move com velocidade constante, e a balança assinala 60 kgf — fig. 7.35. A determinada altura, a balança passa a assinalar 75 kgf.

1. Poderá a pessoa afirmar que o seu peso aumentou? Justificar.
2. Do ponto de vista do seu referencial, que valor atribui a pessoa à força de inércia que a actua?
3. Apercebendo-se, através de um referencial ligado à Terra, que o aumento de peso é devido à aceleração do elevador, que valor obtém a pessoa para esta accleração?

$$(g = 9,8 \text{ ms}^{-2})$$

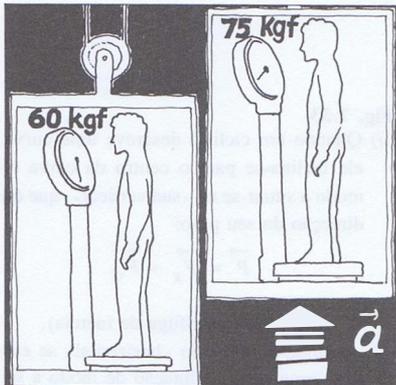


Fig. 7.35

**Q 7.12**

Um carro faz uma curva, com atrito e com um «relevê» cujo ângulo de inclinação é  $\theta$  — fig. 7.36

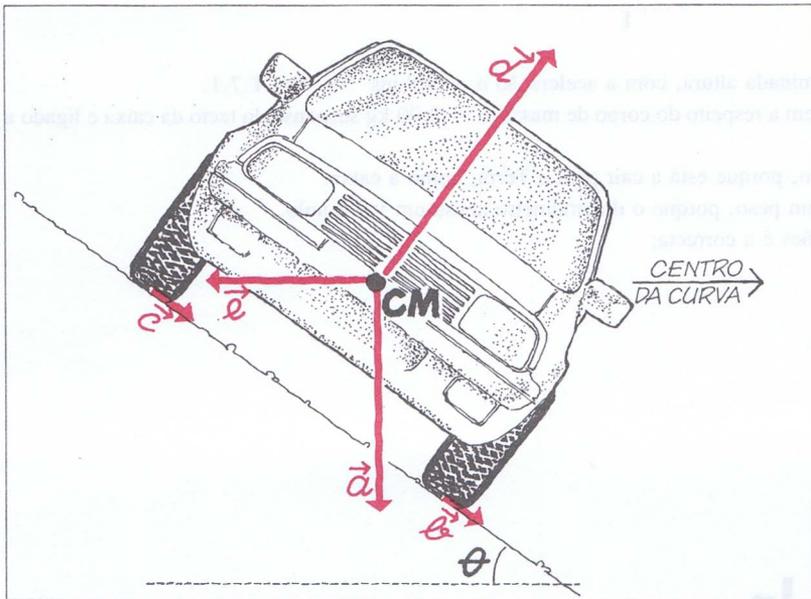


Fig. 7.36

Seja  $r$  o raio de curvatura descrito pelo centro de massa  $CM$  do carro e  $\mu$  o coeficiente de atrito estático:

1. Identificar as forças representadas pelos vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$  e  $\vec{e}$ , indicando se essas forças se referem à interpretação do automobilista ou de um observador à beira da estrada.
2. Aplicar as forças no centro de massa e provar que a velocidade máxima que lhe permite fazer a curva sem patinar para fora é dada por

$$v^2 = rg \frac{\mu + tg\theta}{1 - \mu tg\theta}$$

3. Mostrar que a expressão acabada de deduzir contém como caso particular a expressão

$$v^2 = rg tg\theta$$

estabelecida na Q 7.5.

# Teste de auto-avaliação

I

Uma caixa desce verticalmente, em determinada altura, com a aceleração  $a = 9,8 \text{ ms}^{-2}$  — fig. T.7.1.

Considerar as duas afirmações que se seguem a respeito do corpo de massa  $m = 2,00 \text{ kg}$  suspenso do tecto da caixa e ligado a um dinamómetro:

Observador inercial  $A$  — o corpo tem peso, porque está a cair para a Terra, como a caixa.

Observador acelerado  $B$  — o corpo não tem peso, porque o dinamómetro acusa um valor nulo.

Indicar, justificando, qual das seguintes opções é a correcta:

- (A) Só a afirmação de  $B$  é correcta.
- (B) Só a afirmação de  $A$  é correcta.
- (C) As duas afirmações podem ser correctas.
- (D) Nenhuma das afirmações é correcta.

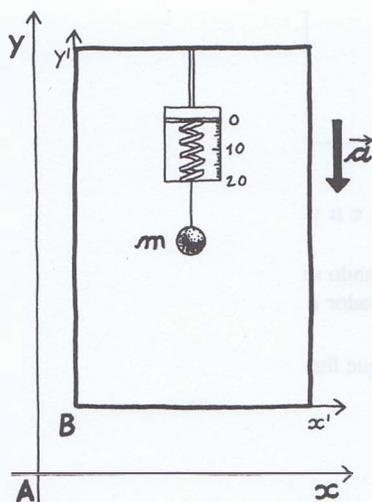


Fig. T.7.1

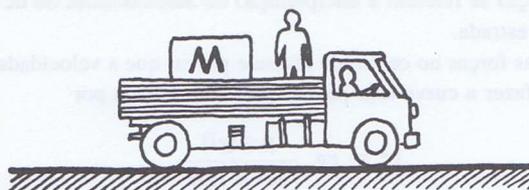


Fig. T.7.2

II

A mala  $M$ , de massa  $100 \text{ kg}$ , está assente na carroceria de uma camioneta — fig. T.7.2. Ao arrancar, esta atinge a velocidade de  $72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  em  $5,0 \text{ s}$ .

Um trabalhador, fixo na carroceria, vê, neste intervalo de tempo, a mala a deslocar-se  $2,0 \text{ m}$  para trás em  $2,0 \text{ s}$  com  $m.u.a.$ , a partir do repouso.

1. Qual é a aceleração da mala que o trabalhador fixo na carroceria poderia medir?
2. Qual é a aceleração da mala que um observador inercial exterior mediria?
3. A que força(s) recorreria o observador inercial para explicar a aceleração que ele mede? Qual ou quais os seus valores?
4. A que força(s) recorreria o trabalhador para poder interpretar a aceleração por ele medida, se tomasse conhecimento da existência da força(s) referidas na alínea anterior? Qual ou quais os valores dessa(s) forças?

### III

Suspendeu-se um corpo de massa  $m = 100 \text{ g}$  do tecto de um veículo — fig. T.7.3. Este desloca-se, em estrada plana e horizontal, com *m.u.a.* durante o arranque, atingindo a velocidade de  $72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  ao fim do percurso de  $100 \text{ m}$ .

1. Interpretar a posição do fio de suspensão, segundo o ponto de vista de um observador inercial fixo na estrada.
2. Interpretar a posição do fio de suspensão, segundo o ponto de vista de um observador sentado no veículo.
3. Determinar o ângulo de inclinação do fio,  $\theta$ .
4. Determinar a tensão do fio.

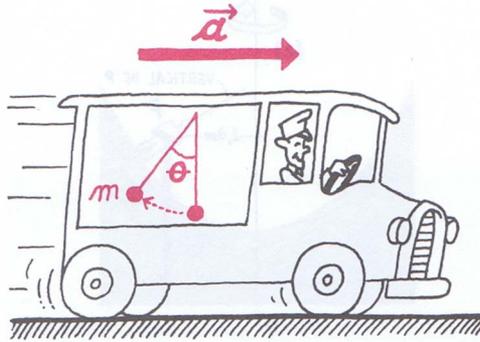


Fig. T.7.3

### IV

Um bloco  $B$  está assente num carrinho  $A$ . Imprime-se a este uma aceleração de valor  $a = g/2$ , sendo  $g$  o valor da aceleração da gravidade — fig. T.7.4.

1. Determinar o valor mínimo do coeficiente de atrito entre as superfícies do carrinho e do bloco  $B$  para que o bloco  $B$  fique em repouso relativamente ao carrinho.
2. Se o bloco  $B$  se mover relativamente ao carrinho, comparar as interpretações deste movimento dadas pelo observador inercial  $M$  e pelo observador acelerado  $N$ .

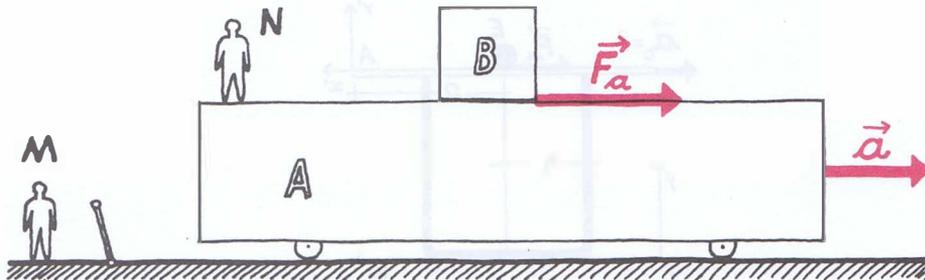


Fig. T.7.4

V

Uma determinada pessoa  $P$  está *de pé* numa superfície *parabolóide* que roda com a velocidade angular constante  $\omega = 5 \text{ s}^{-1}$  — fig. T.7.5. A massa da pessoa é  $70 \text{ kg}$  e a distância do seu centro de gravidade ao eixo de rotação,  $ZZ'$ , é  $2,0 \text{ m}$  ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ ).

1. Construir o diagrama das forças aplicadas segundo o ponto de vista da pessoa  $P$ .
2. Determinar o ângulo  $\theta$  da «vertical» da pessoa  $P$  com a vertical geográfica.
3. Determinar o valor do peso da pessoa  $P$ . Quantas vezes é maior do que a força gravítica?
4. Qual é o «plano horizontal» da pessoa  $P$ ?

Será o mesmo para outra pessoa com massa diferente?

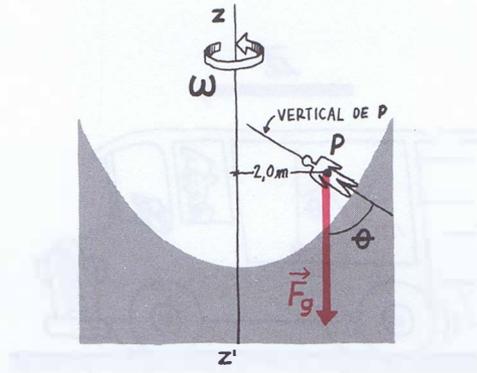


Fig. T.7.5

VI

Colocou-se um cartão circular, de raio  $R$ , em cima de um copo em repouso, de raio  $r$ . No centro desta tampa e da boca do copo, colocou-se uma esfera metálica,  $E$  — fig. T.7.6.

Seja  $\mu$  o coeficiente de atrito entre a esfera e a superfície do cartão.

1. Determinar a aceleração mínima,  $a_c$ , com que o cartão deve ser puxado para o lado de modo que a esfera caia dentro do copo:
  - 1.1 Adoptando o referencial inercial ( $I, x, y$ );
  - 1.2 Adoptando o referencial acelerado ( $A, x', y'$ ).
2. Verificar estes resultados, concretizando para:

$$\mu = 0,60 ; \quad r = 5,0 \text{ cm} ; \quad R = 8,0 \text{ cm} ; \quad g = 10 \text{ ms}^{-2}$$

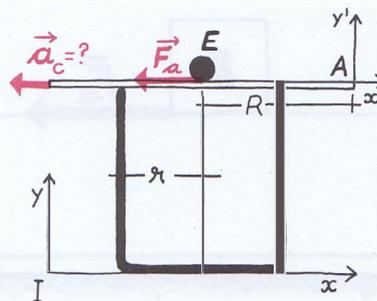


Fig. T.7.6

# Cinemática e dinâmica da rotação

# 8

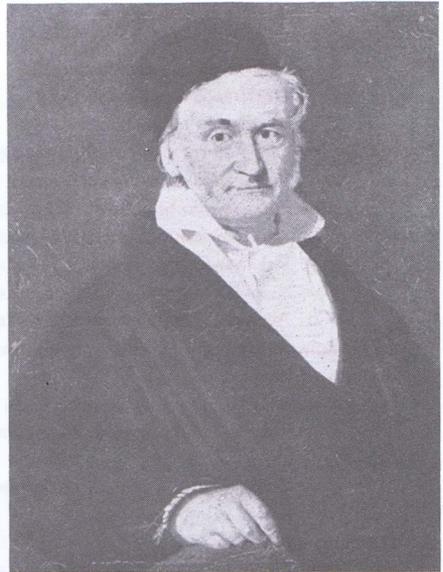
## UNIDADE



Pierre Simon LAPLACE (1749-1827)

Matemático e físico francês, publicou a *Mécanique céleste*, onde afirma que a lei newtoniana da atracção universal é «condição necessária e suficiente» do movimento dos astros. Trata-se de uma generalização a que o próprio *Newton* não se atreveu.

Ficou célebre o *determinismo mecanicista laplaciano*. Segundo este, o estado presente do Universo é consequência do estado anterior e causa do estado que vai seguir-se; uma inteligência poderosa, que conhecesse os dados actuais acerca do Universo, poderia, através de uma fórmula deduzida da análise, conhecer tanto o presente como o passado e prever o futuro do mesmo. Esta doutrina manteve-se até 1927.



Karl Friedrich GAUSS (1777-1855)

Matemático, astrónomo e físico alemão. Apresentou a noção racional de *massa*, que separou do conceito de matéria. Além disso, deu precisão ao significado dos princípios fundamentais, mostrando que, não obstante os esforços de d'Alembert, Lagrange e Fourier para os demonstrar, é impossível prová-los. Segundo *Gauss*, são apenas pontos de partida pragmáticos para resolver problemas.

Foi o iniciador das *geometrias não euclidianas*, ao estabelecer o conceito de contínuo bidimensional em superfícies não planas (esféricas, p. ex.). Teve influência directa na Física de *Einstein*, que introduziu o contínuo pluridimensional espaço-tempo na teoria da relatividade.



# Cinemática e dinâmica da rotação

## 8.1 Definição do movimento de rotação

## 8.2 Cinemática da rotação

### 8.2.1 Valores algébricos de algumas grandezas cinemáticas da rotação

- A — Deslocamento angular
- B — Velocidade angular média
- C — Velocidade angular instantânea
- D — Aceleração angular média
- E — Aceleração angular instantânea

### 8.2.2 Cinemática da rotação em torno de um eixo

- A — Movimento de rotação uniforme
- B — Equações do movimento de rotação uniformemente variado

### 8.2.3 Grandezas cinemáticas escalares e vectoriais da rotação

- A — Velocidade angular média (escalar)
- B — Velocidade angular instantânea (vectorial)
- C — Aceleração angular instantânea (vectorial)

### 8.2.4 Relação entre a cinemática angular de um sólido e a cinemática linear das suas partículas

- A — Relação entre a velocidade linear e a velocidade angular
- B — Relação entre a aceleração angular e a componente tangencial da aceleração linear
- C — Relação entre a aceleração angular e a componente centrípeta da aceleração linear

## 8.3 Dinâmica da rotação

### 8.3.1 Efeito rotativo de uma força aplicada a um sólido com um ponto fixo. Momento polar de uma força

### 8.3.2 Efeito rotativo de uma força aplicada a um sólido móvel em torno de um eixo.

#### Momento axial de uma força

- A — Momento axial de uma força
- B — O momento axial de uma força e o momento da sua projecção num plano perpendicular ao eixo

### 8.3.3 Lei de Newton do movimento de rotação

- A — Para uma partícula girante
- B — Para um sistema rígido de partículas girantes

### 8.3.4 Significado físico do momento de inércia

### 8.3.5 Alguns exemplos de aplicação da lei fundamental de Newton da rotação

### 8.3.6 Trabalho e potência na rotação

### 8.3.7 Energia cinética de rotação

### 8.3.8 Momento angular ou momento cinético

- A — Momento angular de uma partícula
- B — Momento angular de um sistema de partículas

### 8.3.9 Lei da variação do momento angular

## 8.4 Movimento de um corpo que rola sem escorregar

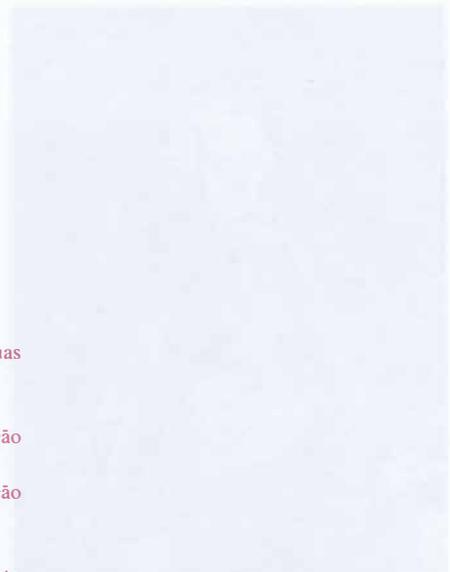
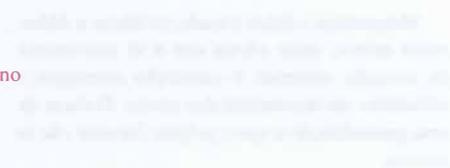


Fig. 8.1. Movimento de rotação em torno de um eixo.



## 8.1 Definição do movimento de rotação

Chama-se **corpo rígido** ou **sólido indeformável** a todo o corpo em que a distância entre dois quaisquer dos seus pontos se considera invariável. Um corpo rígido tem **movimento de rotação** ou simplesmente **rotação** (fig. 8.1) quando dois dos seus pontos,  $P$  e  $Q$ , por exemplo, se **mantêm fixos** durante o movimento.

Estes dois pontos definem o chamado **eixo de rotação**. Este pertence ao corpo.

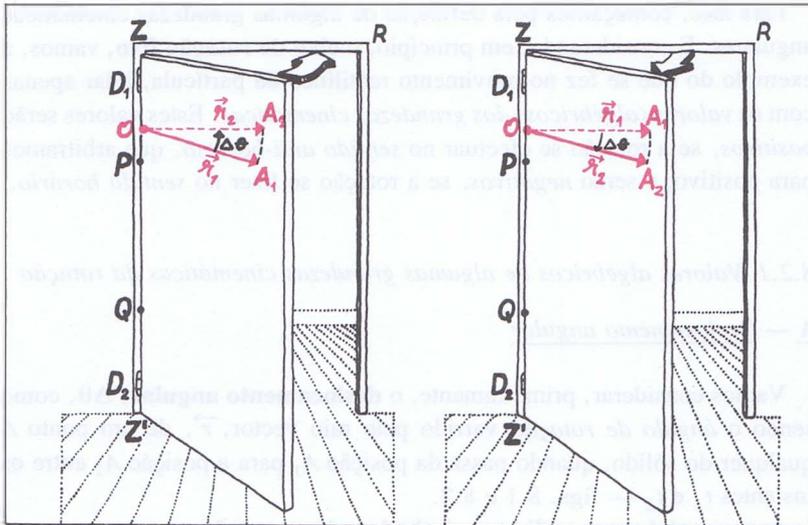


Fig. 8.1 A porta tem movimento de rotação em torno do eixo  $ZZ'$ , que está fixo por meio das dobradiças  $D_1$  e  $D_2$ .

Desta definição resultam as seguintes propriedades:

- 1.<sup>a</sup> — Exceptuando os pontos do eixo, qualquer ponto do corpo descreve uma trajectória circular de centro situado no eixo.
- 2.<sup>a</sup> — Todas as trajectórias circulares estão situadas em planos paralelos entre si e perpendiculares ao eixo, diferindo apenas pelo raio.

Na secção seguinte vamos ver como se *descreve* este movimento de rotação, ou seja vamos estudar a *cinemática da rotação*.

### Súmulas

### 8.1

No movimento de rotação de um sólido em torno de um eixo, pertencente ao sólido, todos os pontos descrevem *circunferências em planos perpendiculares ao eixo e centradas no eixo*.

Os raios das circunferências *variam*, porque são a distância de cada ponto ao eixo.

## 8.2 Cinemática da rotação

Consideremos um sólido em rotação. Seja, para concretizar, a porta representada na fig. 8.1. Imaginemos o sólido seccionado por um plano perpendicular ao eixo de rotação, passando, por exemplo, pelo ponto  $O$  — fig. 8.1. Este plano contém a trajectória circular de qualquer ponto da porta nele situado, como o ponto  $A_1$  — fig. 8.1.

A fig. 8.2 mostra esse plano visto de cima, ao longo do eixo  $OZ$  da fig. 8.1, e onde se toma para direcção do eixo  $OY$  a direcção  $ZR$  no vão da porta.

A posição da porta no referencial escolhido  $(O, x, y, z)$  pode ser conhecida se soubermos definir a posição de uma das suas partículas, como por exemplo  $A_1$  no referencial  $(O, x, y)$  — fig. 8.2.

Concluimos, assim, que para estudar cinematicamente a rotação de um sólido teremos de considerar, apenas, o movimento bidimensional de uma das suas partículas numa trajectória circular.

Assim, por exemplo, no *movimento de rotação uniforme de um corpo*, cada um dos seus pontos possui movimento circular uniforme, já estudado. *A velocidade angular do corpo é igual à velocidade angular de qualquer um dos seus pontos.* Vamos generalizar o estudo ao caso do movimento de rotação não uniforme.

Para isso, começamos pela definição de algumas grandezas cinemáticas angulares. E considerando, em princípio, o **eixo de rotação fixo**, vamos, a exemplo do que se fez no movimento rectilíneo da partícula, lidar apenas com os *valores (algébricos) das grandezas cinemáticas*. Estes valores serão *positivos*, se a rotação se efectuar no *sentido anti-horário*, que arbitramos para positivo; e serão *negativos*, se a rotação se fizer no *sentido horário*.

### 8.2.1 Valores algébricos de algumas grandezas cinemáticas da rotação

#### A — Deslocamento angular

Vamos considerar, primeiramente, o **deslocamento angular**,  $\Delta\theta$ , como sendo o *ângulo de rotação* varrido pelo raio vector,  $\vec{r}$ , de um ponto  $A$  qualquer do sólido, quando passa da posição  $A_1$  para a posição  $A_2$  entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$  — figs. 8.1 e 8.2.

A sua *medida*, **em radianos**, é obtida pela expressão

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r},$$

sendo  $\Delta s$  o espaço percorrido pelo ponto considerado no intervalo de tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Saliente-se que o deslocamento angular é dado, em radianos, pelo quociente de duas grandezas da mesma espécie (neste caso, de dois comprimentos). Por tal facto, suprime-se muitas vezes a unidade matemática *radiano* em diversas unidades físicas que se vão seguir.

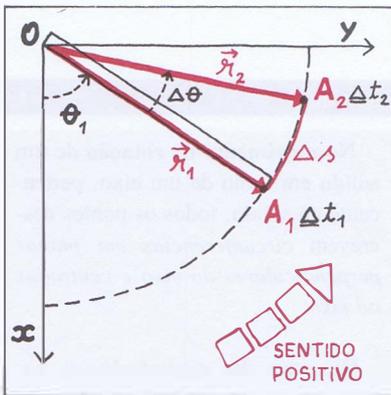


Fig. 8.2 Vista de uma secção horizontal da porta da fig. 8.1 numa posição  $\theta_1$  em relação ao referencial  $(O, x, y)$ .

### B — Velocidade angular média

É a grandeza que indica o deslocamento angular ocorrido, em média, por unidade de tempo. O seu valor é

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

e exprime-se em rad/s (ou simplesmente  $s^{-1}$ ) no SI. Também se pode exprimir em rotações/s.

### C — Velocidade angular instantânea

Trata-se da grandeza física que mede a rapidez com que o sólido está a rodar em qualquer instante. Este instante corresponde a uma *posição angular qualquer*  $A_1$  (definida por um ângulo  $\theta_1$  — fig. 8.2).

O seu valor é o limite para que tende a velocidade angular média quando o intervalo de tempo  $\Delta t$  tende para zero, ou seja: é a derivada do ângulo em ordem ao tempo. Temos, portanto:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

### D — Aceleração angular média

A aceleração angular média é a grandeza que mede a variação da velocidade angular, em média, por unidade de tempo. O seu valor obtém-se pela expressão

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$$

e mede-se em  $\text{rad/s}^2$  ou em rotações/ $s^2$ .

### E — Aceleração angular instantânea

É a grandeza física que mede a taxa de variação instantânea da velocidade angular, isto é, indica-nos se a velocidade angular está a variar muito, pouco ou nada num determinado instante. O seu valor é dado pela expressão

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

### Súmula

8.2

Os valores (algébricos) das grandezas cinemáticas angulares, na rotação em torno de um eixo fixo, são: — para o **deslocamento angular**,

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r};$$

— para a **velocidade angular média**,

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1};$$

— para a **velocidade angular instantânea**,

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt};$$

— para a **aceleração angular média**,

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1};$$

— para a **aceleração angular instantânea**,

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}.$$

### 8.2.2. Cinemática da rotação em torno de um eixo fixo

Ao analisarmos as definições dos valores das grandezas cinemáticas características da rotação de um corpo em torno de um **eixo fixo**, sobressai uma analogia formal com as definições das correspondentes grandezas características da translação ao longo de uma **direcção fixa**. Esta analogia é dada pela seguinte tabela:

à grandeza característica da translação	corresponde a grandeza característica da rotação
$x$	$\theta$
$v$	$\omega$
$a$	$\alpha$

Esta analogia mantém-se no estudo dos diferentes movimentos, como vamos ver.

#### A — Movimento de rotação uniforme

É o movimento cuja velocidade angular,  $\omega$ , é constante. Portanto, a sua aceleração angular é nula.

Vimos, na cinemática do movimento circular uniforme, que entre a velocidade linear e a velocidade angular existe a relação escalar

$$v = \omega r$$

Sendo assim, qualquer ponto de um sólido, em rotação uniforme, move-se circularmente com rapidez constante (pois  $\omega$  e  $r$  são constantes):

$$|\vec{v}| = \text{const.}^e \quad (\text{para cada ponto})$$

Seguindo um caminho paralelo ao que conduziu às *equações do movimento de translação uniforme*, obteríamos as *equações do movimento de rotação uniforme*, formalmente análogas àquelas, mas com a velocidade angular  $\omega$  em vez da velocidade linear  $v$  e com o ângulo descrito  $\theta$  em vez do espaço percorrido  $s$ .

Temos, assim, num quadro comparativo:

MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO UNIFORME	MOVIMENTO DE ROTAÇÃO UNIFORME
$v = \text{constante}$	$\omega = \text{constante}$
$s =  v  \cdot t$	$\theta =  \omega  \cdot t$

É o movimento de rotação com aceleração angular constante. Também há *analogia formal* entre as equações deste movimento de rotação e as do movimento de translação uniformemente variado, que, aliás, se deduzem igualmente de modo paralelo.

Substituindo  $a$  por  $\alpha$ ,  $v$  por  $\omega$  e  $x$  por  $\theta$ , temos, finalmente, num quadro comparativo:

As expressões válidas nos movimentos de **rotação** em torno de um **eixo fixo** podem ser *decalgadas* das expressões correspondentes nos movimentos de **translação rectilínea**, desde que se efectuem as seguintes substituições:

$x$  por  $\theta$  ;  
 $v$  por  $\omega$  ;  
 $a$  por  $\alpha$  .

MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO UNIFORMEMENTE VARIADO	MOVIMENTO DE ROTAÇÃO UNIFORMEMENTE VARIADO
$v = v_0 + \alpha t$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = v_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2 \alpha s$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \alpha \theta$

QUESTÕES PROPOSTAS

Q 8.1

Num tambor de uma máquina de lavar, um dos pontos, distante do eixo de rotação 40 cm, percorre um espaço de medida 1,20 m num certo tempo. De que ângulo roda o tambor nesse tempo?

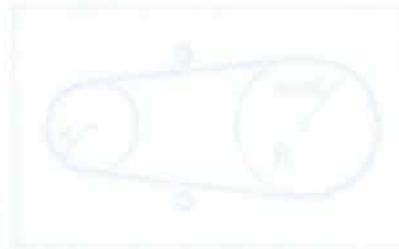
Q 8.2

Qual é a velocidade de um ponto de um disco de  $33 \frac{1}{3}$  r.p.m. (rotações por minuto) que dista 4,0 cm do centro?

Q 8.3

No *tacómetro* de um avião (medidor da velocidade de rotação do motor) fizeram-se as leituras que constam do quadro seguinte:

$t$ (min)	0	2	4
$\omega$ (rot·s <sup>-1</sup> )	900	900	1400



Determinar o valor da aceleração angular média:

1. Em cada intervalo de 2 min.
2. No intervalo total.

#### Q 8.4

Um corpo roda em torno de um eixo fixo de acordo com a lei

$$\theta = 3t^2 + 2t,$$

onde  $\theta$  é medido em *rad* e  $t$  em segundos.

Determinar, no instante  $t = 5$  s:

1. A velocidade angular do corpo
2. A aceleração angular.

#### Q 8.5

Um disco de  $33 \frac{1}{3}$  r.p.m. parte do repouso e atinge a sua velocidade normal de rotação em 2,0 s. Quando se desliga o gira-discos, realiza 2 voltas completas até parar.

Determinar:

1. A aceleração angular, suposta constante, com que o disco atinge a sua rotação normal.
2. O ângulo, em graus, de que roda o disco até atingir a rotação normal.
3. O tempo que ele leva a parar depois de se desligar o gira-discos.

#### Q 8.6

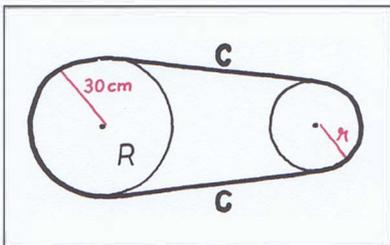
Um corpo roda de acordo com a lei

$$\theta = 60t^2 - 10t^3 \text{ (rad; s)}$$

Em que intervalo de tempo possui movimento de rotação retardado?

#### Q 8.7

O eixo de um motor gira com a velocidade de 40 rad/s. Qual deverá ser o raio  $r$  do tambor para que, mediante uma correia sem fim,  $C$ , comunique a uma roda  $R$ , de raio 30 cm, a velocidade angular de 20 rad/s — fig. 8.3?



**Fig. 8.3**  
Uma correia sem fim como transmissora do movimento de rotação.

### 8.2.3 Grandezas cinemáticas escalares e vectoriais da rotação

Quando estudámos o movimento da partícula, análogo ao da translação dos sólidos, vimos que o *deslocamento linear*, a *velocidade linear* e a *aceleração linear* eram *grandezas vectoriais*. Se, no movimento rectilíneo, foi possível trabalhar escalarmente com essas grandezas (dado que a sua direcção era uma **direcção fixa**), para o que bastou considerar os respectivos valores algébricos,  $\Delta x$ ,  $v$  e  $a$ , ao passarmos para o movimento no plano já não pudemos prescindir do seu carácter vectorial e utilizámos, sistematicamente, os vectores  $\vec{\Delta r}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{a}$ .

De modo análogo, pudemos tratar até agora as grandezas cinemáticas da rotação como escalares, porque considerámos apenas **rotações em torno de eixos fixos**. Mas, se o eixo de rotação variar de direcção no espaço, as grandezas deslocamento angular, velocidades angulares média e instantânea, acelerações angulares média e instantânea terão de assumir-se como vectores?

À primeira vista parece que sim, porquanto qualquer destas grandezas tem intensidade, medida ou módulo ( $|\Delta\theta|$ ,  $|\omega_m|$ ,  $|\alpha|$ , etc.) e goza ainda das propriedades seguintes:

- podemos atribuir-lhe uma *linha de acção* — o eixo de rotação;
- podemos atribuir-lhe um *sentido* nessa linha de acção, utilizando para o efeito uma regra convencional que relacione este sentido com o sinal do valor algébrico da grandeza.

O que acabamos de dizer não é suficiente, porém, para decidirmos se sim ou não estas grandezas cinemáticas são grandezas vectoriais. É preciso verificar também se, de facto, obedecem às regras das operações vectoriais: em particular, se gozam da propriedade comutativa da adição de vectores, isto é, se

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$$

A este respeito, comecemos pelo **deslocamento angular**,  $\Delta\theta$ . Será que, se efectuarmos dois deslocamentos angulares consecutivos,  $\Delta\theta_1$  e  $\Delta\theta_2$ , e invertermos depois a sua sequência, obteremos o mesmo deslocamento angular final?

A experiência mostra que não — fig. 8.4.

Assim, a fig. 8.4 mostra que a soma de dois **deslocamentos angulares**,  $\Delta\theta_1$  e  $\Delta\theta_2$ , de direcções diferentes e módulo  $90^\circ$ , *não obedece à propriedade comutativa*, isto é:

$$\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 \neq \Delta\theta_2 + \Delta\theta_1$$

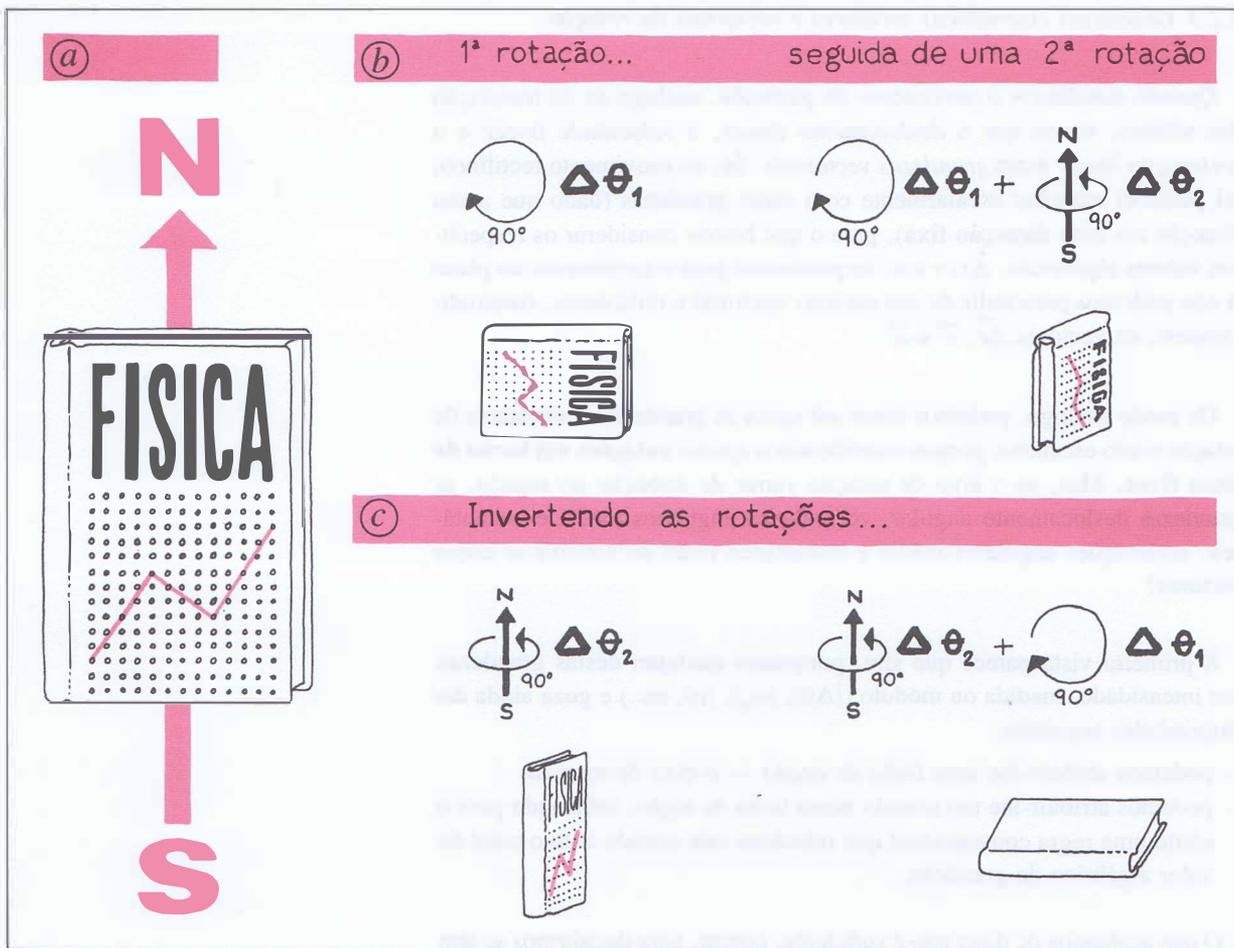


Fig. 8.4

- (a) Posição inicial de um livro.  
 (b) Execução de uma 1.<sup>a</sup> rotação de  $90^\circ$  do livro,  $\Delta\theta_1$ , em torno de um eixo perpendicular à face da capa, seguida de uma 2.<sup>a</sup> rotação de  $90^\circ$ ,  $\Delta\theta_2$ , em torno de um eixo norte-sul: observe-se a posição final do livro.  
 (c) Inversão das rotações — primeiro a rotação  $\Delta\theta_2$ , e depois a rotação  $\Delta\theta_1$ : observe-se a posição final **diferente** do livro.

Mas, se os *deslocamentos angulares* forem mais pequenos, por exemplo de  $20^\circ$ , as posições finais que se obtêm, invertendo a ordem da sequência, são já muito mais próximas — fig. 8.5

Para *deslocamentos angulares* muito pequenos — inferiores a  $4^\circ = 0,07 \text{ rad}$  ( $\sin 4^\circ = 0,07$ ;  $\text{tg } 4^\circ = 0,07$ ) — a propriedade comutativa da adição pode considerar-se verificada na prática, isto é:

$$\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 = \Delta\theta_2 + \Delta\theta_1$$

Quer isto dizer que, embora os **deslocamentos angulares finitos não sejam vectores**, pois não obedecem rigorosamente à propriedade comutativa da adição, os **deslocamentos angulares infinitesimais**,  $d\theta$ , já são **grandezas vectoriais**, visto que satisfazem a essa propriedade, ou seja:

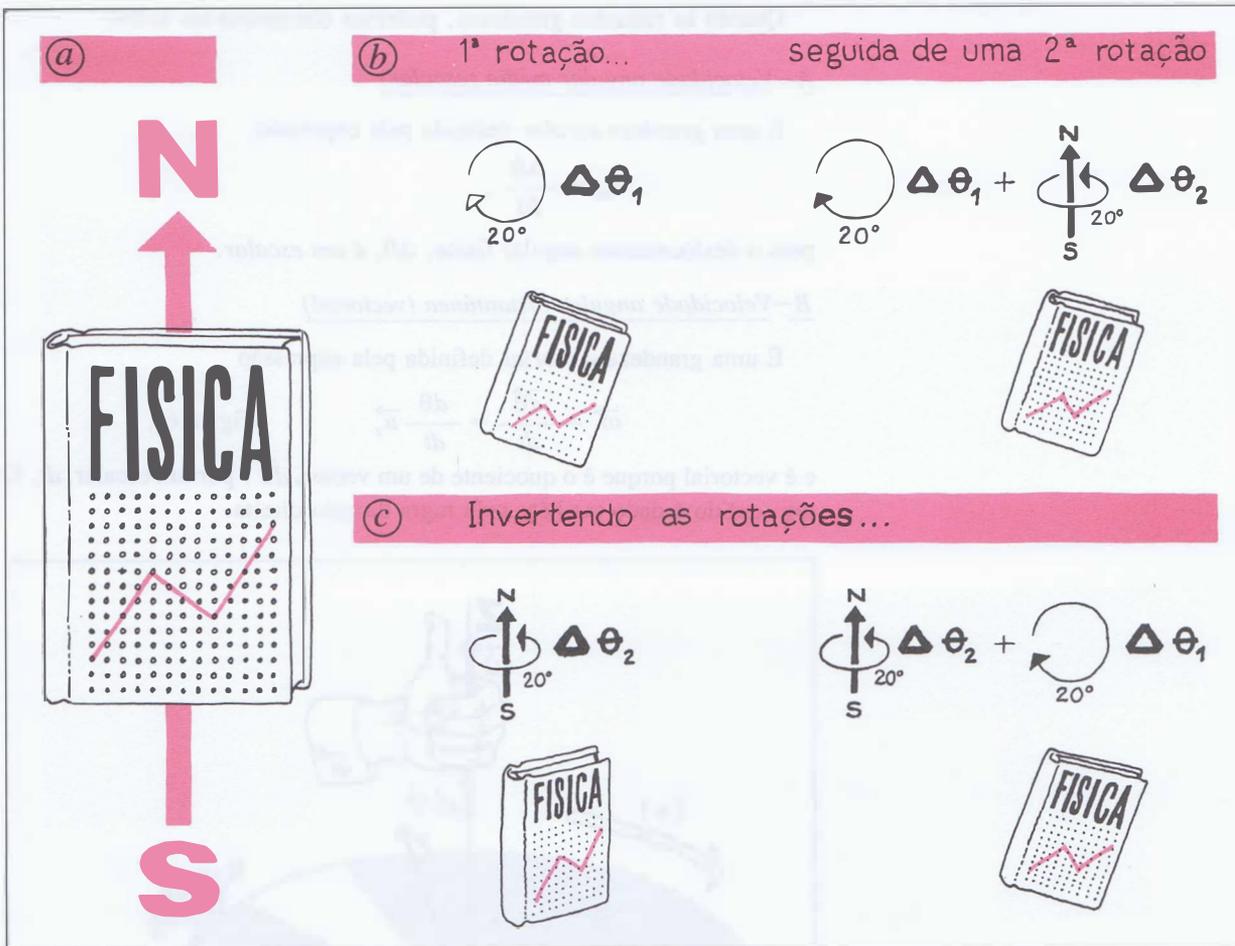


Fig. 8.5 À medida que os módulos dos deslocamentos angulares diminuem, a sua soma vai verificando, cada vez mais aproximadamente, a propriedade comutativa.

Por exemplo:

$$\Delta\theta_1 (20^\circ) + \Delta\theta_2 (20^\circ) \simeq \Delta\theta_2 (20^\circ) + \Delta\theta_1 (20^\circ)$$

$$\vec{d}\theta_1 + \vec{d}\theta_2 = \vec{d}\theta_2 + \vec{d}\theta_1$$

As características deste vector  $\vec{d}\theta$  são as seguintes:

- 1.<sup>a</sup> — tem intensidade igual à medida  $d\theta$  do ângulo infinitesimal de que roda o corpo;
- 2.<sup>a</sup> — tem como *linha de acção* o eixo de rotação do corpo onde se define um sentido positivo através de um vector;
- 3.<sup>a</sup> — tem um *sentido* dado pela regra da mão direita: é o sentido do dedo polegar desta mão quando os outros dedos, curvados, apontam no sentido da rotação.

$$\vec{d}\theta = d\theta \cdot \vec{u}_z$$

onde  $d\theta$  é o valor (algébrico) do deslocamento angular.

#### Súmula

8.4

O deslocamento angular finito,

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1,$$

é um escalar algébrico.

O deslocamento angular infinitesimal ou elementar,

$$\vec{d}\theta = d\theta \cdot \vec{u}_z,$$

é uma grandeza vectorial, sendo:

$\vec{u}_z$  = vector do eixo de rotação.

Quanto às restantes grandezas, podemos discriminá-las assim:

A—Velocidade angular média (escalar)

É uma grandeza *escalar* definida pela expressão

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t},$$

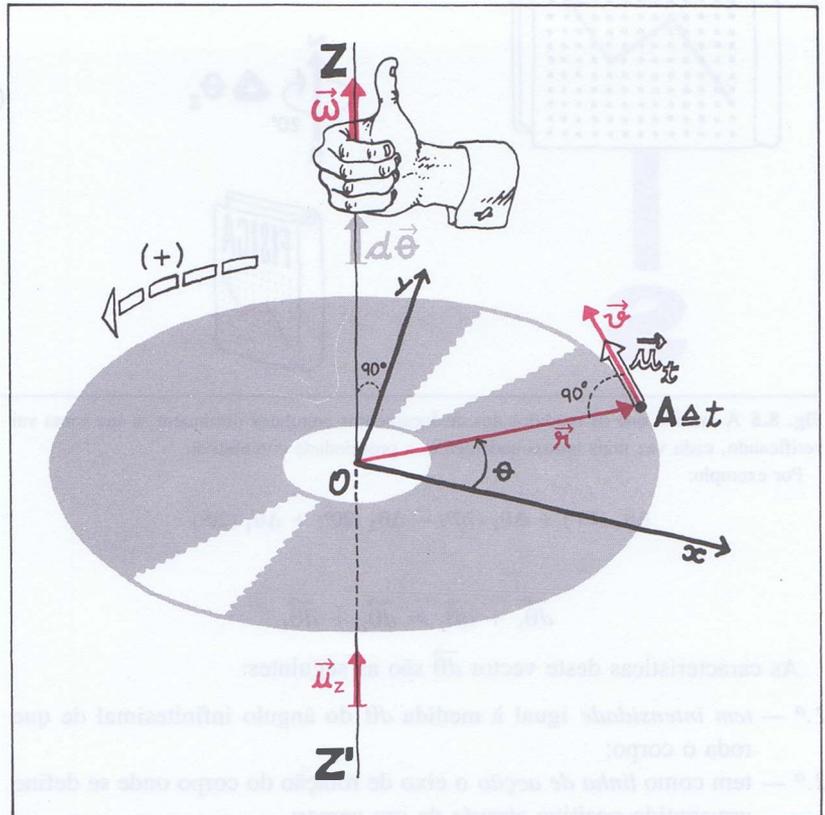
pois o deslocamento angular finito,  $\Delta\theta$ , é um *escalar*.

B—Velocidade angular instantânea (vectorial)

É uma grandeza *vectorial* definida pela expressão

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_z \quad (\text{fig. 8.6}),$$

e é *vectorial* porque é o quociente de um vector,  $d\vec{\theta}$ , por um *escalar*,  $dt$ . O seu sentido é dado também pela regra da mão direita.



**Fig. 8.6** O vector deslocamento angular elementar (ou infinitesimal),  $d\vec{\theta}$ , tem como linha de acção o eixo de rotação e o sentido é dado pela regra da mão direita:

$$d\vec{\theta} = d\theta \cdot \vec{u}_z$$

O vector velocidade angular (instantânea),

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_z,$$

tem a direcção e o sentido do vector deslocamento angular elementar.

C—Aceleração angular instantânea (vectorial)

É também uma grandeza *vectorial* definida por

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_z$$

As grandezas cinemáticas angulares principais são:

— o escalar *velocidade angular média*

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t};$$

— o vector *velocidade angular instantânea*

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{u}_z$$

( $\vec{u}_z$  = versor do eixo de rotação);

— o vector *aceleração angular*

$$\vec{\alpha} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \vec{u}_z$$

O seu sentido é o da velocidade angular  $\vec{\omega}$  (é, portanto, dado pela regra da mão direita), se esta velocidade angular aumentar em módulo, isto é, se a rotação for acelerada. Tem o sentido oposto a  $\vec{\omega}$ , se a velocidade angular diminuir, isto é, se a rotação for retardada — fig. 8.7.

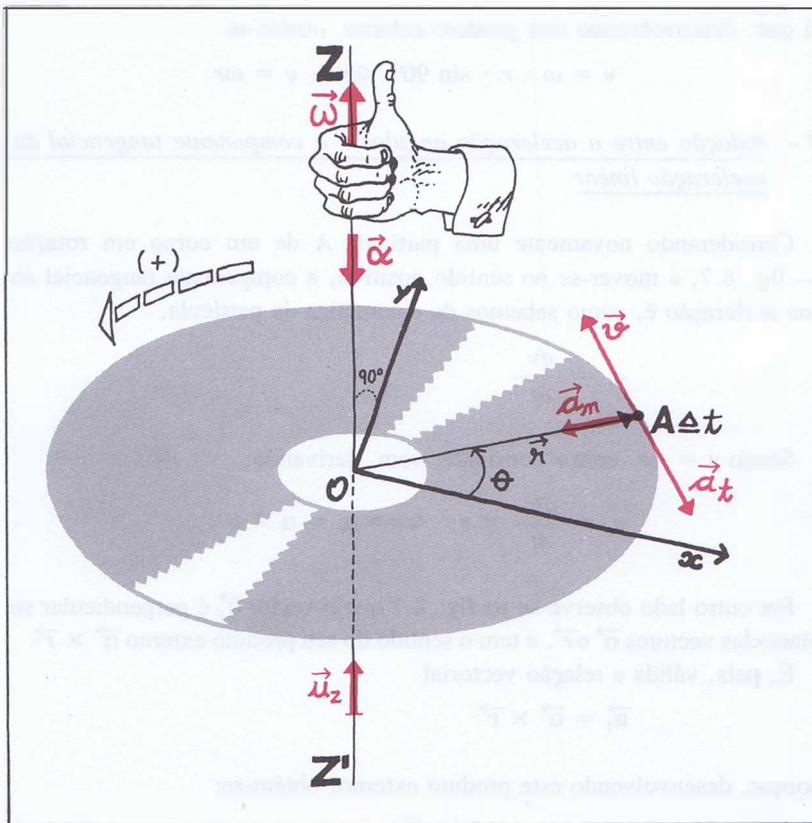


Fig. 8.7 Aceleração angular

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_z$$

#### 8.2.4 Relação entre a cinemática angular de um sólido e a cinemática linear das suas partículas

##### A — Relação entre a velocidade linear e a velocidade angular

Consideremos uma partícula A de um corpo em rotação — fig. 8.6, a mover-se no sentido positivo.

A sua velocidade linear tem o módulo

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Como o espaço elementar  $ds$  é o produto do módulo do deslocamento angular elementar,  $d\theta$ , pelo raio,  $r$ , obtém-se

$$v = \frac{d\theta}{dt} \times r \iff$$

$$v = \omega \times r$$

## G. E. 8.2 ◀

Por outro lado, observe-se que o vector  $\vec{v}$  é perpendicular ao plano dos vectores  $\vec{\omega}$  e  $\vec{r}$  — fig. 8.6 — e tem o sentido do produto externo  $\vec{\omega} \times \vec{r}$  — ver G.E.8.2. Nestas condições, é, pois, válida a relação vectorial

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

já que, desenvolvendo este produto externo, obtém-se:

$$v = \omega \cdot r \cdot \sin 90^\circ \iff v = \omega r$$

### B — Relação entre a aceleração angular e a componente tangencial da aceleração linear

Considerando novamente uma partícula A de um corpo em rotação — fig. 8.7, a mover-se no sentido positivo, a componente tangencial da sua aceleração é, como sabemos da cinemática da partícula,

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

Sendo  $v = \omega r$ , com  $r$  constante, vem, derivando:

$$a_t = \frac{d\omega}{dt} \times r \iff a_t = \alpha \times r$$

Por outro lado observe-se na fig. 8.7 que o vector  $\vec{a}_t$  é perpendicular ao plano dos vectores  $\vec{\alpha}$  e  $\vec{r}$ , e tem o sentido do seu produto externo  $\vec{\alpha} \times \vec{r}$ .

É, pois, válida a relação vectorial

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

porque, desenvolvendo este produto externo, obtém-se:

$$a_t = \alpha \cdot r \cdot \sin 90^\circ \iff a_t = \alpha r$$

### C — Relação entre a aceleração angular e a componente centrípeta da aceleração linear

A componente normal da aceleração é dada pela expressão

$$a_n = \frac{v^2}{r} \iff a_n = \frac{v}{r} \times v \iff a_n = \omega \times v$$

Na fig. 8.7 pode observar-se que o vector  $\vec{a}_n$  é perpendicular aos vectores  $\vec{\omega}$  e  $\vec{v}$  e tem o sentido do seu produto externo  $\vec{\omega} \times \vec{v}$ .

Tem-se, portanto,

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v},$$

porque, desta relação, resulta precisamente

$$a_n = \omega v \sin 90^\circ \iff a_n = \omega v$$

## Súmula

## 8.6

Quando um corpo roda em torno de um **eixo fixo**, qualquer ponto do corpo descreve uma *trajectória circular* em torno do eixo e perpendicular a este. Sendo  $\vec{r}$  o vector posição de medida igual ao raio da trajectória, a velocidade do ponto e as componentes vectoriais da sua aceleração, em qualquer instante, são dadas por:

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} \\ \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}, \end{cases}$$

sendo  $\vec{\omega}$  e  $\vec{\alpha}$  a velocidade angular e a aceleração angular do corpo, respectivamente.

**Q 8.8**

1. Deduzir, por simples derivação (de  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ), as expressões vectoriais de  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}_t$  e  $\vec{a}_n$ , e bem assim as suas medidas.
2. Um dos pontos de uma porta descreve uma trajectória circular de acordo com a seguinte equação horária dos espaços percorridos:

$$s = 2t^2 + t^3 \quad (\text{SI})$$

Ao fim de 1,0 segundo, a partir do repouso, a aceleração do referido ponto tem o módulo  $10\sqrt{2} \text{ ms}^{-2}$ .

- 2.1. Qual é o raio da trajectória descrita por esse ponto?
- 2.2. Qual é o valor da aceleração angular da porta no instante  $t = 1,0 \text{ s}$ ?

**Q 8.9**

Na gola de uma roldana fixa de raio 50 cm enrolou-se um fio do qual, após várias voltas, se suspendeu um corpo A. Abandonado o sistema, o corpo passou a ter movimento de queda uniformemente acelerado a partir do repouso ( $t = 0 \text{ s}$ ). Depois de ter percorrido 20 cm, a velocidade atingida pelo corpo A foi  $1,0 \text{ ms}^{-1}$  — fig. 8.8.

Determinar:

1. O módulo (medida) da aceleração tangencial de um ponto P da periferia da roldana, durante a queda do corpo A.
2. O módulo (medida) da aceleração angular da roldana.

**Q 8.10**

Um disco arranca do repouso com aceleração angular constante. Mostrar que, nestas condições, qualquer ponto do disco tem uma aceleração  $\vec{a}$  cujas componentes normal e tangencial têm módulo comum apenas no instante

$$t = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$$

**Q 8.11**

Um disco  $D_2$  roda, com a velocidade angular  $\vec{\omega}_2$ , no centro de um disco  $D_1$ . Este, por sua vez, roda com a velocidade angular  $\vec{\omega}_1$  — fig. 8.9.

1. Com que velocidade angular resultante, em relação à Terra, roda o disco  $D_2$ ?

- (A)  $\omega_1 + \omega_2$
- (B)  $\omega_1 - \omega_2$
- (C)  $\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$
- (D)  $\sqrt{\omega_1^2 - \omega_2^2}$

2. O eixo em torno do qual roda  $D_2$  mantém-se fixo em relação ao referencial Terra? Justificar.

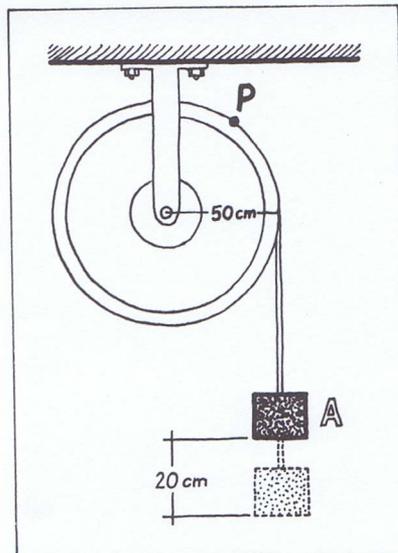


Fig. 8.8 Na gola da roldana fixa enrolou-se um fio, do qual se suspendeu um corpo A.

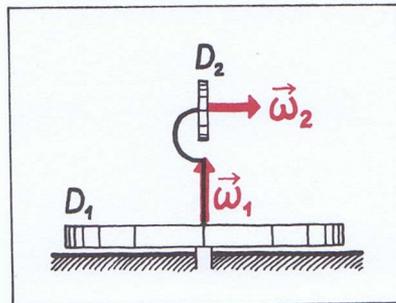


Fig. 8.9

### 8.3 Dinâmica da rotação

#### 8.3.1 Efeito rotativo de uma força aplicada a um sólido com um ponto fixo.

##### Momento polar de uma força.

Consideremos um ponteiro a rodar livremente em torno de um ponto extremo  $O$ , fixo — fig. 8.10, (a).

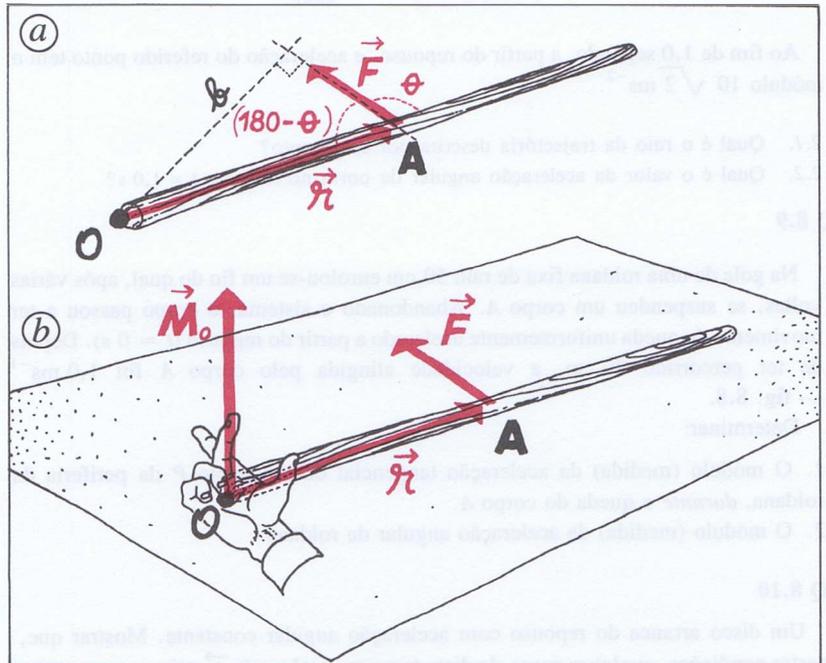


Fig. 8.10

- (a) A força  $\vec{F}$ , aplicada no ponteiro, faz rodar este em torno do ponto fixo  $O$ .  
(b) O efeito rotativo da força  $F$  é medido pelo momento,  $M_O$ , da força em relação a  $O$ .

Seja  $\vec{F}$  a força que actua no ponteiro e cujas características, relativamente ao ponteiro, se mantêm (intensidade, ângulo com o ponteiro, ponto de aplicação).

A experiência mostra que o efeito rotativo, giratório ou de torção que a força  $\vec{F}$  imprime no ponteiro depende:

- 1.º — da medida,  $F$ , da força;
- 2.º — da distância,  $b$ , do ponto  $O$  à linha de acção da força,  $\vec{F}$ , chamada braço de alavanca ou apenas braço da força  $\vec{F}$ .

Em particular, se esta distância  $b$  for nula, isto é, se a linha de acção de  $\vec{F}$  passar por  $O$ , a força não produz qualquer efeito rotativo no ponteiro.

Se o efeito rotativo depende do módulo  $F$  e da distância  $b$ , dependerá naturalmente do produto  $F \times b$ .

Ora este produto corresponde ao módulo de uma grandeza importante, como vamos ver.

Tem-se, com efeito — fig. 8.10, (a):

$$b \times F = r \times \sin(180 - \Theta) \times F = r \times \sin \Theta \times F = |\vec{r} \times \vec{F}|$$

À grandeza

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F},$$

cujo **módulo**, como vimos, *mede o efeito rotativo, giratório ou de torção* da força  $F$ , e cuja *direção é a do eixo* (instantâneo) *em torno do qual roda o ponteiro*, chama-se **momento** ou **torque** (do inglês: torque = momento de torção) **da força  $F$  em relação ao ponto  $O$** . É, pois, um vector aplicado em  $O$ . Por sua vez, a palavra **momento** significa: importância quanto a (neste caso, quanto ao papel da força na torção).

O momento tem as seguintes características — fig. 8.10, (b):

**Linha**

*de acção*: perpendicular ao plano de  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$  (é o eixo imaginário em torno do qual ocorre a rotação nesse instante).

**Sentido**: obtido por qualquer das regras do produto externo, em particular pela regra do triedro da mão direita — fig. 8.10, (b).

**Módulo**: mede o efeito rotativo da força e é dado por

$$M_O = r \cdot \sin \Theta \cdot F = b \cdot F,$$

ou seja pelo produto do braço pela medida da força.

Se a força aplicada no ponteiro,  $\vec{F}$  (fig. 8.10), tivesse a sua *linha de acção a passar pelo ponto  $O$* , seria  $r = 0$  e, portanto,  $M_O = 0$ . A força não produziria efeito rotativo.

O braço, nestas condições, também seria nulo, pois

$$b = r \cdot \sin(180 - \Theta) = 0$$

Da relação

$$M_O = b \times F$$

conclui-se que a unidade SI de momento de uma força é o *metro  $\times$  newton* (m. N), diferente da unidade de trabalho — o *newton  $\times$  metro* — porque diz respeito a efeitos diferentes da força (e  $b$  não é a medida de um deslocamento).

No caso de um sistema de duas forças aplicadas nos pontos  $B$  e  $C$  de um sólido (não representado), com um *ponto fixo  $A$* , o efeito rotativo do sistema em relação a este ponto  $A$  (fig. 8.11) é medido pelo **momento polar resultante**, em  $A$ , *do sistema de forças*, ou simplesmente **momento polar do sistema de forças**: é o vector, aplicado em  $A$ , que é igual à *soma dos momentos de cada uma das forças* neste ponto, isto é,

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

Para um sistema de  $n$  forças teremos:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i$$

O **efeito rotativo** de uma força  $\vec{F}$ , aplicada num sólido, móvel em torno de um ponto fixo,  $O$ , depende do **momento** ou **torque**,

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}.$$

da força em relação ao ponto  $O$ . Este tem as seguintes características:

- *linha de acção*: a do eixo imaginário em torno do qual  $\vec{F}$  tende a fazer rodar o corpo;
- *sentido*: dado pela regra da mão direita;
- *módulo*:  $M_O = F \cdot b$ .

► G.E.8.3

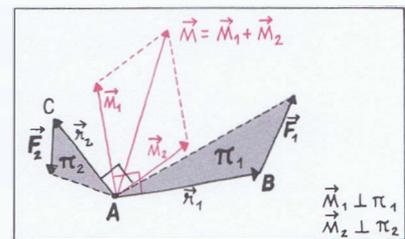


Fig. 8.11 *Momento polar resultante*, em  $A$ , do sistema de duas forças:

$\vec{F}_1$ , assente no plano  $\pi_1$ ;  
 $\vec{F}_2$ , assente no plano  $\pi_2$ .

QUESTÕES PROPOSTAS

**Q 8.12**

Tomando o ponto fixo  $O$  do ponteiro, fig. 8.10, para origem do sistema de eixos coordenados e a força

$$\vec{F} = -\vec{u}_x + 2\vec{u}_y \quad (\text{N})$$

aplicada no ponto  $A(3,1)$  m, determinar o momento da força  $\vec{F}$  em relação a  $O$ .

**Q 8.13**

Mostrar, partindo da expressão vectorial do momento polar

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F},$$

que o vector momento polar de uma força não se altera quando a força se desloca ao longo da sua linha de acção (a força aplicada num corpo rígido é um vector deslizante).

**Q 8.14**

O paralelepípedo representado na fig. 8.12 pode-se mover em torno da origem dos eixos,  $O$ , e as suas arestas medem 1 m, 2 m e 3 m.

Determinar o momento resultante do sistema das forças  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}_3$ , no ponto  $O$ , sendo:

$$\vec{F}_1 = -2\vec{u}_x - 2\vec{u}_z$$

$$\vec{F}_2 = 2\vec{u}_x + 4\vec{u}_y$$

$$\vec{F}_3 = -4\vec{u}_y + 2\vec{u}_z$$

Indicar também a posição de cada momento.

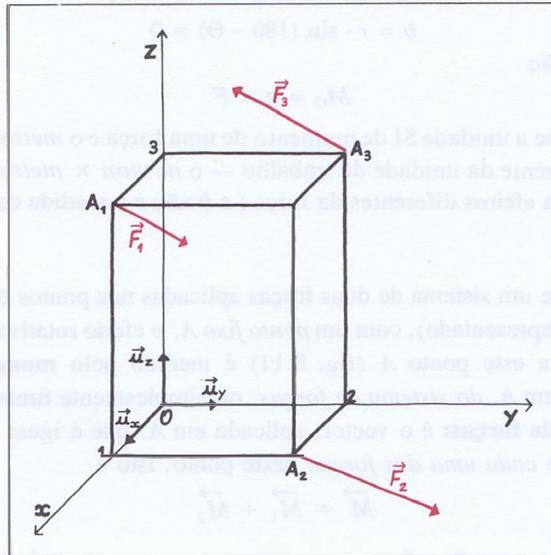


Fig. 8.12

8.3.2 Efeito rotativo de uma força aplicada a um sólido móvel em torno de um eixo. Momento axial de uma força

A — Momento axial de uma força

Na secção anterior, referimo-nos ao efeito rotativo de uma força aplicada a um sólido móvel em torno de um ponto fixo,  $O$ , afirmando que esse efeito depende do momento da força em relação ao ponto.

E no caso, muito mais vulgar, de o sólido se mover em torno de um eixo fixo, como por exemplo uma porta — fig. 8.13?

Neste caso, a força terá de produzir o mesmo efeito rotativo em torno de qualquer ponto  $O$  do eixo  $EE'$  da porta, pois que esta não pode rodar diferentemente em relação aos vários pontos do eixo.

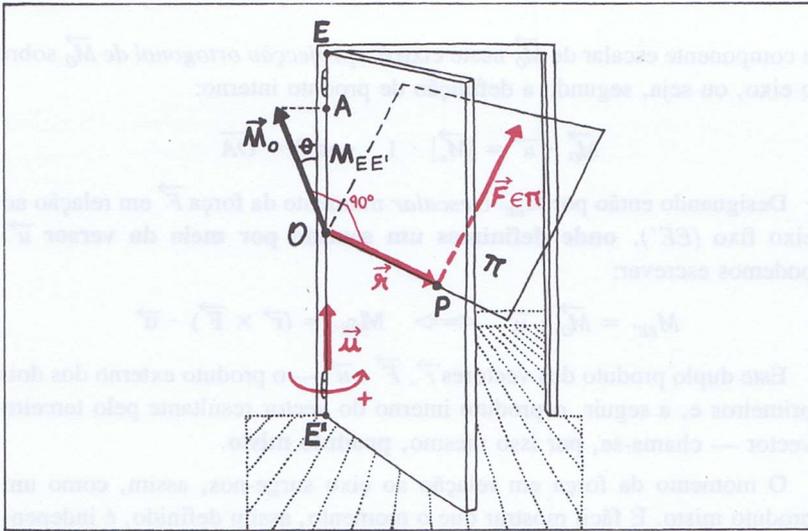


Fig. 8.13

A força  $\vec{F}$  actua no ponto  $P$  da porta (puxador), a que corresponde um vector posição  $\vec{r}$  em relação a um ponto  $O$ , qualquer, do eixo. Tem-se:

$\pi$  = plano que contém  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$ ;

$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$  = momento da força em relação a  $O$ : é perpendicular ao plano  $\pi$ ;

$M_{EE'} = \vec{r} \times \vec{F} \cdot \vec{u}$  = momento da força em relação ao eixo: é a componente, no eixo, do vector  $\vec{M}_O$ .

Poderemos, então, medir esse efeito rotativo em relação ao eixo  $EE'$  através do momento polar da força em relação a qualquer ponto  $O$  do eixo? Não, porque o momento da força em relação a um dado ponto  $O$  do eixo depende da posição desse ponto  $O$ , ou seja do vector posição  $\vec{r}$ .

Mas já não depende do ponto do eixo a componente, segundo o eixo, do momento polar, isto é: se projectarmos sobre o eixo os diferentes momentos da força em relação aos diferentes pontos do eixo, obtemos *projeções iguais* (como provaremos ainda nesta secção).

Portanto, define-se fisicamente **momento axial de uma força** ou **momento da força em relação a um eixo fixo** como sendo a grandeza que mede o efeito rotativo da força em torno do eixo. E, matematicamente, podemos definir essa grandeza nos seguintes termos:

O momento de uma força  $\vec{F}$  em relação a um eixo  $EE'$  — fig. 8.13 — é a projecção, no eixo, do momento da força  $\vec{F}$  em relação a qualquer ponto desse eixo.

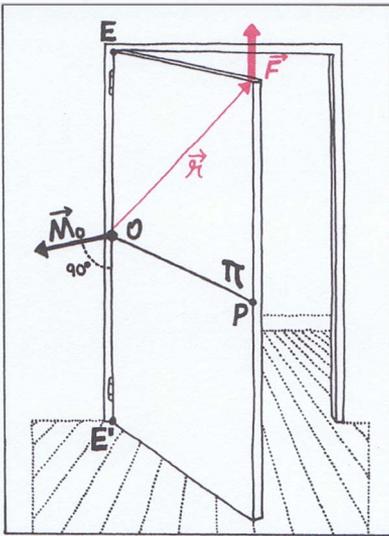


Fig. 8.14

As forças coplanares com o eixo não fazem rodar a porta, porque o seu momento em relação ao eixo é nulo.

Neste caso, o plano  $\pi$  que contém  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$  é o plano da porta (comparar com a fig. 8.13).

O momento polar

$$\vec{M}_O$$

é então perpendicular à porta e ao eixo e, portanto, a sua componente no eixo é nula.

#### G.E. 8.4 ◀

### Súmula

8.8

O efeito rotativo de uma força  $\vec{F}$  aplicada num sólido, móvel em torno de um eixo fixo,  $EE'$ , depende do **momento da força em relação ao eixo**, no qual se definiu um sentido positivo através do versor  $\vec{u}$ :

$$M_{EE'} = \vec{r} \times \vec{F} \cdot \vec{u}$$

Este momento, que é um escalar, é a componente, no eixo, do momento da força,  $\vec{r} \times \vec{F}$ , em relação a qualquer ponto do eixo.

Quando o eixo e a força forem coplanares (fig. 8.14), isto é, pertencerem ao plano da porta, o **momento é nulo**, porque o momento polar,

$$\vec{M}_O,$$

sendo perpendicular ao eixo  $EE'$ , tem neste projecção nula.

Desta definição simples de momento axial resulta que, sendo (fig. 8.13)

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

perpendicular ao plano  $\pi$  ( $\vec{r}$ ,  $\vec{F}$ ), e sendo

$$\vec{u} = \text{versor do eixo fixo } (EE'),$$

a componente escalar de  $\vec{M}_O$  neste eixo é a *projecção ortogonal de  $\vec{M}_O$  sobre o eixo*, ou seja, segundo a definição de produto interno:

$$\vec{M}_O \cdot \vec{u} = |\vec{M}_O| \cdot 1 \cdot \cos \theta = \overline{OA}$$

Designando então por  $M_{EE'}$  o *escalar momento da força  $\vec{F}$  em relação ao eixo fixo  $(EE')$* , onde definimos um sentido por meio do versor  $\vec{u}$ , podemos escrever:

$$M_{EE'} = \vec{M}_O \cdot \vec{u} \iff \mathbf{M}_{EE'} = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{u}$$

Este duplo produto dos vectores  $\vec{r}$ ,  $\vec{F}$  e  $\vec{u}$  — o produto externo dos dois primeiros e, a seguir, o produto interno do vector resultante pelo terceiro vector — chama-se, por isso mesmo, **produto misto**.

O momento da força em relação ao eixo surge-nos, assim, como um produto misto. É fácil mostrar que o momento, assim definido, é independente do ponto  $O$  do eixo — fig. 8.15.

Com efeito, sejam  $O$  e  $O'$  dois pontos arbitrários do eixo.

Tem-se (fig. 8.15):

$$\vec{r}' = \vec{r} + \overrightarrow{O'O}$$

Multiplicando externamente, à direita, pelo vector  $\vec{F}$  e aplicando a *propriedade distributiva*, vem:

$$\vec{r}' \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} + \overrightarrow{O'O} \times \vec{F} \iff$$

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \overrightarrow{O'O} \times \vec{F}$$

Para determinarmos as projecções no eixo multiplicamos internamente pelo versor deste:

$$\vec{M}_{O'} \cdot \vec{u} = \vec{M}_O \cdot \vec{u} + \overrightarrow{O'O} \times \vec{F} \cdot \vec{u}$$

Este último produto misto é nulo porque o vector  $\vec{O'O} \times \vec{F}$  é perpendicular ao vector  $\vec{O'O}$ : logo é perpendicular ao eixo  $e$ , portanto, ao versor  $\vec{u}$ . Sendo  $(\vec{O'O} \times \vec{F}) \perp \vec{u}$ , o produto interno destes vectores é nulo.

Em conclusão:

As projecções no eixo dos momentos da força  $\vec{F}$  nos pontos  $O'$  e  $O$  do eixo são iguais, isto é:

$$\vec{M}_{O'} \cdot \vec{u} = \vec{M}_O \cdot \vec{u} \iff$$

$$\vec{r} \times \vec{F} \cdot \vec{u} = \vec{r}' \times \vec{F} \cdot \vec{u}$$

É este **invariante** que escolhemos para momento axial da força.

Porque apenas consideramos corpos que rodam em torno de eixos fixos, uma vez escolhido o sentido positivo do eixo, o momento axial pode ser tratado como um *escalar algébrico*, positivo ou negativo, consoante o sinal do produto misto. Assim, no caso da fig. 8.13, o momento é positivo porque  $\vec{F}$  faz rodar a porta no sentido positivo, o que tem como consequência **que a componente OA é positiva**.

Se a força  $\vec{F}$  fosse simétrica, o vector  $\vec{M}_O$  seria também simétrico e a componente OA seria então negativa.

Entretanto, quando o **eixo não é fixo**, o **momento axial** também terá de ser encarado como **grandeza vectorial** com uma direcção variável (a do eixo), um sentido (que dependerá do sentido da rotação) e um módulo.

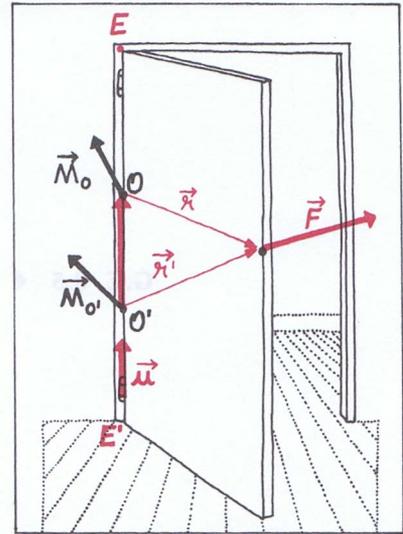


Fig. 8.15

Os momentos da força  $\vec{F}$  nos pontos  $O$  e  $O'$  do eixo são

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_{O'} = \vec{r}' \times \vec{F}$$

As suas projecções no eixo

$$\vec{r} \times \vec{F} \cdot \vec{u}$$

e

$$\vec{r}' \times \vec{F} \cdot \vec{u}$$

são iguais.

## QUESTÕES PROPOSTAS

### Q 8.15

Consideremos novamente o paralelepípedo representado na fig. 8.12 e as forças  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}_3$ , definidas na questão Q 8.14, nele aplicadas.

Se o paralelepípedo puder rodar em torno do eixo dos ZZ, que se supõe fixo, indicar se as forças que o actuam fazem com que ele rode ou se mantenha fixo.

### Q. 8.16

1. A figura 8.16 mostra uma porta aberta vista de perfil e do lado para onde ela abriu. A mesma figura mostra ainda uma força  $\vec{F}$  aplicada na porta.

O momento da força  $\vec{F}$  em relação ao eixo da porta poderá corresponder à projecção, no eixo, de um dos vectores  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$ ,  $\vec{v}_3$  ou  $\vec{v}_4$ . Qual deles?

2. Se o vector referido na alínea anterior tiver o valor  $20 \text{ m} \cdot \text{N}$  e a força  $\vec{F}$  actuar num plano paralelo ao eixo e segundo um ângulo  $\theta = 30^\circ$  com a porta, qual é o valor do momento da força em relação ao eixo?

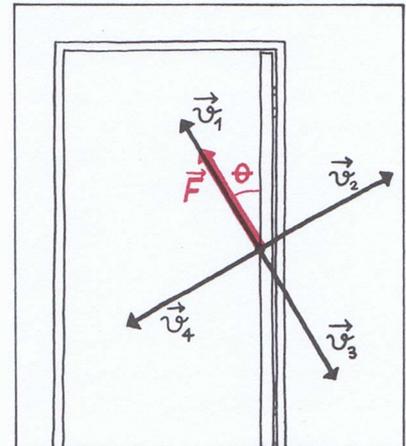


Fig. 8.16

B — O momento axial de uma força e o momento da sua projecção num plano perpendicular ao eixo

G.E. 8.5 ◀

Fizemos o estudo do momento axial das forças, mais pelo facto de o programa o contemplar do que pela necessidade de o utilizar em problemas concretos deste curso. E porquê? Porque vamos substituir sistematicamente esse momento axial pelo valor algébrico correspondente a um momento polar. Para este efeito, vamos utilizar uma propriedade demonstrada no G.E. 8.5. Segundo esta, o momento de uma força em relação a um eixo é igual ao valor algébrico do momento da projecção da força, num plano perpendicular ao eixo, relativamente ao ponto onde o eixo intersecta esse plano.

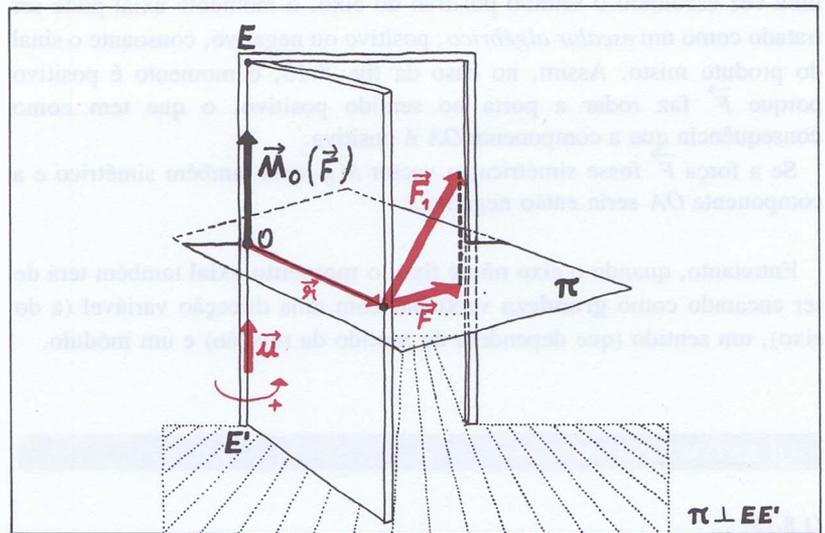


Fig. 8.17

O momento da força  $\vec{F}_1$ , em relação ao eixo  $EE'$ , tem valor igual ao do momento da sua projecção,  $\vec{F}$ , num plano  $\pi$ , perpendicular ao eixo, relativamente ao ponto  $O$  onde o eixo corta o plano.

Assim, por exemplo, no caso da fig. 8.17, o momento da força  $\vec{F}_1$ , em relação ao eixo  $EE'$ , é igual ao valor algébrico do momento da força  $\vec{F}$  em relação ao ponto  $O$ ,

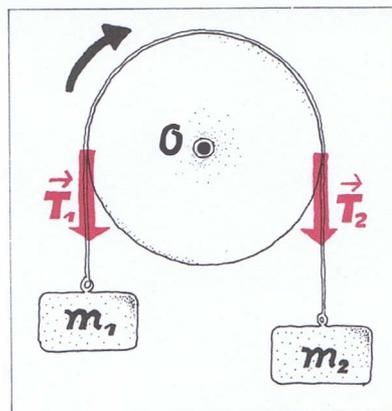
$$M_{EE'}(\vec{F}_1) = M_O(\vec{F}),$$

sendo este valor algébrico *positivo*, se  $\vec{M}_O(\vec{F})$  tem o *sentido positivo do eixo* (como na figura), e sendo *negativo*, se  $\vec{M}_O(\vec{F})$  tiver o *sentido negativo do eixo*.

Deste modo, trabalhando, como iremos fazer, com *forças coplanares perpendiculares ao eixo de rotação*, utilizaremos os momentos dessas forças em relação ao ponto onde o seu plano corta o eixo — fig. 8.18.

**Q 8.17**

1. Indicar, em função dos módulos  $T_1$  e  $T_2$ , o valor do momento resultante das tensões,  $\vec{T}_1$  e  $\vec{T}_2$ , em relação ao eixo da roldana da fig. 8.18, sabendo que  $T_2 > T_1$ .
2. Esse momento resultante varia ou mantém-se, à medida que a massa  $m_2$  vai descendo e  $m_1$  vai subindo, ambas com acelerações constantes do mesmo módulo  $a$ ? Justificar.



**Fig. 8.18** Como os momentos das forças  $\vec{T}_1$  e  $\vec{T}_2$  em relação ao eixo da roldana têm os mesmos módulos que os respectivos momentos em relação a  $O$ , ponto de intersecção do eixo com o plano das forças, utilizamos estes momentos polares em vez dos momentos axiais.

8.3.3. Lei de Newton do movimento de rotação

A — Para uma partícula girante

Vimos que o movimento de translação de um corpo, tal como o movimento da partícula, era regulado pela lei fundamental de Newton

$$\vec{F} = m \vec{a},$$

válida para as situações em que a massa  $m$  se pode considerar constante (em que não há ganho nem perda de massa, nem variação relativista da massa com a velocidade).

Vamos procurar uma expressão correspondente à anterior, válida para o movimento de rotação. Neste, como acabámos de ver, não são exactamente as forças mas, sim, os seus momentos que determinam o movimento, isto é, que determinam a maior ou menor aceleração angular dos corpos.

Para analisarmos o movimento de rotação, consideremos, à partida, uma partícula girante, de massa  $m$ . Trata-se de uma partícula solidamente ligada a um eixo de rotação (por uma haste de massa desprezável) e em torno do qual é obrigada a girar numa trajectória circular, graças a uma força cuja componente tangencial,  $\vec{F}_t$ , vamos admitir que se mantém constante em módulo — fig. 8.19.

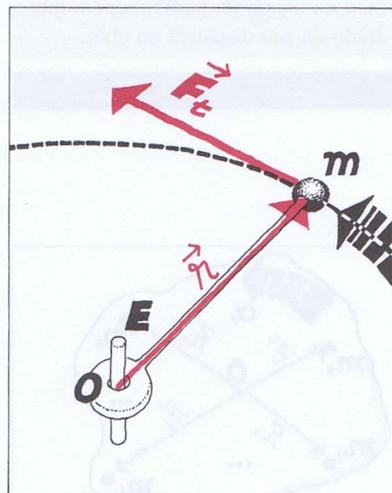
Nestas condições, vamos considerar o valor do momento da força aplicada em relação ao ponto  $O$  do eixo, em vez do momento em relação ao eixo (ver final da secção anterior).

Como o momento da componente centrípeta da força aplicada (não representada na figura) é nulo, porque

$$|\vec{r} \times \vec{F}_c| = r \times F_c \times \sin 180^\circ = 0,$$

segue-se que o momento da força coincide com o da componente  $\vec{F}_t$ .

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}_t$$



**Fig. 8.19** A componente tangencial,  $\vec{F}_t$ , da força aplicada a uma pequena massa  $m$ , situada no extremo de uma vareta de massa desprezável, obriga-a a girar em torno do eixo.



O módulo deste momento é

$$M_O = r \cdot F_t \cdot \sin 90^\circ = r \cdot m a_t ,$$

sendo  $a_t$  o valor da aceleração tangencial.

Como, por outro lado,

$$a_t = \alpha \cdot r ,$$

conforme se conclui derivando a relação  $v = \omega r$ , onde  $r$  é constante, vem

$$M_O = (m r^2) \cdot \alpha ,$$

sendo  $\alpha$  o valor da aceleração angular com que roda a partícula em torno de  $O$ .

À quantidade  $m r^2$  chama-se **momento de inércia**,  $I$ , da massa  $m$ , em relação ao eixo em torno do qual roda. Mede-se em  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ , no Sistema Internacional.

Podemos então escrever, finalmente:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{I} \cdot \alpha$$

Nos casos em que o eixo de rotação varia de direcção no espaço, esta relação entre o *momento da força*, o *momento de inércia* da massa pontual girante e a *aceleração angular* é vectorial,

$$\vec{\mathbf{M}}_O = \mathbf{I} \vec{\alpha} ,$$

uma vez que tanto  $\vec{\mathbf{M}}_O$  como  $\vec{\alpha}$  são vectores que têm como linha de acção o mesmo eixo instantâneo de rotação, e têm também o mesmo sentido.

### B — Para um sistema rígido de partículas girantes

Se, em vez de termos uma partícula, tivermos um sistema *rígido* de partículas (a sua posição relativa não se altera) a rodar — fig. 8.20, a aceleração angular do sistema pode, em princípio, ser atribuída a dois tipos de momentos:

- 1.º — aos momentos das *forças interiores* do sistema;
- 2.º — aos momentos das *forças exteriores* ao sistema.

Mas, segundo a *terceira lei de Newton*, as forças interiores são simétricas duas a duas e, como tal, os seus *momentos* em relação a um ponto são *simétricos dois a dois* — fig. 8.21.

### Súmula

8.9

O **momento** de uma força, que actua numa partícula, **em relação a um eixo**, é igual ao *produto do momento de inércia* da partícula em relação ao eixo pela *aceleração angular* da partícula:

$$M_O = I \alpha$$

O momento de inércia,  $I$ , é o produto da massa da partícula pelo quadrado da sua distância ao eixo.

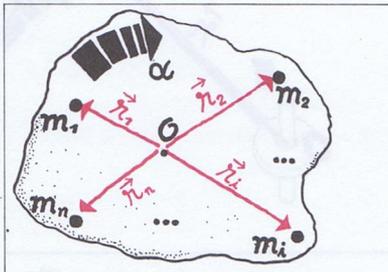


Fig. 8.20 Sistema discreto de partículas (número finito de partículas), que se mantém *rígido* (as distâncias entre as partículas não mudam) ao rodar.

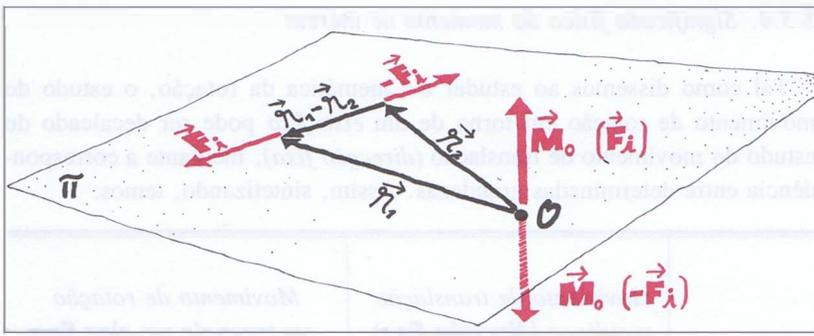


Fig. 8.21 Como  $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \parallel \vec{F}_i$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{F}_i) + \vec{M}_O(-\vec{F}_i) &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_i + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}_i) \\ &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_i = \vec{0} \end{aligned}$$

o que implica a simetria dos momentos.

A soma dos momentos das forças interiores é, pois, nula:

$$\Sigma \vec{M}_{int} = \vec{0}$$

Aplicando, então, a lei fundamental

$$\vec{M}_O = I \vec{\alpha}$$

a cada uma das partículas do sistema — fig. 8.20, onde naturalmente actuarão forças, umas exteriores, outras interiores, e somando membro a membro as equações obtidas, vem:

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{M}_{ext} + \Sigma \vec{M}_{int} &= I_1 \vec{\alpha} + I_2 \vec{\alpha} + \dots + I_n \vec{\alpha} \iff \\ \Sigma \vec{M}_{ext} &= I \vec{\alpha}, \end{aligned}$$

designando por **momento de inércia do sistema**,  $I$ , a soma dos momentos de inércia das partículas, isto é,

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + \dots + I_n = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \end{aligned}$$

A relação

$$\Sigma \vec{M}_{ext} = I \vec{\alpha}$$

é igualmente aplicável a qualquer corpo (sistema *contínuo* de partículas, a nível macroscópico) e traduz a **lei de Newton do movimento de rotação**.

#### Súmula

8.10

Segundo a **lei fundamental do movimento de rotação**, a soma dos momentos das forças exteriores, aplicadas a um sistema rígido de partículas, é *proporcional à aceleração angular*. A constante de proporcionalidade é o momento de inércia do sistema,  $I$ :

$$\Sigma \vec{M}_{ext} = I \vec{\alpha}$$

O **momento de inércia** de um sistema é a grandeza que, na rotação, corresponde à massa na translação, pois mede a *inércia de rotação*.

Para um sistema discreto de partículas, o momento de inércia é

$$I = \sum m_i r_i^2,$$

ou seja a soma dos produtos das massas das partículas pelos quadrados das suas distâncias ao eixo de rotação.

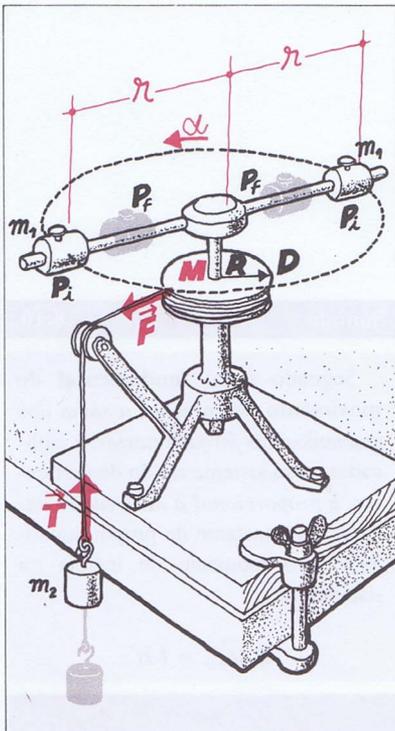
O momento de inércia de um corpo depende do eixo de rotação, da forma do corpo e do modo como a massa se distribui em redor desse eixo.

No SI exprime-se em  $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ .

### 8.3.4. Significado físico do momento de inércia

Tal como dissemos ao estudar a Cinemática da rotação, o estudo do movimento de rotação em torno de um *eixo fixo* pode ser decalcado do estudo do movimento de translação (*directção fixa*), mediante a correspondência entre determinadas grandezas. Assim, sintetizando, temos:

	Movimento de translação rectilínea ( <i>directção fixa</i> )	Movimento de rotação em torno de um <b>eixo fixo</b>
Valores das grandezas	$x$ (posição) $v$ $a$ $m$ $F$	$\theta$ (posição angular) $\omega$ $\alpha$ $I$ $M$
Algumas equações escalares	$x = x_o + vt$ $v = v_o + at$ $x = v_o t + \frac{1}{2} at^2$ $F = ma$	$\theta = \theta_o + \omega t$ $\omega = \omega_o + \alpha t$ $\theta = \omega_o t + \frac{1}{2} \alpha t^2$ $M = I\alpha$



Na translação vimos que a **massa media a inércia na translação** ou **inércia translativa**, isto é, a maior ou menor resistência oposta pelos corpos à alteração da sua velocidade linear,  $\vec{v}$ , por acção das forças aplicadas.

De modo semelhante, o **momento de inércia mede a inércia na rotação** ou **inércia de rotação**, isto é, a maior ou menor resistência oposta pelos corpos à alteração da sua velocidade angular,  $\vec{\omega}$ , por acção dos momentos das forças aplicadas.

Com efeito, observe-se que, na relação

$$\sum \vec{M}_{ext} = I\vec{\alpha},$$

quanto maior for o momento de inércia,  $I$ , tanto menor é a aceleração angular  $\vec{\alpha}$ , ou seja a variação de velocidade angular, para um *dado* momento resultante das forças exteriores.

Este significado físico do momento de inércia pode ser posto em evidência, de modo prático, com o aparelho representado na fig. 8.22.

Fig. 8.22 Este aparelho permite fazer rodar as massas  $m_1$  por acção do momento constante,

$$M = FR,$$

aplicado à roldana  $D$ , a rodar no plano horizontal.

Quando se transferem as massas  $m_1$  das posições iniciais,  $P_1$ , para as posições finais,  $P_f$ , diminuindo assim o momento de inércia do sistema das massas,  $I$ , a aceleração angular  $\alpha$  aumenta, o que se nota pela queda mais rápida da massa  $m_2$ .

No caso dos sistemas discretos de partículas, em que o número destas é finito, o momento de inércia calcula-se pela soma

$$I = \sum m_i r_i^2$$

dos produtos das massas das partículas pelos quadrados das suas distâncias ao eixo de rotação.

No caso dos *sistemas contínuos* de partículas, em que o número destas é infinito, aquele somatório tende, no limite, para um integral

$$I = \int r^2 dm ,$$

em que as distâncias ao eixo de rotação,  $r$ , são variáveis contínuas, isto é, variam de ponto para ponto.

Como o cálculo deste integral sai fora do âmbito do nosso Curso, os momentos de inércia dos vários tipos de sólidos serão calculados com base em fórmulas dadas — fig. 8.23. Esta figura funciona como uma tabela de momentos de inércia.

A terminar, saliente-se que todas as fórmulas válidas para o movimento de rotação em torno de um eixo fixo se aplicam aos casos em que o eixo, não sendo fixo, *se move paralelamente a si mesmo* (é o caso de uma roldana móvel, por exemplo).

Isto deve-se ao facto de as grandezas vectoriais características do movimento de rotação não mudarem, porque a sua direcção se mantém inalterável, e de o momento de inércia também não se alterar.

O que acabamos de pôr em relevo vai ser tipicamente exemplificado na secção 8.4, onde se estuda o movimento de um corpo que rola sem escorregar.

### G.E.8.6

#### 8.3.5. Alguns exemplos de aplicação da lei fundamental de Newton da rotação

Vamos concretizar o estudo que acabámos de fazer com dois exemplos. Teremos assim o ensejo não só de aplicar a lei de Newton da rotação,

$$\sum \vec{M}_{ext} = I \vec{\alpha} ,$$

como o de relembrar o estudo cinemático da rotação.

#### 1.º Exemplo

A respeito do aparelho representado na fig. 8.22, pretende-se determinar a aceleração com que cai a massa  $m_2$ .

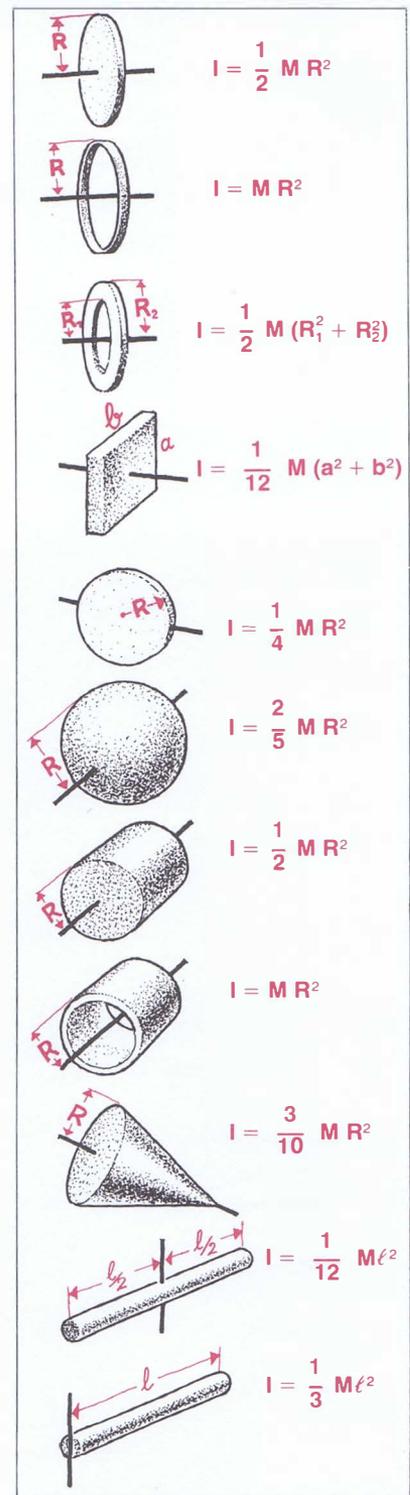


Fig. 8.23 Fórmulas para o momento de inércia de vários corpos de formas regulares.

Dados:

$$R \text{ (raio da roldana } D) = 50 \text{ cm}$$

$$r \text{ (distância das massas } m_1 \text{ ao eixo)} = 1,80 \text{ m}$$

$$\ell \text{ (comprimento da haste onde encaixam as massas } m_1) = 4,00 \text{ m}$$

$$M \text{ (massa da roldana } D) = 2,0 \text{ kg}$$

$$m \text{ (massa da haste)} = 2,0 \text{ kg}$$

$$m_1 = 1,0 \text{ kg}$$

$$m_2 = 2,0 \text{ kg}$$

$$g = 10 \text{ m s}^{-2}$$

Desprezam-se os momentos de inércia dos componentes restantes por serem de ordem de grandeza inferior a estes que calculamos, e desprezam-se igualmente as forças de atrito por não serem significativas perante as forças aplicadas no sistema (aparelho).

Vamos adoptar, sistematicamente, a seguinte sequência:

### 1.º Cálculo do momento exterior aplicado

Trata-se do momento da força  $\vec{F}$ , de módulo igual à tensão  $\vec{T}$  do fio que suspende  $m_2$  — fig. 8.22

Tem-se, então,

$$M_{ext} = T \times R = 0,5 T \quad (\text{m} \cdot \text{N})$$

### 2.º Cálculo do momento de inércia do sistema (consultar a tabela da fig. 8.23).

Esse momento é a soma dos momentos de inércia dos vários componentes, a saber:

$$I_1 \text{ (roldana } D) = \frac{1}{2} M R^2 = \frac{1}{2} \times 2,0 \text{ kg} \times (0,5 \text{ m})^2 = 0,25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_2 \text{ (haste)} = \frac{1}{12} m \ell^2 = \frac{1}{12} \times 2,0 \text{ kg} \times (4,0 \text{ m})^2 = 2,67 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_3 \text{ (massas } m_1) = m_1 r^2 + m_1 r^2 = 2 \times 1,0 \text{ kg} \times (1,8 \text{ m})^2 = 6,48 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Portanto:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 0,25 + 2,67 + 6,48 = 9,40 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

### 3.º Cálculo da aceleração angular

Aplicando a lei de Newton da rotação,

$$M_{ext} = I \alpha,$$

vem:

$$\alpha = \frac{M_{ext}}{I} = \frac{0,5 T}{9,4} = 0,053 \cdot T s^{-2}$$

#### 4.º Cálculo da aceleração de queda da massa $m_2$

É fácil compreender que a *aceleração da massa  $m_2$  é a de qualquer ponto do fio a que está ligada, incluindo a aceleração tangencial dos pontos do fio que rodam com a roldana*. De outro modo, o fio desagregar-se-ia à semelhança de um comboio cuja máquina aumentasse mais a velocidade do que as últimas carruagens, que ainda vêm a descrever uma curva...

Portanto, sendo

$$a = a_t \quad (\text{aceler. tangencial dos pontos periféricos da roldana}),$$

há que determinar  $a_t$  através da relação:

$$a_t = \alpha R$$

Esta expressão, que se obtém por derivação da fórmula, muito conhecida,

$$v = \omega R$$

é, de facto, fundamental e é muito usada nas aplicações práticas, porque **faz a transposição do movimento de rotação para o movimento de translação**, neste caso do movimento de rotação da roldana  $D$  para o movimento de translação da massa  $m_2$ .

Temos, portanto:

$$\begin{aligned} a = a_t = \alpha R &= 0,053 T s^{-2} \times 0,5 \text{ m} \\ &= 0,026 T \text{ ms}^{-2} \end{aligned}$$

Finalmente, para determinarmos a aceleração  $a$  resta-nos resolver o sistema desta equação com a equação que resulta da aplicação da lei fundamental de Newton à translação de  $m_2$

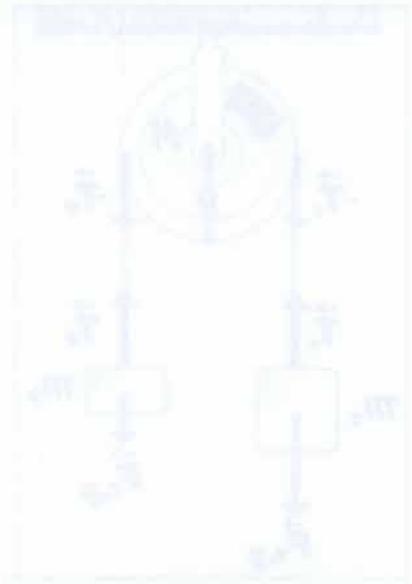
$$\begin{aligned} m_2 g - T &= m_2 a \iff \\ 2,0 \times 10 - T &= 2,0 a \end{aligned}$$

O sistema

$$\begin{cases} a = 0,026 T \\ 20 - T = 2 a \end{cases}$$

tem como solução:

$$T = 19 \text{ N} \quad a = 0,5 \text{ ms}^{-2}$$



## 2.º Exemplo

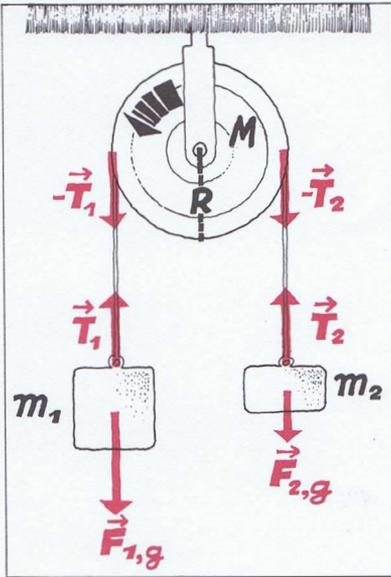


Fig. 8.24 Com que aceleração se movem as massas e quais são os valores das tensões nos fios de um e outro lado da roldana?

Dois corpos de massas  $m_1 = 2,0 \text{ kg}$  e  $m_2 = 1,0 \text{ kg}$  estão ligados entre si por um fio que passa pela gola de uma roldana fixa — fig. 8.24. A massa do fio é desprezável e, bem assim, o atrito no eixo da roldana.

Determinar a aceleração com que se movem as massas e as tensões nos ramos do fio de um e outro lado da roldana:

1.º — No caso da roldana ter a massa  $M = 1,0 \text{ kg}$

2.º — No caso da roldana ter massa desprezável ( $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ )

### 1.º caso: a roldana tem massa não desprezável

1.º — Cálculo do momento resultante exterior que actua na roldana e que a faz rodar

As forças cujos momentos afectam a rotação da roldana são as tensões  $-\vec{F}_1$  e  $-\vec{T}_2$ . O momento da primeira em relação a  $O$  produz a rotação, por ser  $m_1 > m_2$ . O momento da segunda em relação a  $O$ , porque tem sentido oposto, opõe-se a essa rotação. A rotação resultante será devida ao momento resultante, cujo módulo é:

$$\Sigma M_{ext} = M_1 - M_2 = T_1 \cdot R - T_2 \cdot R = (T_1 - T_2) R$$

2.º Cálculo do momento de inércia da roldana

Utiliza-se a fórmula (fig. 8.23)

$$I = \frac{1}{2} M \cdot R^2$$

3.º — Cálculo da aceleração angular da roldana

Aplicando a lei de Newton da rotação,

$$\Sigma M_{ext} = I \alpha,$$

vem:

$$(T_1 - T_2) R = \frac{1}{2} M R^2 \cdot \alpha \iff$$

$$\alpha = \frac{2(T_1 - T_2)}{M R}$$

4.º Cálculo da medida da aceleração de  $m_1$ ,  $m_2$ , e qualquer ponto do fio

$$a = a_t = \alpha \cdot R = \frac{2(T_1 - T_2)}{M}$$

Sendo  $M = 1,0 \text{ kg}$ , vem:

$$a = 2(T_1 - T_2)$$

5.º Aplicação da lei fundamental às massas  $m_1$  e  $m_2$

$$\begin{cases} F_{1,g} - T_1 = m_1 a \\ T_2 - F_{2,g} = m_2 a \end{cases} \iff \begin{cases} 20 - T_1 = 2,0 \times 2 (T_1 - T_2) \\ T_2 - 10 = 1,0 \times 2 (T_1 - T_2) \end{cases}$$

A solução deste sistema é:

$$\begin{cases} T_1 = 14,3 \text{ N} \\ T_2 = 12,9 \text{ N} \end{cases}$$

Substituindo na relação  $a = 2(T_1 - T_2)$ , temos, finalmente:

$$a = 2,8 \text{ ms}^{-2}$$

## 2.º caso: a roldana tem massa desprezável

Neste caso o momento de inércia da roldana é nulo:

$$I = \frac{1}{2} M R^2 = 0$$

Então a soma dos momentos exteriores é nula:

$$\Sigma M_{ext} = I \alpha = 0 \cdot \alpha = 0$$

Como

$$\Sigma M_{ext} = T_1 R - T_2 R = (T_1 - T_2) R = 0,$$

conclui-se que

$$T_1 = T_2 = T$$

Quer dizer:

As tensões, neste caso, são iguais nos dois ramos do fio de um e outro lado da roldana.

Este caso, em que o movimento de rotação da roldana não é de considerar, foi já tratado a propósito do movimento de translação e é de resolução simples. Basta aplicar a lei fundamental às duas massas  $m_1$  e  $m_2$ :

$$\begin{cases} F_{1,g} - T = m_1 a \\ T - F_{2,g} = m_2 a \end{cases} \iff \begin{cases} 20 - T = 2 a \\ T - 10 = a \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} a = 3,3 \text{ ms}^{-2} \\ T = 13,3 \text{ N} \end{cases}$$

Comparem-se estes valores com os do caso anterior.

## QUESTÕES PROPOSTAS

### Q 8.18

Sobre um disco de massa 1,0 kg e 2,0 m de raio actuam as forças  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}_3$ , de intensidade 50 N cada uma e com as direcções indicadas na fig. 8.25. Estas direcções, relativamente ao eixo do disco, mantêm-se invariáveis. Determinar:

1. Os momentos das forças em relação ao eixo C.
2. A velocidade angular que o disco adquire, a partir do repouso, ao fim de 4,0 s.

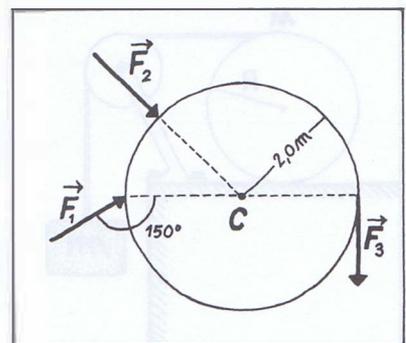


Fig. 8.25

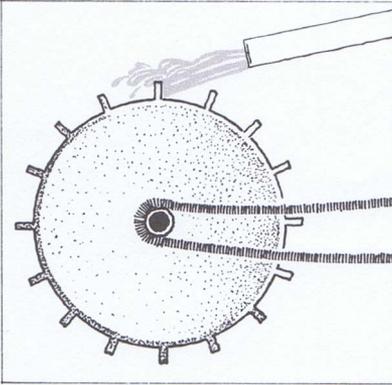


Fig. 8.26 Qual é a aceleração angular da roda do moinho?

### Q 8.19

Uma roda de um moinho, de 1,0 m de raio e massa 100 kg, é posta a rodar pela força da água corrente nas pás. A esta força corresponde um momento de  $50 \text{ m} \cdot \text{N}$  — fig. 8.26.

1. Qual é a aceleração angular da referida roda enquanto se mantiver constante esse momento aplicado e se puderem desprezar todos os momentos das forças que se opõem à rotação da mesma?
2. Qual é a velocidade, no instante  $t = 4,0 \text{ s}$ , contado a partir do início do movimento, dos pontos de uma correia sem fim ligada ao eixo da roda do moinho, cujo diâmetro é 10 cm?  
Supõe-se que a aceleração angular se mantém constante durante esse tempo.

### Q 8.20

Um corpo de massa  $m$  encontra-se suspenso de um fio enrolado num cilindro de massa  $M$  e raio  $R$ . Este cilindro pode girar sem atrito em torno do eixo de simetria.

Deixando cair o corpo de massa  $m$  e desprezando a massa do fio, determinar a aceleração angular do cilindro como função de  $m$ ,  $M$ ,  $R$  e  $g$ .

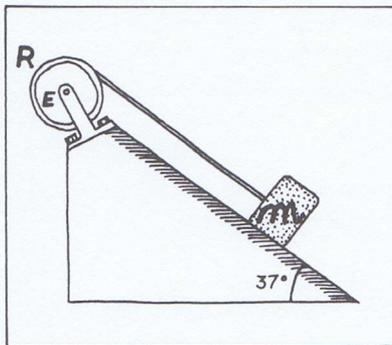


Fig. 8.27

### Q 8.21

Um bloco, de massa  $m = 4,0 \text{ kg}$ , escorrega sobre uma superfície inclinada  $37^\circ$  em relação à horizontal, sendo o coeficiente de atrito 0,20 — fig. 8.27.

O bloco está ligado a um fio inextensível e de massa desprezável, enrolado na gola de uma roldana de massa  $M = 4,0 \text{ kg}$  e raio  $R = 0,10 \text{ m}$ .

Determinar a aceleração do bloco e a tensão do fio ( $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ ).

### Q 8.22

No sistema representado na fig. 8.28, a massa da roldana é  $M = 2,0 \text{ kg}$  e o seu raio  $R = 0,2 \text{ m}$ .

A massa do corpo suspenso é  $m = 1,0 \text{ kg}$ .

Desprezando o efeito da roldana pequena, determinar a aceleração com que cai a massa  $m$  e a tensão do fio.

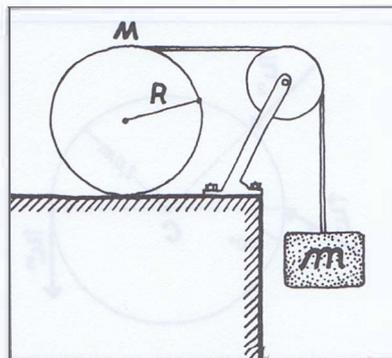


Fig. 8.28

### 8.3.6 Trabalho e potência na rotação

Consideremos um corpo rotativo, por exemplo o volante de um automóvel. Vamos supor que este corpo roda de um deslocamento angular infinitesimal,  $d\theta$  — fig. 8.29.

Seja  $\vec{F}$  a força que o automobilista exerceu no volante, constante durante o deslocamento infinitesimal, o **trabalho elementar** da força  $\vec{F}$  é

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Por definição de produto interno e sendo  $|d\vec{r}| = ds$ , podemos escrever

$$dW = F ds \cos \theta_1$$

Como

$$ds = r d\theta,$$

vem:

$$dW = F r \cos \theta_1 \cdot d\theta$$

Atendendo a que o produto  $F r \cos \theta_1 = F \cdot r \cdot \sin(90 - \theta_1)$  é o momento da força  $\vec{F}$  em relação ao eixo que passa por  $O$ , o trabalho elementar pode-se escrever na forma

$$dW = M_o \cdot d\theta$$

Se o **momento da força** se mantiver **constante**, o **trabalho**, no deslocamento angular finito  $\Delta\theta$ , é dado por

$$W = M_o \cdot \Delta\theta$$

Esta expressão é a «imagem», na rotação, da expressão conhecida,

$$W = F \cdot \Delta s.$$

Seja  $dt$  o tempo que o volante levou a deslocar-se  $d\theta$ , a **potência** exercida pela força  $\vec{F}$  sobre o volante é:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{M_o d\theta}{dt} \iff$$

$$P = M_o \cdot \omega$$

Esta expressão é a «imagem», na rotação, da expressão conhecida

$$P = F \cdot v.$$

Se várias forças actuarem no mesmo corpo rotativo, a expressão do trabalho resultante

$$W = M_o \Delta\theta$$

será válida se os momentos das várias forças se mantiverem constantes e  $M_o$  representar a respectiva soma algébrica.

A expressão da potência resultante

$$P = M_o \cdot \omega$$

é válida para valores instantâneos, isto é, aplica-se em qualquer instante  $t$ . É, pois, uma **potência instantânea**.

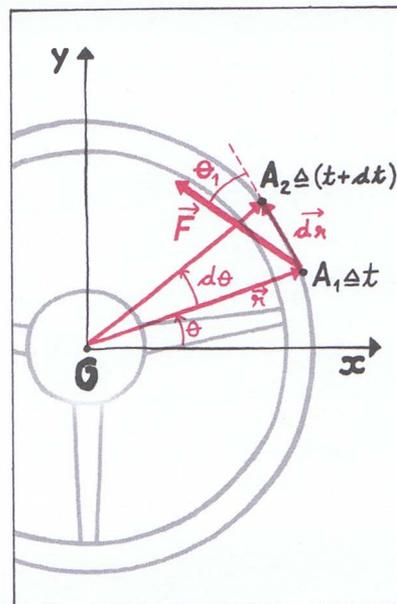


Fig. 8.29 A força  $\vec{F}$  exercida pela mão de um automobilista no volante de um automóvel, constante durante o deslocamento angular infinitesimal,  $d\theta$ , do volante, produz um **trabalho elementar**

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F} \cdot d\vec{r} = F ds \cos \theta_1 \\ &= F \cdot r d\theta \cos \theta_1 = M_o \cdot d\theta \end{aligned}$$

### 8.3.7 Energia cinética de rotação

Já sabemos que a energia cinética de um sistema de  $n$  partículas é a soma das energias cinéticas dessas partículas.

Quando tal sistema, sendo rígido, roda em torno de um eixo, as suas partículas possuem todas, em cada instante, a mesma velocidade angular  $\omega$ , mas as suas velocidades lineares são diferentes e dadas pelo produto

$$v = \omega \times r ,$$

onde  $r$  representa a distância de cada partícula ao eixo. Como  $\omega$  é constante e  $r$  é variável, a velocidade linear  $v$  varia de partícula para partícula.

A energia cinética do sistema rotativo será, então, a soma

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n v_n^2 \iff$$

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega^2 r_2^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n \omega^2 r_n^2$$

Pondo  $\frac{1}{2} \omega^2$  em evidência, vem:

$$E_c = \frac{1}{2} \omega^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2)$$

A soma dentro de parêntesis representa, como já sabemos, o momento de inércia do sistema,

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 ,$$

pelo que obtemos, finalmente,

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Esta expressão da energia cinética de rotação, formalmente análoga à da energia cinética da translação,

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 ,$$

é igualmente válida para os corpos rígidos constituídos por uma distribuição contínua de partículas. Só que, em tal caso, o momento de inércia é calculado por meio de um integral:

$$I = \int r^2 dm$$

A terminar, salienta-se que a *energia cinética de rotação não é uma nova forma de energia cinética*, pois resulta, como vimos, de uma soma dos valores da energia cinética, já conhecida, das várias partículas. Neste aspecto, em nada difere da energia cinética da translação. A diferença existe, sim, mas sob outro aspecto: reside no facto de a energia cinética de um corpo em translação não depender do modo como a massa está distribuída pelo corpo, ao contrário da energia cinética de um corpo em rotação (diferente distribuição origina diferente momento de inércia, mesmo com igual massa total).

Chamamos, por último, a atenção para um facto importante: sempre que um corpo tenha movimento de translação e rotação, como, p. ex., uma esfera e um cilindro que se movem num plano, há que contabilizar, nos balanços de energia, a energia cinética de translação e a energia cinética de rotação. Se desprezarmos esta, os resultados vêm errados.

Este erro é frequente. É necessário evitá-lo a partir de agora.

### QUESTÕES PROPOSTAS

#### Q 8.23

Um volante de 90 cm de diâmetro pode girar em torno de um eixo horizontal com atrito desprezável.

Exercendo uma tração constante de 50 N sobre uma corda enrolada no volante, este inicia a rotação e desenrolam-se 7,2 m de corda em 4,0 s.

1. Determinar a aceleração angular do volante.
2. Calcular o momento de inércia do volante.
3. Verificar que a energia cinética do volante aos 4,0 s é igual ao trabalho realizado pela força em 4,0 s.

#### Q 8.24

Os dois corpos pendurados do fio que passa na gola da roldana — fig. 8.30 — têm as massas

$$m_1 = 0,500 \text{ kg} \quad m_2 = 0,480 \text{ kg}$$

O raio da roldana é  $R = 5,0 \text{ cm}$ .

Ao abandonarmos o sistema dos corpos, o corpo mais pesado cai de uma altura de 1,0 m em 5,0 s.

Determinar:

1. O momento de inércia da roldana.
2. A energia cinética de todo o sistema, 5,0 s após o início do movimento dos corpos ( $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ ).

Quando um sólido roda em torno de um **eixo fixo**, que intersecta perpendicularmente num ponto  $O$  o plano em que actuam as forças, podemos utilizar as seguintes definições:

- O **trabalho elementar** de uma força, num deslocamento angular infinitesimal  $d\theta$ , é

$$dW = M_O \cdot d\theta,$$

sendo  $M_O$  o valor do momento da força em  $O$ .

- O **trabalho** de uma força, de momento constante em  $O$ , numa rotação  $\Delta\theta$ , é

$$W = M_O \cdot \Delta\theta.$$

- A **potência instantânea** exercida pelo momento  $M_O$ , aplicado, é

$$P = M_O \cdot \omega$$

- A **energia cinética de rotação** é dada por

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$$

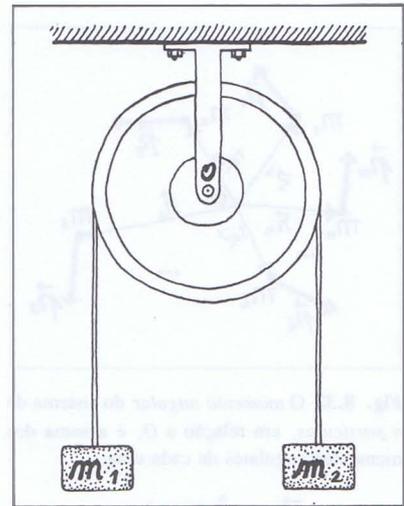


Fig. 8.30

### 8.3.8 Momento angular ou momento cinético

#### A — Momento angular de uma partícula

Consideremos uma partícula de massa  $m$  com *momento linear*

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

num dado instante  $t$  — fig. 8.31.

Seja  $\vec{r}$  o vector posição da partícula em relação a um ponto  $O$ , nesse instante  $t$ .

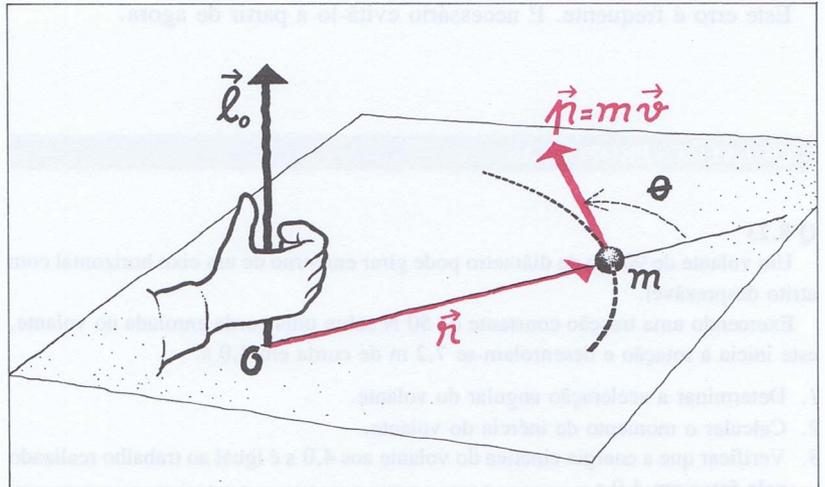
A grandeza vectorial

$$\vec{\ell}_o = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \vec{v}$$

designa-se por **momento angular** da partícula em relação ao ponto  $O$ , nesse mesmo instante  $t$ .

Fig. 8.31 O momento angular da partícula de massa  $m$ , em relação ao ponto  $O$ , é a grandeza vectorial

$$\vec{\ell}_o = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \vec{v}$$



Tem as seguintes características — fig. 8.31:

- *Linha de acção*: perpendicular ao plano que contém o ponto  $O$ , a posição e a velocidade da partícula.
- *Sentido*: dado por qualquer das regras do produto externo e, em particular, pela regra da mão direita — fig. 8.31.
- *Módulo*:  $|\vec{\ell}_o| = \ell_o = m v r \sin \theta$ ,

sendo  $\theta$  o ângulo de  $\vec{r}$  com  $\vec{v}$

A unidade SI de momento angular é o  $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$

#### B — Momento angular de um sistema de partículas

No caso de termos um sistema discreto de  $n$  partículas — fig. 8.32, de massas

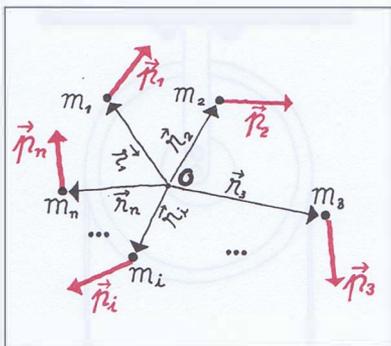


Fig. 8.32 O momento angular do sistema de  $n$  partículas, em relação a  $O$ , é a soma dos momentos angulares de cada uma:

$$\vec{L}_o = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$$

e momentos lineares, respectivamente,

$$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_i, \dots, \vec{p}_n,$$

o **momento angular do sistema** das  $n$  partículas, em relação ao ponto  $O$ , é a **soma dos momentos angulares** de cada uma das partículas:

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 + \dots + \vec{r}_i \times \vec{p}_i + \dots + \vec{r}_n \times \vec{p}_n \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n \vec{\ell}_{O,i} \end{aligned}$$

No caso particular e importante de um *sólido ter movimento de rotação em torno de um eixo fixo*, que seja também eixo de simetria (*eixo principal de inércia*), mostra-se facilmente (ver G.E.8.7) que o seu *momento angular em relação a um ponto do eixo* só tem componente na direcção do eixo. Nestas condições, o **momento angular em relação ao eixo**, o escalar  $L = I\omega$ , pode ser substituído pela expressão vectorial dada pelo *produto do momento de inércia pela velocidade angular*:

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

Repare-se na analogia formal entre as expressões dos momentos linear e angular:

$$\vec{p} = m \vec{v} \quad \text{e} \quad \vec{L} = I \vec{\omega}$$

### QUESTÕES PROPOSTAS

#### Q 8.25

Uma partícula de massa 2,0 kg passa pelo ponto  $P(3, 1, 2)$  m com a velocidade

$$\vec{v} = \vec{u}_x - \vec{u}_y + 2\vec{u}_z \quad (\text{ms}^{-1})$$

Determinar o *momento angular* da partícula em relação ao ponto  $Q(1, 0, 1)$  m.

#### Q 8.26

Uma partícula cai de uma posição  $P_0(b, 0)$  e, no instante genérico  $t$ , está na posição

$$P(b, -\frac{1}{2}gt^2)$$

relativamente a um referencial  $(O, x, y)$  — fig. 8.33.

1. Expressir o *momento da força gravítica*, em relação à origem  $O$ , como função do braço  $b$ .
2. Expressir o *momento angular da partícula*, em relação à origem  $O$ , como função do braço  $b$ .
3. Mostrar que se verifica a relação

$$\frac{d\vec{\ell}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

O **momento angular de uma partícula** em relação a um ponto  $O$  é a grandeza vectorial

$$\vec{\ell}_O = \vec{r} \times \vec{p},$$

sendo  $\vec{r}$  o vector posição da partícula em relação a  $O$  e  $\vec{p}$  o *momento linear* da partícula.

O **momento angular de um sistema** de partículas é a soma dos momentos angulares das partículas:

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^n \vec{\ell}_{O,i}$$

No caso de um corpo móvel em torno de um eixo principal de inércia, o seu *momento angular em relação ao eixo* é:

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

### ► G.E.8.7

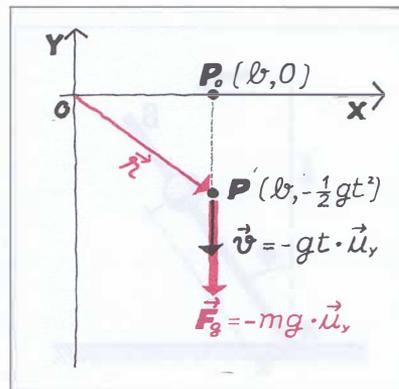


Fig. 8.33

**Q 8.27**

Considerando a seguinte tabela de dados astronômicos

Planetas	Massas (kg)	Raios médios das órbitas (m)	Velocidades orbitais (m/s)
Mercúrio	$3,3 \times 10^{23}$	$5,9 \times 10^{10}$	$49 \times 10^3$
Vênus	$4,9 \times 10^{24}$	$1,1 \times 10^{11}$	$35 \times 10^3$
Terra	$6,0 \times 10^{24}$	$1,5 \times 10^{11}$	$30 \times 10^3$
Marte	$6,5 \times 10^{23}$	$2,3 \times 10^{11}$	$34 \times 10^3$
Júpiter	$1,9 \times 10^{27}$	$7,8 \times 10^{11}$	$13 \times 10^3$
Saturno	$5,7 \times 10^{26}$	$1,4 \times 10^{12}$	$10 \times 10^3$
Urano	$9,0 \times 10^{25}$	$2,9 \times 10^{12}$	$7 \times 10^3$
Neptuno	$1,0 \times 10^{26}$	$4,5 \times 10^{12}$	$5 \times 10^3$
Plutão	$1,2 \times 10^{24}$	$6,1 \times 10^{12}$	$4,9 \times 10^3$
Sol	<i>Massa</i> $2,0 \times 10^{30}$ kg	<i>Raio equatorial</i> $7,0 \times 10^8$ m	<i>Velocidade no Eq.</i> $2,0 \times 10^3$ ms <sup>-1</sup>

considerando os planetas como partículas em movimento circular uniforme, de raio igual ao raio médio, e considerando ainda o Sol como massa esférica de momento de inércia dado pela expressão

$$I = \frac{2}{5} M R^2,$$

determinar:

1. O momento angular do Sol em torno do seu eixo.
2. O momento angular dos planetas na sua revolução sideral.
3. A percentagem aproximada do momento cinético do sistema solar que corresponde à rotação do Sol em torno do seu eixo.

**Q 8.28**

Numa barra, de massa  $M$  e comprimento  $\ell$ , foi incrustada uma esfera de massa  $3M$ . A barra é abandonada na posição vertical, rodando em torno de um eixo fixo  $A$  — fig. 8.34.

Sendo

$$R = \frac{2\ell}{3}$$

a distância deste eixo ao centro de massa da esfera e consultando a tabela da fig. 8.23:

1. Provar que a velocidade angular da barra quando atinge a posição horizontal é dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$$

*Sugestão:* aplicar a conservação da energia mecânica à partida e à chegada.

2. Como cai mais rapidamente a barra: com a esfera encostada à extremidade  $A$  ou encostada à extremidade  $B$ ? Justificar e dar a interpretação física.
3. Qual é o momento angular da barra representada na fig. 8.34 quando atinge a superfície horizontal?

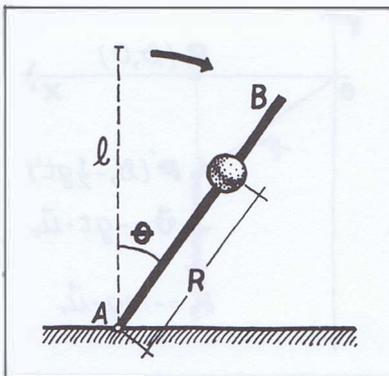


Fig. 8.34

### 8.3.9 Lei da variação do momento angular

Na secção anterior definimos a grandeza momento angular de um corpo. Esta pode considerar-se, de certa maneira, uma medida da rotação do corpo.

Segundo este modo de ver, e considerando que de uma **interacção** resultam, em geral, **variações** do **momento linear** ( $\Delta \vec{p}$ ) e do **momento angular** ( $\Delta \vec{\ell}$ ), podemos admitir que as variações,  $\Delta \vec{p}$ , do momento linear medem os *efeitos de translação* das interacções, enquanto que as variações,  $\Delta \vec{\ell}$ , do momento angular medem os respectivos *efeitos de rotação*.

Ora, a rotação depende dos momentos das forças exteriores que actuam no corpo. Portanto, deve haver uma *relação entre este momento resultante exterior e a variação do momento angular* do corpo.

Vamos procurar precisamente esta relação.

Para isso, voltamos a considerar uma pequena massa  $m$ , onde, num dado instante  $t$ , actua uma força  $\vec{F}$ , possuindo, então, um determinado momento linear,  $\vec{p} = m \vec{v}$  — fig. 8.35.

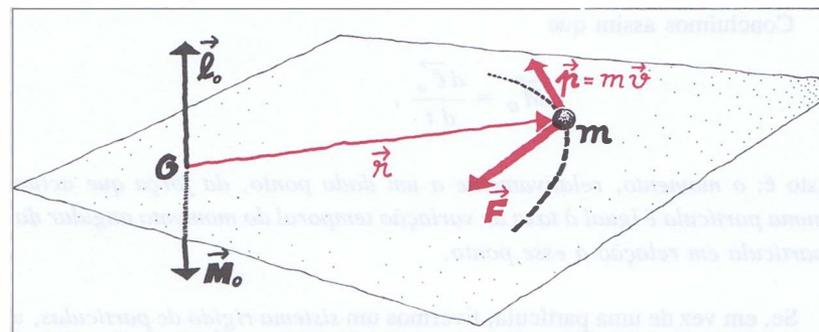


Fig. 8.35 O momento  $\vec{M}_O$  da força que actua na partícula é igual à taxa de variação temporal do momento angular:

$$\vec{M}_O = \frac{d \vec{\ell}_O}{dt}$$

Segundo a lei fundamental de Newton, na sua forma mais geral, temos:

$$\vec{F} = \frac{d \vec{p}}{dt}$$

Multiplicando externamente por  $\vec{r}$ , à esquerda, vem:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d \vec{p}}{dt}$$

O primeiro membro desta igualdade representa o **momento** da força  $\vec{F}$  aplicada em relação a  $O$ :

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_O$$

E que representa o segundo membro da referida igualdade?

Verifiquemos que ele é, de facto, a **derivada do momento angular** em relação ao tempo,  $\frac{d \vec{\ell}_o}{d t}$ :

$$\vec{r} \times \frac{d \vec{p}}{d t} = \frac{d \vec{\ell}_o}{d t}$$

Com efeito, aplicando a regra da derivação do produto e tendo em conta que o produto externo de dois vectores colineares é nulo, pode escrever-se, sucessivamente:

$$\begin{aligned} \frac{d \vec{\ell}_o}{d t} &= \frac{d (\vec{r} \times \vec{p})}{d t} = \frac{d \vec{r}}{d t} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d \vec{p}}{d t} = \\ &= \vec{v} \times m \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d \vec{p}}{d t} = \vec{0} + \vec{r} \times \frac{d \vec{p}}{d t} = \\ &= \vec{r} \times \frac{d \vec{p}}{d t} \end{aligned}$$

Concluimos assim que

$$\vec{M}_o = \frac{d \vec{\ell}_o}{d t},$$

isto é: *o momento, relativamente a um dado ponto, da força que actua numa partícula é igual à taxa de variação temporal do momento angular da partícula em relação a esse ponto.*

Se, em vez de uma partícula, tivermos um *sistema rígido de partículas*, a taxa de variação temporal do momento angular do sistema,

$$\frac{d \vec{L}}{d t}$$

pode, em princípio, ser atribuída a dois tipos de momentos:

- 1.º — Aos momentos das forças interiores do sistema rígido.
- 2.º — Aos momentos das forças exteriores ao sistema.

Será pois, em princípio, igual à soma de todos esses momentos.

Como vimos na secção 8.3.3 e fig. 8.21, a soma dos momentos das forças interiores é nula. Consequentemente virá, apenas:

$$\Sigma \vec{M}_{ext} = \frac{d \vec{L}}{d t}$$

Em conclusão:

A derivada em ordem ao tempo do momento angular total de um sistema é igual à soma dos momentos das forças exteriores aplicadas (aquele e estes em relação ao mesmo ponto).

Esta lei, designada muitas vezes por **lei da variação do momento angular**, não é mais do que uma generalização da *lei de Newton da rotação*.

Para o caso de um *sólido móvel em torno de um eixo fixo*, de simetria, os vectores  $\vec{L}$  e  $\vec{\omega}$  têm ambos a direcção do eixo, sendo, pois,

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

(ver final da secção 8.3.8. e G.E. 8.7). Portanto, derivando,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha}$$

ou seja: 
$$\Sigma \vec{M}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} \iff \Sigma \vec{M}_{ext} = I\vec{\alpha}$$

Obtemos, assim, a lei de Newton da rotação na forma particular apresentada na secção 8.3.3.

### 8.3.10 Lei da conservação do momento angular

Acabámos de ver que a *soma dos momentos das forças exteriores*, em relação a um ponto, aplicadas num sistema, é igual à *derivada do momento angular em ordem ao tempo*:

$$\Sigma \vec{M}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Portanto, se essa soma dos momentos for nula, ter-se-á

$$\vec{0} = \frac{d\vec{L}}{dt} \iff \vec{L} = \text{cons.}^{\text{te}}$$

Em conclusão:

Quando a soma dos momentos das forças exteriores que actuam num sistema for nula, o vector momento angular do sistema permanece constante.

Este é um enunciado da **lei da conservação do momento angular**.

A *lei da conservação do momento angular* constitui, com as outras leis da conservação, um corpo de teoria que governa todos os fenómenos físicos, desde os microscópicos aos macroscópicos.

## Súmula

8.14

As somas dos momentos das forças exteriores que actuam num sistema rígido de partículas, em relação ao eixo de simetria em torno do qual roda, é igual à taxa de variação temporal do momento angular do sistema em relação ao eixo de simetria:

$$\Sigma \vec{M}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} \iff \Sigma \vec{M}_{ext} = I\vec{\alpha}$$

## Súmula

8.15

**Lei da conservação do momento angular:**

Quando a soma dos momentos das forças exteriores aplicadas a um sistema é nula, o momento angular do sistema permanece constante.

## ► G.E.8.8

Muitos comportamentos humanos do dia-a-dia são aplicações intuitivas da lei da conservação do momento angular. Um exemplo clássico para ilustrar este facto é o seguinte:

Seja uma patinadora a rodar nas pontas dos patins — fig. 8.36

Como as únicas forças exteriores que actuam são a força gravítica e a reação do chão, forças essas que são simétricas, verifica-se que:

$$\vec{M}(\vec{F}_g) + \vec{M}(\vec{R}) = \Sigma \vec{M}_{ext} = \vec{0}$$

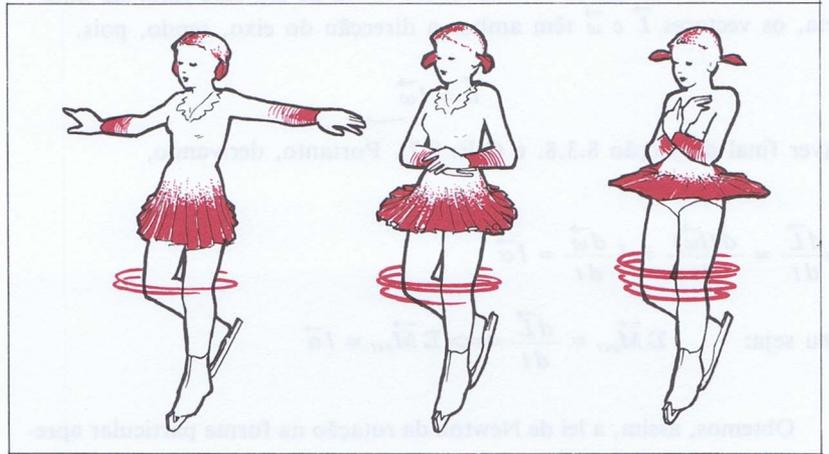


Fig. 8.36 Quando a patinadora, ao rodar, encolhe os braços e os junta bem à frente do corpo, a sua velocidade angular aumenta, isto é, passa a rodar muito mais rapidamente.

Estamos, pois, nas condições da lei da conservação do momento angular, isto é,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma \vec{M}_{ext} = \vec{0} \iff \vec{L} = \text{cons.}^{\text{te}}$$

Concluimos, então, que o momento angular da patinadora tem de se manter constante enquanto estiver a rodar.

Mas, como vimos, esse momento angular é o produto do momento de inércia pela velocidade angular,

$$\vec{L} = I \vec{\omega},$$

em que o momento de inércia depende das massas  $m_i$  das suas partículas e das suas distâncias  $r_i$  ao eixo de rotação. Podemos mesmo escrever

$$I = \Sigma m_i r_i^2$$

ou, mais correctamente:

$$I = \int_m r^2 dm$$

Pois bem:

Quando a patinadora, ao rodar, encolhe os braços — fig. 8.36, diminuem as distâncias  $r_i$  das respectivas partículas ao eixo de rotação. O seu momento de inércia diminui, portanto.

Ora, como

$$\vec{L} = I \vec{\omega},$$

se o momento de inércia  $I$  diminui e o momento angular  $\vec{L}$  da patinadora tem de se manter constante, conclui-se que a sua velocidade angular  $\vec{\omega}$  terá de aumentar. E é o que a experiência confirma — fig. 8.36.

### QUESTÕES PROPOSTAS

#### Q 8.29

Quando um acrobata pretende dar um triplo salto mortal encolhe-se bastante, enrolando o corpo. Justificar esta atitude intuitiva do acrobata.

#### Q 8.30

Um corpo de massa  $m_1$ , seguindo com a velocidade  $\vec{v}_1$ , alojou-se numa cavidade periférica de uma roda de massa  $m$ , inicialmente em repouso. Após o impacto, a roda, cujo raio é  $R$ , pôs-se a rodar, com resistências desprezáveis, em torno do eixo  $E$  — fig. 8.37.

Sendo

$$I = \frac{1}{2} m R^2$$

o momento de inércia da roda, provar que o valor da velocidade do corpo, depois de se ter alojado na cavidade, passou a ser

$$v = \frac{2m_1 v_1}{2m_1 + m}$$

#### Q 8.31

O mecanismo indicado na fig. 8.38 compreende duas esferas de massa igual a 10 kg, distantes 10 cm do eixo  $EE'$  em torno do qual o mecanismo roda.

Desprezam-se a massa da barra  $B$ , a massa da mola comprimida entre as esferas por meio de um fio, os atritos e outras resistências.

Começa-se a queimar a ponta do fio e põe-se o mecanismo a rodar com a velocidade angular de 6 rad/s.

Indicar se varia e como varia a velocidade angular do mecanismo quando:

1. A mola mantém as esferas a 10 cm do eixo.
2. A mola, solta pelo fio, leva as esferas para a distância de 20 cm do eixo.

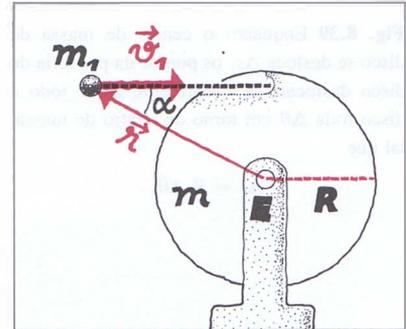


Fig. 8.37

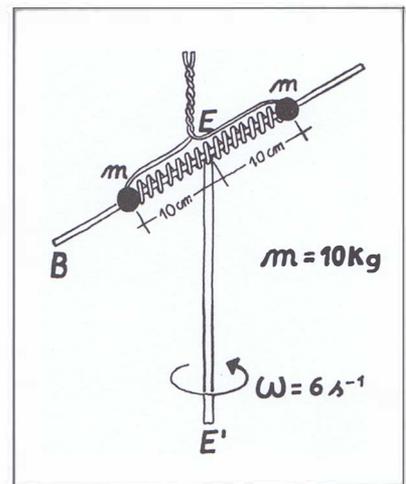


Fig. 8.38

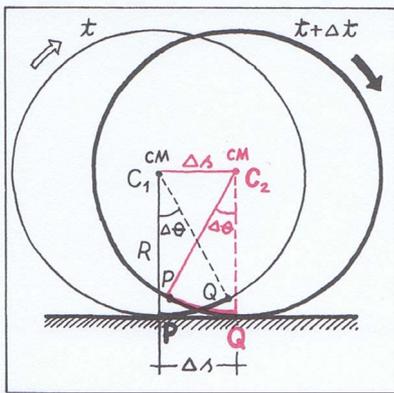


Fig. 8.39 Enquanto o centro de massa do disco se desloca  $\Delta s$ , os pontos da periferia do disco deslocam-se linearmente  $\Delta s$  e todo o disco roda  $\Delta\theta$  em torno do centro de massa, tal que

$$\Delta s = R \Delta\theta.$$

## 8.4 Movimento de um corpo que rola sem escorregar

Vamos agora estudar o movimento de um corpo rígido que *rola sem escorregar* — fig. 8.39.

Este movimento designa-se muitas vezes por **movimento plano do corpo**, porque todas as suas partículas se movem em planos paralelos a um outro plano dado (no caso da fig. 8.39, movem-se paralelamente ao plano do papel).

O eixo de simetria do corpo (que consideramos homogéneo, para que esse eixo passe pelo centro de massa) move-se paralelamente a si mesmo: tem, portanto, movimento de translação.

Numa translação muito pequena  $\Delta s = \overline{C_1 C_2}$  desse eixo (exagerada, para se tornar bem visível, na fig. 8.39), correspondente ao intervalo de tempo muito pequeno  $\Delta t$ , **todos** os pontos do arco  $\widehat{PQ}$  vão *sucessivamente* tocando o solo, enquanto o disco roda  $\Delta\theta$  em torno do eixo.

**Se não houver escorregamento**, a distância  $\overline{PQ}$ , medida no solo, entre os dois pontos de contacto  $P$  e  $Q$ , será exactamente igual à medida do arco  $\widehat{PQ}$ , pois corresponderá a esse arco rectificado:

$$\overline{PQ} = \widehat{PQ} = R \cdot \Delta\theta$$

Mas, como se observa na figura 8.39, esse comprimento  $\overline{PQ}$  é também igual ao espaço percorrido pelo centro de massa:  $\overline{C_1 C_2} = \Delta s$ .

**Não havendo escorregamento**, podemos, assim, escrever:

$$\Delta s_{CM} = R \Delta\theta$$

Para um intervalo de tempo infinitesimal,  $dt$ , ter-se-á, por maioria de razão,

$$ds_{CM} = R \cdot d\theta$$

e, portanto,

$$\frac{ds_{CM}}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} \quad \Leftrightarrow$$

$$v_{CM} = R \omega \quad \Leftrightarrow$$

$$v_{CM} = v_P,$$

representando agora  $P$  um ponto qualquer da periferia do disco.

Concluimos desta análise que o movimento de um corpo simétrico que **rola sem escorregar** é um **movimento composto** de:

- uma *translação* do seu eixo que contém o  $CM$  no referencial Terra;
- uma *rotação* em torno desse eixo que contém o  $CM$ .

E concluímos ainda:

— a velocidade do CM (no referencial Terra) é igual, em módulo, à velocidade dos pontos da periferia do corpo (no referencial ligado ao centro de massa).

Derivando em ordem ao tempo a relação

$$v_{CM} = v_P,$$

obtemos

$$a_{CM} = a_t,$$

isto é:

a aceleração do centro de massa (no referencial Terra) é igual, em módulo, à aceleração tangencial dos pontos da periferia do corpo (no referencial ligado ao centro de massa).

Determinemos, agora, a velocidade de vários pontos da periferia do disco ou do cilindro em relação à Terra — fig. 8.40, (a), tendo em conta a regra da adição das velocidades,

$$\vec{v}_{P, Terra} = \vec{v}_{P, CM} + \vec{v}_{CM, Terra},$$

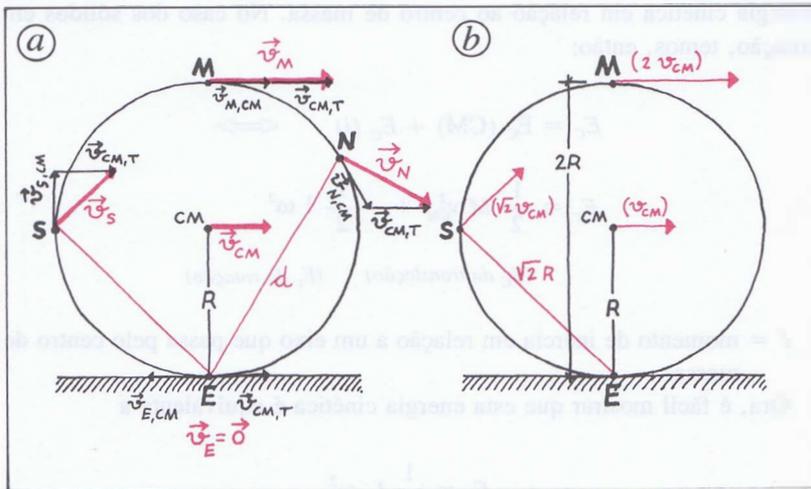


Fig. 8.40

(a) Determinação das velocidades de vários pontos dum corpo que rola sem escorregar, relativamente ao referencial Terra.

(b) As velocidades determinadas são proporcionais às distâncias a E:

$$\frac{\sqrt{2} v_{CM}}{\sqrt{2} R} = \frac{2 v_{CM}}{2 R} = \frac{v_{CM}}{R} = \omega$$

e considerando que os vectores  $\vec{v}_{P, CM}$  e  $\vec{v}_{CM, Terra}$  têm, de acordo com a conclusão atrás enunciada, o mesmo módulo:  $v_{CM}$ .

Que podemos concluir? Vejamos por partes.

1.º — Em qualquer instante o ponto E de contacto do disco com a superfície está em repouso ( $\vec{v}_{E, Terra} = \vec{0}$ , porque  $\vec{v}_{E, CM}$  e  $\vec{v}_{CM, T}$  são simétricos), o que está de acordo com o facto de o disco não escorregar.

2.º — Qualquer partícula da periferia do disco tem velocidade linear (no referencial Terra) perpendicular à linha que une a partícula ao ponto  $E$  de contacto com o solo; o seu valor é dado por  $\omega d$ , sendo  $\omega$  a velocidade de rotação e  $d$  a medida dessa linha.

Esta conclusão está verificada na fig. 8.40, (b), com três partículas ( $CM$ ,  $M$  e  $S$ ).

Portanto, em qualquer instante que se considere, o corpo está rodando com a velocidade angular  $\omega$  em torno de um eixo fixo que passa por  $E$ , ou seja um eixo que está em contacto com o solo. A este eixo fixo chama-se **eixo instantâneo de rotação**.

É muito importante realçar este aspecto: *os efeitos combinados da translação do eixo que contém o centro de massa e da rotação, com velocidade angular  $\omega$ , em torno desse eixo, equivalem a uma rotação pura, com esta velocidade angular  $\omega$ , em torno de um eixo instantâneo de rotação — eixo que passa pelos pontos de contacto com o piso onde o corpo rola.*

Esta equivalência entre o movimento composto (de translação e rotação) de um corpo que rola e a sua rotação em torno de um eixo instantâneo de rotação é também posta em evidência com a energia cinética. Vimos, ao estudar a energia cinética dos sistemas de partículas, que ela era a soma da energia cinética do centro de massa com a energia cinética interna ou energia cinética em relação ao centro de massa. No caso dos sólidos em rotação, temos, então:

$$E_c = E_c(\text{CM}) + E_c(i) \quad \Longleftrightarrow$$

$$E_c = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

( $E_c$  da translação)      ( $E_c$  da rotação)

$I$  = momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa.

Ora, é fácil mostrar que esta energia cinética é equivalente a

$$E_c = \frac{1}{2} I_E \omega^2 ,$$

**G.E. 8.9** ◀ sendo  $I_E$  o momento de inércia em relação ao eixo instantâneo de rotação (ver G.E. 8.9).

Esta expressão corresponde, precisamente, à energia cinética de uma rotação pura com velocidade angular  $\omega$  em torno do eixo instantâneo de rotação — fig. 8.40.

QUESTÕES PROPOSTAS

Q 8.32

Um cilindro de massa  $M$  e raio  $R$  rola sem escorregar ao longo de um plano inclinado cujo ângulo de inclinação é  $\theta$  — fig. 8.41.

Determinar a aceleração do centro de massa do cilindro, sendo

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

Q 8.33

Uma fita flexível de comprimento  $\ell$ , fortemente enrolada, desenrola-se ao longo de um plano inclinado, mantendo fixa uma sua extremidade  $A$  — fig. 8.42.

Quanto tempo leva a desenrolar-se totalmente?

Q 8.34

Determinar a energia cinética de um disco de massa  $M$  que rola sem escorregar sobre uma superfície horizontal com a velocidade  $v_{CM}$  do seu centro de massa.

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

Interpretar os resultados em termos das energias cinéticas de translação e de rotação, comparando os seus valores.

Q 8.35

Demonstrar que a velocidade final do centro de massa de uma esfera que, partindo do repouso, rola sem escorregar por um plano inclinado, a partir da altura  $h$ , é dada por

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{10}{7} g h},$$

sabendo que

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

mostrar também que a aceleração do seu  $CM$  tem o valor:  $a_{CM} = \frac{5}{7} \cdot g \sin \theta$

Q 8.36

O taco  $T$  exerce um impulso horizontal, situado no plano vertical que contém o centro de massa (centro de figura) da bola de bilhar  $B$  — fig. 8.43.

Provar que a bola de bilhar rola sem qualquer deslizamento se a linha de acção do impulso do taco distar

$$\frac{2}{5} R$$

do centro de massa  $CM$  ( $R$  = raio da bola).

do:

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

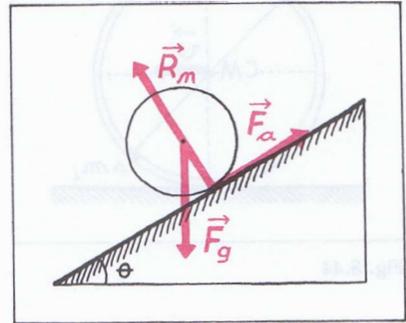


Fig. 8.41

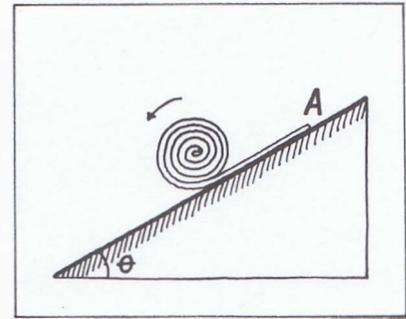


Fig. 8.42

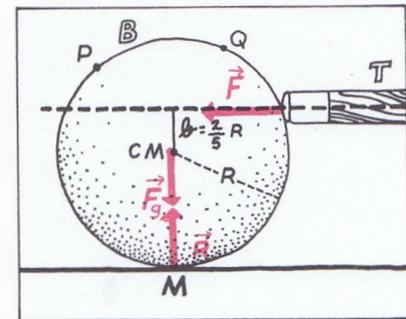


Fig. 8.43

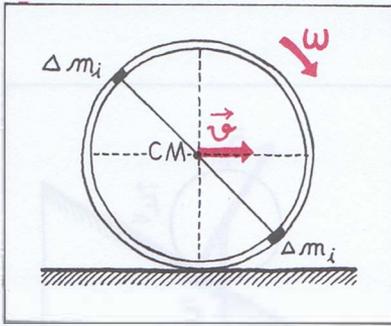


Fig. 8.44

**Q 8.37**

Um aro, de massa  $M$  e raio  $R$ , move-se uniformemente com a velocidade  $\vec{v}$  do seu  $CM$  e gira com a velocidade angular  $\omega$  — fig. 8.44.

1. Mostrar que a energia cinética do aro, no referencial Terra, é dada pela soma

$$E_c = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

com

$$I = M R^2.$$

**Sugestão:**

Considerar *pares* de massas  $\Delta m_i$ , diametralmente opostas, e fazer os diagramas das respectivas velocidades.

2. Qual é a expressão da energia cinética em função da velocidade  $v$ , se o aro rodar sem deslizamento?

**Q 8.38**

Um tubo oco e um cubo, de massa igual,  $m$ , caem ao longo de um plano inclinado — fig. 8.45. O primeiro rola sem escorregar e o segundo escorrega. Relacionar a velocidade final do cilindro que rola com a velocidade final do cubo que escorrega, mostrando que a primeira é inferior à segunda:

$$v_r < v_e$$

$$I (\text{cilindro oco}) = m R^2$$

Interpretar este resultado com base nas transformações de energia ocorridas.

**Nota:**

Admite-se que o atrito é suficiente para fazer rolar o cilindro, mas não afecta significativamente o movimento do cubo.

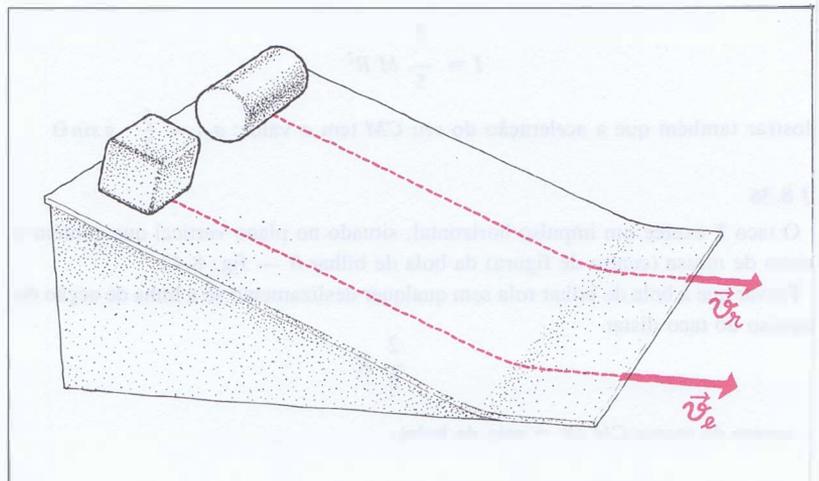


Fig. 8.45

# Teste de auto-avaliação

## I

O tambor de uma máquina, com 1,0 m de diâmetro, roda com a velocidade inicial de 500 r.p.m. Acelerado uniformemente, atinge a velocidade de 1000 r.p.m. em 20 s.

Determinar:

1. O ângulo de que o tambor roda nesses 20 s.
2. A aceleração tangencial de um ponto da sua periferia durante esse tempo.

## II

O momento resultante das forças aplicadas por um automobilista no volante do seu automóvel e das forças resistentes é 1,0 m.N, em relação ao eixo do volante.

Medindo 20 cm o raio do volante e sendo 0,10 kg m<sup>2</sup> o seu momento de inércia, calcular:

1. O ângulo de que roda o volante no 1.º segundo.
2. A velocidade linear dos dedos do automobilista no instante 1,0 s.

## III

Um corpo de massa  $m$  encontra-se suspenso por um fio enrolado num cilindro de massa  $M$  e raio  $R$ , que pode girar com atrito desprezável. Deixando cair o corpo  $m$  e desprezando a massa do fio, podemos concluir que a aceleração angular do cilindro é — fig. T.8.1:

$$(A) \alpha = \frac{m g}{2 M R + m R}$$

$$(B) \alpha = \frac{2 m g}{2 M R + m R}$$

$$(C) \alpha = \frac{m g}{M R + 2 m R}$$

$$(D) \alpha = \frac{2 m g}{M R + 2 m R}$$

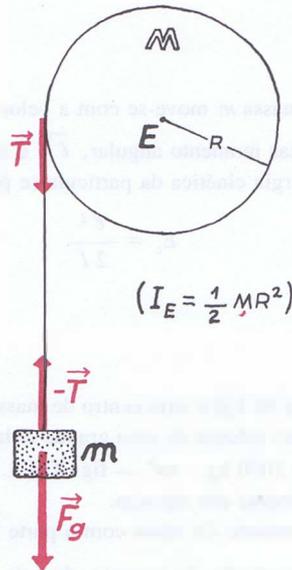


Fig. T.8.1

#### IV

Mostrar que a aceleração do sistema da fig. T.8.2, que se move sem atrito, é dada por

$$a = \frac{2 m_2 g}{2 m_1 + 2 m_2 + M}$$

O momento de inércia da roldana é

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

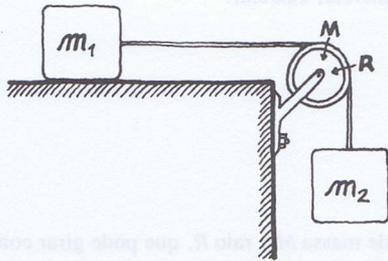


Fig. T.8.2

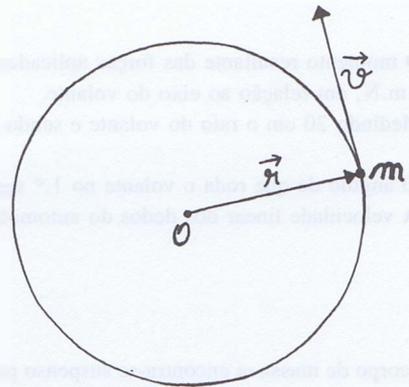


Fig. T.8.3

#### V

Uma partícula de massa  $m$  move-se com a velocidade  $\vec{v}$ , descrevendo uma trajetória circular de raio  $r$  — fig. T.8.3

1. Definir as grandezas momento angular,  $\vec{\ell}$ , e momento de inércia,  $I$ , da partícula, em relação ao centro  $O$ .
2. Mostrar que a energia cinética da partícula se pode obter pela expressão:

$$E_c = \frac{\ell^2}{2 I}$$

#### VI

Um atleta, que pesa 80 kgf e cujo centro de massa dista cerca de 1,0 m dos pés, salta, tangencialmente, com a velocidade de  $10,0 \text{ ms}^{-1}$ , para a parte inferior de uma grande roda, de raio  $R = 3,0 \text{ m}$ . O momento de inércia desta, em relação ao eixo  $E$  em torno do qual roda, é  $1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  — fig. T.8.4.

A roda está inicialmente em repouso.

Após o salto e o contacto do atleta com a parte inferior da roda, esta põe-se em movimento com atrito desprezável.

1. Qual é o momento angular do homem, durante o salto, em relação ao eixo  $E$ ?
2. Qual é a velocidade angular inicial que adquire a roda?
3. Qual é a altura máxima que o homem, fixo na roda, consegue subir?

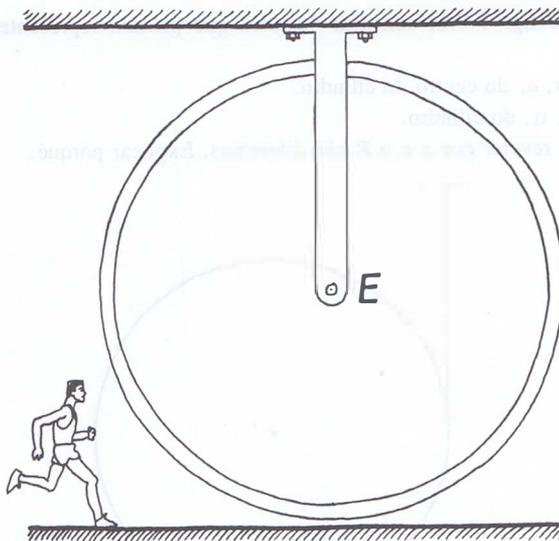


Fig. T.8.4

VII

1. Relacionar a variação, no tempo, do momento angular de uma partícula com o momento da força nela aplicada, relativamente a um mesmo ponto  $O$ . Deduzir essa relação.
2. Um cilindro homogêneo, de massa  $M$  e raio  $R$ , está inicialmente em repouso numa superfície rugosa horizontal (fig. T.8.5). O momento de inércia do cilindro em relação ao eixo é

$$\frac{1}{2} M R^2$$

Por meio de uma corda enrolada em torno do cilindro exerce-se uma força tangencial  $\vec{T}$ , cujo módulo

$$T = \frac{3}{5} M g$$

e cuja direcção vertical se mantém invariáveis. Daqui resulta que o cilindro acelera horizontalmente, rodando (sem perder contacto).

O coeficiente de atrito cinético é  $\frac{1}{2}$ .

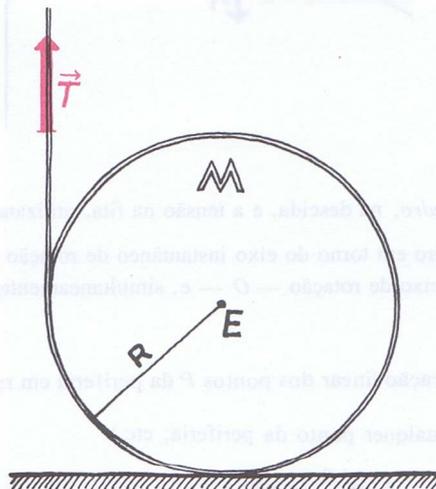


Fig. T.8.5

- 2.1 Num diagrama idêntico ao da fig. T.8.6, construir vectores que possam representar as várias forças que actuam no cilindro.
- 2.2 Determinar a aceleração linear,  $a$ , do centro do cilindro.
- 2.3 Calcular a aceleração angular,  $\alpha$ , do cilindro.
- 2.4 Os resultados obtidos deverão revelar que  $a$  e  $\alpha R$  são diferentes. Explicar porquê.

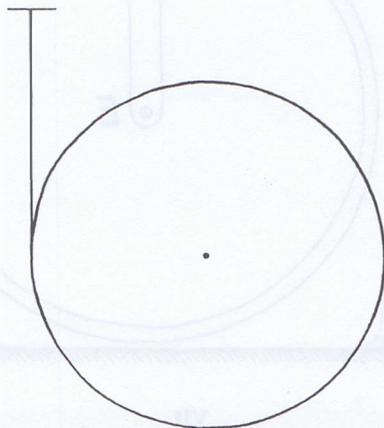


Fig. T.8.6

### VIII

Um cilindro maciço e de raio 7,6 cm, com a massa de 23 kg, tem uma fita de massa desprezável enrolada à sua volta. Esta fita passa pela gola de uma roldana fixa e está presa a um corpo de massa 4,5 kg, suspenso verticalmente — fig. T.8.7.

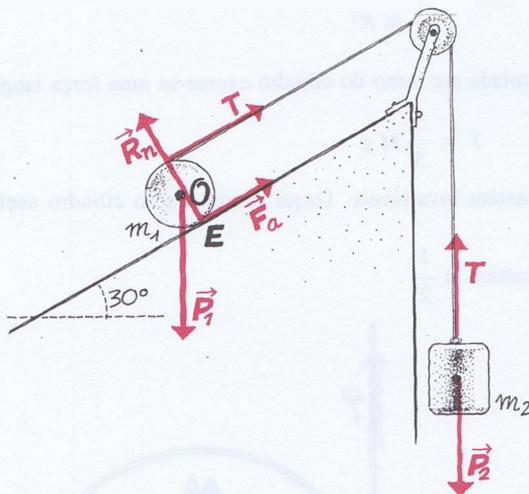


Fig. T.8.7

Determinar a aceleração linear *do cilindro*, na descida, e a tensão na fita, utilizando dois processos:

1. Considerando a rotação pura do cilindro em torno do eixo instantâneo de rotação —  $E$ .
2. Considerando a rotação em torno do eixo de rotação —  $O$  — e, simultaneamente, a translação deste.

**Nota:**

$$a_{CM} = R \cdot \alpha = \frac{a}{2} \quad (a = \text{valor da aceleração linear dos pontos } P \text{ da periferia em relação à Terra})$$

Porquê? (Ver secção 8.4;  $a_P = a$  para qualquer ponto da periferia; etc.)

$$I_E = \frac{3}{2} m_1 R^2$$

# Estática dos corpos rígidos

UNIDADE

9



ARQUIMEDES (287-212, A. C.)

Nasceu e morreu em Siracusa (Sicília). Desenvolveu o conceito de *centro de gravidade* e estabeleceu uma teoria do mesmo, que apresentou na sua obra de *Estática* intitulada «Tratado do Equilíbrio dos Planos ou dos Centros de Gravidade».

Estudou o funcionamento das *alavancas*, cujo princípio explicitou claramente. A respeito das mesmas, afirmou, segundo um relato de *Plutarco* (50-120 d. C.): «dai-me um ponto de apoio e com a minha alavanca levantarei o mundo».

Distinguiu-se também na *Hidrostática*, induzindo o princípio que tem o seu nome.

É considerado um precursor do método científico, pois foi um dos poucos sábios da antiguidade que utilizou o método experimental.

Morto às mãos de um soldado romano, quando ia tomada da ilha, os seus compatriotas depressa o esqueceram.



S. STEVIN (1548-1620)

Matemático, físico e engenheiro belga, fugiu às perseguições religiosas e fixou-se na Universidade de Leyden (Holanda).

Deu grande impulso à *Estática*, onde estabeleceu o *paralelogramo das forças*, ao descobrir que «três forças se equilibram quando podem ser representadas em grandeza e direcção pelos lados de um triângulo». Estudou o equilíbrio das alavancas, a propósito do qual introduziu o conceito de momento estático. Estudou igualmente o equilíbrio no plano inclinado.

Contribuiu também para o progresso da *Hidrostática*, o que talvez se deva à sua actividade como inspector de diques.

Além de vários trabalhos de matemática, propôs um *sistema decimal de pesos e medidas*. Foram, porém, os seus inventos práticos que, em vida, lhe deram mais glória e não as suas obras científicas...



# Estática dos corpos rígidos



## 9.1 Definição de equilíbrio de um corpo rígido

### 9.2 Sistemas de forças

9.2.1 Resultante de um sistema de forças

9.2.2 Momento resultante de um sistema (em relação a um ponto)

9.2.3 Relação entre os momentos de uma força em dois pontos diferentes — translação de momentos

9.2.4 Equivalência de sistemas de forças

9.2.5 Sistemas equivalentes a zero

9.2.6 Sistemas de forças concorrentes num ponto

9.2.7 Sistemas de forças paralelas de resultante não nula.

*A* — Centro de forças paralelas

*B* — Centro de gravidade de um corpo

9.2.8 Sistemas de forças coplanares

9.2.9 Sistemas de forças de resultante nula e momento resultante não nulo.

*A* — Binário de forças

*B* — Sistemas equivalentes a binários

9.2.10 Sistemas de forças equivalentes a uma força única e a um binário

9.2.11 Operações elementares de equivalência

9.2.12 Casos de redução dos sistemas de forças (síntese)

### 9.3 Estudo geral do equilíbrio de um corpo rígido

9.3.1 Condições gerais de equilíbrio

9.3.2 Tipos de equilíbrio

9.3.3 Forças de ligação

### 9.4 Estudo do equilíbrio de corpos rígidos em casos particulares

9.4.1 Equilíbrio de um corpo rígido sujeito a um sistema de forças concorrentes num ponto

9.4.2 Equilíbrio de um corpo rígido sujeito a um sistema de forças paralelas

9.4.3 Equilíbrio de um corpo rígido sujeito a um eixo fixo

9.4.4 Equilíbrio de um corpo suspenso

9.4.5 Equilíbrio de um corpo apoiado

## 9.1 Definição de equilíbrio de um corpo rígido

O deslocamento geral de um corpo rígido pode considerar-se como a combinação de uma translação com uma rotação. Este facto, ilustrado na fig. 9.1, corresponde a uma lei demonstrável — a lei de Chasles (1793-1880). Pode sempre considerar-se a translação representada pelo deslocamento do  $CM$ , seguida de uma rotação em torno de um eixo que passa pelo  $CM$ .

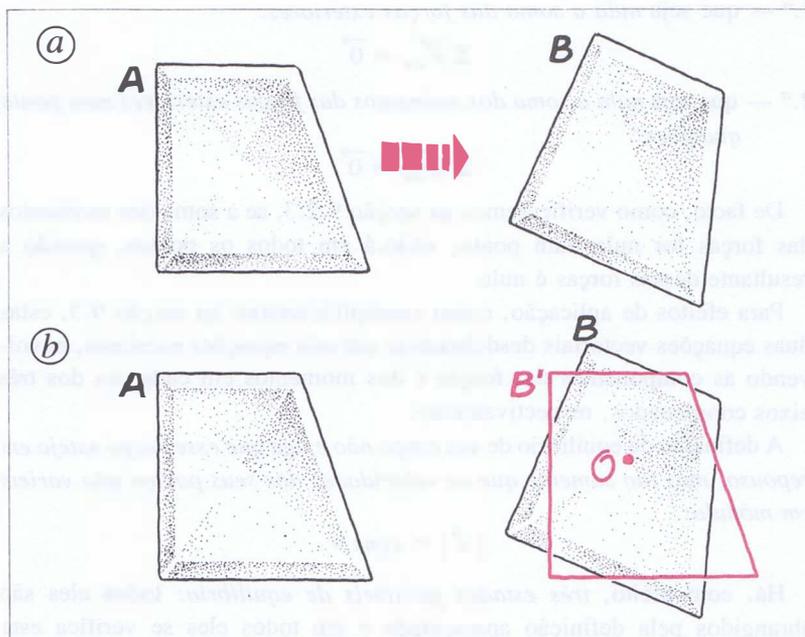


Fig. 9.1

- (a) Um corpo deslocou-se da posição A para a posição B.
- (b) Este deslocamento pode considerar-se como a combinação de uma translação de A a B' com uma rotação em torno do ponto arbitrariamente escolhido O. Esta rotação é, necessariamente, uma rotação em torno de um eixo instantâneo que passa por O.

O movimento deste, como já sabemos, vai depender da soma das forças exteriores, visto que

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_{CM}, \quad \text{onde } m = \text{massa do corpo}$$

O movimento de rotação em torno do ponto  $O$ , coincida ou não com o  $CM$ , depende, como também já sabemos, da soma dos momentos das forças exteriores, determinados em relação a esse ponto, verificando-se que

$$\Sigma \vec{M}_{ext} = I \vec{\alpha}, \quad \text{sendo} \quad \left\{ \begin{array}{l} I = \text{momento de inércia em relação} \\ \text{ao eixo instantâneo que passa} \\ \text{por } O \\ \vec{\alpha} = \text{aceleração angular em torno} \\ \text{desse eixo instantâneo} \end{array} \right.$$

Se, num dado referencial, o centro de massa de um corpo tiver **aceleração nula**,

$$\vec{a}_{CM} = \vec{0},$$

e, além disso, o corpo possuir **aceleração angular nula** em torno de qualquer ponto,

$$\vec{\alpha} = \vec{0},$$

o corpo diz-se **em equilíbrio**.

De acordo com esta definição e com as leis fundamentais da translação e da rotação,

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_{CM} \quad \text{e} \quad \Sigma \vec{M}_{ext} = I \vec{\alpha},$$

as **condições gerais** para que um corpo esteja em equilíbrio num dado referencial são duas:

1.<sup>a</sup> — que seja *nula a soma das forças exteriores*:

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

2.<sup>a</sup> — que seja *nula a soma dos momentos das forças exteriores num ponto qualquer*:

$$\Sigma \vec{M}_{ext} = \vec{0}$$

De facto, como verificaremos na secção 9.2.3, se a soma dos momentos das forças for nula num ponto, sê-lo-á em todos os pontos, quando a resultante dessas forças é nula.

Para efeitos de aplicação, como exemplificaremos na secção 9.3, estas duas equações vectoriais desdobram-se em seis equações escalares, envolvendo as componentes das forças e dos momentos em cada um dos três eixos coordenados, respectivamente.

A definição de equilíbrio de um corpo *não exige que esse corpo esteja em repouso, mas tão somente que as velocidades dos seus pontos não variem em módulo*:

$$|\vec{v}| = \text{const.}^{\text{te}}$$

Há, com efeito, *três estados possíveis de equilíbrio*: todos eles são abrangidos pela definição apresentada e em todos eles se verifica esta condição. Assim:

1.<sup>o</sup> — O corpo está *em repouso* no referencial escolhido, quer dizer, a velocidade é nula para qualquer ponto do corpo:

$$\vec{v} = \vec{0}$$

## Súmula

### 9.1

Um corpo estará **em equilíbrio** num dado referencial se o seu centro de massa não acelerar ( $\vec{a}_{CM} = \vec{0}$ ) nesse referencial e se tiver aceleração angular nula em relação a qualquer ponto ( $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ).

Basta, para isso, que sejam nulas a soma das forças exteriores,

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0},$$

e a soma dos momentos dessas forças num ponto qualquer:

$$\Sigma \vec{M}_{ext} = \vec{0}$$

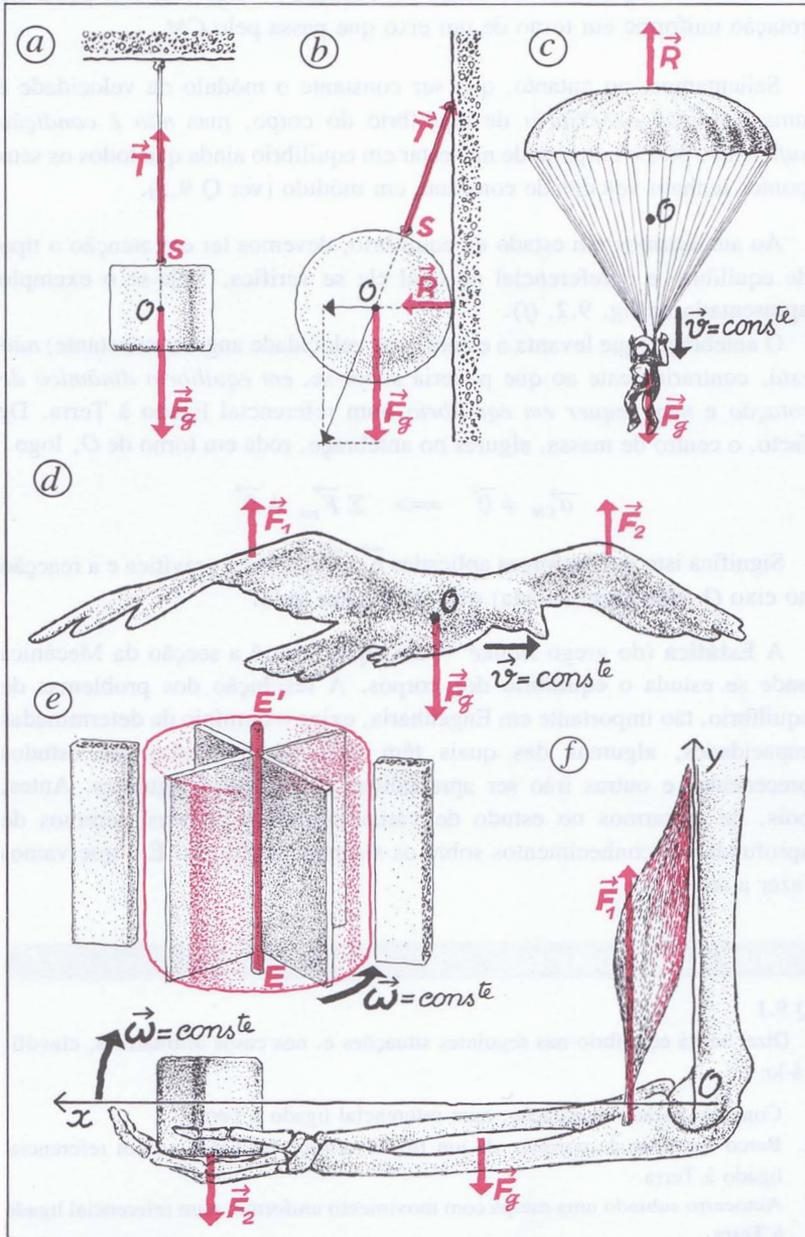
Trata-se do chamado **equilíbrio estático** — fig. 9.2, (a) e (b).

2.º — O corpo está em *movimento de translação rectilínea uniforme*, no referencial que se escolheu.

Isto significa que a velocidade de qualquer ponto do corpo é constante e igual para todos:

$$\vec{v} = \text{const.}^{\text{te}}$$

É o chamado **equilíbrio dinâmico de translação** — fig. 9.2, (c) e (d).



**Fig. 9.2** Cinco situações de equilíbrio e uma de não equilíbrio num referencial ligado à Terra. Em todos os casos menos um (a situação do antebraço), verifica-se que são nulas a soma das forças actuantes e a soma dos momentos das forças em relação a um ponto  $O$ .

Em qualquer *referencial* podemos afirmar:

No **equilíbrio estático**, são nulas a velocidade e a aceleração.

No **equilíbrio dinâmico de translação**, a velocidade é constante e a aceleração linear é nula.

No **equilíbrio dinâmico de rotação** (em torno de um eixo que passa pelo  $CM$ ), a velocidade linear é constante em módulo para cada ponto, a velocidade angular é constante e igual para todos os pontos, e a aceleração angular é nula.

3.º — O corpo tem *movimento de rotação uniforme* em torno de um eixo que passa pelo  $CM$  e está fixo no referencial escolhido. Nestas condições, todos os pontos do corpo têm a mesma velocidade angular, que, por sua vez, é constante:

$$\vec{\omega} = \text{const.}^e$$

Cada ponto  $P_i$  tem, pois, uma velocidade linear de módulo também constante:

$$|\vec{v}_i| = \omega \cdot r_i$$

É o chamado **equilíbrio dinâmico de rotação** — fig. 9.2, (e), porta em rotação uniforme em torno de um eixo que passa pelo  $CM$ .

Salientamos, no entanto, que ser constante o módulo da velocidade é uma *condição necessária* de equilíbrio do corpo, mas *não é condição suficiente*, pois o corpo pode não estar em equilíbrio ainda que todos os seus pontos tenham velocidade constante em módulo (ver Q 9.5).

Ao analisarmos um estado de equilíbrio, devemos ter em atenção o tipo de equilíbrio e o referencial no qual ele se verifica. Veja-se o exemplo apresentado na fig. 9.2, (f).

O antebraço (que levanta a esfera com velocidade angular constante) *não está*, contrariamente ao que poderia supor-se, *em equilíbrio dinâmico de rotação e nem sequer em equilíbrio* num referencial ligado à Terra. De facto, o centro de massa, algures no antebraço, roda em torno de  $O$ , logo

$$\vec{a}_{CM} \neq \vec{0} \implies \Sigma \vec{F}_{ext} \neq \vec{0}$$

Significa isto que as forças aplicadas  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ , a força gravítica e a reacção no eixo  $O$  (não representada) **não têm soma nula**.

A **Estática** (do grego *statiké* = em equilíbrio) é a secção da Mecânica onde se estuda o equilíbrio dos corpos. A resolução dos problemas de equilíbrio, tão importante em Engenharia, exige o domínio de determinadas capacidades, algumas das quais têm sido desenvolvidas em estudos precedentes e outras irão ser apreendidas nas secções seguintes. Antes, pois, de entrarmos no estudo de várias situações práticas, teremos de aprofundar os conhecimentos sobre os sistemas de forças. É o que vamos fazer a seguir.

## QUESTÕES PROPOSTAS

### Q 9.1

Dizer se há equilíbrio nas seguintes situações e, nos casos afirmativos, classificá-lo:

1. Comboio parado na estação, num referencial ligado à Terra.
2. Barco ao sabor da corrente de um rio no referencial barco e num referencial ligado à Terra.
3. Autocarro subindo uma rampa com movimento uniforme, num referencial ligado à Terra.

4. Movimento do ponteiro dos segundos de um relógio, num referencial ligado ao relógio.
5. Rodas de um automóvel que segue na estrada com movimento de translação uniforme, no referencial eixo e num referencial ligado à Terra.
6. Corpo em repouso no interior de um satélite em órbita geoestacionária à volta da Terra:
  - 6.1 no referencial satélite;
  - 6.2 num referencial ligado à Terra.

### Q 9.2

No caso da fig. 9.2, (b) — esfera dependurada de uma parede:

1. Haveria equilíbrio se, sendo a parede polida, a direcção do fio não passasse pelo centro,  $O$ ?  
Justificar, indicando o comportamento da esfera, quando abandonada nestas condições.
2. E poderia haver equilíbrio, no caso da parede ser rugosa, se a direcção do fio não passasse pelo centro  $O$ ?

### Q 9.3

No caso da fig. 9.2, (d) — ave a voar com velocidade constante:

1. Que relação de grandeza há entre as forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , aplicadas nas asas, e a força gravítica  $\vec{F}_g$ ?
2. Que relação de grandeza há entre os momentos de  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  em relação a  $O$ ?

### Q 9.4

No caso do pára-quedista — fig. 9.2, (c):

1. Havia equilíbrio antes da resistência do ar (que cresce com a velocidade) atingir um valor igual a  $\vec{F}_g$ ?
2. O equilíbrio do pára-quedista é do mesmo tipo nos referenciais ligados à Terra e num referencial ligado ao pára-quedas?

### Q 9.5

As portas representadas na fig. 9.2, (e), estão em equilíbrio dinâmico de rotação em relação ao respectivo eixo  $EE'$  quando rodam com velocidade angular constante.

Poder-se-ão considerar em equilíbrio dinâmico de rotação em torno do eixo as portas vulgares que rodam com velocidade angular constante em relação ao eixo situado num lado extremidade? Interpretar a diferença.

## 9.2 Sistemas de forças

### 9.2.1 Resultante de um sistema de forças

Uma das primeiras operações que geralmente se efectua ao resolver problemas de Estática é a determinação da resultante das forças exteriores (aplicadas e de ligação) que actuam num sistema em estudo.

Essa resultante é, como sabemos, a soma das forças que constituem o sistema:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Escolhendo um sistema de eixos  $(O, x, y, z)$ , ortonormado, temos a equação vectorial

$$\vec{F} = F_x \vec{u}_x + F_y \vec{u}_y + F_z \vec{u}_z,$$

sendo as componentes da resultante a soma das componentes das forças:

$$F_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad F_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad F_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}$$

Aquela desdobra-se assim em três equações escalares.

### 9.2.2. Momento resultante de um sistema (em relação a um ponto)

Na maioria dos problemas de Estática, torna-se necessário determinar também o *momento resultante* do sistema de forças exteriores, relativamente a um ponto  $O$ . É, como definimos na secção 8.3.1, a soma dos momentos das forças em relação a esse ponto:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$\vec{r}_i$  = vector posição do ponto de aplicação da força  $\vec{F}_i$  em relação ao ponto  $O$ .

Saliente-se que, em geral, o **momento resultante** de um sistema de forças é **diferente do momento da força resultante**, como veremos, por exemplo, ao estudar o caso do binário de forças.

### 9.2.3. Relação entre os momentos de uma força em dois pontos diferentes — translação de momentos.

Uma das duas condições de equilíbrio de um corpo é que, num ponto  $O$ , seja nulo o momento resultante das forças exteriores. Ao aplicarmos esta condição, teremos ou não liberdade de escolher um ponto  $O$ , qualquer, em relação ao qual calculamos os momentos?

#### G.E. 9.2 ◀

Para respondermos a esta pergunta vamos apresentar uma relação, deduzida no G.E. 9.2, entre os momentos resultantes calculados em dois pontos diferentes,  $O'$  e  $O$ :

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{F}$$

Esta relação significa o seguinte:

— O momento de um sistema de forças num ponto,  $O'$ , é a soma do momento desse sistema em outro ponto,  $O$ , com o momento, em  $O'$ , da força resultante, considerando esta aplicada em  $O$ .

Com base nesta relação, podemos concluir que, verificando-se a 1.<sup>a</sup> condição de equilíbrio de um sistema de forças  $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_n)$ , isto é, sendo nula a resultante,

$$\vec{F} = \vec{0},$$

é indiferente o ponto relativamente ao qual se determina o momento resultante. De facto, a relação anterior permite concluir que

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O \quad \text{se} \quad \vec{F} = \vec{0}$$

Significa isto que o efeito rotativo de um sistema de resultante nula é o mesmo em relação a qualquer ponto. E sendo nulo esse efeito num ponto, será nulo em todos os outros.

### QUESTÕES PROPOSTAS

#### Q 9.6.

Determinar vectorialmente a resultante do sistema de forças coplanares indicado na fig. 9.3. e o seu momento resultante no ponto  $O$ .

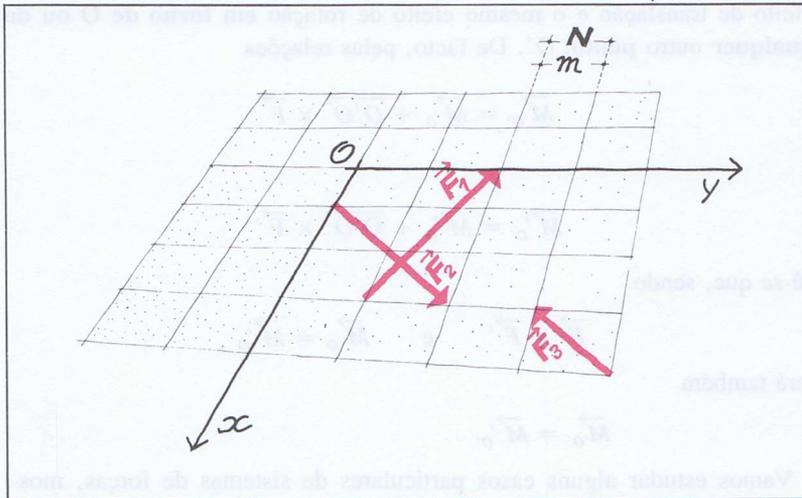


Fig. 9.3

#### Q 9.7

1. Analisando o equilíbrio correspondente à situação indicada na fig. 9.2, (a), provar que se um **sólido está em equilíbrio**, quando é actuado por duas forças, estas têm de ser *simétricas*, isto é, devem ter a mesma linha de acção e o mesmo módulo mas sentidos opostos.
2. Analisando o equilíbrio correspondente à situação indicada na fig. 9.2, (b), provar que se um **sólido está em equilíbrio**, quando é actuado por três forças, estas devem ter linhas de acção, sentidos e intensidades tais que estejam entre si como os lados de um triângulo percorridos no mesmo sentido (**regra de Stevin**).

Os **momentos em dois pontos diferentes**,  $O'$  e  $O$ , quer de uma força quer da resultante de um sistema de forças, estão assim relacionados:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{F}$$

$\vec{F}$  é uma força ou a resultante de um sistema de forças  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ .

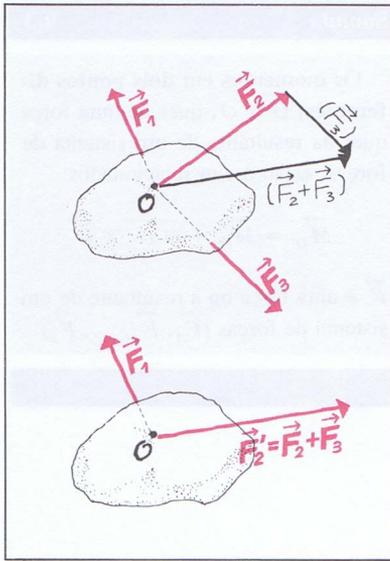


Fig. 9.4 Os dois sistemas aplicados no mesmo corpo,

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  — em (a),

e

$\vec{F}_1$  e  $\vec{F}'_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_3$  — em (b),

são **equivalentes**, porque têm a *mesma resultante*

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}'_2$

e o *mesmo momento* (nulo, neste caso) em relação ao mesmo ponto  $O$ .

### 9.2.4 Equivalência de sistemas de forças

É vulgar, nos problemas de Estática, termos de substituir um *sistema* de forças por outro que lhe seja *equivalente*, isto é, *que produza o mesmo efeito de translação e o mesmo efeito de rotação*.

Como o efeito de translação é determinado pela resultante e o efeito de rotação é determinado pelo momento, dois sistemas de forças  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  e  $(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n)$  serão **equivalentes** — fig. 9.4:

1.º — se possuírem *resultante igual*:

$$\vec{F}' = \vec{F} \iff \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

2.º — se possuírem *momento resultante igual*, num ponto arbitrário  $O$ :

$$\vec{M}'_O = \vec{M}_O \iff \vec{M}'_{1,O} + \dots + \vec{M}'_{n,O} = \vec{M}_{1,O} + \dots + \vec{M}_{n,O}$$

Estas duas condições garantem que tais sistemas produzem o mesmo efeito de translação e o mesmo efeito de rotação **em torno de  $O$  ou de qualquer outro ponto,  $O'$** . De facto, pelas relações

$$\vec{M}'_{O'} = \vec{M}'_O + \vec{O'O} \times \vec{F}'$$

e

$$\vec{M}'_{O'} = \vec{M}'_O + \vec{O'O} \times \vec{F}'$$

vê-se que, sendo

$$\vec{F}' = \vec{F}' \quad \text{e} \quad \vec{M}'_O = \vec{M}'_O,$$

será também

$$\vec{M}'_{O'} = \vec{M}'_{O'}$$

Vamos estudar alguns casos particulares de sistemas de forças, mostrando a sua equivalência a sistemas mais simples, eventualmente a forças únicas ou mesmo a zero. Começamos, precisamente, por este caso.

### 9.2.5. Sistemas equivalentes a zero

Em consequência do que acaba de ser dito, se, em relação a um ponto  $O$  qualquer do espaço, um sistema tiver *resultante nula* e *momento resultante nulo*,

$$\begin{cases} \vec{F} = \vec{0} \\ \vec{M}_O = \vec{0} \end{cases},$$

esse sistema terá *resultante nula* e *momento resultante nulo* em relação a qualquer outro ponto  $O'$ :

$$\begin{cases} \vec{F} = \vec{0} \\ \vec{M}_{O'} = \vec{0} \end{cases}$$

Portanto, um tal sistema, aplicado a um sólido em equilíbrio, não afectará este equilíbrio, porque não produz nem efeito translativo ( $\vec{F} = \vec{0}$ ) nem efeito rotativo ( $\vec{M} = \vec{0}$ ). Diz-se, por isso, que é um **sistema equivalente a zero** ou um **sistema em equilíbrio**.

Se verificarmos que duas, três ou mais forças que actuam num corpo constituem um sistema equivalente a zero, podemos raciocinar como se essas forças não existissem.

### 9.2.6. Sistemas de forças concorrentes num ponto.

Vamos mostrar que um sistema de forças concorrentes num ponto é equivalente a uma força única — a sua *resultante* — aplicada no ponto.

Seja, por exemplo, o sistema  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$  aplicado no ponto  $O$  do corpo indicado na fig. 9.5. A sua resultante é a força  $\vec{F}$  e está aplicada em  $O$ .

O sistema e a sua força resultante  $\vec{F}$  produzem o mesmo efeito de translação porque

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F} \iff \vec{F} = \vec{F}$$

E também produzem o mesmo efeito de rotação em relação a qualquer ponto  $O'$ , porque se tem, neste caso,  $\vec{M}_{O'} = \vec{0}$ ,  $\vec{r} = \vec{O'O}$  e por isso:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_{O'} + \vec{O'O} \times \vec{F} \iff \vec{M}_{O'} = \vec{r} \times \vec{F}$$

A leitura desta expressão mostra que o **momento resultante** do sistema,  $\vec{M}_{O'}$ , é igual ao momento da sua resultante,  $\vec{r} \times \vec{F}$ , isto é:

$$\vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \vec{r} \times \vec{F}_3 = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3) = \vec{r} \times \vec{F}$$

Esta conclusão, válida para este sistema, é conhecida por **lei de Varignon** (ou lei do momento da resultante das forças concorrentes).

Sempre que duas, três ou mais forças actuam **no mesmo ponto** de um corpo, podem ser substituídas pela sua resultante.

E como as forças que actuam nos corpos rígidos produzem os mesmos efeitos, quaisquer que sejam os pontos dos corpos pertencentes às suas linhas de acção, porque estas forças correspondem a vectores *deslizantes*, a possibilidade de se substituírem forças pela sua resultante mantém-se, mesmo que não estejam aplicadas no mesmo ponto. Para isso, só é preciso que satisfaçam a condição seguinte: que as *suas linhas de acção se cruzem no mesmo ponto*. É o caso apresentado na fig. 9.4, onde se substituíram as forças  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}_3$  pela sua resultante,  $\vec{F}'_2$ , e onde também se poderiam substituir as três forças,  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ , pela sua resultante, determinada em  $O$ .

Um sistema de forças é **equivalente a zero** quando

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{0} \\ \vec{M}_O &= \vec{0} \end{aligned}$$

$\vec{F}$  = força resultante do sistema.

$O$  = ponto arbitrariamente escolhido.

Nestas condições diz-se que temos um **sistema em equilíbrio**.

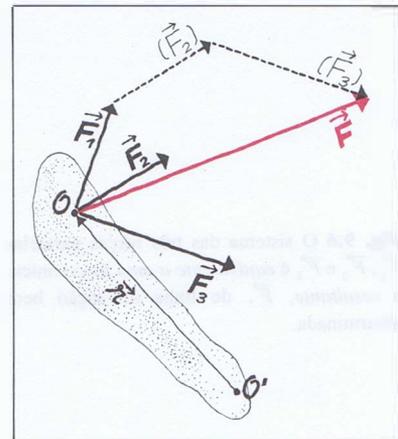


Fig. 9.5

Para as forças concorrentes,  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  e  $\vec{F}_3$ , o **momento resultante** num ponto qualquer,  $O'$ , ou seja

$$\vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \vec{r} \times \vec{F}_3,$$

é igual ao momento da sua resultante:

$$\vec{r} \times \vec{F}$$

### 9.2.7. Sistemas de forças paralelas de resultante não nula

#### A — Centro de forças paralelas

Um sistema de forças paralelas de resultante não nula é também equivalente a uma força única, igual à resultante, desde que esta tenha uma linha de ação adequada.

Como determinar então a força única,

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

e a sua linha de ação de modo que seja equivalente às forças  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  do sistema?

Vamos exemplificar com um caso simples de três forças paralelas e do mesmo sentido — fig. 9.6. O que deduzirmos será a seguir generalizado a todo o sistema de  $n$  forças paralelas.

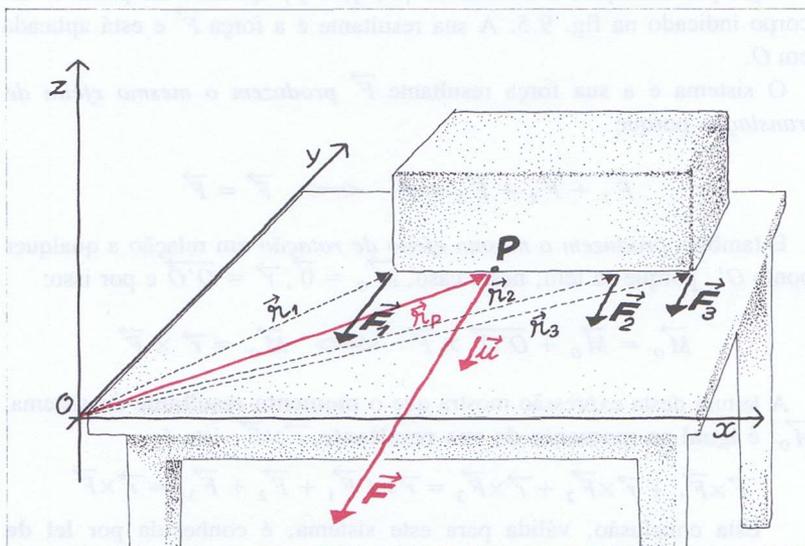


Fig. 9.6 O sistema das três forças paralelas  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  e  $\vec{F}_3$  é equivalente a uma força única: a resultante,  $\vec{F}$ , de linha de ação bem determinada.

Fig. 9.6

Para que a força única que procuramos,  $\vec{F}$ , seja equivalente ao sistema  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ , terá de produzir o mesmo efeito de translação, e portanto, será:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

Mas deverá também produzir o mesmo efeito rotativo em relação, por exemplo, à origem  $O$  do sistema de eixos — fig. 9.6., isto é:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \vec{M}_O(\vec{F}_3)$$

Quanto ao valor da força  $\vec{F}$ , ele deduz-se da expressão vectorial das forças. Com efeito, sendo  $\vec{u}$  o versor da direcção comum das forças, temos, sucessivamente:

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = F_1 \vec{u} \\ \vec{F}_2 = F_2 \vec{u} \\ \vec{F}_3 = F_3 \vec{u} \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \\ \vec{F} = (F_1 + F_2 + F_3) \vec{u} \\ F = F_1 + F_2 + F_3 \end{cases} \iff$$

Saliente-se que, no caso geral, esta *soma é algébrica*, pois as forças tanto podem ter o sentido de  $\vec{u}$  como o sentido oposto (neste caso, os seus valores,  $F_i$ , são negativos).

Da expressão da resultante, conclui-se que a sua *linha de acção* será uma recta paralela às forças componentes do sistema, isto é, tem a direcção comum definida pelo versor  $\vec{u}$ , que é um dado. Fica portanto determinada a linha de acção, se determinarmos *um dos seus pontos*. Para isso, vamos desenvolver a condição da igualdade de momentos na origem  $O$  (fig. 9.6). Considerando a resultante  $\vec{F}$  aplicada num ponto  $P$ , que pretendemos determinar, da sua linha de acção, a igualdade de momentos escreve-se (sendo  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  e  $\vec{r}_3$  os vectores posição dos pontos de aplicação das forças):

$$\begin{aligned} \vec{r}_P \times F \vec{u} &= \vec{r}_1 \times (F_1 \vec{u}) + \vec{r}_2 \times (F_2 \vec{u}) + \vec{r}_3 \times (F_3 \vec{u}) \\ F \vec{r}_P \times \vec{u} &= F_1 \vec{r}_1 \times \vec{u} + F_2 \vec{r}_2 \times \vec{u} + F_3 \vec{r}_3 \times \vec{u} \end{aligned} \iff$$

Pondo  $\vec{u}$  em evidência e fazendo  $F = F_1 + F_2 + F_3$ , obtemos a equação vectorial:

$$(F_1 + F_2 + F_3) \vec{r}_P \times \vec{u} = (F_1 \vec{r}_1 + F_2 \vec{r}_2 + F_3 \vec{r}_3) \times \vec{u}$$

O vector posição do ponto  $P$ , procurado, é, pois:

$$\vec{r}_P = \frac{F_1 \vec{r}_1 + F_2 \vec{r}_2 + F_3 \vec{r}_3}{F_1 + F_2 + F_3}$$

O ponto  $P$ , assim definido, chama-se **centro de forças paralelas**. É *único* e é *invariável*, mas quaisquer outros pontos,  $P'$ , da linha de acção da resultante  $\vec{F}$  satisfazem a equação vectorial da igualdade de momentos. Porquê? Porque todas as forças, por estarem aplicadas num corpo, são vectores deslizantes: podem considerar-se aplicadas em outros pontos das respectivas linhas de acção e, por isso, não mudando embora o factor comum  $\vec{u}$ , podem mudar os vectores posição  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  e  $\vec{r}_3$ , obtendo-se um vector posição *diferente*  $\vec{r}_{P'}$ , que satisfaz também a equação dos momentos.

Para  $n$  forças paralelas, teríamos:

$$\vec{r}_P = \frac{F_1 \vec{r}_1 + F_2 \vec{r}_2 + \dots + F_n \vec{r}_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

## Súmula

9.5

Quando num corpo actua um sistema de **forças paralelas** existe um ponto privilegiado, o **centro de forças paralelas**, definido pelo vector posição

$$\vec{r}_P = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n F_i},$$

representando genericamente por  $F_i$  os valores algébricos das forças e por  $\vec{r}_i$  os vectores posição das origens das forças.

Conforme se pode depreender da expressão anterior, o centro de forças paralelas é **único** e **invariável**.

É este ponto que **escolhemos** para ponto de aplicação da **força única equivalente ao sistema**, isto é, uma força igual à resultante do sistema e capaz de produzir os mesmos efeitos (translativo e rotativo) deste.

O problema está, pois, completamente resolvido, isto é: um sistema de forças paralelas de resultante não nula é equivalente a uma força única de valor igual à resultante e aplicada no centro de forças paralelas (ou em qualquer outro ponto da sua linha de acção que pertença ao corpo).

Finalmente: como as *componentes escalares* dos vectores posição coincidem com as *coordenadas* dos pontos quando as origens daqueles coincidem com a origem do sistema de eixos, e como, por outro lado, numa soma de vectores, as componentes escalares se somam algebricamente, podemos escrever:

$$x_p = \frac{F_1x_1 + F_2x_2 + \dots + F_nx_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n} = \frac{\sum_{i=1}^n F_ix_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

$$y_p = \frac{F_1y_1 + F_2y_2 + \dots + F_ny_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n} = \frac{\sum_{i=1}^n F_iy_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

$$z_p = \frac{F_1z_1 + F_2z_2 + \dots + F_nz_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n} = \frac{\sum_{i=1}^n F_iz_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

### QUESTÕES PROPOSTAS

#### Q 9.8

Mostrar que num sistema de duas forças paralelas e do mesmo sentido,  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , fig. 9.7, o *centro de forças paralelas*,  $P$ , divide o segmento  $AB$ , que une os pontos onde se consideram aplicadas as forças, em dois *segmentos aditivos* de medidas,  $d_1$  e  $d_2$ , inversamente proporcionais às forças:

$$|\vec{F}_1| \cdot d_1 = |\vec{F}_2| d_2$$

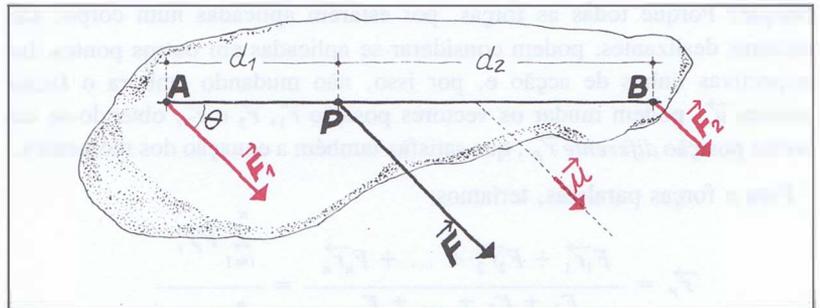


Fig. 9.7

**Q 9.9**

Mostrar que num sistema de duas forças paralelas e de sentidos contrários,  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , fig. 9.8, o *centro de forças paralelas*,  $P$ , divide o segmento  $AB$  que une os pontos onde se consideram aplicadas as forças, em dois *segmentos subtractivos* de medidas  $d_1$  e  $d_2$ , inversamente proporcionais às forças:

$$|\vec{F}_1| d_1 = |\vec{F}_2| d_2$$

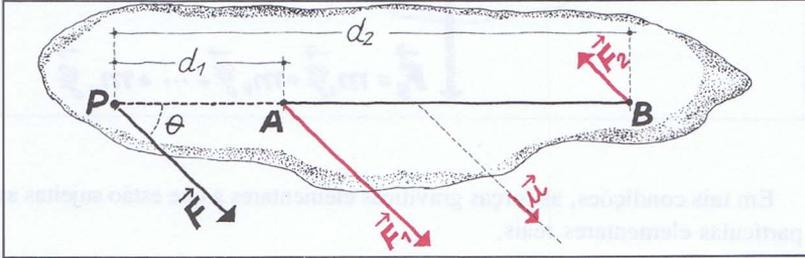


Fig. 9.8

**Q 9.10**

1. Escrever as expressões vectoriais das cinco forças representadas no diagrama da fig. 9.9.
2. Escrever as expressões dos vectores posição dos pontos de aplicação de cada uma das forças.
3. Será o sistema das cinco forças equivalente a uma força única? Justificar.
4. Em caso afirmativo, terá a força única um ponto de aplicação fixo?
5. Determinar as coordenadas  $(x_p, y_p)$  do centro de forças paralelas.

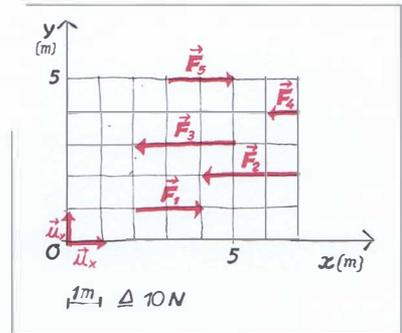


Fig. 9.9 Determinar o vector posição e as coordenadas do centro de forças paralelas,  $P$ , no sistema das cinco forças representadas.

B — Centro de gravidade de um corpo

Consideremos um corpo não muito extenso formado por  $n$  partículas elementares reais (átomos, moléculas ou iões) — fig. 9.10. Este número  $n$ , por se tratar de partículas reais, é *muito grande*.

A cada partícula corresponde uma determinada massa  $m_i$  e, por isso, uma força gravítica

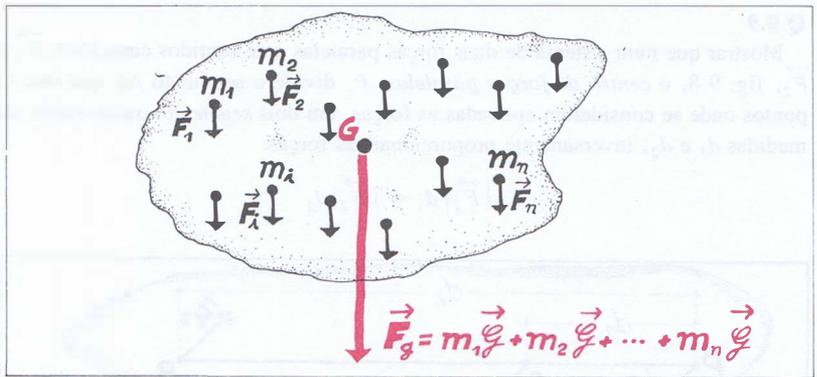
$$\vec{F}_i = m_i \cdot \vec{g}$$

quando está situada num campo gravítico. No caso do campo gravítico terrestre, este é um *campo uniforme*,

$$\vec{g} = \text{const.}^e$$

num local à superfície da Terra, não muito extenso. Por maioria de razão, o campo gravítico será uniforme no espaço ocupado pelo corpo.

Fig. 9.10 A força gravítica  $\vec{F}_g$  a que está sujeito o corpo é a *resultante* de um sistema de forças paralelas muito pequenas, correspondentes a cada uma das partículas discretas, elementares e reais, de que é formado o corpo.



Em tais condições, as forças gravíticas elementares a que estão sujeitas as partículas elementares reais,

$$\vec{F}_1 = m_1 \cdot \vec{g}, \quad \vec{F}_2 = m_2 \cdot \vec{g}, \quad \dots, \quad \vec{F}_n = m_n \cdot \vec{g}$$

são forças paralelas.

A resultante destas forças paralelas é a *força gravítica*  $\vec{F}_g$  aplicada no corpo.

A linha de acção desta tem a direcção da *vertical geocéntrica* (dirigida para o centro da Terra) e passa pelo centro,  $G$ , de forças paralelas.

A este centro dá-se, neste caso particular, o nome de **centro de gravidade**, naturalmente por ser um centro de forças gravíticas paralelas.

Na prática, consideramos a força gravítica resultante,  $\vec{F}_g$ , como uma força aplicada no centro de gravidade do corpo — fig. 9.10, embora a possamos também considerar aplicada em qualquer ponto do corpo que pertença à sua linha de acção, por se tratar de uma resultante de forças paralelas.

Quanto ao **vector posição do centro de gravidade**, como centro de forças paralelas, será dado por:

$$\vec{r}_G = \frac{F_1 \vec{r}_1 + F_2 \vec{r}_2 + \dots + F_n \vec{r}_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n} \quad \Leftrightarrow$$

$$\vec{r}_G = \frac{m_1 g \vec{r}_1 + m_2 g \vec{r}_2 + \dots + m_n g \vec{r}_n}{m_1 g + m_2 g + \dots + m_n g} \quad \Leftrightarrow$$

$$\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m}$$

sendo  $m$  a massa do corpo.

As componentes escalares do vector  $\vec{r}_G$  coincidem com as coordenadas do centro de gravidade,  $G$ .

Temos assim, finalmente:

### Súmula

9.6

O **centro de gravidade** de um sólido é um ponto, pertencente ou não ao sólido, definido pelo vector posição

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Trata-se do centro de *forças gravíticas paralelas* que actuam sobre cada uma das partículas que constituem o sólido.

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m}$$

$$y_G = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m}$$

$$z_G = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{m}$$

Ao estudarmos o **centro de massa** obtivemos estas mesmas equações de definição. Isto deve-se ao facto de o *centro de gravidade* de um corpo coincidir sempre com o *centro de massa*.

Mas o **conceito de centro de massa é mais geral do que o conceito de centro de gravidade**. Assim, por exemplo, não faz sentido falar em centro de gravidade de um corpo na ausência de campo gravítico; porém, o centro de massa continua a existir. Também não faz sentido falar do centro de gravidade de um corpo muito extenso, por exemplo uma montanha, porque as forças gravíticas correspondentes a cada partícula dos seus materiais não são forças paralelas; porém, o centro de massa continua igualmente a existir.

No caso de um *sólido ser homogéneo e ter forma geométrica regular*, há uma distribuição simétrica de forças gravíticas elementares tal que o *centro de gravidade é o centro de figura*. No caso de uma esfera, por exemplo, é o centro da esfera. No caso de uma chapa rectangular é a intersecção das suas diagonais.

No caso, porém, de o sólido não ser homogéneo e (ou) ter forma irregular, utiliza-se a seguinte regra prática — fig. 9.11:

- 1.º — Suspende-se o sólido por um dos seus pontos,  $S_1$ , e traça-se a vertical correspondente:  $S_1 G$ .
- 2.º — Suspende-se, a seguir, por outro ponto,  $S_2$ , e traça-se também a vertical correspondente:  $S_2 G$ .

Como, em qualquer das situações, há equilíbrio tem-se

$$\vec{F}_g = -\vec{T} \quad (\text{ver Questão 9.7})$$

Então, o centro de gravidade  $G$ , ponto onde está aplicada a força gravítica  $\vec{F}_g$ , tem de pertencer simultaneamente às duas verticais,  $S_1 G$  e  $S_2 G$ . Trata-se, portanto, do ponto de encontro dessas verticais.

### QUESTÕES PROPOSTAS

#### Q 9.11

A porta  $[O A B D]$  é metade de vidro e metade de madeira — fig. 9.12. A massa do vidro é  $\frac{3}{5}$  da massa da madeira. Determinar a posição do centro de gravidade da porta.

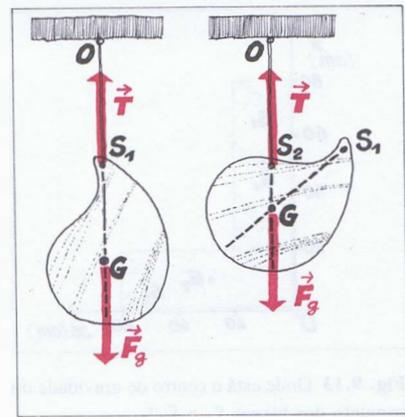


Fig. 9.11 Determinação do centro de gravidade de um corpo rígido, de forma irregular e não homogéneo.

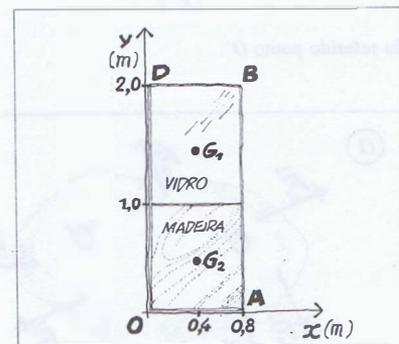


Fig. 9.12 Onde está o centro de gravidade da porta  $[O A B D]$ ?

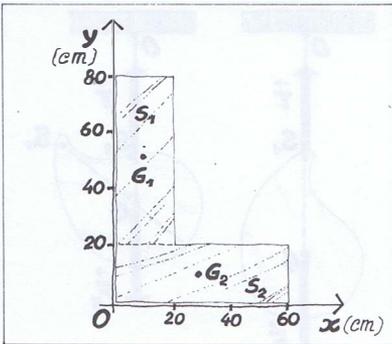


Fig. 9.13 Onde está o centro de gravidade do conjunto dos blocos  $S_1$  e  $S_2$ ?

**Q 9.12**

Determinar a posição do centro de gravidade do bloco *homogéneo* representado na fig. 9.13 por dois blocos parciais,  $S_1$  e  $S_2$ .

9.2.8 *Sistemas de forças coplanares*

Os sistemas de forças concorrentes num ponto podem considerar-se constituídos por subsistemas de forças coplanares (pelo menos cada duas delas definem um plano). Vimos por outro lado que os sistemas de forças concorrentes são equivalentes a uma força única.

O mesmo sucede com os sistemas de forças paralelas: são constituídos por subsistemas de forças coplanares (pelo menos cada duas delas definem também um plano). E também são equivalentes a uma força única.

Isto leva-nos a suspeitar de que *qualquer sistema de forças coplanares*, sejam algumas paralelas ou não, concorram ou não todas no mesmo ponto, é *equivalente a uma força única*. E de facto assim sucede, como passamos a ver.

Consideremos, então, um *sistema de forças coplanares* a actuar num corpo — fig. 9.14, (a).

Escolhamos um ponto, **arbitrário**, no plano das forças, a que chamaremos **centro de redução**, e determinemos relativamente a ele o *momento resultante do sistema*. Seguem-se as duas hipóteses possíveis:

**1.ª hipótese** — Esse ponto é o ponto  $O$ , relativamente ao qual o momento resultante do sistema  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  é nulo:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \dots + \vec{M}_O(\vec{F}_n) = \vec{0} \text{ — fig. 9.14, (b).}$$

Neste caso o sistema é **equivalente à força única  $\vec{F}$  igual à resultante**,

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n$$

cuja **linha de acção passa por  $O$**  — fig. 9.14, (b).

Fig. 9.14

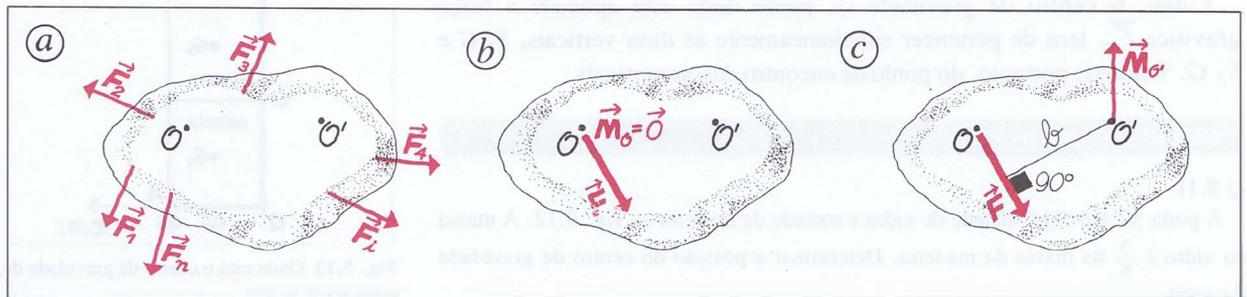
(a) Um corpo é actuado por um sistema de forças coplanares,  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ ;  $O$  e  $O'$  são pontos pertencentes ao plano das forças e foram escolhidos arbitrariamente.

(b) Sendo nulo o momento resultante no ponto  $O$ , o referido sistema é **equivalente a uma força única**: a resultante  $\vec{F}$ , cuja linha de acção passa nesse ponto.

(c) Sendo  $\vec{M}_{O'} \neq \vec{0}$  o momento resultante do referido sistema, no ponto  $O'$ , o referido sistema é **equivalente à força única**, igual à resultante  $\vec{F}$ , cuja linha de acção dista

$$b = \frac{|\vec{M}_{O'}|}{|\vec{F}|}$$

do referido ponto  $O'$ .



E porquê?

— Porque  $\vec{F}$  e o sistema produzem o mesmo efeito de translação:

$$\vec{F} = \text{força resultante comum}$$

— Porque, além disso, produzem o mesmo efeito de rotação em torno de  $O$  (efeito nulo):

$$\vec{M}_O = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{M}_O(\vec{F}) = 0$$

— Porque, finalmente, pela lei da translação dos momentos (ver secção 9.2.3), produzirão o mesmo efeito de rotação em qualquer ponto.

**2.ª hipótese** — O centro de redução escolhido foi *um ponto*  $O'$  — fig. 9.14, (c) — relativamente ao qual o momento resultante do sistema não é nulo. Não é nulo, mas *terá de ser perpendicular ao plano das forças* (todos os momentos parcelares são perpendiculares a esse plano). Será, então, perpendicular à força resultante, que está também no plano das forças:

$$\vec{M}_{O'} \perp \vec{F}$$

Ainda neste caso é possível obter uma força resultante

$$\vec{F},$$

cuja linha de acção passa pelo ponto  $O$ , e tal que

$$\vec{M}_{O'}(\vec{F}) = \vec{M}_{O'}$$

Basta que o braço de alavanca da força resultante  $\vec{F}$ , em relação ao ponto  $O'$  fig. 9.14, (c), seja  $b$ , cuja medida é tal que

$$|\vec{F}| \times b = |\vec{M}_{O'}| \quad \Leftrightarrow$$

$$b = \frac{|\vec{M}_{O'}|}{|\vec{F}|}$$

Ainda nesta hipótese a força  $\vec{F}$  e o sistema  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  são equivalentes por produzirem o mesmo efeito de translação,

$$\vec{F} = \text{força resultante comum},$$

e o mesmo efeito de rotação em  $O'$ ,

$$\vec{M}_{O'}(\vec{F}) = \vec{M}_{O'},$$

ou seja o mesmo efeito de rotação em qualquer outro ponto (pela lei da translação dos momentos).



Fig. 9.14, (c) — Sistema de forças coplanares e o seu momento resultante em relação a um ponto O'.

### Súmula

9.7

Um sistema de forças coplanares é equivalente a uma força única, igual à resultante e cuja linha de acção dista

$$b = \frac{|\vec{M}_O|}{|\vec{F}|}$$

do centro de redução arbitrário  $O$ , relativamente ao qual se determina o momento resultante  $\vec{M}_O$ .

## QUESTÕES PROPOSTAS

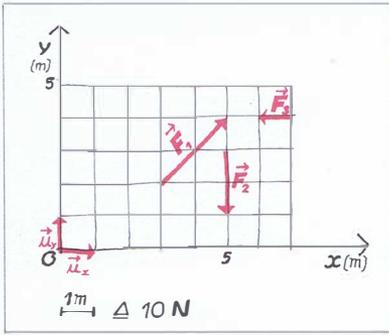


Fig. 9.15 Determinar analiticamente a resultante do sistema de forças representadas no diagrama.

### Q 9.13

1. Escrever as expressões cartesianas das três forças representadas no diagrama da fig. 9.15
2. Será o sistema destas três forças equivalente a uma força única?
3. Em caso afirmativo, terá um ponto de aplicação fixo?
4. Determinar a linha de acção da resultante e as coordenadas gerais do seu ponto de aplicação, tomando a origem  $O$  para centro de redução.

### Q. 9.14

Mostrar, de acordo com a fig. 9.16, que o sistema de forças  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ , aplicadas no cartão  $[OABC]$ , de espessura e peso desprezáveis, é equilibrado por uma força única

$$\vec{F} = -2\vec{u}_x$$

aplicada no ponto  $G(0;4)$  m

Sabe-se que:

$$\vec{F}_1 = 2\vec{u}_x \text{ (N)}, \quad \vec{F}_2 = -2\vec{u}_x \text{ (N)}, \quad \vec{F}_3 = 2\vec{u}_x \text{ (N)}$$

### Q 9.15

Tendo em conta o estudo efectuado no caso particular da equivalência das forças coplanares a uma força única, determinar a distância da linha de acção da força resultante do sistema de forças  $\vec{F}_1 = 2\vec{u}_x$  e  $\vec{F}_3 = 2\vec{u}_x$  à origem  $O$  — fig. 9.16.

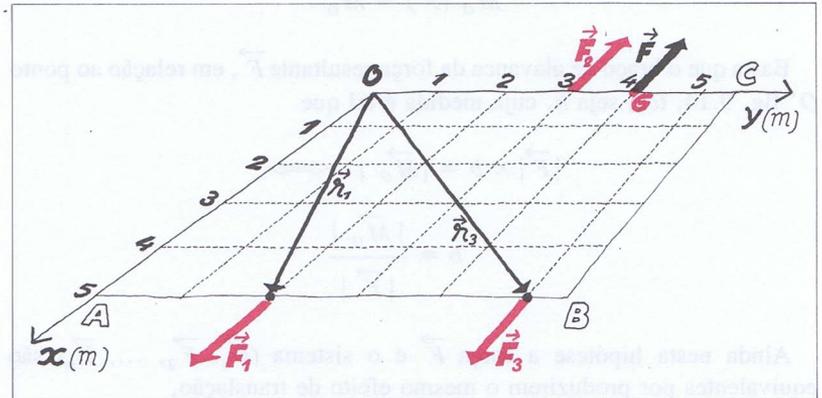


Fig. 9.16

O sistema de forças  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ , aplicadas no cartão  $[OABC]$ , é equilibrado por uma força única,  $\vec{F}$ , aplicada em  $G(0;4)$  m.

### 9.2.9 Sistemas de forças de resultante nula e momento resultante não nulo

Vamos ver que, neste caso, o sistema de forças ou é um **binário (par ou conjugado)** ou é **equivalente a um binário**. Mas, antes, estudemos o binário e as suas características.

## A — Binário de forças

Chama-se **binário de forças (par ou conjugado)** a um sistema de duas forças de módulo igual e sentidos contrários,  $\vec{F}'$  e  $-\vec{F}'$ , actuando em linhas de acção paralelas — fig. 9.17.

O plano  $\pi$ , definido pelas linhas de acção das duas forças, denomina-se **plano do binário**, e a distância

$$b = \overline{AC}$$

entre estas linhas de acção designa-se por **braço do binário**.

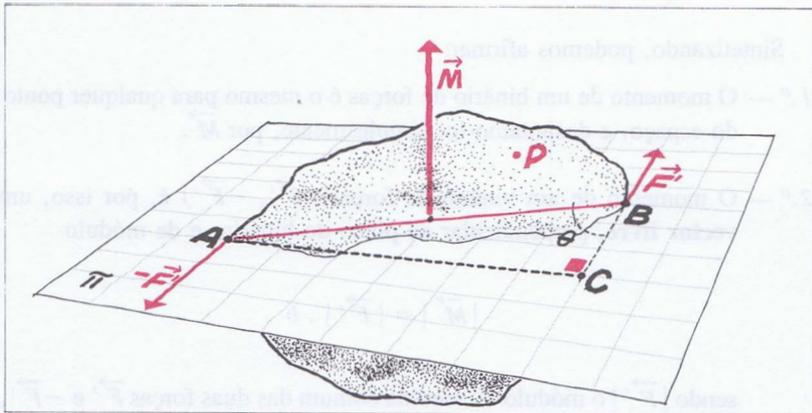


Fig. 9.17 O momento do binário  $(\vec{F}', -\vec{F}')$  é o vector livre  $\vec{M}$ , perpendicular ao plano do binário e de módulo

$$|\vec{M}| = |\vec{F}'| \times b,$$

onde

$$b = \overline{AC} = \text{braço do binário}.$$

A soma vectorial ou resultante das duas forças (componentes do binário) é, obviamente, o vector nulo:

$$\vec{F} = \vec{F}' + (-\vec{F}') = \vec{0}.$$

Isto significa, em termos físicos, que o binário de forças *não tem resultante*. Como tal, não produz efeito de translação no corpo onde está aplicado (pois  $\vec{a} = \text{força resultante}/m = \vec{0}$ ). O binário não pode, em suma, ser substituído por uma força única, pois esta produziria efeito de translação.

O binário produz, porém, efeito de rotação. Este é o mesmo relativamente a todos os pontos do corpo, como passamos a ver.

Assim:

— Produz efeito rotativo, porque o seu **momento resultante não é nulo**.

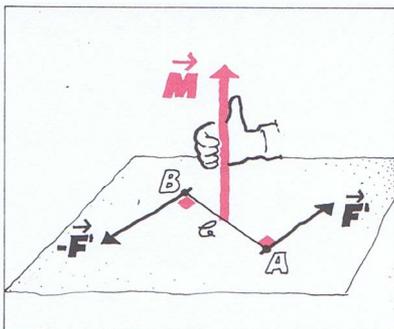
Calculado, por exemplo, para o ponto A, do plano  $\pi$ , situado na linha de acção da força  $-\vec{F}'$  (fig. 9.17), temos:

$$\vec{M}_A = \vec{M}_A(-\vec{F}') + \vec{M}_A(\vec{F}') = \vec{0} + \overline{AB} \times \vec{F}'$$

O seu módulo é:

$$|\vec{M}_A| = |\overline{AB}| \times |\vec{F}'| \times \sin \theta \quad (\text{ver fig. 9.17}) \iff$$

$$|\vec{M}_A| = b \times F'$$



**Fig. 9.18** O momento  $\vec{M}$  do binário  $(F', -F')$  é perpendicular ao plano do binário, tem o módulo  $|F'| \times b$  e o sentido é dado pela regra da mão direita.

— O efeito rotativo é o mesmo para qualquer outro ponto, pertencente ou não ao plano do binário, porque o **momento resultante em qualquer outro ponto é igual**. Seja, por exemplo, o ponto  $P$ . Pela lei da translação dos momentos, tem-se:

$$\vec{M}_P = \vec{M}_A + \vec{PA} \times \vec{F} \iff$$

$$\vec{M}_P = \vec{M}_A + \vec{PA} \times \vec{0} \iff$$

$$\vec{M}_P = \vec{M}_A$$

Sintetizando, podemos afirmar:

1.<sup>o</sup> — O momento de um binário de forças é o mesmo para qualquer ponto do espaço, e designamo-lo, simplesmente, por  $\vec{M}$ .

2.<sup>o</sup> — O momento de um binário de forças  $(\vec{F}', -\vec{F}')$  é, por isso, um **vector livre**, perpendicular ao plano do binário, e de módulo

$$|\vec{M}| = |\vec{F}'| \cdot b,$$

sendo  $|\vec{F}'|$  o módulo ou medida comum das duas forças  $\vec{F}'$  e  $-\vec{F}'$ , e  $b$  o braço do binário. O sentido do momento  $\vec{M}$  do binário é dado pela regra da mão direita (o polegar indica a direcção e o sentido do vector  $\vec{M}$ , e os dedos, curvados, indicam o sentido da rotação ou torção) — fig. 9.18.

3.<sup>o</sup> — O binário de forças produz *apenas* efeito rotativo ou de torção, porque, sendo, por definição de binário,

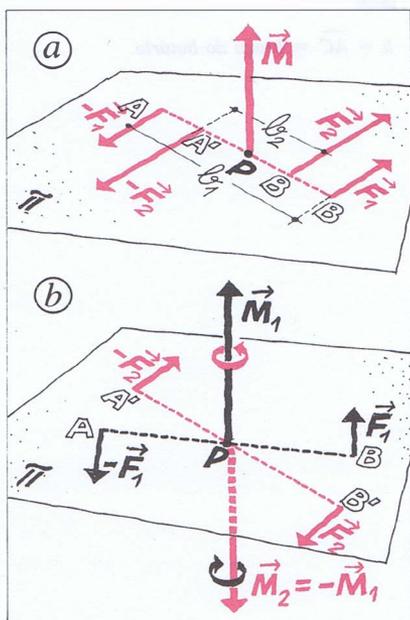
$$\vec{F} = \vec{0} \quad \text{e} \quad b \neq 0,$$

tem **resultante nula e momento não nulo**.

O binário não pode ser substituído por uma força única, mas pode, no entanto, ser substituído por outro **binário equivalente**.

Dois binários são equivalentes quando produzem o mesmo efeito rotativo — fig. 9.19, (a): os seus momentos têm a *mesma direcção, o mesmo sentido e módulos iguais*.

Também há a considerar os *binários opostos*, que são binários que produzem *rotações ou torções simétricas* — fig. 9.19, (b): neste caso, os seus *momentos são simétricos*.



**Fig. 9.19**  
(a) Binários equivalentes:

$$F_1 \times b_1 = F_2 \times b_2$$

e rotação no mesmo sentido.

(b) Binários opostos.

**Q 9.16**

Mostrar que, num binário, o momento resultante do sistema e o momento da resultante são diferentes.

**B — Sistemas equivalentes a binários**

Todos os sistemas de forças que, tendo resultante nula, têm momento resultante diferente de zero, num ponto  $O$ ,

$$\vec{F} = \vec{0} \quad \vec{M}_O \neq \vec{0},$$

produzem o mesmo efeito rotativo em qualquer ponto por terem o mesmo momento em todos os pontos, de acordo com a translação de momentos. São, por isso, *binários*, se forem constituídos por duas forças, ou *equivalentes a binários* se forem formados por mais de duas forças.

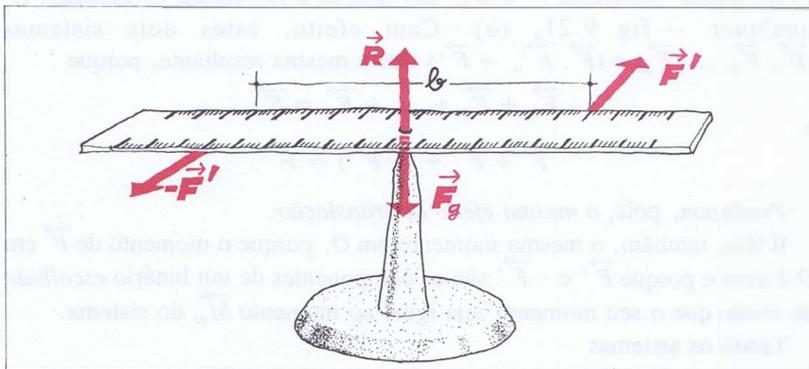
Com efeito, a relação

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{F}$$

implica, para  $\vec{F} = \vec{0}$ :

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O$$

É o caso, por exemplo, de uma régua apoiada horizontalmente na ponta de um prego e em torno da qual pode rodar — fig. 9.20. Nessa régua aplicamos duas forças  $\vec{F}'$  e  $-\vec{F}'$ . No contacto da régua com o prego de suporte (apoio) existem mais duas forças a actuar na régua: a *força gravítica* e a *reação*.



Em virtude da lei da acção e reacção, tem-se

$$\vec{F}_g + \vec{R} + \vec{F}' + (-\vec{F}') = \vec{0},$$

isto é, a resultante é nula. O sistema das quatro forças é equivalente a um binário  $(\vec{F}', -\vec{F}')$  de momento constante cujo módulo é

$$|\vec{M}| = |\vec{F}'| \times b$$

O **binário** é um conjunto de duas forças com o mesmo módulo, linhas de acção paralelas e sentidos opostos.

O **momento do binário** é um **vector livre** e obtém-se somando os momentos da suas componentes em relação a *qualquer* ponto do espaço.

O binário só tem efeito rotativo, e o módulo do seu momento é

$$|\vec{M}| = |\vec{F}'| \cdot b,$$

sendo  $b$  o braço, constante, do binário.

**Fig. 9.20** O sistema das quatro forças aplicadas na régua tem resultante nula e é equivalente a um binário.

Quando um sistema tem *resultante nula* e *momento resultante*, num ponto qualquer, *diferente de zero*,

$$\vec{F} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{M}_O \neq \vec{0},$$

ou é um binário ou é equivalente a um binário.

9.2.10. *Sistemas de forças equivalentes a uma força única e a um binário*

No caso geral em que um sistema de forças tem *resultante não nula e momento resultante não nulo* (num ponto), não sendo este momento perpendicular à resultante (ao contrário do que sucedia no caso das forças coplanares) — fig. 9.21, (a), o sistema é substituível por uma força única, a sua **resultante**, aplicada num ponto arbitrário do corpo,  $O$ , e por um **binário**, de momento igual ao **momento resultante** do sistema neste ponto  $O$  — fig. 9.21, (b).

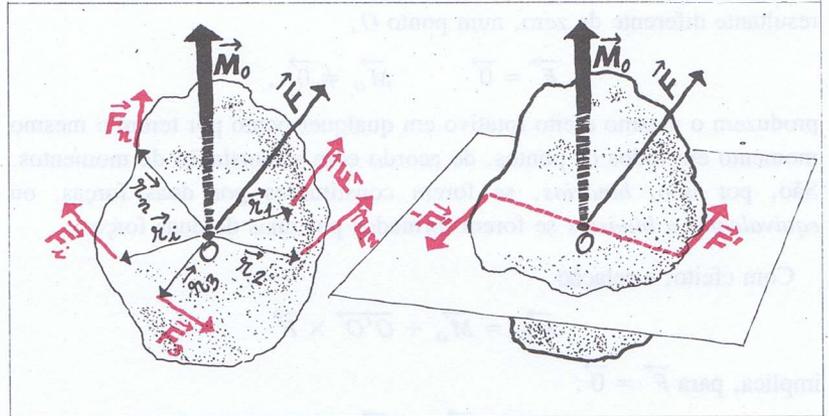


Fig. 9.21

- (a) Corpo actuado por um sistema de forças  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  de resultante  $\vec{F}$  e momento resultante  $\vec{M}_O$ , no ponto  $O$ .  
 (b) O sistema pode ser substituído pelas três forças  $(\vec{F}, -\vec{F}', \vec{F}')$ , em que o binário  $(-\vec{F}', \vec{F}')$  tem por momento  $\vec{M}_O$ .

O ponto  $O$ , escolhido, chama-se **centro de redução**. A força resultante,  $\vec{F}$ , e o momento resultante,  $\vec{M}_O$ , aplicados em  $O$ , chamam-se **coordenadas vectoriais** em  $O$ .

Mostremos que a resultante e o binário — fig. 9.21, (b) — são equivalentes ao sistema  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ , perfeitamente determinado pelas coordenadas vectoriais,  $\vec{F}$  e  $\vec{M}_O$ , em relação a um centro de redução,  $O$ , qualquer — fig. 9.21, (a). Com efeito, estes dois sistemas  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  e  $(\vec{F}, \vec{F}', -\vec{F}')$  têm a mesma resultante, porque

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{F}$$

e

$$\vec{F} + \vec{F}' + (-\vec{F}') = \vec{F}$$

*Produzem, pois, o mesmo efeito de translação.*

E têm, também, o mesmo momento em  $O$ , porque o momento de  $\vec{F}$  em  $O$  é zero e porque  $\vec{F}'$  e  $-\vec{F}'$  são as componentes de um binário escolhido de modo que o seu momento seja igual ao momento  $\vec{M}_O$  do sistema.

Tendo os sistemas

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \quad \text{e} \quad (\vec{F}, \vec{F}', -\vec{F}')$$

o mesmo momento resultante em  $O$  e a mesma resultante, pela lei da translação dos momentos eles (sistemas) terão o *mesmo momento resultante em qualquer ponto*, embora diferente de ponto para ponto e, por isso, diferente do momento resultante em  $O$ . *Produzirão, portanto, o mesmo efeito de rotação.*

Concluimos, assim, que são equivalentes.

### 9.2.11 Operações elementares de equivalência

A secção anterior e esta, que escolhemos para anteceder a resolução de questões inerentes a situações de equilíbrio, têm como objectivo preparar o estudante para o *domínio em compreensão* dos problemas que vamos estudar a seguir.

Recapitulando, diremos que dois sistemas serão **equivalentes**, isto é, poder-se-ão substituir mutuamente, se tiverem as mesmas coordenadas vectoriais,

$$\vec{F} \text{ e } \vec{M}_O ,$$

em qualquer ponto arbitrário  $O$ .

A passagem de um sistema para outro equivalente, fundamental na compreensão da Estática e até de toda a Dinâmica dos corpos rígidos, pode fazer-se mediante a aplicação de determinadas operações, chamadas **operações elementares de equivalência**.

Estas não podem, como é óbvio, afectar as coordenadas vectoriais e são as seguintes:

1.<sup>a</sup> — *Introdução ou supressão de um sistema de forças em equilíbrio.*

Sendo equivalente a zero, este sistema não vai alterar nem a resultante nem o momento resultante.

2.<sup>a</sup> — *Deslizamento de uma força ao longo da sua linha de acção.*

Conforme vimos, a força aplicada a um sólido corresponde a um vector deslizante.

3.<sup>a</sup> — *Substituição de várias forças concorrentes num ponto pela sua resultante.*

Esta operação não altera a resultante global. E também não altera o momento resultante, pela lei segundo a qual «num sistema de forças concorrentes, o momento resultante é igual ao momento da resultante das forças» (lei de *Varignon*).

4.<sup>a</sup> — *Decomposição de uma força noutras concorrentes que a admitam como soma.*

Pelas razões anteriores, esta operação não altera nem a resultante nem o momento resultante.

### 9.2.12 Casos de redução dos sistemas de forças (síntese)

Nas secções anteriores, vimos que é possível substituir um sistema por outro equivalente e mais simples. A esta operação chama-se **redução** do sistema de forças.

#### Súmula

9.10

As **operações elementares de equivalência**, que permitem substituir um sistema aplicado a um corpo por outro que lhe é equivalente, são as seguintes:

- *introdução* ou *supressão* de forças em equilíbrio;
- *deslizamento* de forças ao longo das suas linhas de acção;
- *substituição* de forças, concorrentes num ponto, pela sua resultante ou vice-versa.

Vimos, ainda, que os sistemas de forças são redutíveis:

- ou a uma força única, igual à resultante,  $\vec{F}$ ;
- ou a um binário;
- ou a uma força única igual à resultante e a um binário.

Passamos a apresentar um quadro-resumo dos casos de redução: os estudados, e outros para nós menos importantes.

	coordenadas vectoriais:	equivalência:
1.º Caso	$\vec{F} = \vec{0}$ e $\vec{M}_O = \vec{0}$	Zero (sistema em equilíbrio)
2.º Caso	$\vec{F} = \vec{0}$ e $\vec{M}_O \neq \vec{0}$	Um binário de momento $\vec{M}_O$
3.º Caso	$\vec{F} \neq \vec{0}$ , $\vec{M}_O \neq \vec{0}$ e $\vec{M}_O \perp \vec{F}$	Uma força única igual à resultante cuja linha de acção dista $b = \frac{ \vec{M}_O }{ \vec{F} }$ do centro de redução
4.º Caso	$\vec{F} \neq \vec{0}$ , $\vec{M}_O \neq \vec{0}$ e $\vec{M}_O \parallel \vec{F}$ ou $\vec{F} \neq \vec{0}$ , $\vec{M}_O \neq \vec{0}$ e $\vec{M}_O \perp \vec{F}$	Uma força única igual à resultante e um binário.  No 1.º subcaso, o eixo central ou linha de acção da resultante contém o vector momento do binário: é, por isso, perpendicular ao binário — fig. 9.22.

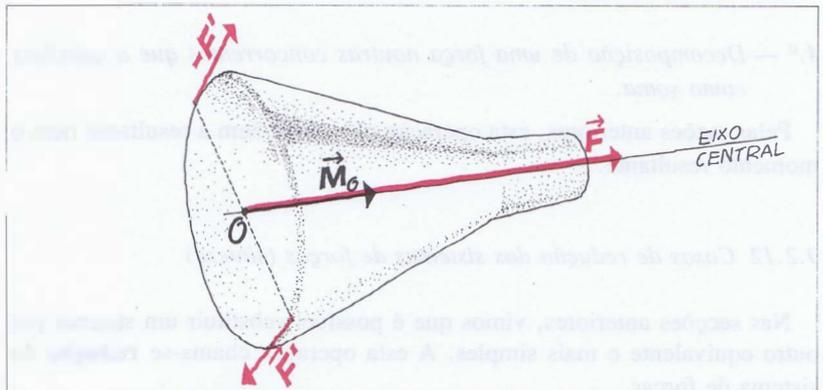


Fig. 9.22 Numa cápsula espacial, o sistema de forças aplicadas, em que

$$\vec{F} \neq \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0} \text{ e } \vec{M}_O \parallel \vec{F},$$

é equivalente a uma força única,  $\vec{F}$ , e um binário ( $F'$ ,  $-F'$ ) que fazem progredir e rodar a cápsula, respectivamente.

QUESTÕES PROPOSTAS

**Q 9.17**

Considerar um corpo qualquer em repouso. Qual é o estado cinético que o corpo adquire (tipo de movimento) se for actuado, num referencial inercial:

1. Por um sistema de forças de resultante nula e momento resultante, num ponto  $O$ , não nulo.
2. Por um sistema de forças coplanares de resultante não nula.
3. Por um sistema de forças de resultante e momento num ponto perpendiculares entre si.
4. Por um sistema de forças de resultante e momento num ponto paralelos entre si.

**Q 9.18**

A fig. 9.23, (a), representa um sistema de duas forças aplicadas a um corpo:  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$

As figs. 9.23, (b), e 9.23, (c), representam dois sistemas de forças

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4)$$

e

$$(\vec{F}_5, \vec{F}_6),$$

ambos equivalentes ao primeiro sistema.

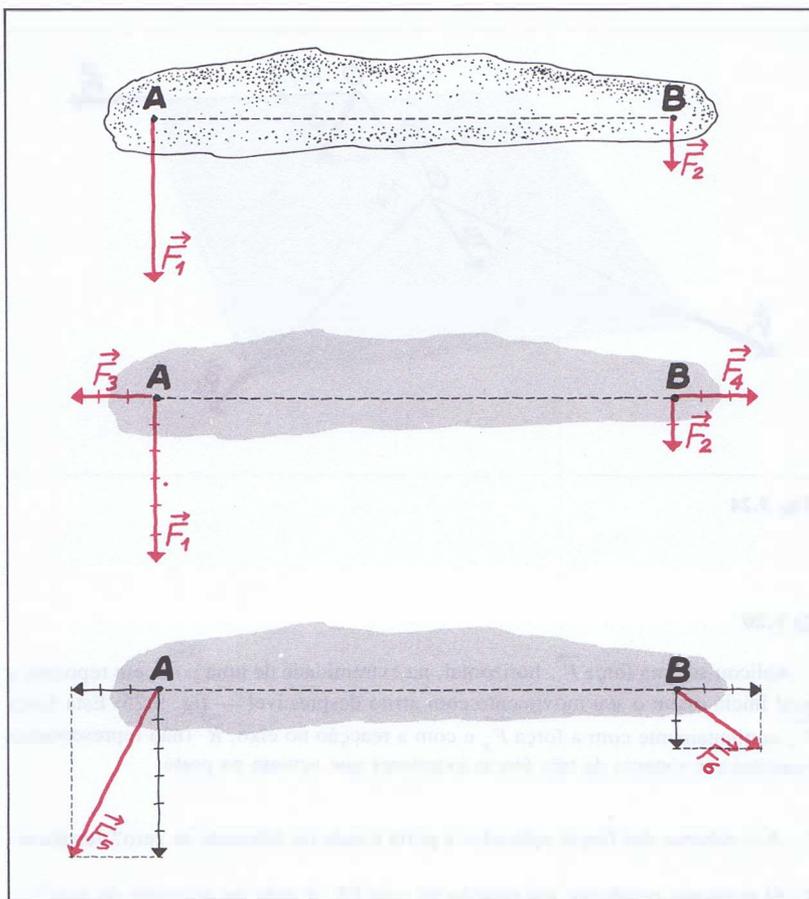


Fig. 9.23

1. Enunciar a operação de equivalência que permitiu passar do sistema da fig. 9.23, (a), para o sistema da fig. 9.23, (b).
2. Enunciar a operação de equivalência que permitiu passar do sistema da fig. 9.23, (b), para o sistema da fig. 9.23, (c).
3. A partir do sistema  $(\vec{F}_5, \vec{F}_6)$  da fig. 9.23, (c), concluir a *redução* do sistema de forças  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  da fig. 9.23, (a), tornando-o equivalente a uma força única aplicada num ponto do segmento  $AB$ , utilizando, para isso, mais três operações de equivalência.

### Q 9.19

Na fig. 9.24 está representado um processo de determinar, graficamente, a força  $\vec{F}$ , igual à resultante, e equivalente ao sistema das três forças coplanares,  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  e  $\vec{F}_3$ .

Descrever todas as operações elementares de equivalência que foram aplicadas ao longo do processo.

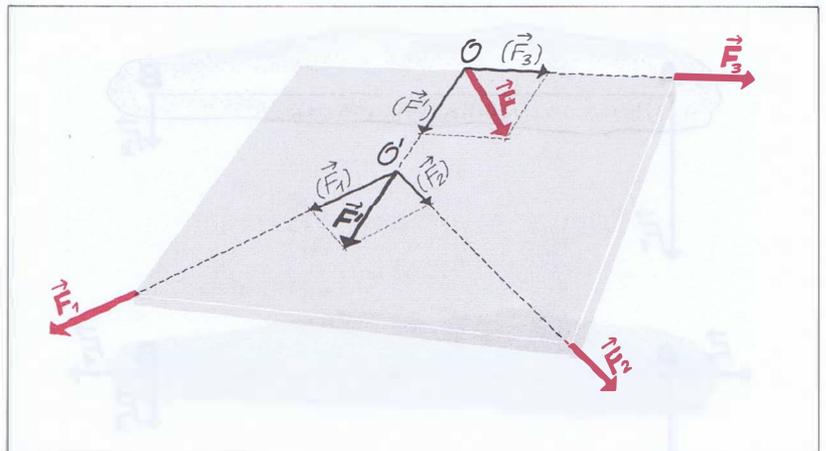


Fig. 9.24

### Q 9.20

Aplicou-se uma força  $\vec{F}$ , horizontal, na extremidade de uma porta em repouso, a qual inicia assim o seu movimento com atrito desprezável — fig. 9.25. Esta força  $\vec{F}$ , conjuntamente com a força  $F_g$  e com a reacção no eixo,  $R$  (não representada), constitui um sistema de três forças exteriores que actuam na porta.

1. A *resultante* das forças aplicadas à porta é nula ou diferente de zero? Justificar.
2. O *momento resultante* em relação ao eixo  $EE'$  é nulo ou diferente de zero?

3. A que se pode reduzir o sistema de forças que actua na porta?
4. Mostrar que as componentes da reacção no sistema de eixos  $(O, x, y, z)$  da figura, no instante inicial, são:

$$R_x = 0; \quad R_y = \frac{F}{2}; \quad R_z = F_g$$

Dado:

$$I_{EE'} = \frac{4}{3} M r^2$$

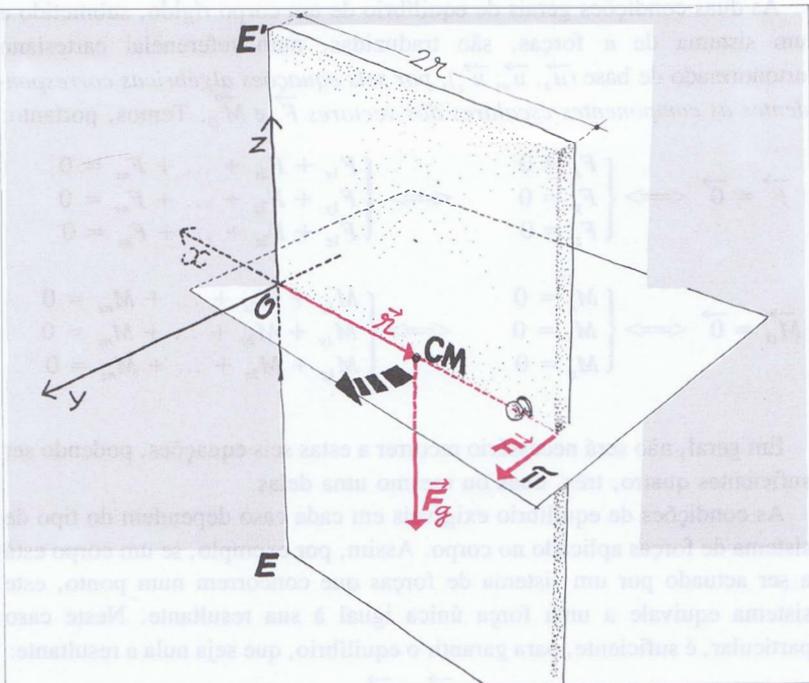


Fig. 9.25

### 9.3 Estudo geral do equilíbrio de um corpo rígido

#### 9.3.1 Condições gerais de equilíbrio

O efeito de um sistema de forças aplicado num corpo rígido é, como vimos, determinado pelas coordenadas vectoriais do sistema num ponto  $O$ :  $\vec{F}$  e  $\vec{M}_O$ .

Para que um sistema de forças esteja em equilíbrio, é necessário e suficiente que tenha resultante nula e momento nulo num ponto qualquer  $O$ :

$$\vec{F} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{M}_O = \vec{0}$$

Tal sistema é equivalente a zero (secção 9.2.5), pois demonstrámos que, verificando-se as relações anteriores num ponto  $O$ , elas também são verificadas em qualquer outro ponto  $O'$ .

Isto significa que um corpo rígido está em equilíbrio se estiver a ser actuado, exclusivamente, por um sistema de forças cujas coordenadas vectoriais sejam nulas.

As duas condições gerais de equilíbrio de um corpo rígido, submetido a um sistema de  $n$  forças, são traduzidas, num referencial cartesiano ortonormado de base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , por seis equações algébricas correspondentes às componentes escalares dos vectores  $\vec{F}$  e  $\vec{M}_O$ . Temos, portanto:

$$\vec{F} = \vec{0} \iff \begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0 \\ F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0 \\ F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{M}_O = \vec{0} \iff \begin{cases} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} M_{1x} + M_{2x} + \dots + M_{nx} = 0 \\ M_{1y} + M_{2y} + \dots + M_{ny} = 0 \\ M_{1z} + M_{2z} + \dots + M_{nz} = 0 \end{cases}$$

Em geral, não será necessário recorrer a estas seis equações, podendo ser suficientes quatro, três, duas ou mesmo uma delas.

As condições de equilíbrio exigíveis em cada caso dependem do tipo de sistema de forças aplicado no corpo. Assim, por exemplo, se um corpo está a ser actuado por um sistema de forças que concorrem num ponto, este sistema equivale a uma força única igual à sua resultante. Neste caso particular, é suficiente, para garantir o equilíbrio, que seja nula a resultante:

$$\vec{F} = \vec{0}$$

Analisaremos em seguida este e outros casos particulares de equilíbrio.

### Súmula

### 9.11

Um sólido estará em equilíbrio se for actuado por um sistema de forças equivalente a zero ou em equilíbrio. Consequentemente, as condições gerais de equilíbrio de um sólido são:

$$\begin{cases} \vec{F} = \vec{0} \\ \vec{M}_O = \vec{0} \end{cases}$$

Estas condições correspondem a serem nulas as coordenadas vectoriais num ponto.

As duas equações vectoriais anteriores correspondem, no caso mais geral, a seis equações escalares.

O ponto  $O$  é um ponto arbitrário (centro de redução), convenientemente escolhido.

### 9.3.2 Tipos de equilíbrio

Na secção 9.1, vimos que existem três estados possíveis de equilíbrio para o corpo:

— o equilíbrio estático, no qual o corpo está em repouso:

$$\vec{v} = \vec{0} \implies \vec{a}_{CM} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{\alpha} = \vec{0}$$

— o equilíbrio dinâmico de translação, no qual o corpo está em movimento de translação rectilínea e uniforme:

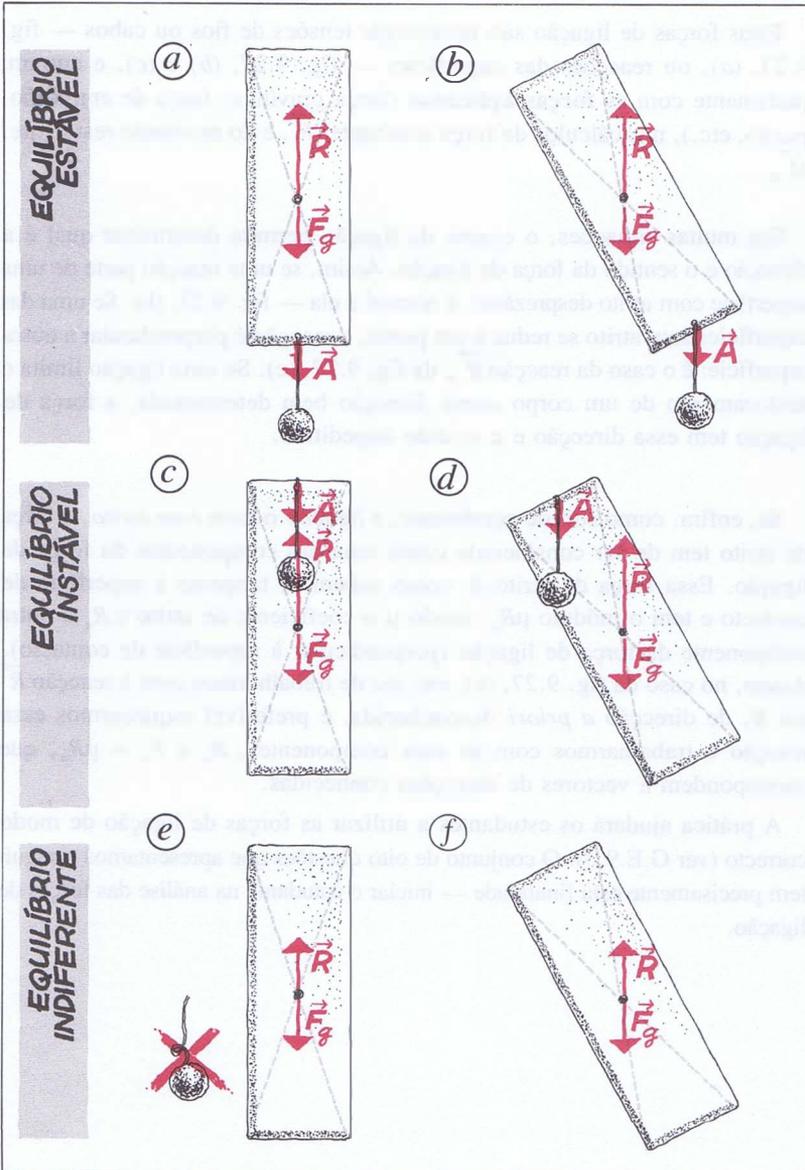
$$\vec{v} = \text{const.}^{\text{te}} \implies \vec{a}_{CM} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{\alpha} = \vec{0}$$

— o **equilíbrio dinâmico da rotação**, no qual o corpo está em movimento de rotação uniforme em torno de um eixo fixo que passa pelo *CM*:

$$\vec{\omega} = \text{cons.}^{\text{te}} \implies \vec{a}_{CM} = \vec{0} \text{ e } \vec{\alpha} = \vec{0}$$

O *equilíbrio estático* de um corpo num referencial pode ainda ser classificado de equilíbrio **estável**, **instável** ou **indiferente** — fig. 9.26.

O aumento da estabilidade do equilíbrio dos corpos é um problema importante em diversos ramos da Engenharia, como é o caso, por exemplo, da Engenharia Civil.



**Fig. 9.26**

— O **equilíbrio** é **estável** na situação (a), porque ao afastar-se o corpo da posição de equilíbrio, situação (b), o sistema de forças tende a fazer regressar o corpo àquela posição de equilíbrio.

— O **equilíbrio** é **instável** na situação (c), porque ao afastar-se o corpo da posição de equilíbrio, situação (d), o sistema de forças tende a fazer afastar cada vez mais o corpo daquela posição de equilíbrio.

— O **equilíbrio** é **indiferente** na situação (e), porque ao afastar-se o corpo da posição de equilíbrio, situação (f), o sistema de forças mantém o corpo em equilíbrio.

### 9.3.3. Forças de ligação

Uma boa metodologia para o estudo dos problemas de equilíbrio exige, em primeiro lugar, que seja definido claramente **qual é o sistema em estudo**. Esta condição é indispensável para podermos descobrir **quais são as forças exteriores** que actuam no sistema.

Como, em geral, o sistema em estudo está sujeito a **ligações** ou **vínculos** (suspensão por fios, apoiado em superfícies, etc.), cada ligação traduz-se pelo aparecimento de uma força, desconhecida *a priori*, chamada **força de ligação**.

Estas forças de ligação são geralmente tensões de fios ou cabes — fig. 9.27, (a), ou reacções das superfícies — fig. 9.27, (b) e (c), e entram, juntamente com as **forças aplicadas** (força gravítica, força de empurrão, puxão, etc.), nos cálculos da força resultante,  $\vec{F}$ , e do momento resultante,  $\vec{M}_O$ .

Em muitas situações, o exame da ligação permite determinar qual é a direcção e o sentido da força de ligação. Assim, se uma reacção parte de uma superfície com atrito desprezável, é normal a ela — fig. 9.27, (b). Se uma das superfícies sem atrito se reduz a um ponto, a reacção é perpendicular à outra superfície: é o caso da reacção  $\vec{R}'_n$  da fig. 9.27, (c). Se uma ligação limita o deslocamento de um corpo numa direcção bem determinada, a força de ligação tem essa direcção e o sentido impeditivo.

Se, enfim, como sucede geralmente, a **ligação ocorre com atrito**, a força de atrito tem de ser considerada como uma das componentes da força de ligação. Essa força de atrito é, como sabemos, tangente à superfície de contacto e tem o módulo  $\mu R_n$ , sendo  $\mu$  o coeficiente de atrito e  $R_n$  a outra componente da força de ligação (perpendicular à superfície de contacto). Assim, no caso da fig. 9.27, (c), em vez de trabalharmos com a reacção  $\vec{R}$  em B, de direcção *a priori* desconhecida, é preferível esquecermos essa reacção e trabalharmos com as suas componentes,  $R_n$  e  $F_a = \mu R_n$ , que correspondem a vectores de direcções conhecidas.

A prática ajudará os estudantes a utilizar as forças de ligação de modo correcto (ver G.E.9.3). O conjunto de oito questões que apresentamos a seguir tem precisamente esta finalidade — iniciar o estudante na análise das forças de ligação.

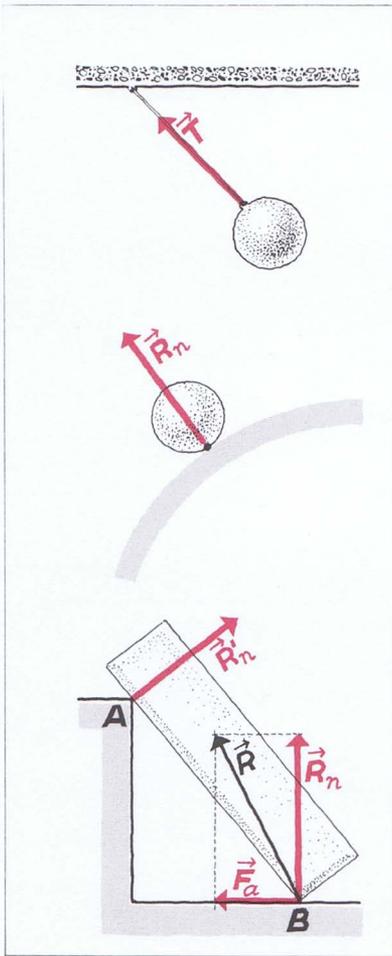


Fig. 9.27

(a) Quando o vínculo consiste num fio inextensível, a força de ligação é a tensão,  $\vec{T}$ .

(b) Numa superfície sem atrito, a força de ligação é a reacção normal à superfície,  $\vec{R}_n$ .

(c) Se uma das superfícies se reduz a um ponto A, a reacção é perpendicular à outra superfície. Havendo atrito, a reacção  $\vec{R}$  é oblíqua, podendo substituir-se pelas componentes  $\vec{F}_a$  e  $\vec{R}_n$ .

### G.E. 9.3 ◀

Q 9.21

O lápis representado na fig. 9.28 está introduzido na cavidade da mesa e em equilíbrio. O ponto  $G$  é o centro de gravidade do lápis.

A reacção da parede, exercida em  $M$  sobre o lápis, pode ser representada, em direcção e sentido, por um dos vectores seguintes:

(A)  $\rightarrow$  (B)  $\leftarrow$  (C)  $\nearrow$

(D)  $\searrow$  (E)  $\swarrow$  (F)  $\nwarrow$

Indicar qual destes é e justificar.

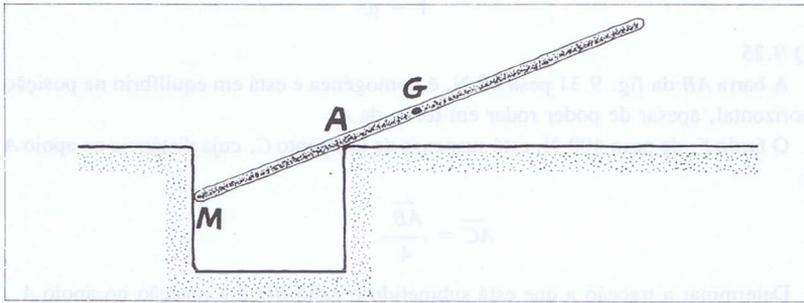


Fig. 9.28

9.22

A escada  $AB$ , *uniforme*, pesa 40,0 kgf, está encostada à parede  $BC$ , perfeitamente *polida*, e apoiada no chão *rugoso*,  $AC$  — fig. 9.29. O centro de gravidade,  $G$ , da escada coincide com o seu centro geométrico.

O homem (pintor de paredes) pesa 70 kgf, está no degrau  $D$  da escada e encontra-se, tal como a escada, *em equilíbrio*.

Nestas condições, e atendendo a que

$$\overline{AB} = 3,60 \text{ m} \quad , \quad \overline{AD} = 3,00 \text{ m} \quad \text{e} \quad \overline{BC} = 2,40 \text{ m} \quad ,$$

determinar as reacções em  $A$  e  $B$  e, bem assim, os seus módulos, adoptando o sistema de eixos indicados na fig. 9.29.

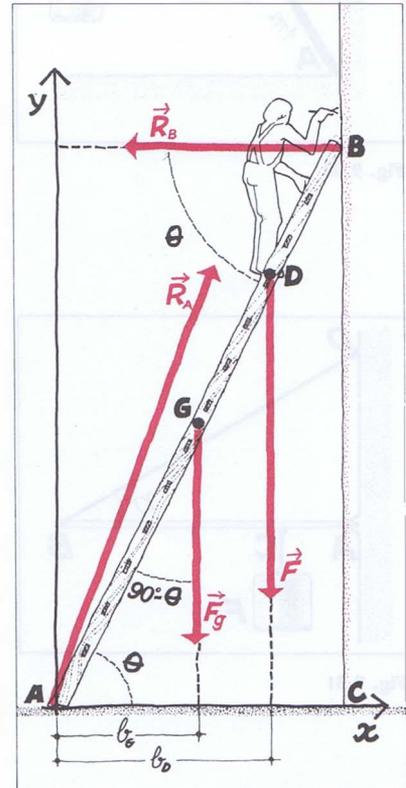


Fig. 9.29 A escada  $AB$  está em equilíbrio. As forças que nela actuam são:

- $\vec{R}_A$  — reacção do solo rugoso  $AC$  (obliqua por haver atrito).
- $\vec{R}_B$  — reacção da parede polida  $BC$  (normal por não haver atrito)
- $\vec{F}_G$  — força gravítica que actua na escada.
- $\vec{F}$  — acção do homem sobre a escada, de valor igual ao peso do homem.

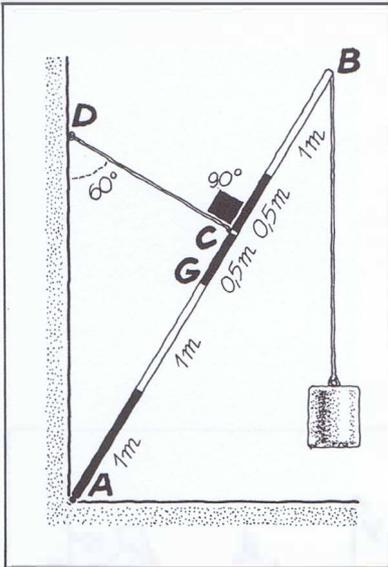


Fig. 9.30

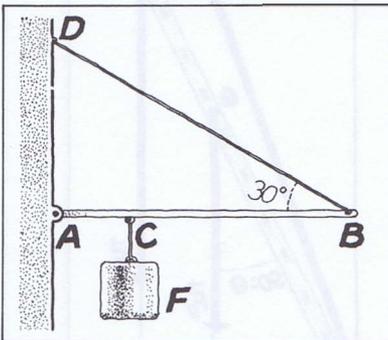


Fig. 9.31

**Q 9.23**

A barra  $AB$  da figura 9.30 é homogênea, de secção constante, tem o peso

$$F_g = 50 \text{ N}$$

e o comprimento de 4,0 m.

A barra está articulada numa charneira cilíndrica colocada na aresta  $A$  de uma sala e, da extremidade  $B$ , está suspenso um corpo que pesa 100 N.

Pelo ponto  $C$  da barra, que dista 2,5 m de  $A$ , ligou-se a barra à parede vertical através de um cabo  $CD$ , perpendicular à barra  $AB$ . Determinar a tensão  $\vec{T}$  do cabo  $CD$  e a reacção  $\vec{R}$  na articulação  $A$ .

Utilizar:  $\cos 30^\circ = 0,87$

**Q 9.24**

Uma barra homogênea em equilíbrio tem uma das extremidades aplicada numa placa horizontal e a outra numa parede vertical, de modo a ficar no plano vertical perpendicular à parede e à placa. Sabendo que o coeficiente de atrito entre a barra e as superfícies é  $\mu$ , demonstrar que o ângulo  $\theta$  da barra com a vertical, para que se mantenha em equilíbrio, é dado por

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2\mu}{1 - \mu^2}$$

**Q 9.25**

A barra  $AB$  da fig. 9.31 pesa 40 N, é homogênea e está em equilíbrio na posição horizontal, apesar de poder rodar em torno de  $A$ .

O fardo  $F$ , de peso 400 N, está suspenso de um ponto  $C$ , cuja distância ao apoio  $A$  é

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{4}$$

Determinar a tracção a que está submetido o cabo  $BD$  e a reacção no apoio  $A$ .

**Q 9.26**

Uma barra homogênea, de comprimento  $\ell$ , está apoiada num cilindro  $A$ , sem atrito, a uma distância  $x$  da parede — fig. 9.32.

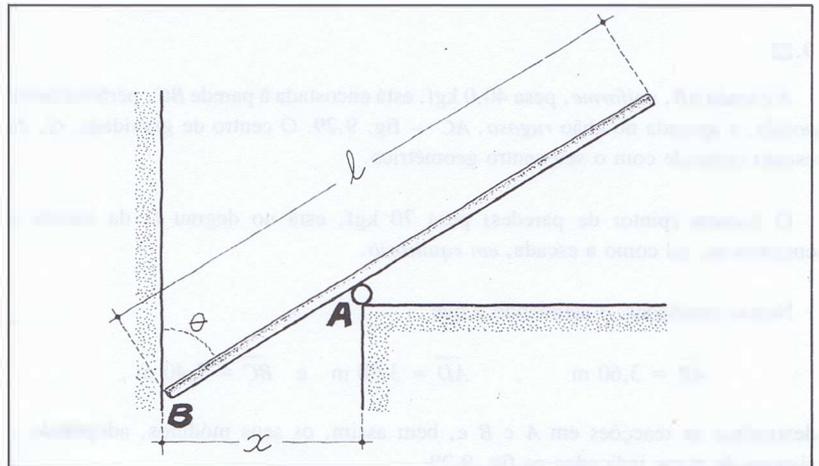


Fig. 9.32

A barra está encostada a uma parede, num ponto  $B$ , também com atrito desprezável.

Estando a barra em equilíbrio, provar que o ângulo  $\theta$  é tal que

$$\text{sen}^3 \theta = \frac{2x}{\ell}, \text{ sendo } 2x < \ell$$

**Q 9.27**

Uma vara homogênea, de secção constante, peso  $F_g$  e comprimento  $\ell$ , está apoiada em superfícies planas sem atrito, que formam um ângulo recto, conforme mostra a fig. 9.33.

1. Provar que na posição de equilíbrio da vara se verifica a relação:

$$\text{tg } \beta = \text{cotg } 2\theta$$

2. Para  $\theta = 25^\circ$ , determinar a posição da vara.

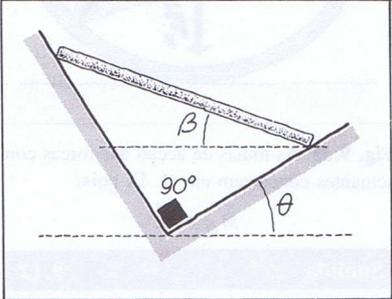


Fig. 9.33

**Q 9.28**

1. Que força  $\vec{F}$ , formando um ângulo de  $30^\circ$  com a horizontal, é necessária para arrastar um corpo de massa 9,6 kg sobre uma superfície rugosa horizontal, com velocidade constante (fig. 9.34)? E qual é a intensidade da reacção normal?

Dados: coef. de atrito cinético entre o corpo e a superfície = 0,20;  
 $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ ;  $\cos 30^\circ = 0,86$ ;  $\sin 30^\circ = 0,50$

2. Determinar a distância  $d$  à face A da linha de acção da reacção normal exercida pela superfície rugosa sobre o corpo.

(altura do corpo = 0,20 m; comprimento do corpo = 0,40 m)

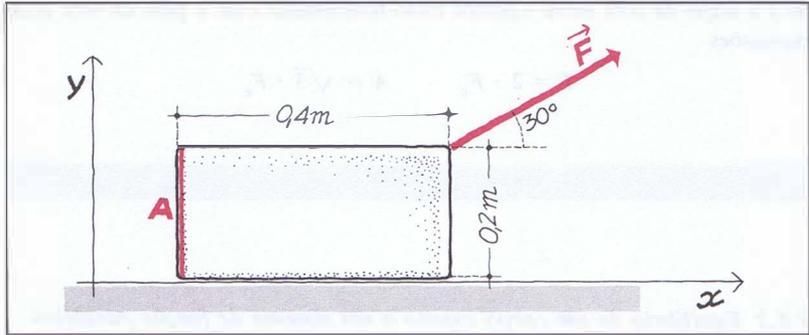


Fig. 9.34

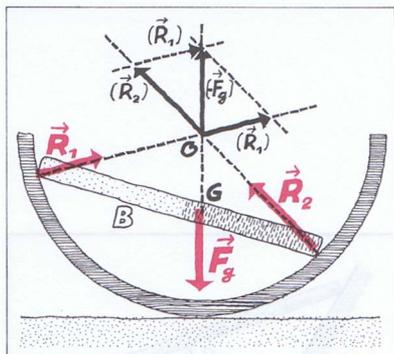


Fig. 9.35 As linhas de acção das forças con-  
actuantes concorrem em  $O$ . É, pois,

$$\vec{M}_O = \vec{0}$$

### Súmula

9.12

Quando um sólido é actuado por  
um sistema de forças cujas linhas de  
acção se cruzam no mesmo ponto,  
as duas condições de equilíbrio redu-  
zem-se a uma só:

$$\vec{F} = \vec{0}$$

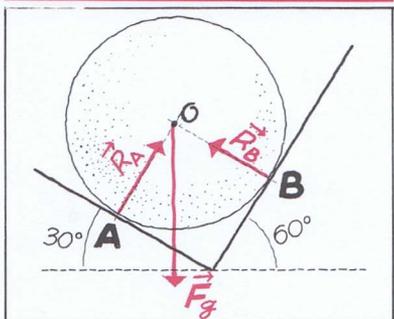


Fig. 9.36 Quais são as reacções  $R_A$  e  $R_B$ ?

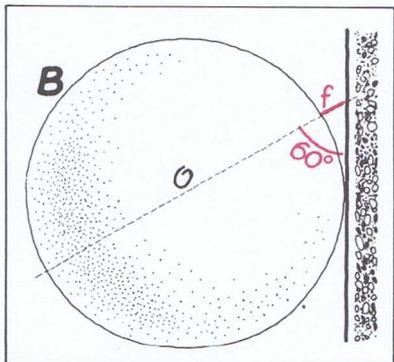


Fig. 9.37

## 9.4 Estudo do equilíbrio de corpos rígidos em casos particulares

### 9.4.1 Equilíbrio de um corpo rígido sujeito a um sistema de forças concorrentes num ponto

Quando as linhas de acção das forças exteriores que actuam num corpo concorrem todas num mesmo ponto  $O$  (fig. 9.35), essas forças constituem um sistema equivalente à força resultante aplicada no ponto. Basta, portanto, para haver equilíbrio, que essa resultante seja nula:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{0}$$

As duas condições gerais de equilíbrio reduzem-se apenas à *condição da resultante*, já que a condição do momento está à partida verificada: os momentos são todos nulos no ponto  $O$  onde concorrem as forças e, por isso, será nulo o momento resultante neste ponto.

### QUESTÕES PROPOSTAS

#### Q 9.29

1. A barra  $B$  representada na fig. 9.35 é heterogénea. Qual das duas metades é a mais densa?
2. Se a barra  $B$  fosse homogénea, em que posição ficaria em equilíbrio?  
É desprezável o atrito na parede interna.

#### Q 9.30

Determinar os módulos das reacções dos planos sobre a esfera representada na fig. 9.36, que pesa 10 kgf.

#### Q 9.31

A bola homogénea  $B$  está suspensa por um fio  $f$ , que forma um ângulo de  $60^\circ$  com uma parede polida à qual a bola está encostada — fig. 9.37. Provar que a tensão do fio e a acção da bola sobre a parede estão relacionadas com o peso da bola pelas expressões

$$T = 2 \cdot F_g \quad A = \sqrt{3} \cdot F_g$$

### 9.4.2 Equilíbrio de um corpo sujeito a um sistema de forças paralelas

Quando todas as forças exteriores que actuam num corpo são paralelas entre si, o sistema que as constitui é também equivalente a uma força única igual à resultante aplicada no centro de forças paralelas.

Sendo nulo o momento da força resultante em relação ao centro de forças paralelas, será nulo também o momento resultante do sistema nesse ponto, porque, nas condições enunciadas, como vimos na secção 9.2.7, a resultante e o sistema de forças paralelas são equivalentes e, por isso, têm o mesmo momento num ponto, quaisquer que sejam o ponto e o valor do respectivo momento. Está, pois, satisfeita a condição do momento. Tal como no caso anterior, resta a *condição da resultante*, isto é,

$$\vec{F} = (F_1 + F_2 + \dots + F_n) \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

A esta equação vectorial corresponde, agora, *uma só equação algébrica*, porque basta considerar apenas um eixo *paralelo* à direcção comum das forças. Temos, portanto:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = 0$$

Porém, esta equação pode não chegar. De facto, havendo mais do que uma incógnita, será necessário aplicar a condição de equilíbrio de momentos em pontos diferentes do centro de forças paralelas. Estes pontos devem ser escolhidos onde o momento de uma das forças seja nulo, e serão tantos quantas as equações necessárias.

### QUESTÕES PROPOSTAS

#### Q 9.32

Assente na viga  $\overline{AB}$  — fig. 9.38, que pesa 100 kgf, está um corpo que, por sua vez, pesa 1000 kgf. Quais são as reacções dos pilares?

#### Q 9.33

Uma barra  $AB$ , uniforme, de secção constante e comprimento 4,0 m, está apoiada em  $A$  e pode rodar em torno de um fulcro  $F$  — fig. 9.39. Um homem de 70 kgf caminha sobre a barra, partindo de  $A$ . Qual é a distância máxima que o homem pode caminhar a partir de  $A$ , sem a barra se desequilibrar?

(Peso da barra = 49 kgf)

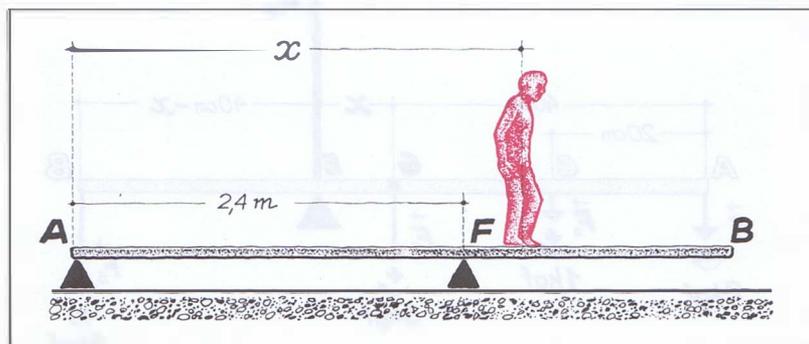


Fig. 9.39

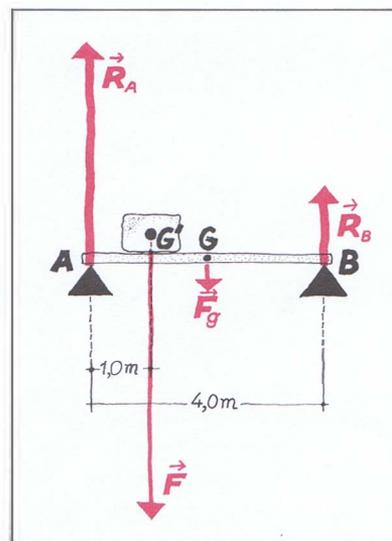


Fig. 9.38 Diagrama das forças aplicadas na viga  $AB$ , assente nos pilares  $A$  e  $B$ .

**Q 9.34**

Sobre uma trave horizontal, que repousa em dois apoios, A e B, distantes 4,0 m um do outro, estão assentes duas esferas C e D, que pesam 200 kgf e 100 kgf, respectivamente — fig. 9.40. O peso da barra, suposta homogênea, é 300 kgf. A reacção do apoio A é duas vezes superior à do apoio B. A distância entre os centros das esferas C e D é 1,0 m. A que distância  $x$  se encontra a esfera C do apoio A — fig. 9.40?

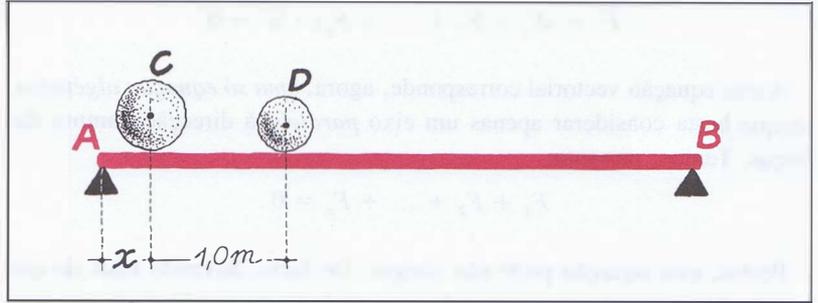


Fig. 9.40

**9.4.3 Equilíbrio de um corpo rígido sujeito a um eixo fixo**

Se um corpo está sujeito a um eixo fixo, por exemplo uma **alavanca**, que roda em torno de um **eixo E** (ou **fulcro**), fig. 9.41, a reacção do eixo ou força solicitada,  $\vec{R}_E$ , é sempre simétrica da soma das forças aplicadas na barra,  $\Sigma \vec{F}_i$ , quer dizer, é a *equilibrante* delas. Tem-se então:

$$\Sigma \vec{F}_i + \vec{R}_E = \vec{0}$$

Isto significa que a condição da resultante está satisfeita.

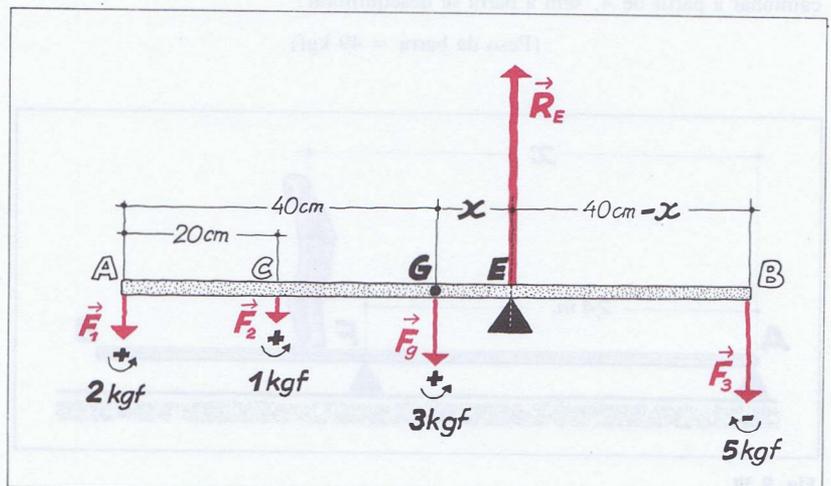


Fig. 9.41 Sendo  $R_E = 11$  kgf, qual é a posição do fulcro E para que a barra AB fique em equilíbrio?

Então, para que a barra não tenha *movimento de rotação* em torno do eixo  $E$ , é necessário satisfazer a condição do momento, ou seja *deve ser nulo o momento resultante em relação ao eixo  $E$* :

$$M_E = 0$$

A condição do momento reduz-se a uma *única equação algébrica* porque os momentos em relação ao eixo fixo  $E$  são escalares positivos ou negativos, conforme o sentido em que as forças respectivas tendem a fazer rodar a barra.

No caso da fig. 9.41, verifica-se que a barra  $AB$  fica em equilíbrio se se verificar a condição seguinte, referida ao eixo  $E$ :

$$2 \text{ kgf} \times (40 + x) \text{ cm} + 1 \text{ kgf} \times (20 + x) \text{ cm} + 3 \text{ kgf} \times x \text{ cm} - 5 \text{ kgf} \times (40 - x) \text{ cm} = 0$$

Esta equação algébrica tem a solução

$$x = 9 \text{ cm}$$

Tal como no caso do equilíbrio anterior, se houver mais de uma incógnita, será necessário aplicar a condição do equilíbrio de momentos em relação a mais de um eixo.

### QUESTÕES PROPOSTAS

#### Q 9.35

Uma barra homogénea, de secção recta constante, está dobrada em ângulo recto e pode rodar, sem atrito, em torno do eixo  $A$  — fig. 9.42. O ramo  $AB$  é três vezes mais comprido do que o ramo  $AC$ .

Qual é o valor do ângulo  $\theta$  quando a barra está em equilíbrio?

#### Q 9.36

Qual é a força mínima,  $\vec{F}$ , horizontal, cuja linha de acção passa pelo centro de uma esfera homogénea de peso 1000 N e raio 20 cm, necessária para a fazer passar por cima de uma caixa paralelepípedica de altura 5 cm — fig. 9.43?

Quando um sólido está sujeito a um eixo fixo, as duas condições de equilíbrio também se reduzem a uma só: ser nula a soma dos momentos ou momento resultante em relação ao eixo  $E$ .

$$M_E = 0$$

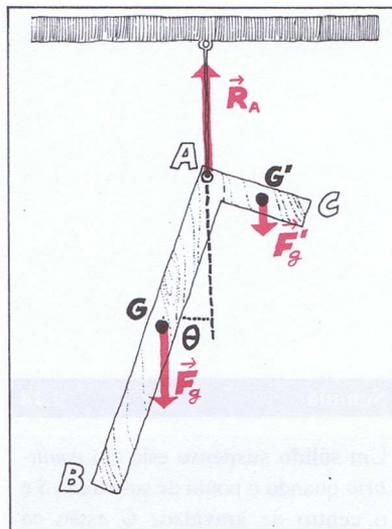


Fig. 9.42 A barra  $[B A C]$  está em equilíbrio.

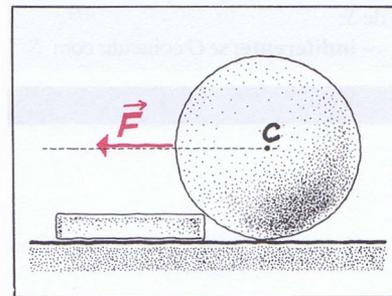


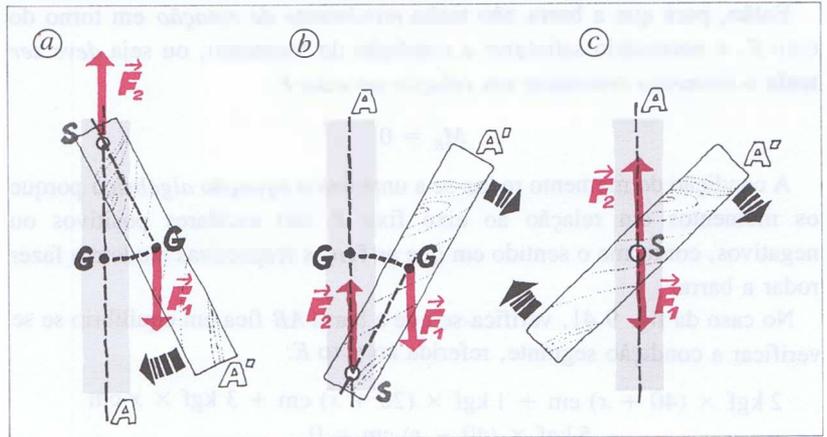
Fig. 9.43

### 9.4.4 Equilíbrio de um corpo suspenso

Seja uma régua, suspensa de um eixo horizontal e colocada na posição vertical — fig. 9.44. As duas forças exteriores que actuam na régua (a força gravítica,  $\vec{F}_1$ , e a reacção do eixo,  $\vec{F}_2$ ) são forças simétricas e, portanto, têm resultante nula.

Para haver equilíbrio falta, pois, que se cumpra a condição de momentos ou do equilíbrio de rotação.

**Fig. 9.44** Equilíbrio de um corpo suspenso  
 (a) — Equilíbrio estável — o centro de gravidade está abaixo do eixo de suspensão.  
 (b) — Equilíbrio instável — o centro de gravidade está acima do eixo de suspensão.  
 (c) — Equilíbrio indiferente — o eixo de suspensão passa pelo centro de gravidade.  
 $\vec{F}_2$  representa a componente vertical da reacção, a qual se identifica com a reacção nas posições de equilíbrio.



Como, na posição vertical, a linha de acção das forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  é a mesma e *passa* pelo eixo, concluímos que o momento resultante é nulo. Isto significa, em suma, que a **posição vertical da régua é uma posição de equilíbrio**.

Este equilíbrio, porém, pode assumir aspectos diferentes, conforme a posição da régua. Assim, no caso (a) da fig. 9.44, se afastarmos a régua para uma posição  $A'$ , as forças actuantes passam a constituir um sistema, cujo momento tende a fazê-la rodar até à posição primitiva. Trata-se, como já vimos, de uma situação chamada de **equilíbrio estável**. Diz-se que o sistema que faz recuperar o equilíbrio tem *momento estacionante* ou que é um *sistema estacionante*.

No caso (b) da fig. 9.44, o sistema tem um momento que faz também rodar a régua sem que, todavia, esta recupere a situação de equilíbrio inicial. Trata-se, como vimos também, do chamado **equilíbrio instável**. Diz-se, neste caso, que o momento do sistema é um *momento derrubante* ou que o sistema é *derrubante*.

Finalmente, no caso (c) da fig. 9.44, qualquer que seja a posição da régua, a situação de *equilíbrio permanece*, porque o sistema é sempre equivalente a zero. São sempre nulos a resultante e o momento resultante. Trata-se de um caso de **equilíbrio indiferente**.

Como mostra a fig. 9.44 e se indica na legenda, a **posição do centro de gravidade** é que determina estas diferentes situações de equilíbrio.

#### 9.4.5 Equilíbrio de um corpo apoiado

Quando um corpo está apoiado num plano, e em equilíbrio, a força gravítica,  $F_g$ , e a reacção  $\vec{R}$  do plano, são **forças simétricas** — fig. 9.45.

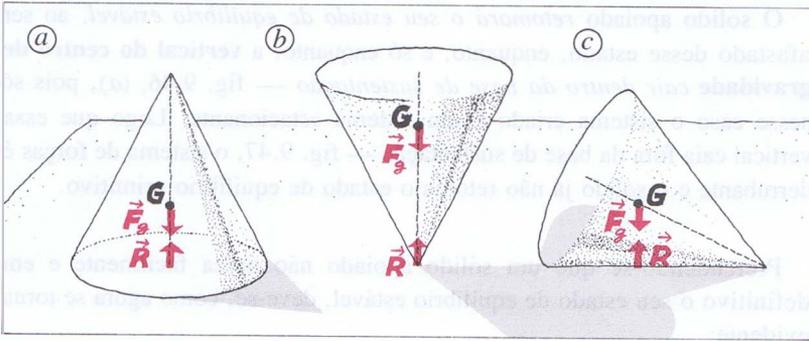
#### Súmula

9.14

Um **sólido suspenso** está em *equilíbrio* quando o ponto de suspensão  $S$  e o centro de gravidade  $G$  estão *na mesma vertical*.

O equilíbrio pode ser:

- **estável**: se  $G$  estiver abaixo de  $S$ ;
- **instável**: se  $G$  se encontrar acima de  $S$ ;
- **indiferente**: se  $G$  coincidir com  $S$ .



Estão satisfeitas, pois, as duas condições de equilíbrio:

$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{R} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_G = \vec{M}_G(\vec{F}_g) + \vec{M}_G(\vec{R}) = \vec{0}$$

Como a força gravítica é vertical e está aplicada em  $G$ , e a reacção do apoio tem de ocorrer entre este e a base de sustentação, o equilíbrio só pode ocorrer desde que a vertical do centro de gravidade caia dentro da base de sustentação — veja-se a fig. 9.45, (b).

Mas os três estados de equilíbrio apresentados na fig. 9.45 são diferentes. Com efeito, verifiquemos o que acontece ao afastarem-se os sólidos, ligeiramente, do estado de equilíbrio — fig. 9.46.

No caso (a) da fig. 9.45, surge um *sistema estacionante* — fig. 9.46, (a), porque tende a fazer regressar o sólido à mesma posição de equilíbrio. O **equilíbrio**, neste caso, diz-se **estável**.

No caso (b) da fig. 9.45, surge um *sistema derrubante* — fig. 9.46, (b), porque tende a afastar o sólido da primitiva posição de equilíbrio. O **equilíbrio** diz-se, neste caso, **instável**.

No caso (c) da fig. 9.45, o sólido ao afastar-se da posição de equilíbrio continua em equilíbrio — fig. 9.46, (c), porque as forças continuam a ser simétricas. Nesse caso, o **equilíbrio** diz-se **indiferente**.

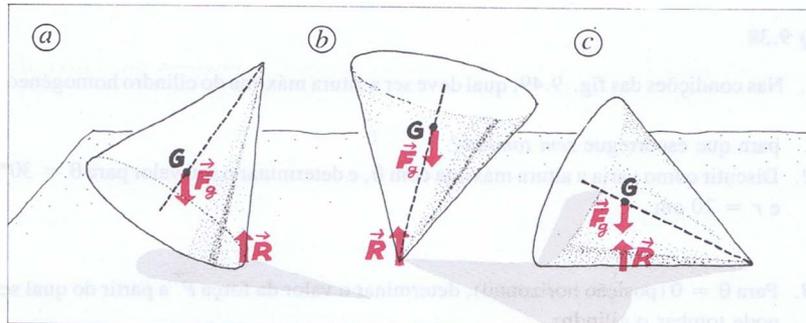


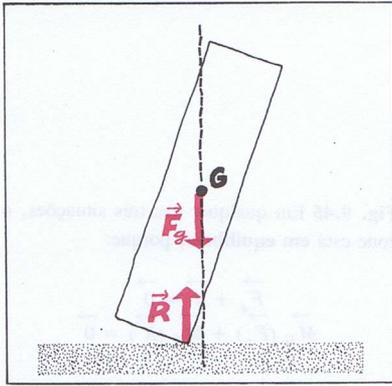
Fig. 9.45 Em qualquer das três situações, o cone está **em equilíbrio**, porque:

$$\vec{F}_g + \vec{R} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_G(\vec{F}_g) + \vec{M}_G(\vec{R}) = \vec{0}$$

Fig. 9.46 Ao afastarem-se ligeiramente os sólidos da posição de equilíbrio podem ocorrer três situações distintas:

- (a) Surge um *sistema estacionante*.
- (b) Surge um *sistema derrubante*.
- (c) As forças continuam a ter a mesma linha de acção e a ser simétricas.  $\vec{R}$  representa a reacção normal.

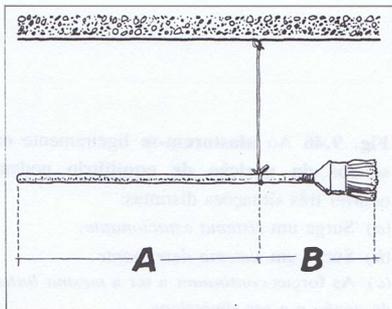


**Fig. 9.47** O sólido apoiado já não retoma o seu estado de equilíbrio primitivo porque o sistema que actua é derrubante. Repare-se que a vertical do centro de gravidade cai fora da base de sustentação.

### Súmula

9.15

Num sólido apoiado e em equilíbrio, as forças actuantes,  $\vec{F}_g$  e  $\vec{R}$ , são forças simétricas. Isto exige que, na posição de equilíbrio, a vertical do centro de gravidade caia dentro da base de sustentação. O equilíbrio pode ser **estável**, **instável** ou **indiferente**, conforme o comportamento do sólido ao afastar-se ligeiramente da posição de equilíbrio.



**Fig. 9.48**

O sólido apoiado *retomará o seu estado de equilíbrio estável*, ao ser afastado desse estado, enquanto, e só enquanto, a **vertical do centro de gravidade cair dentro da base de sustentação** — fig. 9.46, (a), pois só nesse caso o sistema criado é um sistema estacionante. Logo que essa vertical caia fora da base de sustentação — fig. 9.47, o sistema de forças é derrubante e o sólido já não retoma o estado de equilíbrio primitivo.

Pretendendo-se que um sólido apoiado não perca facilmente e em definitivo o seu estado de equilíbrio estável, deve-se, como agora se torna evidente:

- *aumentar a base de sustentação;*
- *baixar o mais possível o centro de gravidade.*
- *aumentar o seu peso, se possível.*

Como nos casos dos corpos suspensos, também nos corpos apoiados a **posição do centro de gravidade** é que determina as diferentes situações de equilíbrio.

Quer nos corpos suspensos quer nos corpos apoiados, a estabilidade é tanto maior quanto mais baixo estiver o centro de gravidade.

### QUESTÕES PROPOSTAS

#### Q 9.37

Na fig. 9.48 representa-se uma vassoura suspensa do tecto por um fio e em equilíbrio na posição horizontal. As duas partes da vassoura, A e B, de um e outro lado do ponto de suspensão, pesam o mesmo ou não?

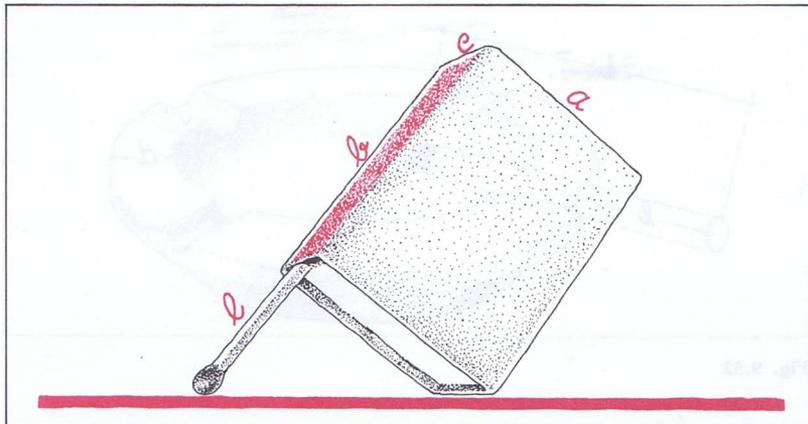
Justificar.

#### Q 9.38

1. Nas condições das fig. 9.49, qual deve ser a altura máxima do cilindro homogéneo para que escorregue *sem tombar*?
2. Discutir como varia a altura máxima com  $\theta$ , e determinar o seu valor para  $\theta = 30^\circ$  e  $r = 20$  cm.
3. Para  $\theta = 0$  (posição horizontal), determinar o valor da força  $\vec{F}$  a partir do qual se pode tombar o cilindro.

**Q 9.39**

Uma caixa de fósforos tem as dimensões  $a$ ,  $b$ , e  $c$  e o centro de gravidade coincidente com o centro de simetria. Coloca-se um dos fósforos (cujo peso se considera desprezável) entalado entre as paredes laterais da tampa e da caixa, conforme se mostra na fig. 9.50. Qual é o comprimento máximo,  $\ell$ , do fósforo que deve ficar fora da caixa para que esta fique em equilíbrio?

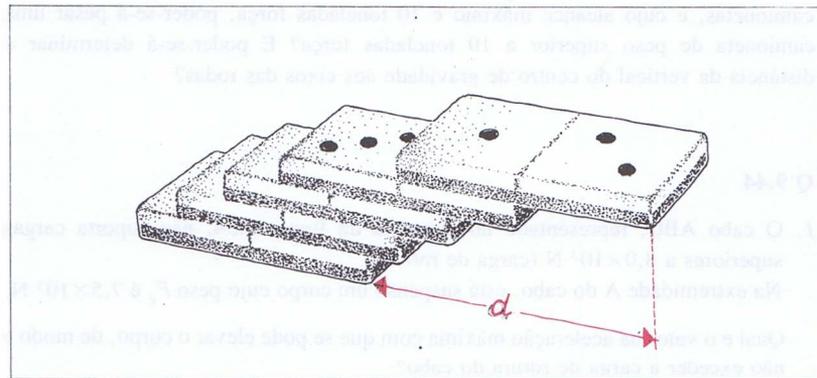


**Fig. 9.50**

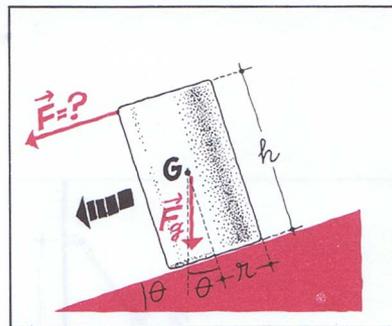
**Q 9.40**

O João está a tentar empilhar pedras de dominó de modo a que cada pedra sobressaia o mais possível da que está por baixo, maximizando a distância  $d$ , horizontal, entre a pedra superior e a inferior (extremidades do mesmo lado) — fig. 9.51.

Qual é a distância máxima que ele poderá conseguir com  $n$  pedras?



**Fig. 9.51**



**Fig. 9.49** O cilindro, de altura  $h$  e raio  $r$ , escorrega *sem atrito* (superfícies polidas) ao longo do plano inclinado.

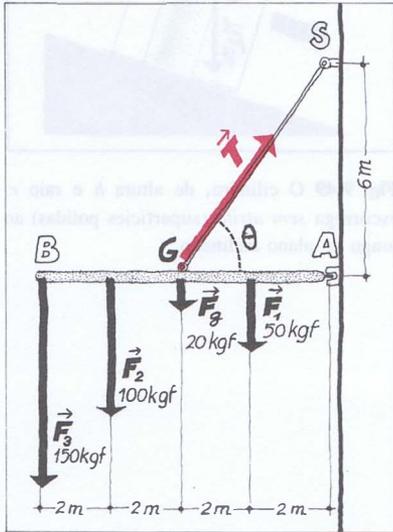


Fig. 9.53 Barra homogénea, em equilíbrio.

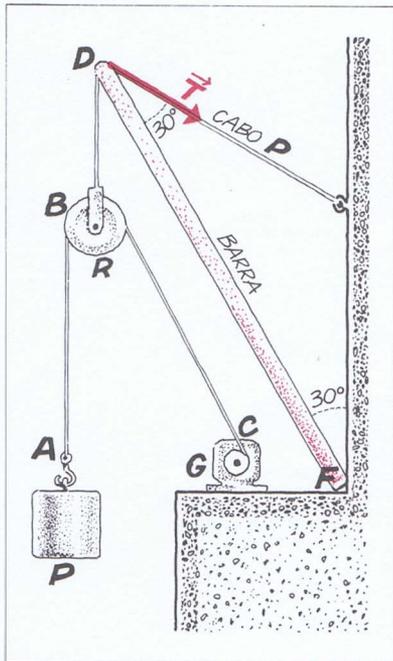


Fig. 9.54

R — representa uma roldana fixa.  
G — representa o aparelho (guincho) para elevação do peso.

**Q 9.41**

Que porção  $\ell$  de um cigarro, de comprimento inicial  $L$ , se deve deixar fora da borda de um cinzeiro, de largura  $d$ , para ele se conservar o máximo de tempo possível sem cair à medida que vai ardendo — fig. 9.52?

Desprezar o peso das cinzas.

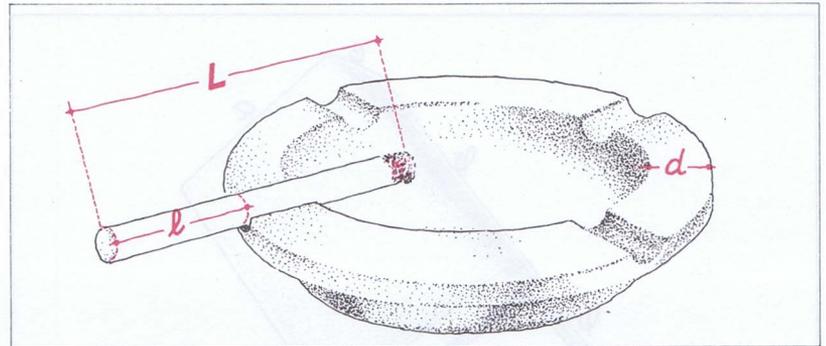


Fig. 9.52

**Q 9.42**

Uma barra homogénea  $AB$  pode rodar em torno de uma charneira  $A$  fixa numa parede — fig. 9.53.

Determinar a tensão no cabo  $SG$ , de que está suspensa a barra, e a reacção na charneira  $A$ , em torno da qual a barra pode rodar.

**Q 9.43**

Numa balança tipo báscula, cujo prato está ao nível de uma estrada para poder pesar camionetas, e cujo alcance máximo  10 toneladas fôrça, poder-se- pesar uma camioneta de peso superior a 10 toneladas fôrça? E poder-se- determinar a distância da vertical do centro de gravidade aos eixos das rodas?

**Q 9.44**

1. O cabo  $ABC$ , representado no esquema da figura 9.54, não suporta cargas superiores a  $8,0 \times 10^3$  N (carga de rotura).

Na extremidade  $A$  do cabo, está suspenso um corpo cujo peso  $F_g$  é  $7,5 \times 10^3$  N.

Qual é o valor da acelerao máxima com que se pode elevar o corpo, de modo a não exceder a carga de rotura do cabo?

$(g = 10 \text{ ms}^{-2})$

2. Se a barra for homogénea, de secção constante e peso  $1,50 \times 10^3$  N e estiver a suportar uma acção vertical de  $3,00 \times 10^3$  N em  $D$ , qual é a tensão do cabo  $P$  e a reacção no contacto  $F$  com a parede?

(comprimento da barra = 3,00 m)

**Q 9.45**

As duas esferas representadas na figura 9.55 têm igual peso (10 kgf) e estão em repouso. Determinar as reacções das paredes e do chão, e bem assim o valor,  $A$ , do par acção-reacção de cada esfera sobre a outra.

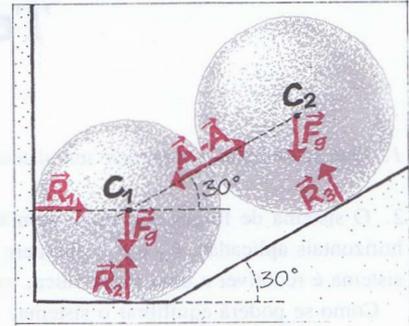


Fig. 9.55

**Q 9.46**

A barra  $AB$  é homogénea, de secção constante, tem o peso de 10 kgf e o comprimento de 40 cm. Está suportada por uma corda  $BC$ , que pode aguentar uma tracção máxima de 20 kgf.

Determinar o peso máximo que pode ter a esfera de raio 10 cm apoiada na barra — fig. 9.56.

**Q 9.47**

A vara indeformável  $BE$  é homogénea, pesa 800 N e forma um ângulo de  $50^\circ$  com a horizontal — fig. 9.57.

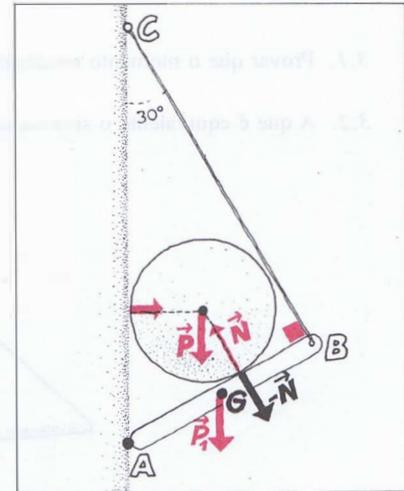


Fig. 9.56

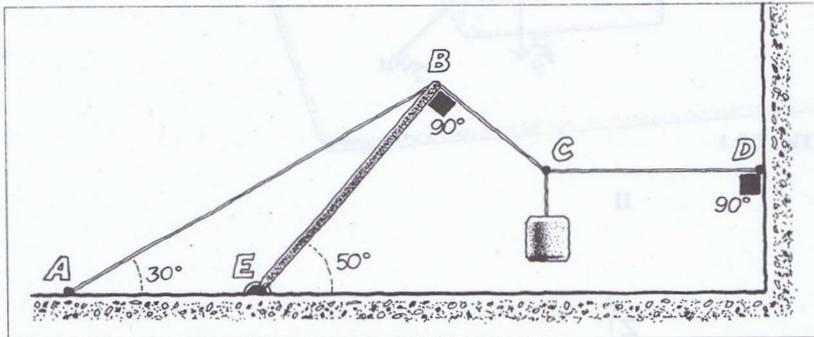


Fig. 9.57

Determinar as tensões nos cabos —  $AB$ ,  $BC$  e  $CD$ , sabendo que a massa suspensa pesa 1000 N.

# Teste de auto-avaliação

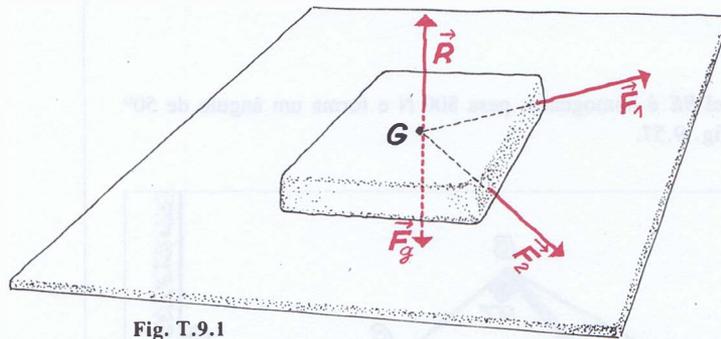
## I

1. Que se entende por *reduzir* um sistema de forças?
2. O sistema de forças que actua num bloco assente numa mesa horizontal e representado na fig. T.9.1 é tal que as forças horizontais aplicadas,  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , possuem linhas de acção passando pelo centro de gravidade,  $G$ . Indicar, justificando, se esse sistema é redutível a uma força única, ou a um binário, ou a uma força e um binário.  
Como se poderá equilibrar o sistema?
3. O momento resultante de um sistema de forças num ponto  $O$  é diferente de zero e a sua resultante é nula:

$$\vec{M}_O \neq \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{F} = \vec{0}$$

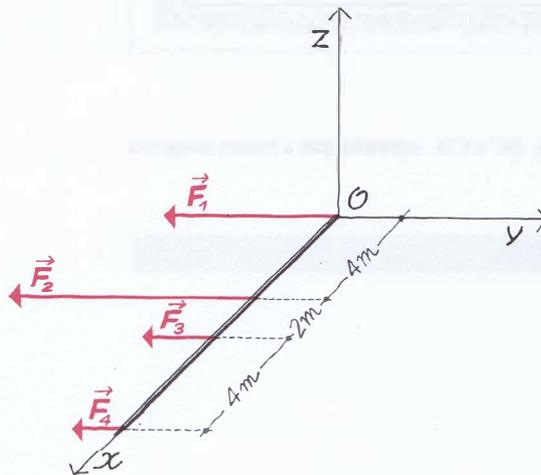
3.1. Provar que o momento resultante desse sistema é independente do ponto em relação ao qual se calcula.

3.2. A que é equivalente o sistema de forças referido?



## II

Quatro forças paralelas, de intensidades



$$|\vec{F}_1| = 8,0 \text{ N} \quad |\vec{F}_2| = 10,0 \text{ N}$$

$$|\vec{F}_3| = 4,0 \text{ N} \quad |\vec{F}_4| = 2,0 \text{ N},$$

actúan numa barra dirigida segundo o eixo  $Ox$ , e têm sentido oposto a  $Oy$  (fig. T.9.2).

Determinar vectorialmente a sua resultante e a respectiva linha de acção de modo a ser equivalente às forças do sistema.

### III

Um corpo de massa 100 kg é levantado por meio de uma roldana apoiada numa barra rígida e homogénea, de massa 50 kg. Esta, por sua vez, está apoiada em duas cunhas,  $A_1$  e  $A_2$  — fig. T.9.3.

O corpo sobe com a aceleração constante de  $4,0 \text{ ms}^{-2}$ .

Desprezando as dimensões, a massa da roldana e a massa da corda, determinar as acções nos apoios  $A_1$  e  $A_2$ . ( $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ )

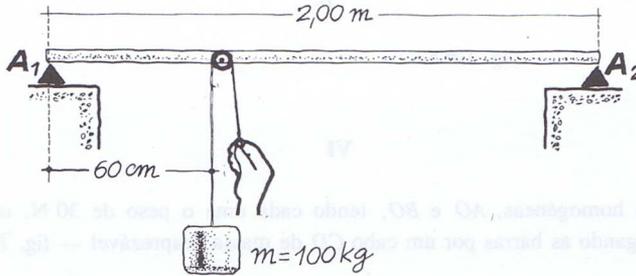


Fig. T.9.3

### IV

Uma barra  $AB$ , de peso desprezável e comprimento  $l$ , pode rodar em torno de uma charneira fixa, em  $A$ , na parede. A barra está em equilíbrio porque é sustentada por um cabo  $BC$ , que forma um ângulo  $\theta$  com a barra. Um corpo de peso  $\vec{F}_g$  e dimensões desprezáveis move-se ao longo da barra, sem desequilibrar o sistema — fig. T.9.4.

Estabelecer as relações

$$T = f(x) \text{ e } R = f(x)$$

que exprimem a tensão  $T$  do cabo e a reacção  $R$ , em  $A$ , em função da distância  $x$  do corpo a  $A$ .

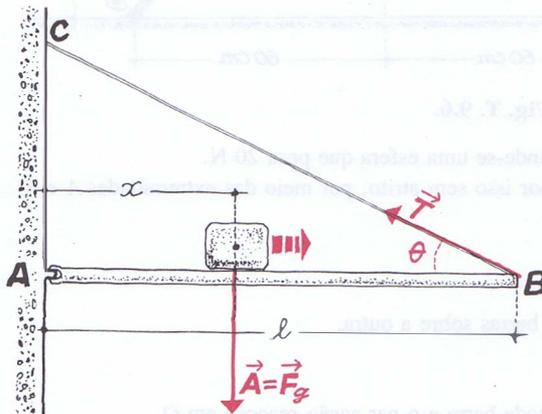


Fig. T.9.4

V

Cada um dos blocos iguais indicados na fig. T. 9.5 tem o peso  $F_g$ . O bloco do meio está metade saído dos outros. O bloco inferior está metade de fora da mesa. Os blocos estão ligados rigidamente.

Qual é a força  $\vec{F}$  que é preciso exercer na extremidade do bloco superior para manter o equilíbrio?

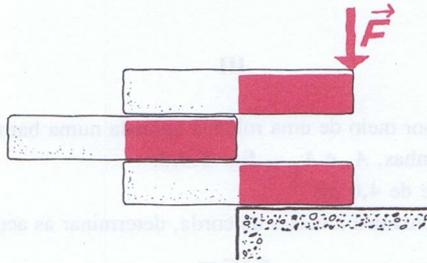


Fig. T.9.5

VI

Construiu-se com duas barras homogêneas,  $AO$  e  $BO$ , tendo cada uma o peso de 30 N, uma armação, juntando duas extremidades num ponto,  $O$ , e ligando as barras por um cabo  $CD$  de massa desprezável — fig. T. 9.6.

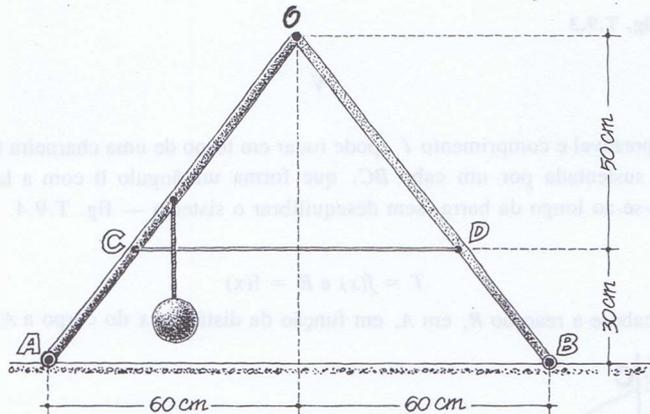


Fig. T. 9.6.

Do centro de gravidade da barra  $AO$  suspende-se uma esfera que pesa 20 N.

A armação está apoiada na mesa polida, por isso sem atrito, por meio das extremidades  $A$  e  $B$ .

Determinar:

1. As reacções nos apoios  $A$  e  $B$ .
2. A tensão do cabo  $CD$  que une as barras.
3. A força exercida em  $O$  por cada uma das barras sobre a outra.

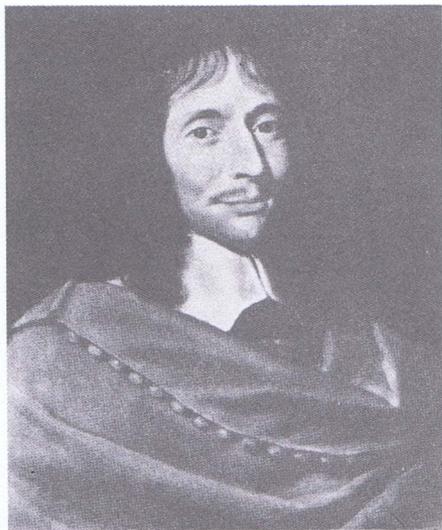
**Sugestão:**

Considerar, em separado, o equilíbrio de cada barra e o par acção-reacção em  $O$ .

# Mecânica dos fluidos

## UNIDADE

# 10



Blaise PASCAL (1623-1662)

Em 1663, é publicado o «Tratado de equilíbrio dos fluidos», trabalho de Hidrostática onde Pascal estabeleceu a lei (conhecida por princípio) que tem o seu nome e que levou à construção da prensa hidráulica. Escreveu ainda o «Tratado do peso e massa de ar»: neste trabalho estudou a pressão atmosférica. Notável para a época, salientamos esta, entre muitas das suas lúcidas afirmações:

«Em matéria de ciência, só os sentidos e a razão têm valor, e não a autoridade.»

Foi um exemplo de rara precocidade — aos 12 anos escrevia um tratado de *Acústica*; aos 16 anos, o *Tratado das Cônicas*, que causou a admiração de *Descartes*; aos 19 anos, inventava a máquina de calcular (adições e subtrações).

De saúde muito débil, a partir dos 31 anos tornou-se místico e isolou-se, após o desastre com o seu carro de cavalos na ponte de Neully e do qual saiu ileso. Morreu resignadamente, vítima de cruéis enfermidades.



Daniel BERNOULLI (1700-1782)

Em 1738, publica o «*Tratado de hidrodinâmica*», primeira obra escrita sobre o assunto, onde aplica o «princípio da conservação das forças».

Foi um dos primeiros físicos a emitir a ideia dos *movimentos moleculares* — a base do *modelo cinético-molecular* para líquidos e gases.

Contrariamente a seu pai, *João Bernoulli*, venerado mas invejoso, que muitas vezes o tratou asperamente e como rival, Daniel era modesto e assinava humildemente os seus valiosos trabalhos com este nome simples: «o filho de João Bernoulli»...

Foi contemporâneo de *Euler*, com quem teve vivas discussões científicas. Destas resultou o estudo analítico das cordas vibrantes e a sua teoria dos tubos de órgão. Esta rivalidade científica em nada prejudicou, porém, a amizade que estes dois sábios mutuamente se tributavam.

Um e outro eram dotados de bondade e nobreza incomuns.

# Mecânica dos fluidos

UNIDADE

- 10. 1** Conceitos de partida
  - 10. 1.1 Que são fluidos
  - 10. 1.2 Viscosidade dos fluidos
  - 10. 1.3 Equilíbrio hidrostático
  - 10. 1.4 Estática dos fluidos e dinâmica dos fluidos
- 10. 2** Densidade (massa volúmica ou específica), densidade relativa e pressão
  - 10. 2.1 Densidade de uma substância (massa volúmica ou específica)
  - 10. 2.2 Densidade relativa de uma substância
  - 10. 2.3 Pressão
- 10. 3** Lei fundamental da hidrostática ou lei de Stevin
- 10. 4** Algumas aplicações da lei fundamental
  - 10. 4.1 Forma da superfície livre de um líquido em repouso (equilíbrio hidrostático)
  - 10. 4.2 Forma da superfície livre de um líquido em movimento de rotação uniforme
  - 10. 4.3 O «paradoxo hidrostático»
- 10. 5** Pressão atmosférica e experiência de Torricelli
  - 10.5.1 Pressão atmosférica
  - 10.5.2 Experiência de Torricelli. Barómetros
- 10. 6** Lei de Pascal. Prensa hidráulica
- 10. 7** Lei de Arquimedes
  - 10. 7.1 Lei de Arquimedes
  - 10. 7.2 Equilíbrio dos corpos parcial ou totalmente imersos num líquido
- 10. 8** Movimento estacionário de um fluido e movimento não estacionário ou turbulento
  - 10. 8.1 A dinâmica dos fluidos
  - 10. 8.2 Movimento estacionário e não estacionário ou turbulento
  - 10. 8.3 Linhas de corrente
  - 10. 8.4. Escoamento de fluidos ideais
- 10. 9** Equação da continuidade
- 10.10** Equação fundamental da hidrodinâmica ou lei de Bernoulli
- 10.11** Algumas aplicações da lei de Bernoulli
  - 10.11.1 Tubo de Venturi
  - 10.11.2 Tubo de Pitot
  - 10.11.3 Impulsão dinâmica. Sustentação do avião



Fig. 10.11.3. Impulsão dinâmica. Sustentação do avião.

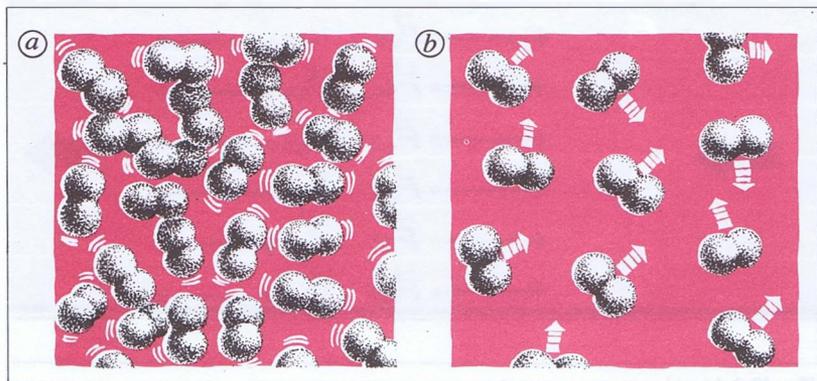
Fig. 10.11.3. Impulsão dinâmica. Sustentação do avião. A sustentação é a força que atua perpendicularmente à direção do escoamento do fluido, resultante da diferença de pressão entre a face superior e inferior da asa. A sustentação é essencial para o voo de um avião, permitindo que ele se mantenha no ar. A sustentação é gerada devido à curvatura da asa, que cria uma diferença de pressão entre a face superior (sucção) e a face inferior (empuxão). A sustentação é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade do escoamento e à área da asa. A sustentação é uma das forças que atuam sobre um avião, juntamente com o peso, a tração e a resistência do ar. A sustentação é essencial para o voo de um avião, permitindo que ele se mantenha no ar. A sustentação é gerada devido à curvatura da asa, que cria uma diferença de pressão entre a face superior (sucção) e a face inferior (empuxão). A sustentação é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade do escoamento e à área da asa. A sustentação é uma das forças que atuam sobre um avião, juntamente com o peso, a tração e a resistência do ar.

# Mecânica dos fluidos

## 10.1 Conceitos de partida

### 10.1.1 Que são fluidos

Os **fluidos** são substâncias que podem *fluir*, escoar-se, com maior ou menor facilidade — ou porque as suas partículas não ocupam posições fixas, movendo-se umas *em redor* das outras, rolando encostadas, mudando de vizinhança, deslocando-se com pequeno atrito, como os **líquidos**; ou porque as suas partículas estão muito afastadas umas das outras, na ordem dos 100 diâmetros, e se deslocam rápida e erráticamente em todo o espaço do recipiente contenedor, colidindo umas com outras, como os **gases** — fig. 10.1.



**Fig. 10.1**

(a) No estado líquido, não há estrutura organizada, cristalina, mas as distâncias intermoleculares ainda são pequenas (as moléculas giram, *rolam*, umas sobre as outras).

(b) No estado gasoso, as moléculas deslocam-se aleatoriamente e livremente em *translação*, **colidindo**.

As distâncias intermoleculares não estão na mesma escala dos diâmetros moleculares — porquê?

Resulta daqui que:

- 1.º — Os líquidos *não têm forma própria* (adaptam-se aos contornos dos recipientes que os contêm) mas *têm volume definido* e são *quase incompressíveis*.
- 2.º — Os gases *não têm forma própria nem volume definido* (ocupam todo o espaço que lhes é oferecido por um recipiente fechado, por maior que seja) e são *altamente compressíveis*.
- 3.º — Os fluidos **não reagem** a qualquer força que implique variação de forma, adaptando-se sempre à forma dos vasos que os contêm.

### 10.1.2 Viscosidade nos fluidos

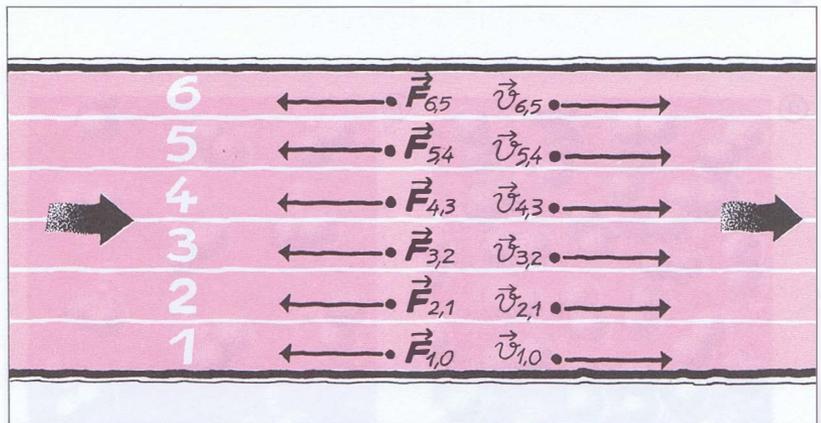
Consideremos um líquido a escoar-se lentamente ao longo de uma conduta e *imaginemos* este caudal dividido, por exemplo, em seis camadas paralelas — fig. 10.2.

Chamamos **viscosidade do fluido** ao atrito interno do fluido, ou seja à *força de atrito entre as camadas diferentes de fluido* que se movem com *velocidades relativas diferentes*.

Esta força de atrito interno *aumenta* com a velocidade relativa, é oposta a esta e, para velocidades pequenas, é proporcional à velocidade relativa.

A viscosidade depende, naturalmente, das forças de ligação intermolecular e é, por isso, uma característica de cada substância líquida. É grande para os líquidos ditos «muito viscosos», como por exemplo a glicerina.

Nos gases, a viscosidade é praticamente nula em virtude dos grandes espaços intermoleculares.



**Fig. 10.2** Líquido em escoamento lento.

Camadas 1 e 2:

$\vec{v}_{2,1}$  — é a *velocidade relativa* da camada 2 em relação à camada 1;

$\vec{F}_{2,1}$  — é a *força de atrito interno* exercida sobre a camada 2 pela camada 1, oposta ao movimento da camada 2 (isto é, a  $\vec{v}_{2,1}$ ).

A leitura é idêntica para os pares de camadas (2, 3), (3, 4), (4, 5) e (5, 6);  $\vec{F}_{1,0}$  é a força de atrito exercida sobre a camada 1 pela parede (não é atrito interno).

### 10.1.3 Equilíbrio hidrostático

Em termos mecânicos, diz-se que um **fluido** está em **equilíbrio hidrostático**, num espaço retentor, quando o *número de partículas por unidade de volume se mantém constante*. Isto significa, por outras palavras, que em qualquer região, no interior do fluido, não há acumulação nem esvaziamento de partículas de fluido. Um líquido **em repouso** está em equilíbrio hidrostático.

O repouso refere-se, como é óbvio, ao que se observa na escala macroscópica, visto que, a nível microscópico, ou seja das moléculas, átomos e iões, tal repouso não existe. E o nome de equilíbrio hidrostático é um nome tradicional, porque resultou da circunstância de ter sido primeiramente estudado com a água.

Nos líquidos, o número de partículas por unidade de volume é da ordem de  $10^{19}$  partículas por cada volume esférico de raio igual a cerca de 0,5 mm, salvo *flutuações* de um ou alguns (poucos) milhares, macroscopicamente indetectáveis.

Nestas condições, podemos afirmar que:

- 1.º — Em *equilíbrio hidrostático*, não há *velocidade relativa* das partículas de fluido e, por isso, não há que considerar a viscosidade.
- 2.º — Em *equilíbrio hidrostático*, as *forças de acção* do fluido *sobre as paredes dos vasos* que os contêm são *perpendiculares a estas*: se as acções sobre as paredes tivessem componentes tangenciais, as respectivas reacções tangenciais das paredes implicariam escorregamento do fluido ao longo das paredes e ele deixaria de estar em repouso, isto é, em equilíbrio hidrostático.

### 10.1.4 Estática dos fluidos e dinâmica dos fluidos

Encaramos esta Unidade como uma aplicação da Mecânica. A esta luz e de acordo com as recomendações expressas no programa do 12.º ano, versão de Junho de 1980, *deduziremos* a equação fundamental do equilíbrio hidrostático, a equação fundamental do movimento de um fluido e bem assim as que resultam destas, aplicando as leis fundamentais da Mecânica. Em particular, os clássicos «princípios» de Pascal e de Arquimedes, *induzidos* experimentalmente, vão ser também *deduzidos*.

Na **Estática dos fluidos** ou **Hidrostática** faz-se o estudo dos *líquidos ideais em repouso* e dos *gases não em escoamento*.

Os líquidos ideais, isto é, incompressíveis e sem viscosidade, e os gases, quando não estão a escoar-se, obedecem, de facto, às mesmas leis básicas, não obstante as diferenças de comportamento quando variam a pressão e a temperatura, que, como sabemos, afectam muito mais os gases.

Na **Hidrostática** faz-se o estudo mecânico do comportamento dos fluidos (líquidos e gases) em *equilíbrio hidrostático*. Este equilíbrio corresponde ao repouso na escala macroscópica e ao movimento aleatório das partículas de fluido, a nível microscópico, tal que, num dado volume, o número de partículas se mantém estatisticamente constante.

Na **Hidrodinâmica** estuda-se o escoamento dos fluidos.

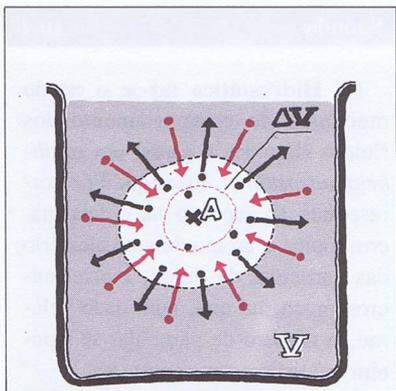


Fig. 10.3 O volume  $V$  de líquido vertido no vaso tem a massa  $m$ . A densidade do líquido num ponto  $A$ , interior ao volume  $\Delta V$ , que contém a massa  $\Delta m$  de líquido, é:

$$\rho_A = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

Na **Dinâmica dos fluidos** ou **Hidrodinâmica** far-se-á apenas uma primeira abordagem do estudo dos fluidos (líquidos e gases) em *escoamento estacionário* (velocidades de escoamento pequenas e não dependentes do tempo).

Finalmente, desde já, observamos: embora o comportamento estático como o comportamento dinâmico dos fluidos se fundamente nas *leis de Newton*, combinadas com as *leis de força* correspondentes, há, no entanto, uma técnica específica para o tratamento destas questões, como vamos ver.

## 10.2 Densidade (massa volúmica ou específica), densidade relativa e pressão

### 10.2.1 Densidade de uma substância (massa volúmica ou específica)

Verte-se num vaso uma certa massa  $m$  de líquido. O volume ocupado pelo líquido é  $V$  — fig. 10.3.

O quociente

$$\rho_m = \frac{m}{V},$$

que indica o valor médio da massa de líquido por unidade de volume, chama-se **densidade média** ou **massa volúmica média** do líquido.

Podemos determinar a **densidade num ponto A** ou **massa volúmica num ponto A**, envolvido por um volume muito pequeno  $\Delta V$  (fig. 7.3), determinando o limite da densidade média quando diminuimos sucessivamente o volume  $\Delta V$ , fazendo-o tender para zero. Ou seja:

$$\rho_A = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

Se o líquido é homogéneo e está *em equilíbrio hidrostático* — a «população» molecular de um volume  $\Delta V$  é *quantitativamente invariante*, pois o número de partículas que entram é igual, estatisticamente, ao número de partículas que saem —, então a densidade (ou massa volúmica) é a mesma em qualquer ponto e constitui, por isso, uma propriedade característica do líquido, designada simplesmente por **densidade** (ou **massa volúmica**) desse líquido —  $\rho$ .

Esta definição é extensível aos sólidos, gases e plasmas — precisamente porque o conceito de densidade é um conceito estatístico e universal.

A unidade SI de densidade (ou massa volúmica) é:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \text{kg/m}^3 \Leftrightarrow \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

Assim, a densidade da água, a 4° C, é 1000 kg/m³; a densidade do ar, em condições atmosféricas normais, é 1,293 kg/m³.

Estas unidades nem sempre são práticas. Por esta razão se utilizam também outras, a saber:

g/cm³, para sólidos e líquidos;  
g/dm³, para gases.

A **densidade** (ou massa volúmica) varia com as condições físicas, como a temperatura e a pressão. Esta variação é pequena nos sólidos e líquidos (por serem quase incompressíveis) e é muito apreciável nos gases (por serem muito compressíveis).

**TABELA DE DENSIDADES — em g/cm³**

Subst. sólidas	$\rho$	Subst. líquidas	$\rho$	Subst. gasosas (condições normais)	$\rho$
cortiça	0,24	gasolina	0,72	vapor de água	$0,80 \times 10^{-3}$
madeira	$\approx 0,50$		0,76	<b>ar</b>	<b><math>1,293 \times 10^{-3}</math></b>
		álc. etil. a 20° C	0,79	azoto	$1,25 \times 10^{-3}$
gelo	0,92	<b>água a 4° C</b>	<b>1,000</b>	oxigénio	$1,43 \times 10^{-3}$
			1,03		
aluminio	2,7	leite de vaca	a	hélio	$1,78 \times 10^{-4}$
ferro	7,8		1,06	hidrogénio	$8,99 \times 10^{-5}$
cobre	8,9	glicerina a 20° C	1,26		
prata	10,5	mercúrio	13,60		
ouro	19,3				
platina	21,4				
	média				
Terra	núcleo				
	crosta				
Sol (média)	1,41				

Associada à massa volúmica (ou densidade) anda o **peso volúmico**, que é o valor do peso correspondente à massa volúmica das substâncias. Como, estando os corpos em repouso, o peso coincide praticamente com a força gravítica (é irrelevante a correcção relativa à força centrífuga da Terra), isto é,

$$\text{valor do peso} = F_g = m \cdot g,$$

o peso volúmico será o produto da densidade ou massa volúmica da substância pela aceleração local da gravidade:

$$\rho g$$

O valor médio da massa de um líquido por unidade de volume é uma grandeza chamada **densidade média** ou **massa volúmica média**:

$$\rho_m = \frac{m}{V}$$

A **densidade de um líquido num ponto A** é a grandeza

$$\rho_A = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV},$$

sendo  $\Delta V$  um volume que contém o ponto e tende para zero.

Para um *líquido homogéneo* e *em equilíbrio hidrostático*, a densidade é a mesma em todos os pontos e é dada por

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Enquanto a designação **massa específica** (em vez de massa volúmica ou densidade) tem fundamento, em virtude de especificar a substância em causa, a designação de peso específico é incorrecta, pois não se trata de uma grandeza característica da substância, visto que não depende só desta, mas, também, da aceleração local da gravidade —  $g$ .

### 10.2.2 Densidade relativa de uma substância

Se compararmos as massas,  $m$  e  $m_p$ , de duas substâncias, **com o mesmo volume**, determinando o quociente

$$d = \frac{m}{m_p}$$

destas massas, obtemos a chamada **densidade relativa** de uma substância em relação a outra (que se escolhe para padrão). Por isso, nesta fórmula (equação de definição), temos:

$m$  = massa de um volume  $V$  de uma dada substância

$m_p$  = massa do mesmo volume  $V$  da substância-padrão.

Para os sólidos e líquidos, escolheu-se a *água a 4° C* para substância padrão. Para os gases, foi escolhido o *ar* nas mesmas condições em que se encontra o gás cuja densidade relativa pretendemos.

A densidade relativa,  $d$ , é uma grandeza física que *não tem unidades*, quer dizer, o seu valor é um número abstracto e é o mesmo em qualquer sistema de unidades. Trata-se de um número que compara quantidades de grandezas da mesma espécie, indicando, apenas, quantas vezes uma é maior ou menor do que a outra. No caso vertente, se a densidade relativa de uma substância sólida for 8, o significado é o seguinte: a massa de um dado volume dessa substância é oito vezes maior do que a massa de *igual volume* de água a 4° C.

Por fim, se considerarmos que o mesmo volume  $V$  das substâncias cujas massas comparamos é um volume qualquer, sem nenhuma restrição, podemos escolher um *volume unitário*. Então teremos, numericamente,

$$m = \rho \quad \text{e} \quad m_p = \rho_p,$$

e a *densidade relativa* poderá calcular-se pelo *quociente das densidades*  $\rho$  e  $\rho_p$ ,

$$d = \frac{\rho}{\rho_p},$$

que normalmente se encontram em Tabelas.

#### Súmula

#### 10.3

A **densidade relativa** de uma substância em relação a outra tomada para padrão é o quociente da massa de um dado volume da substância pela massa de um volume igual da substância padrão.

Para os *sólidos* e *líquidos*, utiliza-se a *água pura a 4° C* como substância padrão.

Para os *gases*, usa-se o *ar* nas mesmas condições de pressão e temperatura.

## QUESTÕES PROPOSTAS

### Q 10.1

Mostrar que, exprimindo a densidade em  $\text{g/cm}^3$ , a densidade de uma substância e a sua densidade relativa:

1. Têm o mesmo valor numérico nos sólidos e líquidos.
2. Têm valores diferentes nos gases.

### Q 10.2

Um cabo eléctrico de alta tensão, de alumínio, tem 8,0 mm de diâmetro. Calcular a sua massa por quilómetro (recorrer à Tabela de Densidades).

### 10.2.3 Pressão

Consideremos uma superfície  $S$  e, nesta, um ponto  $A$  rodeado por uma superfície muito pequena,  $\Delta S$  — fig. 10.4.

Nesta superfície  $\Delta S$  actuam, **perpendicularmente**, forças cuja resultante é  $\Delta \vec{F}$ . Ao quociente

$$p_m = \frac{\Delta F}{\Delta S},$$

onde  $\Delta F$  é a intensidade da força resultante, chama-se **pressão média** exercida na superfície  $\Delta S$ .

Ao limite deste quociente, quando  $\Delta S$  diminui, tendendo para zero, chamamos **pressão no ponto  $A$**  da superfície:

$$p_A = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} p_m = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}.$$

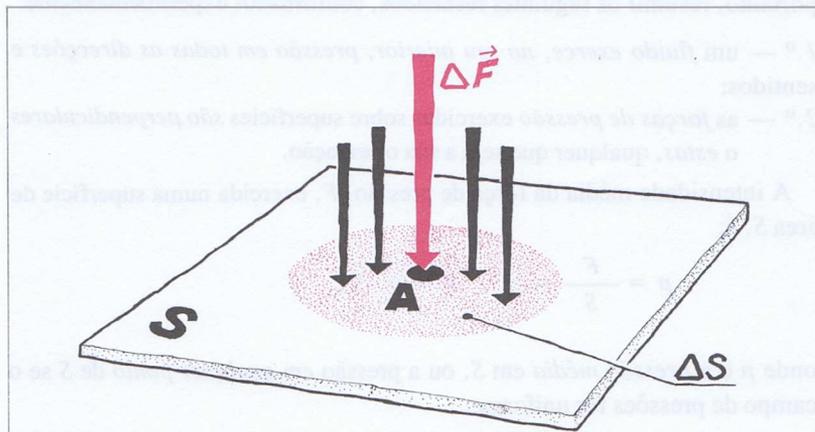


Fig. 10.4 A pressão no ponto  $A$  da superfície é o escalar:

$$p_A = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}$$

Quando numa superfície actuam forças que a comprimem — *forças de pressão* — define-se uma grandeza, *pressão*, como o *quociente*

$$p = \frac{F}{S},$$

sendo  $F$  a força total que actua uniformemente e perpendicularmente na superfície  $S$ .

A unidade SI de pressão é o *newton por metro quadrado* ou *pascal* (Pa).

No caso de a pressão ser igual em todos os pontos da superfície  $S$ , diz-se que esta se encontra submetida a um *campo escalar uniforme de pressões*. Nestas condições, a pressão em qualquer ponto coincide com o valor da pressão média. E sendo  $\vec{F}$  a força total que actua perpendicularmente e uniformemente na superfície  $S$ , a pressão a que esta fica submetida é

$$p = \frac{F}{S} = \text{const.}^e$$

A unidade SI de pressão é:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ m}^2} = \text{N/m}^2 \Leftrightarrow \text{N m}^{-2} = \text{pascal (Pa)}$$

Quando as forças não actuam perpendicularmente, são as suas componentes perpendiculares às superfícies que pressionam estas e que, como tal, devem entrar no cálculo da pressão.

Os fluidos não reagem às forças tangenciais e, portanto, como vimos em 10.1.3, escorrem, escoam-se, quando não estão em equilíbrio hidrostático. Deste modo, insistimos, os fluidos, quando em equilíbrio hidrostático, exercem forças de pressão perpendiculares às superfícies.

Por isso, a *pressão*, como escalar que mede a força perpendicular exercida por unidade de superfície, é uma grandeza muito importante no estudo dos fluidos em equilíbrio.

Assim, consideremos um «cubo» de líquido *orientado de qualquer maneira* no interior do líquido em equilíbrio hidrostático — fig.10.5. Sobre as faces deste cubo imaginário exercem-se, perpendicularmente, forças pelo líquido à sua volta, apontando para dentro do cubo. O líquido do cubo reagirá com forças simétricas destas, perpendiculares, por isso, às faces do cubo e dirigidas para fora (segundo a lei da acção e reacção). Podemos, portanto, resumir os seguintes resultados, confirmados experimentalmente:

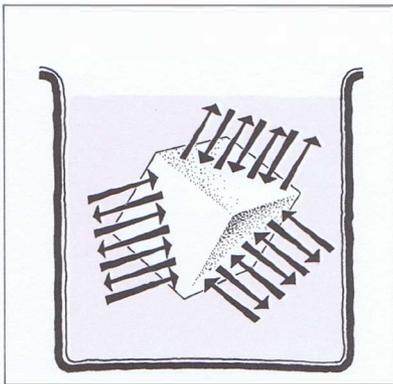
- 1.º — um fluido exerce, no seu interior, pressão em todas as direcções e sentidos;
- 2.º — as forças de pressão exercidas sobre superfícies são perpendiculares a estas, qualquer que seja a sua orientação.

A intensidade média da força de pressão,  $F$ , exercida numa superfície de área  $S$ , é:

$$p = \frac{F}{S} \Rightarrow F = p \cdot S,$$

onde  $p$  é a *pressão média* em  $S$ , ou a *pressão em qualquer ponto* de  $S$  se o campo de pressões for uniforme.

No caso de um líquido em *equilíbrio hidrostático*, em vaso aberto, esta *força de pressão, para a mesma superfície, aumenta com a profundidade  $h$  da coluna líquida compressora* — fig. 10.6.



**Fig. 10.5** Um «cubo» de líquido em repouso reage às forças exercidas pelo fluido circundante, também em repouso, com forças simétricas destas, em todas as direcções.

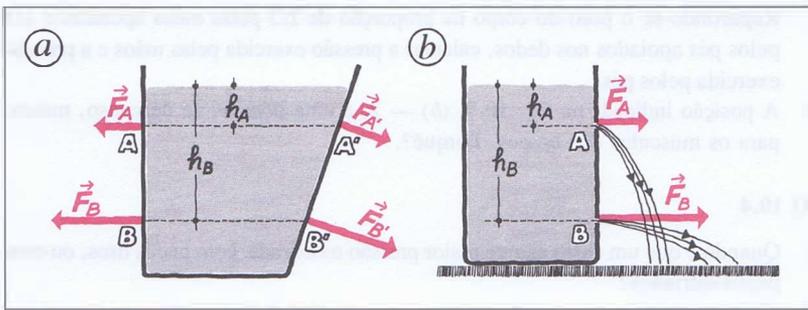


Fig. 10.6

(a) As forças de pressão são perpendiculares às superfícies e aumentam com a distância à superfície livre (profundidade).

Para superfícies iguais, tem-se:

$$|\vec{F}_A| = |\vec{F}_{A'}|, \text{ porque têm igual } h_A;$$

$$|\vec{F}_B| = |\vec{F}_{B'}|, \text{ porque têm igual } h_B.$$

(b) Com um vaso cilíndrico de folha metálica (embalagens de conservas ou de líquidos, p.ex.), perfurado a alturas diferentes, cheio de água, podem improvisar-se experiências comprovativas das conclusões anteriores, colocando o vaso quer na posição vertical (como no caso da figura) quer inclinado.

QUESTÕES PROPOSTAS

Q 10.3

1. Determinar a pressão em cada um dos três casos indicados na fig. 10.7, (a).

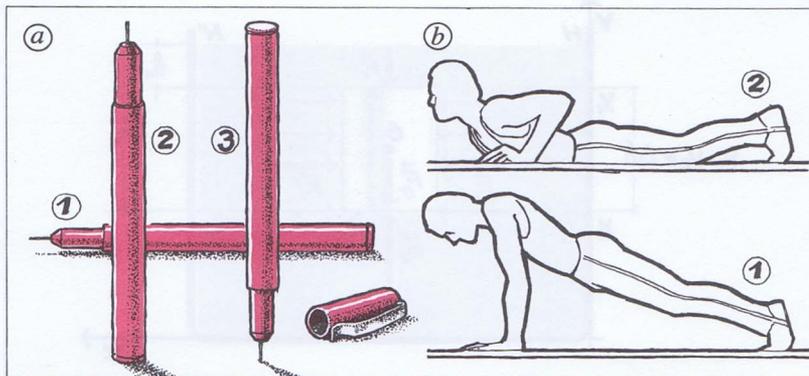
Dados:

- peso — 50 gf;
- secção da base — 0,8 cm<sup>2</sup>; secção da ponta — 0,20 mm<sup>2</sup>;
- comprimento — 10 cm; largura da base longitudinal de apoio — 0,2 mm.

2. O ginasta pesa 72 kgf — fig. 10.7, (b) — 1.

área da base de apoio de cada mão — 150 cm<sup>2</sup>

área da base de apoio do conjunto dos dedos em cada pé — 12 cm<sup>2</sup>



Numa porção elementar,  $\Delta S$ , da parede do vaso que contém um líquido em equilíbrio, este exerce uma força de pressão que:

- é perpendicular à parede;
- aumenta com a distância à superfície livre.

Numa superfície elementar situada no interior do líquido, este exerce uma força de pressão que:

- é perpendicular à superfície;
- actua em ambas as faces dela;
- tem a mesma intensidade em ambas as faces;
- aumenta com a distância à superfície livre.

A cada ponto de um líquido em equilíbrio corresponde um escalar pressão no ponto — dado por

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS},$$

sendo  $\Delta F$  a força de pressão que actua na superfície  $\Delta S$  que contém o ponto.

Fig. 10.7

Repartindo-se o peso do corpo na proporção de 2/3 pelas mãos apoiadas e 1/3 pelos pés apoiados nos dedos, calcular a pressão exercida pelas mãos e a pressão exercida pelos pés.

3. A posição indicada na fig. 10.7, (b) — 2, é uma posição de descanso, mesmo para os músculos dos braços. Porquê?.

#### Q 10.4

- Quando é que um carro exerce maior pressão na estrada: com pneus lisos, ou com pneus estriados?
- Nos dias chuvosos e considerando a *incompressibilidade da água*, convém que os pneus exerçam a maior ou a menor pressão possível?  
Indicar os pneus mais convenientes.

#### Q 10.5

Num recipiente fechado, a pressão exercida em qualquer ponto, por um *líquido* nele introduzido,  *aumenta com a distância do ponto à superfície livre do líquido*.

Mas a pressão exercida por um *gás* encerrado no referido recipiente é *a mesma* em qualquer ponto do interior.

Interpretar estes comportamentos diferentes, verificados experimentalmente.

### 10.3 Lei fundamental da hidrostática ou lei de Stevin

Consideremos um fluido homogéneo em equilíbrio hidrostático. Nesta situação, qualquer porção de fluido também está em equilíbrio. Portanto, se imaginarmos um «cilindro» de fluido isolado, no interior do fluido total, esta porção cilíndrica de fluido está em equilíbrio — fig. 10.8.

Seja

$$\Delta h = y_1 - y_2 = h_2 - h_1$$

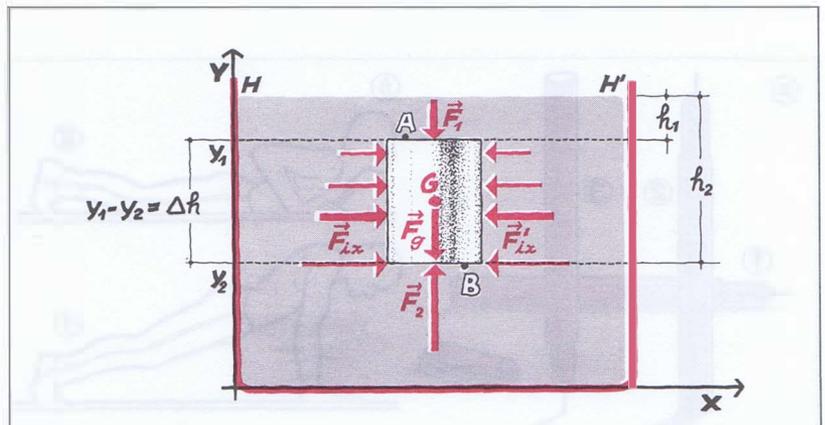


Fig. 10.8 A diferença de pressão entre os pontos A e B, cuja diferença de nível é

$$\Delta h = y_1 - y_2,$$

calcula-se pela equação fundamental:

$$\Delta p = \rho g \cdot \Delta h$$

a diferença de nível entre os pontos  $A$  (da base superior do cilindro) e  $B$  (da base inferior), e  $\Delta S$  a área da base deste cilindro.

Admitindo com *Stevin* (1548-1620) que o equilíbrio dos fluidos obedece às leis mecânicas do equilíbrio dos corpos sólidos, o «cilindro» de fluido, que imaginamos isolado, está em equilíbrio sob a acção das seguintes forças:

- as forças de pressão laterais,  $\vec{F}_{ix}$  e  $\vec{F}'_{ix}$ , perpendiculares às faces laterais, exercidas pelo fluido circundante;
- as forças de pressão verticais,  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , perpendiculares às bases, também exercidas pelo fluido circundante;
- a força gravítica,  $\vec{F}_g$ , aplicada no centro de gravidade,  $G$ , do «cilindro» de fluido.

Como se trata, em cada secção vertical do volume de fluido, de forças coplanares, o momento resultante é igual ao momento da resultante. Se esta for nula, o respectivo momento em qualquer ponto também será nulo. A condição de equilíbrio reduz-se, por isso, a ser nula a resultante, isto é:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_g + \sum_i (\vec{F}_{ix} + \vec{F}'_{ix}) = \vec{0}$$

A esta equação vectorial correspondem as equações escalares

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum (F_{ix} + F'_{ix}) = 0 \\ -F_1 + F_2 - F_g = 0 \end{cases}$$

Como os pares  $\vec{F}_{ix}$  e  $\vec{F}'_{ix}$ , porque estão ao mesmo nível, são simétricos, a condição  $F_x = 0$  está sempre satisfeita.

Quanto à condição que resta

$$F_y = 0,$$

como o fluido está em equilíbrio, ela terá igualmente de ser satisfeita. Temos, então, sucessivamente:

$$F_2 - F_1 = F_g \Leftrightarrow p_2 \cdot \Delta S - p_1 \Delta S = m g$$

Sendo  $\rho$  a densidade do fluido, a massa  $m$  do «cilindro» de fluido será

$$m = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot \Delta S (y_1 - y_2).$$

Introduzindo este valor de  $m$  na equação anterior e simplificando, obtemos:

$$p_2 - p_1 = \rho g (y_1 - y_2) \Leftrightarrow \Delta p = \rho g \Delta h$$



A diferença de pressão entre dois pontos de um líquido em equilíbrio hidrostático é proporcional ao desnível entre esses pontos:

$$\Delta p = \rho g \cdot \Delta h ,$$

sendo  $\rho$  a densidade do líquido.

Desta lei fundamental da Hidrostática infere-se que a pressão num ponto de um líquido em equilíbrio hidrostático é:

$$p = p_o + \rho g h .$$

sendo  $p_o$  a pressão exercida na superfície livre e  $h$  a profundidade a que se encontra o ponto no interior do líquido.

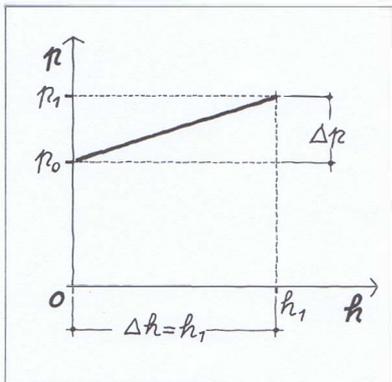


Fig. 10.9 A pressão exercida por um fluido a uma profundidade  $h_1$  é:

$$p_1 = p_o + \Delta p \Leftrightarrow$$

$$p_1 = p_o + \rho g \cdot h_1$$

$p_o$  = pressão exterior exercida na superfície livre ( $h = 0$ )

$\Delta p$  = acréscimo de pressão que é devido ao fluido em equilíbrio e a que se chama muitas vezes *pressão hidrostática*

Esta equação traduz a **lei fundamental da hidrostática** ou **lei de Stevin**. Uma das suas leituras pode ser a seguinte: o aumento de pressão ( $\Delta p$ ) de um fluido, quando se passa de um ponto para outro a maior profundidade, no interior do fluido em equilíbrio hidrostático, depende da densidade ( $\rho$ ) do fluido e é proporcional ao desnível ( $\Delta h$ ) entre os referidos pontos.

Para dois pontos A e B de ordenadas muito próximas,

$$y_1 - y_2 = -(y_2 - y_1) = -dy ,$$

a que corresponde uma diferença infinitesimal de pressão,

$$p_2(y_2) - p_1(y_1) = dp ,$$

a equação fundamental da hidrostática toma a forma

$$dp = -\rho g \cdot dy$$

O sinal menos ( $-$ ) significa que a variação de pressão ocorre em sentido contrário ao da variação da ordenada, isto é:

a maior ordenada (menor profundidade) corresponde menor pressão.

Se tomarmos como variável não a ordenada  $y$ , mas, como convém, a profundidade  $h$ , que se conta a partir da superfície livre  $HH'$  (fig. 10.8) e com a qual aumenta a pressão, a equação fundamental toma a forma mais geral

$$p - p_{HH'} = \rho g \cdot h$$

Designando por  $p_o$  a pressão exterior ou, neste caso, a pressão exercida pelo ar atmosférico na superfície livre  $HH'$ , temos, genericamente:

$$p = p_o + \rho g h$$

A esta equação fundamental correspondente a representação gráfica apresentada na fig. 10.9.

Para os gases, a densidade  $\rho$  é muito pequena comparada com a dos líquidos (ver Tabela da secção 10.2.1) — a ordem de grandeza é mil vezes inferior ou mais — e, por isso, a diferença de pressão entre dois pontos, num vaso fechado, é desprezável. Pode-se comprovar este facto experimentalmente, utilizando manómetros em diferentes pontos. Verifica-se, assim, a nível macroscópico, que a pressão de um gás é a mesma em todos os pontos de um recipiente fechado (ver Q 10.5). Este facto deve-se à constância do número de partículas por unidade de volume e, por isso, à constância do número de colisões por unidade de área e por unidade de tempo.

Porém, para grandes diferenças de nível, em espaços abertos, como a atmosfera, a pressão do ar diminui sensivelmente com a altitude (ver Tabela da secção 10.5.1).

E porquê? Porque, devido à acção gravítica, há maior densidade de partículas nas regiões mais baixas da atmosfera. Como tal, é aí maior o número de colisões por unidade de área e por unidade de tempo.

## 10.4 Algumas aplicações da lei fundamental

### 10.4.1 Forma da superfície livre de um líquido em repouso

É da observação corrente que a superfície livre de um líquido em repouso (equilíbrio hidrostático), num vaso, é **plana e horizontal** — fig. 10.10, (a). E mais: quando vários recipientes comunicam entre si — **vasos comunicantes** — o líquido tende a ficar ao mesmo nível em todos — fig. 10.10, (b).

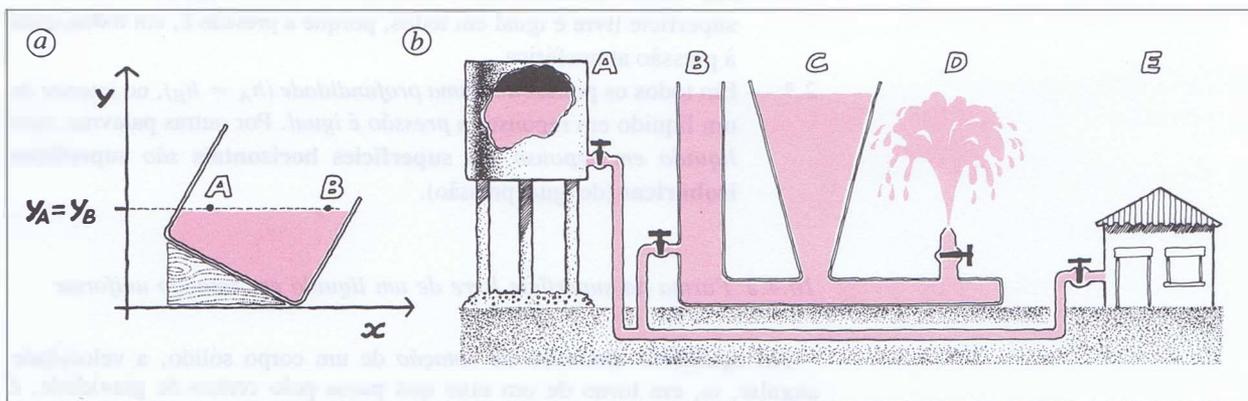


Fig. 10.10

- (a) A superfície livre de um líquido em equilíbrio hidrostático (repouso) é *plana e horizontal*.  
(b) Em recipientes que comunicam entre si, a água que sai do depósito A tende a ficar ao *mesmo nível* em todos os recipientes, qualquer que seja a sua forma.

Quanto maior for o desnível, mais alto sobe o repuxo e com *maior pressão* sai a água nas torneiras de casa.

Daqui resultam inúmeras aplicações práticas, como sejam os indicadores de nível, os repuxos, a distribuição de água às povoações pelo sistema de vasos comunicantes, etc., etc. Os romanos desconheciam o «princípio» dos vasos comunicantes e, por isso, recorreram a aquedutos, hoje conservados e admirados como obras de arte.

A justificação teórica da horizontalidade das superfícies livres dos líquidos é muito simples. Consideremos, para o efeito, os pontos A e B da superfícies livre — fig. 10.10, (a). A pressão exercida em B é igual à pressão exercida em A — é a pressão atmosférica,  $p_0$ , exercida na superfície livre.

Aplicando a equação fundamental aos pontos A e B, temos:

$$p_A - p_B = \rho g \cdot (y_B - y_A) \Leftrightarrow \\ 0 = \rho g (y_B - y_A)$$

Como  $\rho$  e  $g$  são diferentes de zero, terá de ser nulo o termo  $(y_B - y_A)$ , o seja:

$$y_B - y_A = 0 \Leftrightarrow y_B = y_A$$

Para além da *horizontalidade das superfícies livres* dos líquidos em repouso, as igualdades

$$p_A = p_B \Leftrightarrow y_A = y_B \Rightarrow h_A = h_B,$$

onde as profundidades  $h_A$  e  $h_B$  são contadas a partir da superfície livre, ainda nos proporcionam mais duas conclusões:

- 1.<sup>a</sup> — Em vasos comunicantes contendo o mesmo líquido, o nível da superfície livre é igual em todos, porque a pressão é, em todos, igual à pressão atmosférica.
- 2.<sup>a</sup> — Em todos os pontos à mesma profundidade ( $h_A = h_B$ ), no interior de um líquido em repouso, a pressão é igual. Por outras palavras: num líquido em repouso, as **superfícies horizontais são superfícies isobáricas** (de igual pressão).

#### 10.4.2 Forma da superfície livre de um líquido em rotação uniforme

No equilíbrio dinâmico de rotação de um corpo sólido, a velocidade angular,  $\omega$ , em torno de um eixo que passa pelo centro de gravidade, é constante.

Este conceito aplica-se também a um líquido que está dentro de um vaso com movimento de rotação uniforme em torno de um eixo  $Oy$  — fig. 10.11.

Nesta situação de equilíbrio dinâmico, para qualquer partícula genérica,  $P_i$ , da superfície livre, a resultante da força gravítica,  $\vec{F}_g$ , e da força centrífuga,  $\vec{F}_{cf}$ , no referencial acelerado  $(O, x, y)$ , será perpendicular à superfície: é que só assim poderá equilibrar a reacção  $\vec{R}$  do líquido do vaso.

Desenvolvendo a condição

$$\vec{R} + \vec{F}_{cf} + \vec{F}_g = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_{cf} + \vec{F}_g = -\vec{R},$$

que é, por sua vez, equivalente a (fig. 10.11)

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{F_{cf}}{F_g} = \frac{m \omega^2 r}{m g} = \frac{\omega^2 r}{g},$$

obtém-se a equação da linha (A B C) — que é **uma parábola**.

Com efeito, sendo  $r = x$  (abscissa do ponto genérico da linha),

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}$$

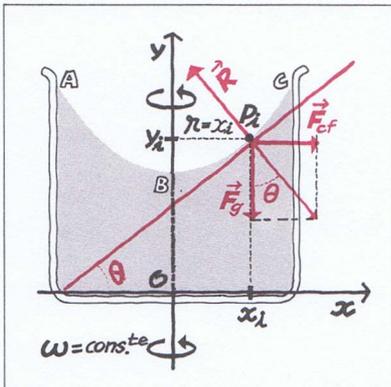


Fig. 10.11 Num vaso em rotação com velocidade angular constante, a superfície livre de um líquido é a de um parabolóide.

A primitiva desta função é (como o estudante pode verificar, derivando):

$$y = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} x^2 \iff x^2 = 2 ky,$$

equação da parábola cujo semi-eixo vertical é o eixo de rotação.

Rodando esta parábola em torno do eixo  $Oy$ , ela gera uma superfície chamada **parabolóide de revolução**.

É esta, pois, a forma da superfície livre de um líquido vertido num vaso em rotação uniforme.

#### 10.4.3 O «paradoxo» hidrostático

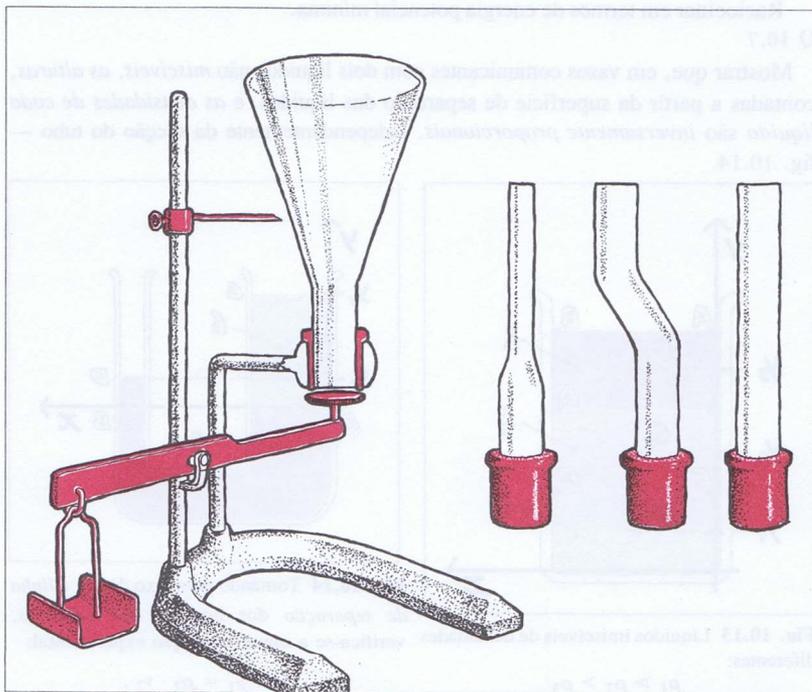
Na fig. 10.12 apresenta-se um modo de utilizar um dispositivo, simples e recreativo, que permite pôr em evidência o histórico «paradoxo hidrostático».

O suporte que *segura os vasos* deve, de início, manter o fundo destes no *mesmo plano horizontal* (para o travessão da balança ficar horizontal). A altura de líquido que se lança nos quatro vasos é a mesma e os fundos dos vasos têm a mesma área.

O *mesmo peso*, colocado no prato esquerdo da balança, equilibra as forças de pressão exercidas pelas *quantidades diferentes* de líquido, desde que este tenha a *mesma altura* em todos os vasos.

O «**paradoxo**» consistia no facto de a balança se manter equilibrada, quando o líquido tinha a mesma altura nos quatro vasos, sendo diferente o peso de líquido em cada vaso!

#### G.E. 10.2



**Fig. 10.12** Os quatro vasos apoiam-se no suporte universal e têm fundos «abertos». As áreas destes fundos são iguais, precisamente, à área do prato direito da balança que tapa os fundos.

Deitando a *mesma altura* de líquido nos quatro vasos, a *balança fica equilibrada* com o *mesmo peso* colocado no prato esquerdo, não obstante ser diferente o peso de líquido em cada vaso.

De entre as várias consequências da lei fundamental da Hidrostática, podemos registar as seguintes:

- 1.<sup>a</sup> — A superfície livre dos líquidos em equilíbrio é plana e horizontal.
- 2.<sup>a</sup> — Um líquido atinge o mesmo nível em todos os vasos de um sistema qualquer de vasos comunicantes.
- 3.<sup>a</sup> — Em pontos de um líquido em equilíbrio hidrostático, à mesma profundidade, a pressão é a mesma.
- 4.<sup>a</sup> — A força de pressão no fundo de um vaso não depende da forma deste nem do peso do líquido, mas, apenas, da área do fundo e da altura do líquido:

$$F = (p_o + \rho g h) S$$

O equívoco consistia no facto de se pensar que era o peso de líquido que actuava no fundo do vaso, quando o que actua neste fundo é a *força de pressão* — e esta é igual nos dois casos!

Porquê?

Com efeito, pela equação fundamental da hidrostática, a **pressão** exercida **no fundo** de cada vaso é

$$p = p_o + \rho g \cdot h ,$$

ou seja é igual para os quatro vasos, porque a altura,  $h$ , é a mesma e a pressão atmosférica,  $p_o$ , também é a mesma.

Passe-se o mesmo quanto à força de pressão, porque tendo os quatro fundos a mesma área  $S$ , temos:

$$p = \frac{F}{S} \Rightarrow F = p \cdot S = (p_o + \rho g h) S .$$

Não há, pois, nenhum paradoxo: *os fundos dos vasos estão sujeitos às forças de pressão, que são iguais, e não aos respectivos pesos de líquido.*

### QUESTÕES PROPOSTAS

#### Q 10.6

Mostrar que, vertendo líquidos de densidades diferentes num vaso — fig. 10.13:

1. As superfícies de separação entre cada par de líquidos são *horizontais*.
2. Os líquidos mais densos ficam por baixo dos líquidos menos densos.

*Sugestão:*

Raciocinar em termos de energia potencial mínima.

#### Q 10.7

Mostrar que, em vasos comunicantes com dois líquidos não miscíveis, as alturas, contadas a partir da superfície de separação dos líquidos, e as densidades de cada líquido são *inversamente proporcionais*, independentemente da secção do tubo — fig. 10.14.

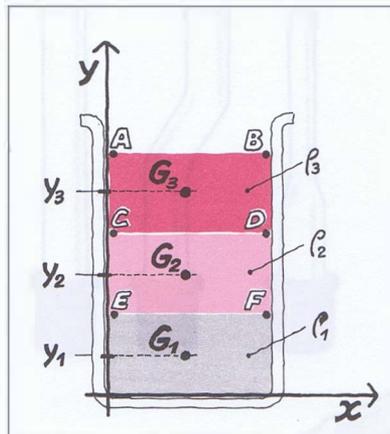


Fig. 10.13 Líquidos imiscíveis de densidades diferentes:

$$\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$$

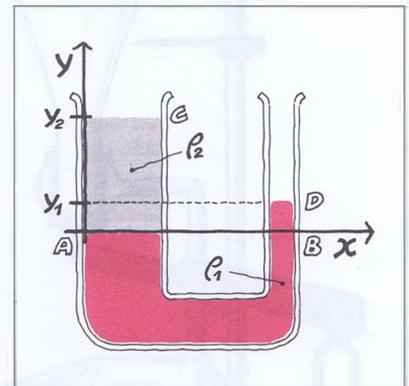


Fig. 10.14 Tomando para eixo dos  $xx$  a linha de separação dos líquidos não miscíveis, verifica-se a seguinte relação experimental:

$$\rho_1 \cdot y_1 = \rho_2 \cdot y_2 .$$

### Q 10.8

Desejando testar a resistência das paredes de um tipo (fig. 10.15), adaptou-se-lhe um tubo de vidro, cujo raio interno é 1,0 cm (repetição de uma experiência atribuída a Pascal).

Deitou-se água no tubo até 8,40 m de altura.

Com algum espanto, verificou-se que as aduelas do pipo começaram a abrir fendas devido às forças de pressão exercidas por tão estreita coluna de água.

1. Qual era a massa da coluna de água acrescentada ao pipo?
2. Qual é a pressão exercida na parte superior, A, do pipo, e na sua parte inferior, B?
3. Sendo 70 cm o diâmetro das bases do pipo, qual é a força total exercida no aro superior e no aro inferior, se eles tiverem a largura de 1 cm?

Utilizar:  $g = 10 \text{ m/s}^2$

### Q 10.9

O muro vertical de uma barragem retém água até à altura  $H$  e numa largura  $l$  — fig. 10.16.

A pressão exercida pela água varia uniformemente com a profundidade  $h$ .

1. Fazer o diagrama ( $y, p_{hid.}$ ), onde  $p_{hid.}$  é a pressão exercida pela água sem contar com a pressão atmosférica.
2. Mostrar que a força de pressão hidrostática média é dada pela expressão

$$F_{hid. \text{ méd.}} = \frac{1}{2} \rho g l H^2$$

### Q 10.10

Um depósito de água, sem tampa, arranca do repouso deslocando-se com a aceleração constante  $\vec{a}$  — fig. 10.17. Está cheio de água até à altura  $h$ .

1. Qual deve ser a aceleração para que a água comece a entornar-se na aresta B?
2. Concretizar para  $H = 2,20 \text{ m}$ ,  $h = 1,70 \text{ m}$ ,  $\ell = 3,0 \text{ m}$  e  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$

## 10.5 Pressão atmosférica e experiência de Torricelli

### 10.5.1 Pressão atmosférica

O ar atmosférico, tal como os líquidos, exerce pressão em todas as superfícies que com ele contactam — é a chamada **pressão atmosférica**.

Mas o ar, num recinto fechado, por exemplo uma sala, exerce a *mesma pressão* em todos os pontos, independentemente da altura a que estes se encontram. Este resultado não está conforme, pois, com a lei fundamental da hidrostática. A razão desta aparente anomalia, já o dissemos, deve-se ao facto de a pressão gasosa ser determinada pelo número de colisões das partículas com as superfícies, por unidade de superfície e por unidade de tempo. Tal pressão é estatisticamente *uniforme*.

Na atmosfera, que é um espaço aberto, sem paredes laterais nem tecto, o ar é um *gas livre*, sujeito apenas a uma parede de fundo — a superfície da Terra. Ora a Terra exerce forças gravíticas de atracção sobre as moléculas gasosas, concentrando-as mais junto à superfície terrestre.

Daqui provém a rarefacção do ar à medida que se sobe na atmosfera, isto é: *a densidade do ar diminui com a altitude*. E, conseqüentemente, diminui a *pressão atmosférica, mas não uniformemente*, como se pode verificar na Tabela seguinte (rever final da secção 10.3).

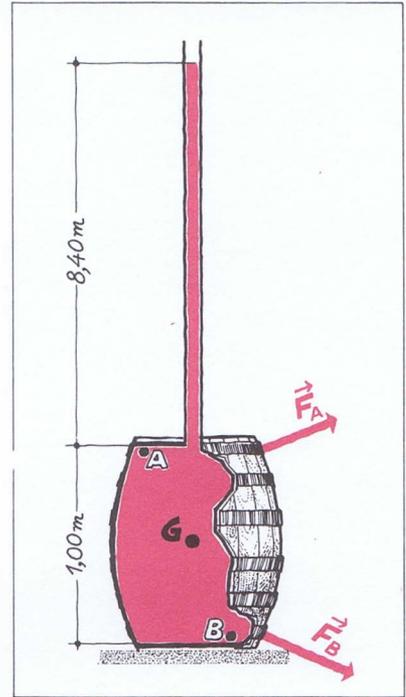


Fig. 10.15 Outra versão do «paradoxo» hidrostático: as aduelas começam a abrir fendas.

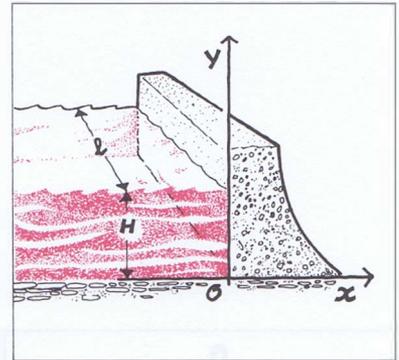


Fig. 10.16 Numa barragem, a pressão exercida pela água aumenta uniformemente com a profundidade.

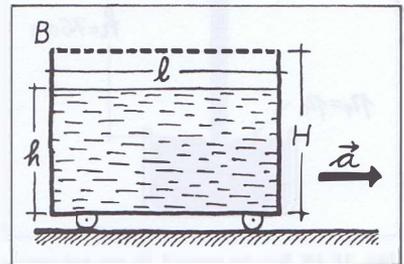


Fig. 10.17

**Pressão atmosférica a diferentes altitudes, a 0° C  
e em condições meteorológicas ordinárias**

$h$ (km)	$p_o$ (mm Hg)	$h$ (km)	$p_o$ (mm Hg)
0,0	760	5,0	417
0,1	761	6,0	370
0,2	742	7,0	328
0,3	733	8,0	291
0,4	724	9,0	258
0,5	716	10,0	229
1,0	674	15,0	124
1,5	635	20,0	68
2,0	598	30,0	20
3,0	530	40,0	6
4,0	470	50,0	1

A pressão atmosférica em cada lugar é medida com **barômetros** (*baro* = peso, *metro* = medida) e as alturas  $h$  podem ser dadas por **barômetros — altímetros**. A gradação destes é feita por comparação com uma Tabela como a apresentada ou por aplicação de uma fórmula teórica que relaciona a altitude  $h$  com a pressão lida no instrumento,  $p$ , com a temperatura,  $\theta$ , e com a pressão ao nível do mar.

*10.5.2 Experiência de Torricelli. Barômetros*

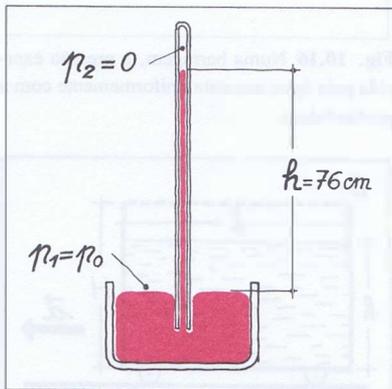
No século XVII, o físico italiano Evaristo *Torricelli* (1608-1647) descobriu um processo simples de medir a pressão atmosférica, inventando, em 1643, o **barômetro de mercúrio** — fig. 10.18. Este barômetro é muito usado nos Laboratórios de Física das Escolas.

É formado por um tubo de vidro, de cerca de 1,00 m de altura. Este enche-se de mercúrio e inverte-se numa tina que também contém mercúrio.

Verifica-se, em condições normais, que o mercúrio desce no tubo e estaciona a cerca de 76 cm de altura.

Esta experiência foi imaginada por *Torricelli* mas não foi realizada por ele. Realizou-a Vincenzo *Viviani*, discípulo e amigo de *Galileu*, como *Torricelli*. A experiência ficou, porém, na história associada ao nome de *Torricelli*, o que, aliás, é justo, visto que foi ele quem a concebeu.

Feita a experiência, *Torricelli* admitiu que a pressão exercida pela coluna de mercúrio da tina era equilibrada pela pressão exercida pela altura do ar



**Fig. 10.18** Secção vertical de um barômetro de mercúrio.

atmosférico. A pressão  $p_2$  (fig. 10.18) do vapor de mercúrio, no cimo do tubo, pode considerar-se praticamente nula, em virtude da pequena volatilidade do mercúrio.

Os *barómetros de mercúrio* são barómetros de precisão baseados na experiência de Torricelli. Devido à escolha deste instrumento para medir a pressão atmosférica, tomou-se para unidade de medida desta a pressão exercida por uma coluna de mercúrio de 76,0 cm de altura, a 0° C e nas condições de gravidade normal ( $g = 9,80\ 665\ \text{m s}^{-2}$ ). Deu-se-lhe o nome de **atmosfera** (1 atm).

Qual é o valor de 1 atm em *pascal*?

Sabendo que  $\rho(\text{Hg}) = 13,60\ \text{g/cm}^3 = 13,60 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$ , tem-se:

$$\begin{aligned} 1\ \text{atm} &= \rho(\text{Hg}) \cdot g \cdot h \\ &= 13,60 \times 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \times 9,807\ \text{m s}^{-2} \times 0,760\ \text{m} \\ &= 1,014 \times 10^5\ \text{N m}^{-2}\ (\text{Pa}) \end{aligned}$$

Também se utiliza como unidade corrente o **milímetro de mercúrio** ou *torr* (homenagem a Torricelli), cuja equivalência, em pascal, é a seguinte:

$$\begin{aligned} 1\ \text{mm Hg} = 1\ \text{torr} &= 13,60 \times 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \times 9,807\ \text{m s}^{-2} \times 0,001\ \text{m} \\ &= 1,333 \times 10^2\ \text{N m}^{-2}\ (\text{Pa}). \end{aligned}$$

#### QUESTÕES PROPOSTAS

##### Q 10.11

Na experiência de Torricelli, a altura da coluna de líquido no tubo é *independente da secção do tubo*, isto é, é a mesma qualquer que seja a secção deste.

Explicar porquê.

##### Q 10.12

Por meio da bomba pneumática e por aspiração pela boca, extraiu-se ar da lata e da palhinha — fig. 10.19.

Explicar o que sucede em ambos os casos.

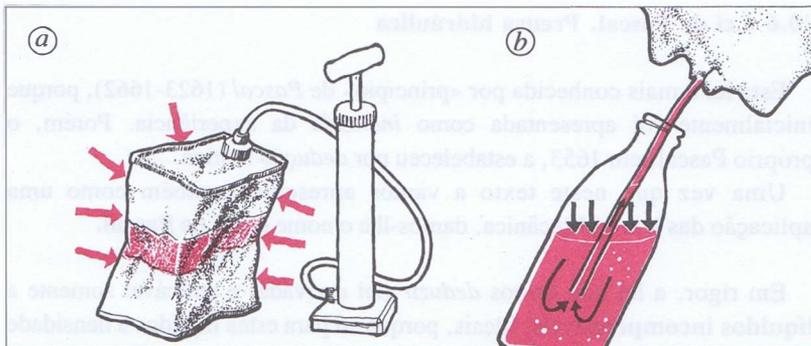


Fig. 10.19 Por que motivo fica a lata amassada e o líquido sobe?

#### ► G.E. 10.3

##### Súmula

10.8

A pressão que o ar exerce sobre os corpos — **pressão atmosférica** — é devida às colisões das moléculas dos gases que constituem o ar, contra as superfícies dos corpos.

A *pressão atmosférica* depende do número destas colisões por unidade de área e por unidade de tempo.

Este número de colisões depende, por sua vez, da maior ou menor concentração de moléculas, ou seja do número de moléculas por unidade de volume.

Devido à atracção da Terra, a densidade de moléculas diminui quando a altitude aumenta e, conseqüentemente, diminui também a pressão atmosférica.

A **pressão atmosférica normal**, isto é, ao nível do mar, à latitude de 45° e nas condições atmosféricas normais, tem o valor:

$$1\ \text{atm} = 1,014 \times 10^5\ \text{Pa} = 760\ \text{tor}$$

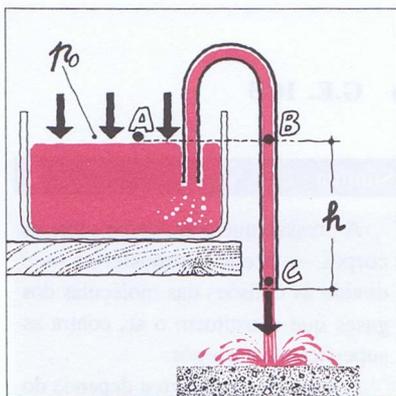


Fig. 10.20 Funcionamento do sifão.

### Q 10.13

O sifão (fig. 10.20) só despeja líquido quando o tubo do sifão ficar *completamente cheio de líquido (escorvado)*.

Explicar porquê e bem assim o respectivo funcionamento.

### Q 10.14

1. Que relação há entre as pressões lidas nos *manómetros*  $M_1$  e  $M_2$  — fig. 10.21? *Manómetro* [*mano* (pouco denso) + *metro* (medida)] significa medidor de pressões de fluidos, que são em geral pouco densos.
2. Conhecidas as alturas  $h_1$  e  $h_2$  do mercúrio, e a pressão atmosférica,  $p_0$ , indicar a leitura feita nos manómetros.
3. Qual é a pressão do gás encerrado no tubo fechado?

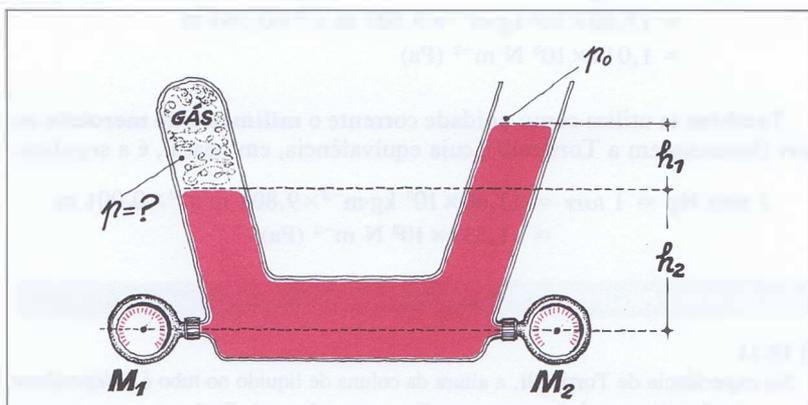


Fig. 10.21 A que pressão está o gás encerrado no tubo fechado?

## 10.6 Lei de Pascal. Prensa hidráulica

Esta lei é mais conhecida por «princípio» de *Pascal* (1623-1662), porque inicialmente foi apresentada como *induzida* da experiência. Porém, o próprio Pascal, em 1653, a estabeleceu por *dedução* teórica.

Uma vez que neste texto a vamos apresentar também como uma aplicação das leis da Mecânica, damos-lhe o nome de **lei de Pascal**.

Em rigor, a lei que vamos *deduzir* (lei derivada) é aplicável somente a **líquidos incompressíveis**, ideais, porque só para estes líquidos a densidade  $\rho$  mantém o mesmo valor para todos os pontos do fluido *durante* qualquer processo de aumento ou diminuição de pressão.

Consideremos então um líquido incompressível num sistema de dois vasos comunicantes, de secções diferentes, com um êmbolo, na extremidade de cada tubo, assente sobre o líquido — fig. 10.22.

Os dois êmbolos estão inicialmente descarregados. Designemos por  $S_A$  e  $S_B$  as áreas respectivas destes êmbolos.

Aplicando a equação fundamental da hidrostática ao ponto  $C$ , no interior do líquido, e a um ponto do líquido em contacto com a face inferior do êmbolo  $A$ , temos

$$p = p_o + \rho g h ,$$

onde:

$$p = p_C \text{ (pressão em } C\text{)}$$

$$p_o = p_A = \text{pressão exterior exercida pelo êmbolo } A \text{ no líquido}$$

Carreguemos agora os êmbolos exercendo no êmbolo  $A$  a força  $\vec{F}_A$  e no êmbolo  $B$  a força  $\vec{F}_B$ , de modo a que o líquido se mantenha equilibrado.

Ao  **aumentarmos**  a pressão  $p_o$ , em  $A$ , de uma quantidade

$$\Delta p_o = \frac{F_A}{S_A} \quad (F_A \text{ é a força exterior exercida no êmbolo de secção } S_A)$$

como o líquido se mantém em equilíbrio, a pressão  $p$ , em qualquer ponto  $C$  do interior (definido pelo desnível  $h$ ),  **aumentará de igual quantidade** .

Com efeito, sendo o líquido incompressível, a densidade  $\rho$  mantém-se constante durante o processo de aumento de  $p_o$  e, portanto, temos, de acordo com a  *lei fundamental da Hidrostática* :

$$(p + \Delta p) = (p_o + \Delta p_o) + \rho g h \Leftrightarrow$$

$$\Delta p = \Delta p_o + \underbrace{(p_o + \rho g h - p)}_{\substack{|| \\ 0}} \Rightarrow$$

$$\Delta p = \Delta p_o$$

Ao aumentarmos a pressão  $p_o$ , em  $B$ , de uma quantidade

$$\Delta p_o = \frac{F_B}{S_B} \quad (F_B \text{ é a força exterior exercida no êmbolo de secção } S_B),$$

porque o líquido se mantém em equilíbrio, deduziríamos, igualmente, em  $C$ , que

$$\Delta p = \Delta p_o .$$

O mesmo aumento de pressão,  $\Delta p$ , em  $C$ , corresponde a dois aumentos de pressão,  $\frac{F_A}{S_A}$ , em  $A$ , e  $\frac{F_B}{S_B}$ , em  $B$ , necessariamente iguais.

O ponto  $C$  é arbitrário e até poderá corresponder a um ponto do líquido em contacto com um dos êmbolos.

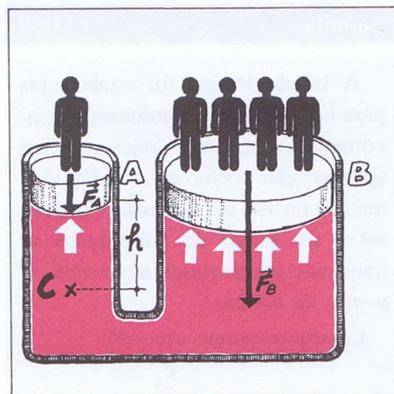


Fig. 10.22 As forças de pressão transmitidas através do fluido são proporcionais às áreas das superfícies em que actuam:

$$\frac{F_A}{S_A} = \frac{F_B}{S_B}$$

A **lei de Pascal** foi estabelecida para líquidos ideais rigorosamente incompressíveis, mas aplica-se, com aproximação aceitável, aos líquidos reais e consiste em a pressão exercida sobre um ponto de um líquido se transmitir **integralmente** a todos os pontos do líquido.

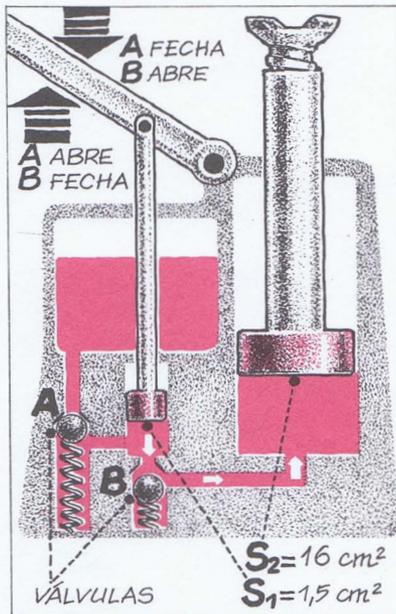
Consequentemente, a pressão

$$p = \frac{F_A}{S_A},$$

exercida na superfície líquida  $S_A$  pela força  $F_A$ , é comunicada **integralmente** à superfície  $S_B$ , isto é, tem-se

$$p = \frac{F_B}{S_B} = \frac{F_A}{S_A},$$

sendo  $F_B$  a força transmitida pelo líquido à superfície  $S_B$  em qualquer ponto e em qualquer posição.



**Fig. 10.23** No êmbolo  $S_1$  exerce-se uma pressão de  $65 \text{ Kg/cm}^2$ , por meio de uma alavanca inter-resistente. Esta pressão, transmitida ao êmbolo  $S_2$  origina neste uma força elevatória de cerca de 1 tonelada força.

Concluimos, assim, que a pressão exercida em qualquer dos êmbolos é **transmitida integralmente** a qualquer ponto do líquido e, em particular, ao outro êmbolo em contacto com o líquido. Podemos, portanto, escrever:

$$\text{pressão transmitida} = \frac{F_A}{S_A} = \frac{F_B}{S_B}$$

A igualdade

$$\Delta p = \Delta p_o \Rightarrow \frac{F_A}{S_A} = \frac{F_B}{S_B}$$

traduz a **lei de Pascal**.

Um modo de enunciar a *lei de Pascal para líquidos incompressíveis em equilíbrio hidrostático* consiste em afirmar que a **pressão exercida num líquido se transmite integralmente a todos os pontos do líquido e às paredes do contentor** (os êmbolos são paredes móveis).

A expressão

$$\frac{F_A}{S_A} = \frac{F_B}{S_B}$$

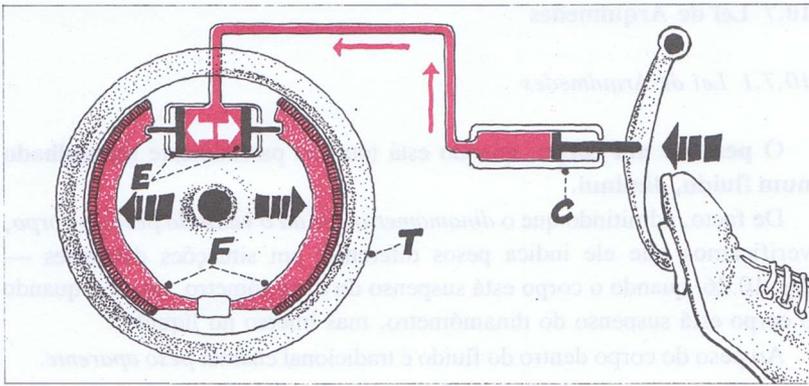
também pode ter outra leitura, que é a seguinte:

as forças de pressão hidrostática são proporcionais às áreas das superfícies em que actuam, quando o líquido através do qual são transmitidas está em equilíbrio e é incompressível ( $\rho$  constante). Esta afirmação é, aliás, evidente: se as intensidades das forças em cada unidade de superfície (pressões) são iguais, a intensidade da força resultante exercida numa superfície de área  $S$  será naturalmente proporcional ao número de unidades de superfície contidas em  $S$ , como sugere a fig. 10.22.

A principal aplicação da lei de Pascal é a **prensa hidráulica**, esquematizada na fig. 10.22. O seu objectivo consiste em obter uma força de elevada intensidade,  $F_B$ , à custa de uma força de pequena intensidade,  $F_A$ , aplicada numa área reduzida.

É uma prensa hidráulica o **macaco hidráulico**, utilizado como elevador de carros nas garagens e oficinas mecânicas — fig. 10.23.

Outra aplicação corrente da lei de Pascal é a travagem dos carros pelo sistema de **freio hidráulico** — fig. 10.24.



**Fig. 10.24** Freio hidráulico

Carregando com o pé no pedal do travão, *aumenta* a pressão no óleo do cilindro *C*. Este acréscimo de pressão é *transmitido* pelo óleo aos êmbolos ou pistões *E*, que comprimem os *freios F* (travões) contra o tambor *T* da roda, *impedindo-a de rodar*.

### QUESTÕES PROPOSTAS

**Q 10.15**

Comparar o comportamento dos sólidos e dos líquidos quanto à transmissão da pressão e das forças de pressão.

**Q 10.16**

1. O êmbolo menor de uma prensa hidráulica é accionado por uma alavanca inter-resistente — fig. 10.25.

Que força mínima é necessário exercer na extremidade *D* da alavanca para equilibrar um bloco de 200 toneladas-força, apoiado no êmbolo maior, no caso de o atrito ser desprezável?

Razão dos braços na alavanca:  $b_P/b_R = 50/1$

Razão das áreas dos êmbolos:  $S/s = 4000/1$

2. O mesmo cálculo, no caso, porém, de as forças de atrito serem:

— no *êmbolo menor*:

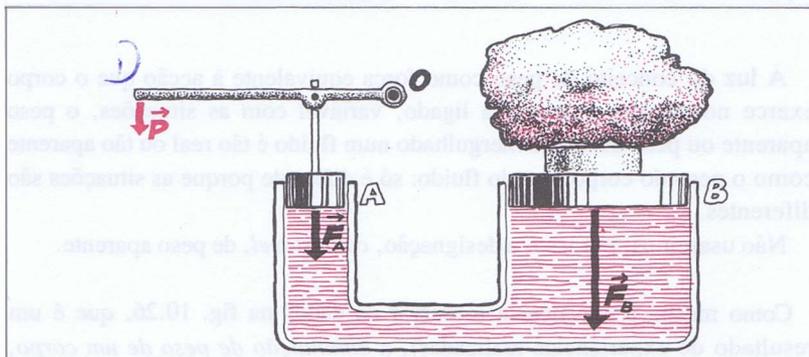
10% da força  $\vec{F}_A$  a transmitir por esse êmbolo menor;

—no *êmbolo maior*:

20% da força  $\vec{F}_B$  transmitida a esse êmbolo maior.

Explicar estas diferenças percentuais nas forças de atrito.

3. Elevando o bloco com *velocidade constante*, que força é necessário exercer em *D*, no caso das forças de atrito indicadas e *durante* o movimento uniforme?



**Fig. 10.25** Como equilibrar um bloco muito pesado e levantá-lo.

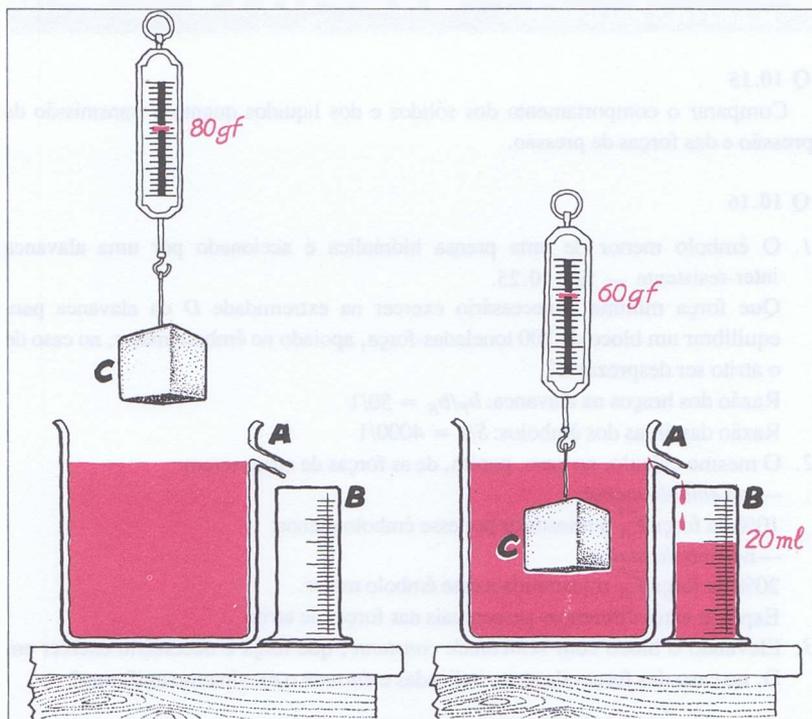
## 10.7 Lei de Arquimedes

### 10.7.1 Lei de Arquimedes

O peso de um corpo, quando está total ou parcialmente mergulhado num fluido, diminui.

De facto, admitindo que o dinamómetro nos dá o valor do peso do corpo, verificamos que ele indica pesos diferentes em situações diferentes — fig. 10.26: quando o corpo está suspenso do dinamómetro, no ar; e quando o corpo está suspenso do dinamómetro, mas imerso no líquido.

Ao peso do corpo dentro do fluido é tradicional chamar *peso aparente*.



**Fig. 10.26** Verificação experimental do «princípio» de Arquimedes.

O volume do paralelepípedo imerso na água é de  $20 \text{ cm}^3$ .

Sabe-se que  $20 \text{ cm}^3$  de água pesam 20 gf.

À luz do conceito de peso como força equivalente à acção que o corpo exerce no suporte a que está ligado, variável com as situações, o peso aparente ou peso do corpo mergulhado num fluido é tão real ou tão aparente como o peso do corpo fora do fluido: só é diferente porque as situações são diferentes.

Não usaremos, por isso, a designação, *contestável*, de peso aparente.

Como mostra a experiência (observar os dados na fig. 10.26, que é um resultado de experiências realizadas), a *diminuição de peso de um corpo*, mergulhado num líquido, é *precisamente igual ao peso de líquido de volume igual ao volume da parte imersa do corpo*.

O mesmo se verifica com o corpo imerso num gás.

Conta-se que o primeiro a pensar nesta diminuição de peso foi *Arquimedes* (287-212 a.C.), ao resolver um problema que lhe foi posto por seu primo Hierão, rei de Siracusa. Este pretendia conhecer a composição autêntica de uma coroa de ouro, que encomendara a um ourives, e encarregou Arquimedes de a descobrir sem, todavia, estragar a coroa, como obra de arte que era — reza a lenda...

Como Arquimedes, nas suas cogitações, chegou à conclusão de que os corpos diminuíam de peso quando se mergulhavam num líquido, o enunciado correspondente passou a ser conhecido por «*princípio*» de Arquimedes. De acordo com a opção que temos seguido, vamos deduzi-lo das leis da Estática. Por isso, passamos a designá-lo por *lei de Arquimedes*.

Consideremos um corpo sólido, com a forma de um paralelepípedo, suspenso de um dinamómetro e completamente mergulhado num fluido de densidade  $\rho_f$  — fig. 10.27. O corpo está em *equilíbrio estático* sob a acção das seguintes forças:

- a força gravítica,  $\vec{F}_g$ , aplicada no centro de gravidade,  $G$ ;
- a reacção  $\vec{R}$  da mola do dinamómetro, simétrica do peso  $\vec{P}$  do corpo imerso;
- as forças de pressão hidrostática: laterais,  $\vec{F}_{ix}$  e  $\vec{F}'_{ix}$ ; e verticais,  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ .

Chama-se **impulsão**  $\vec{I}$  à força que tem direcção vertical, está dirigida para cima e é a *resultante das forças de pressão exercidas pelo fluido*.

Como as forças de pressão laterais se equilibram duas a duas, a impulsão reduzir-se-á à soma vectorial das forças de pressão exercidas nas bases, ou seja:

$$\vec{I} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Leftrightarrow I = F_2 - F_1$$

*Quanto vale esta impulsão?* Eis o nosso problema.

Se retirarmos o corpo, o seu lugar será imediatamente ocupado por líquido, que fica *em equilíbrio*, agora sob a acção apenas de duas forças — a força gravítica exercida nesse líquido e a impulsão de todo o líquido circundante (igual à que exercia no corpo). O equilíbrio exige que estas duas forças sejam simétricas, ou seja: o **valor da impulsão  $\vec{I}$  é igual, precisamente, ao peso de líquido de volume igual ao volume do corpo imerso**. Esta conclusão, consequência directa das leis do equilíbrio estático, é um enunciado particular da **lei de Arquimedes**.

De acordo com este enunciado, o valor da impulsão será dado pela fórmula

$$I = (\rho_f \cdot g) \cdot V_i,$$

onde:

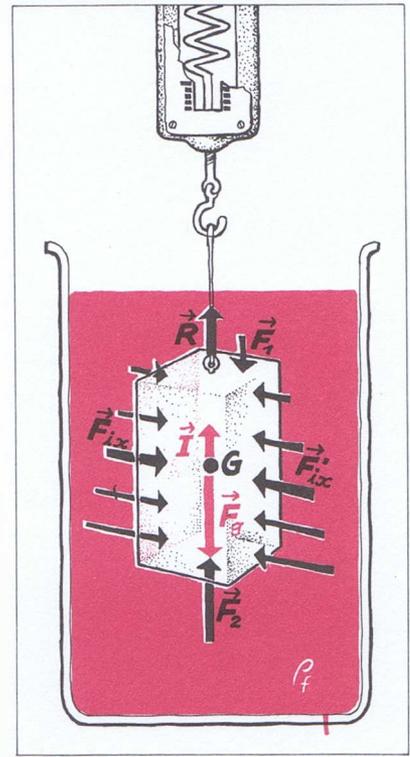
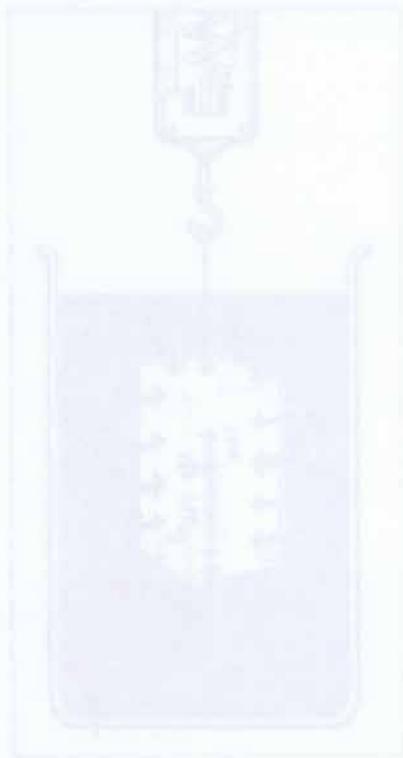


Fig. 10.27 O peso de um corpo imerso num fluido é:

$$\vec{P} = \vec{F}_g + \vec{I} \Leftrightarrow P = F_g - I$$



### Súmula

10.10

Um corpo, quando mergulhado total ou parcialmente num fluido, é actuado por uma *força vertical*, com o sentido de *baixo para cima*, resultante das forças de pressão exercidas pelo fluido.

Esta força designa-se por **impulsão**.

**Segundo a lei de Arquimedes**, a impulsão exercida por um fluido num corpo tem valor igual ao peso de fluido «deslocado» pelo corpo, ou seja

$$I = \rho_f g V_i,$$

sendo  $\rho_f$  a densidade do fluido e  $V_i$  o volume da parte imersa do corpo.

O **peso do corpo no fluido**, para um observado inercial, é, então:

$$\begin{aligned} P &= F_g - I \\ &= \rho_c g V_c - \rho_f g V_i \end{aligned}$$

$\rho_f$  = densidade do líquido (ou do fluido, em geral)

$V_i$  = volume da parte imersa do corpo

Será

$$V_i = V_c \text{ (volume do corpo)}$$

para a imersão total do corpo, como na figura 10.26.

E será

$$V_i < V_c$$

para a imersão parcial do corpo.

Nesta situação, o enunciado da **lei de Arquimedes** será também ligeiramente diferente e mais geral:

**o valor da impulsão  $\vec{I}$  é igual ao peso de fluido de volume igual ao volume da parte imersa do corpo.**

Voltemos à condição de equilíbrio estático do corpo imerso para obtermos o **peso do corpo no interior do fluido** — fig. 10.26 (insistimos:  $\vec{P} = -\vec{R}$ ). Temos, pois:

$$\begin{aligned} \vec{R} + \vec{F}_g + \vec{I} &= \vec{0} &<=> \\ \vec{F}_g + \vec{I} &= -\vec{R} &<=> \end{aligned}$$

$$\vec{P} = \vec{F}_g + \vec{I}$$

Atendendo a que as forças  $\vec{F}_g$  e  $\vec{I}$  têm linha de acção comum e sentidos opostos, vem:

$$P = F_g - I <=>$$

$$P = (\rho_c \cdot g) V_c - (\rho_f \cdot g) V_i,$$

sendo:

$\rho_c$  = densidade do corpo

$\rho_f$  = densidade do fluido

### 10.7.2 Equilíbrio dos corpos parcial ou totalmente imersos num líquido

Vamos contemplar três casos correntes.

O primeiro é a **flutuação de um corpo à superfície** — fig. 10.28, (a). Isto acontece quando o corpo é menos denso do que o líquido. Flutuar é, também, estar em condições de *imponderabilidade*, visto que, em tais condições, a acção gravítica da Terra é compensada pela impulsão e o corpo não cai.

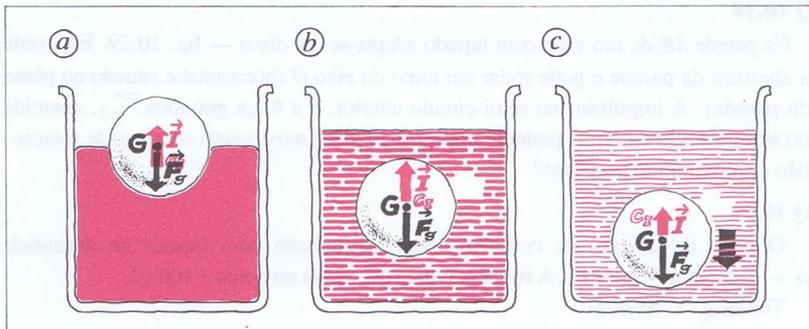


Fig. 10.28

- (a) Flutuação à superfície  
 (b) Flutuação no interior do líquido  
 (c) Descida para o fundo

Temos, assim:

$$P = F_g - I \Leftrightarrow 0 = F_g - I \Leftrightarrow$$

$$F_g = I \Leftrightarrow (\rho_c \cdot g) V_c = (\rho_f \cdot g) V_i \Leftrightarrow ,$$

$$\rho_c V_c = \rho_f V_i$$

onde:

$V_i$  = volume da parte imersa do corpo

$V_c$  = volume do corpo

O segundo caso é o da **flutuação no interior do líquido** — fig. 10.28, (b). Trata-se igualmente de um caso de *imponderabilidade*. Isto acontece quando o *corpo e o líquido têm a mesma densidade*, porque:

$$0 = F_g - I \Leftrightarrow F_g = I \Leftrightarrow (\rho_c \cdot g) V_c = (\rho_f \cdot g) V_c \Rightarrow$$

$$\rho_c = \rho_f$$

O terceiro caso é aquele em que o **corpo é mais denso do que o líquido**, tem peso e, por isso, cai através do líquido. *Enquanto* não toca no fundo (para não termos de contabilizar a reacção deste), o **peso do corpo no interior do líquido** é:

$$P = F_g - I \Leftrightarrow P = (\rho_c \cdot g) V_c - (\rho_f \cdot g) V_c$$

$$= g V_c (\rho_c - \rho_f)$$

#### QUESTÕES PROPOSTAS

##### Q 10.17

Quando um barco passa da água doce de um rio (menos densa) para a água salgada do mar (mais densa), a impulsão varia? Justificar.

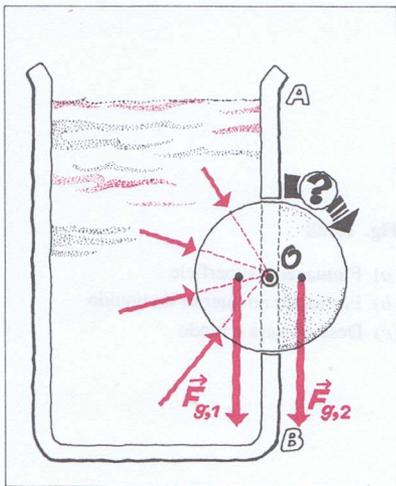


Fig. 10.29 A roda de eixo  $O$  terá movimento perpétuo?

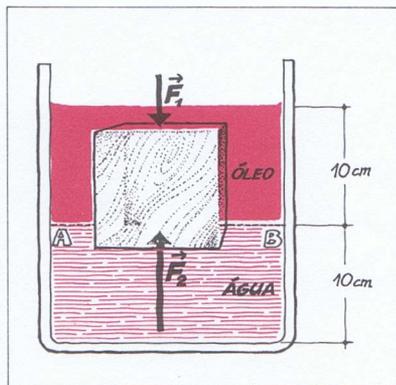


Fig. 10.30 O bloco cúbico de madeira flutua no interior dos fluidos imiscíveis.

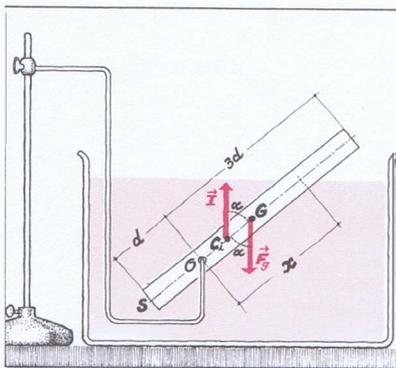


Fig. 10.31

### Q 10.18

Na parede  $AB$  de um vaso com líquido adapta-se um disco — fig. 10.29. Esta veda a abertura da parede e pode rodar em torno do eixo  $O$  (horizontal e situado no plano da parede). A impulsão, no semi-círculo interior, e a força gravítica  $\vec{F}_{g,2}$ , exercida no semi-círculo exterior, poderão imprimir ao disco movimento contínuo de rotação, isto é, movimento perpétuo?

### Q 10.19

O peso de um corpo, completamente mergulhado num líquido de densidade  $\rho = 1,0 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ , é 80 gf. A força gravítica que actua no corpo é 100 gf. Tomar  $g = 10 \text{ m/s}^2$

1. Quanto pesa o corpo num líquido de densidade

$$\rho' = 1,5 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}?$$

2. Qual é a densidade do corpo —  $\rho_c = ?$

### Q 10.20

A densidade do óleo que sobrenada a água é  $0,6 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$  — fig. 10.30. A aresta do bloco cúbico de madeira mede 10 cm e  $\frac{1}{5}$  do seu volume está mergulhado na água.

1. Determinar o peso do bloco de madeira quando suspenso de um dinamómetro no ar ( $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ).
2. Determinar a densidade do bloco de madeira.
3. Calcular o valor da força de pressão hidrostática exercida na face inferior do cubo —  $F_2$ .

### Q 10.21

Um iceberg flutua. Determinar a razão entre os volumes emerso,  $V_e$ , e imerso,  $V_i$ , sabendo que a densidade média do gelo é  $0,92 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ . A densidade média da água salgada é  $1,02 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ .

### Q 10.22

Um objecto de ferro ( $\rho_{Fe} = 7,8 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ), recoberto com uma camada inoxidável de alumínio ( $\rho_{Al} = 2,7 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ), pesa, no ar, 0,600 kgf.

O peso do objecto completamente mergulhado na água é 0,500 kgf.

Determinar as massas de ferro e de alumínio do objecto (problema análogo ao que Arquimedes teve de resolver com a coroa de ouro e que ele suspeitava ser de ouro e outro metal, problema que o conduziu à descoberta do seu «princípio»).

$$(g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})$$

### Sugestão:

Utilizar um sistema de duas equações — uma relativa ao peso do objecto e outra referente ao volume do objecto.

### Q 10.23

Uma barra homogénea, de secção constante  $S$  e comprimento  $4d$ , pode rodar em torno de um eixo fixo,  $O$ , e está parcialmente mergulhada no interior de um líquido — fig. 10.31.

Sabendo que a densidade da barra é  $\frac{3}{8}$  da densidade do líquido, determinar a distância  $x$ , em função de  $d$ , para que a barra esteja em equilíbrio.

**Q 10.24**

1. A figura 10.32 apresenta três projectos de bules de chá. Escolher um que possa ser enchido ao máximo sem entornar o chá ao servir.
2. Com o bule referido anteriormente completamente cheio de chá (cuja densidade supomos igual à da água) colocou-se cuidadosamente uma bola maciça de cortiça de raio 5 cm a flutuar no chá. Que volume deste se entornou? (consultar a tabela de densidades)

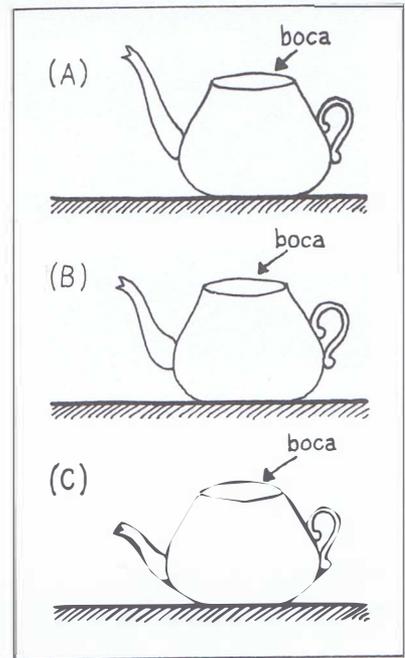


Fig. 10.32

**Q 10.25**

No vaso indicado na fig. 10.33, cheio de água, introduziram-se duas esferas, A e B, de igual volume,  $V$ , e densidades, respectivamente:

$$\rho_A > \rho_{\text{água}}, \quad \rho_B < \rho_{\text{água}}$$

1. Determinar as acelerações de cada uma das esferas, se for desprezável a resistência da água ao seu movimento.
2. Relacionar as velocidades das esferas quando estas passam no plano horizontal situado a meio da altura.
3. Mostrar que as esferas passam uma pela outra no plano horizontal situado a meio da altura se as suas densidades satisfizerem a condição:

$$\frac{1}{\rho_A} + \frac{1}{\rho_B} = 2$$

## 10.8 Movimento estacionário de um fluido e movimento não estacionário ou turbulento

### 10.8.1 A dinâmica dos fluidos

Para se estudar e explicar o movimento de um fluido, podemos imaginá-lo dividido em partículas ou em elementos de volume, e aplicar a cada uma destas partículas ou elementos de volume as leis da Mecânica. Assim procedeu, inicialmente, *Lagrange* (1736-1813). Este processo, porém, constitui tarefa enorme e não compensadora.

Um processo mais prático, normalmente seguido, é o tratamento utilizado por *Euler* (1707-1783). Este considerou o *movimento global*, especificando como varia, em cada instante e em cada ponto do espaço, a *densidade* e a *velocidade do fluido*.

Ao utilizarmos este método, como vamos fazer, uma precaução se impõe desde já: não é legítimo extrapolar os resultados do movimento global ou macroscópico para o comportamento de cada partícula ou elemento de volume, razão por que devemos estar de sobreaviso para as previsões ditadas pelo senso comum e pela intuição — pois frequentemente não correspondem ao comportamento real do fluido.

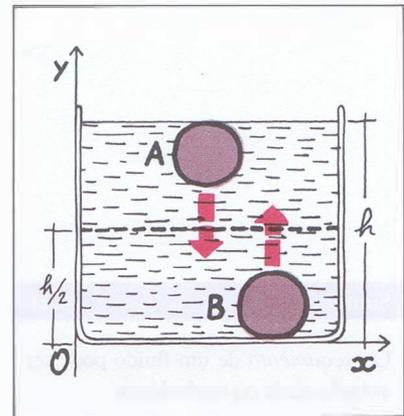


Fig. 10.33

### 10.8.2 Movimento estacionário e não estacionário ou turbulento

O movimento ou escoamento de um fluido é **estacionário** quando a velocidade de cada porção elementar de fluido, em cada ponto A, B, etc., do interior de uma conduta, não depende do tempo, quer dizer, é sempre a mesma — fig. 10.34, (a).

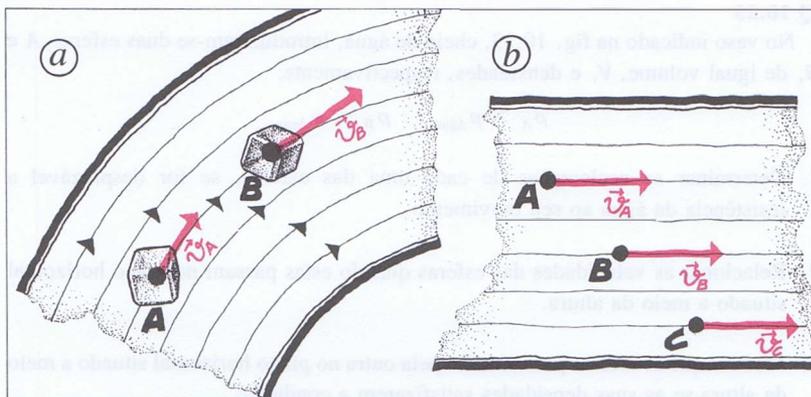


Fig. 10.34

(a) No escoamento estacionário de um fluido, no interior de uma conduta, a velocidade do fluido é função da posição e não do tempo:

$\vec{v}_A \neq \vec{v}_B$ , mas  $\vec{v}_A$  e  $\vec{v}_B$  são constantes, em A e B, respectivamente, no decurso do tempo.

(b) No escoamento estacionário e uniforme, a velocidade do fluido é a mesma em qualquer ponto do espaço:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C$$

Isto significa que **todos** os elementos de fluido têm a velocidade  $\vec{v}_A$  quando passam por A, a velocidade  $\vec{v}_B$  quando passam por B, etc.

A velocidade é, portanto, função apenas da posição.

Se, além de ser constante no decurso do tempo, a velocidade do fluido for a mesma em todos os pontos do espaço, o escoamento diz-se **estacionário e uniforme**. É o caso do escoamento lento ao longo de uma conduta cilíndrica de secção constante — fig. 10.34, (b).

O movimento de um fluido é **turbulento** ou **não estacionário** quando a velocidade em cada ponto varia no decorrer do tempo.

Os escoamentos podem considerar-se estacionários para pequenas velocidades, como, por exemplo, o lento deslizar de um córrego ou de um ribeiro, assim como o escoamento de ar e gases com velocidades muito abaixo da velocidade do som.

#### Súmula

10.11

O escoamento de um fluido pode ser **estacionário** ou **turbulento**.

É **estacionário** quando a velocidade do fluido é constante para cada ponto da conduta, embora varie, em geral, de ponto para ponto.

É **turbulento** quando a velocidade do fluido em cada ponto vai variando no decurso do tempo.

Os escoamentos lentos dos fluidos são praticamente estacionários.

O escoamento é turbulento nas quedas de água, nas cachoeiras, nas vagas de maré, etc.

### 10.8.3 Linhas de corrente

Se no escoamento estacionário traçarmos a trajectória de uma partícula que passe por  $A$ , fig. 10.34, ela será, em cada ponto, tangente à velocidade do fluido. Como esta não varia com o tempo, a trajectória traçada é a mesma para todas as partículas que passem por  $A$ . A esta linha, tangente em cada ponto à velocidade do fluido, chama-se **linha de corrente**.

No escoamento estacionário, as linhas de corrente não mudam de configuração e coincidem com as trajectórias. No escoamento estacionário e uniforme, a família de linhas de corrente é um conjunto de linhas paralelas.

No escoamento turbulento, as trajectórias das partículas já não coincidem com as linhas de corrente, porque as velocidades, em cada ponto, variam de instante para instante e, por isso, varia também a configuração das linhas de corrente de instante para instante. Ora, cada partícula tem só uma trajectória. Quer dizer: *a família* das trajectórias, que é construída ao longo do tempo, não coincide com *as famílias* de linhas de corrente, que se formam em cada instante (sendo diferente a família de linhas de corrente num dado instante da família de linhas de corrente no instante seguinte).

#### Súmula

10.12

As **linhas de corrente**, linhas tangentes à velocidade, em cada ponto, de um fluido em escoamento, *coincidem com as trajectórias das partículas de fluido nos escoamentos estacionários*. O mesmo não sucede nos escoamentos turbulentos.

### 10.8.4 Escoamento de fluidos ideais

Um fluido ideal, como vimos, **não tem viscosidade e não é compressível**.

Da ausência de viscosidade resulta que a velocidade de escoamento é a mesma em todos os pontos de uma secção transversal.

Da não compressibilidade resulta que a densidade do fluido é a mesma em todos os pontos e é independente do tempo, pois é constante o número de partículas em cada volume elementar.

O escoamento de líquidos pode considerar-se praticamente incompressível. O escoamento dos gases, embora muito compressíveis, pode ocorrer, no entanto, com pequenas variações de densidade para velocidades muito inferiores à velocidade do som no ar. É o caso do movimento do ar em relação às asas de um avião subsónico, que podemos considerar um escoamento quase incompressível.

## 10.9 Equação da continuidade

Consideremos o *escoamento estacionário* de um *fluido ideal* numa conduta de secção variável — fig. 10.35. Nesta situação, os fluxos do vector velocidade de escoamento (ver G.E. 8.2, Física 11.º ano, dos autores), nas secções  $S_1$  e  $S_2$ , são, respectivamente:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= v_1 \cdot S_1 & \phi_2 &= v_2 \cdot S_2 \\ &= \frac{dx_1}{dt} \cdot S_1 & &= \frac{dx_2}{dt} \cdot S_2\end{aligned}$$

Como

$$S_1 \cdot dx_1 = dV_1 \quad \text{e} \quad S_2 \cdot dx_2 = dV_2$$

representam os volumes de fluido que atravessam as secções  $S_1$  e  $S_2$  no tempo  $dt$ , os quocientes

$$\phi_1 = \frac{dV_1}{dt} \quad \text{e} \quad \phi_2 = \frac{dV_2}{dt},$$

representando os fluxos, representam também os *volumes de fluido que atravessam por unidade de tempo as secções  $S_1$  e  $S_2$* , respectivamente.

A esta grandeza,

$$\frac{dV}{dt},$$

**volume de fluido escoado por unidade de tempo** através de uma secção transversal, chama-se **fluxo de volume, vazão, caudal ou débito de escoamento**.

Em unidades SI, a vazão exprime-se em  $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ .

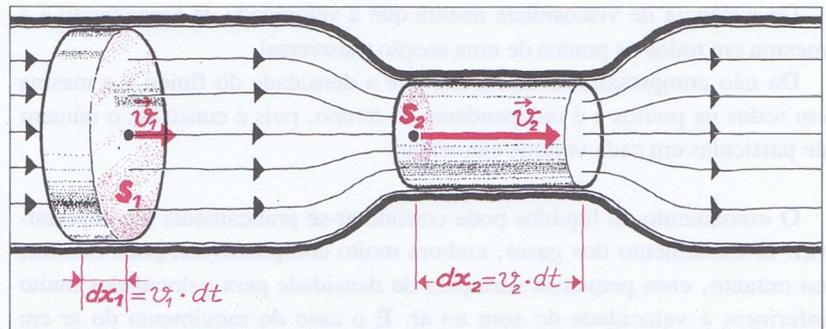


Fig. 10.35 Escoamento *estacionário* de um fluido ideal.

Uma vez que o fluido é incompressível e na conduta não há buracos que possam servir de «fontes» ou de «sorvedouros» de fluido, entre as secções  $S_1$  e  $S_2$  ou entre quaisquer outras, não há acumulação nem diminuição de fluido. Isto significa que o volume de fluido que atravessa a secção transversal  $S_1$  é igual ao volume de fluido que atravessa a secção transversal  $S_2$ , por unidade de tempo, isto é, os fluxos através das secções são iguais:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

Esta expressão é a chamada **equação da continuidade** e exprime a lei da conservação da massa na dinâmica dos fluidos, porque, se multiplicarmos o invariante

$$v \cdot S$$

pela densidade  $\rho$  do fluido, obtemos um novo invariante,

$$\rho \cdot v \cdot S = \rho \frac{dV}{dt} = \frac{dm}{dt},$$

que é a massa escoada por unidade de tempo através de cada secção.

A equação da continuidade mostra que:

- 1.º — as *velocidades* de escoamento e as *áreas* das secções transversais de escoamento são *inversamente proporcionais*, ou seja a menor secção corresponde maior velocidade de escoamento;
- 2.º — as linhas de corrente *adensam-se* nos estrangulamentos.

## 10.10 Equação fundamental da hidrodinâmica ou lei de Bernoulli

Consideremos de novo o escoamento estacionário de um fluido ideal numa conduta de secção variável — fig. 10.36.

Isolemos, para efeitos de estudo, um dado volume de fluido, o qual, num instante  $t$ , enche a porção de tubo situada entre as secções  $AA'$  e  $CC'$ . Num instante posterior,  $t + \Delta t$ , esse mesmo volume de fluido, por entretanto se ter deslocado, enche a porção de tubo entre as secções  $BB'$  e  $DD'$  — fig. 10.36.

O volume  $S_2 \Delta l_2$  do novo espaço que o fluido foi ocupar no instante  $t + \Delta t$  é igual ao volume  $S_1 \Delta l_1$  do espaço que ocupava no instante  $t$  e que deixou de ocupar no instante  $t + \Delta t$ . Com efeito, sendo o fluido incompressível e não havendo buracos nas paredes da conduta, que fariam de «fontes» ou «sorvedouros», *não há variação da quantidade de fluido entre as duas posições.*

No escoamento estacionário de um fluido ao longo de uma conduta, chama-se **fluxo do vector velocidade** de escoamento através da secção transversal normal,  $S$ , da conduta, a *grandeza definida pelo produto interno*

$$\phi = \vec{v} \cdot \vec{S} = v \cdot S,$$

sendo  $\vec{S}$  o vector superfície (perpendicular a esta e de módulo igual à sua área).

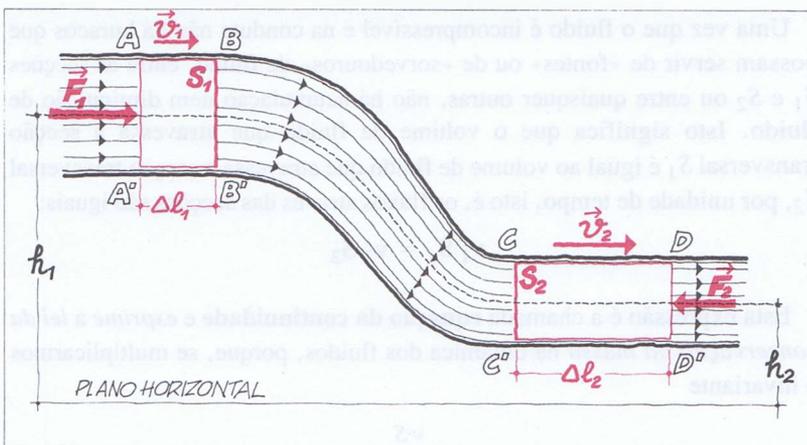
Representa o volume escoado através da superfície por unidade de tempo

$$\phi = \frac{dV}{dt}$$

Para os fluidos ideais, *incompressíveis*, não pode uma secção transversal normal,  $S_1$ , ser atravessada por maior volume de líquido que outra,  $S_2$ , em cada unidade de tempo. O *fluxo* é, pois, *constante* através das duas:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

Fig. 10.36 Uma certa porção de fluido ideal escoou-se em regime estacionário ao longo da conduta, passando da posição AC para a posição BD.



Em suma:

Uma vez que o líquido situado entre as secções BB' e CC' é comum às duas configurações, tudo se passa como se uma certa massa de fluido,

$$m = \rho S_2 \Delta l_2 = \rho S_1 \Delta l_1 ,$$

tivesse passado de um nível médio  $h_1$  e de uma velocidade  $v_1$  (que, como sabemos, depende da secção do tubo) para o nível médio  $h_2$  e para a velocidade  $v_2$  (o facto de essa massa  $m$  não corresponder, em AB e CD, às mesmas partículas não tem importância nos cálculos das variações de energia cinética e potencial).

As variações de energia cinética e de energia potencial do sistema constituído pela porção de fluido isolado e pela Terra são, pois:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$\Delta E_p = m g h_2 - m g h_1$$

Como forças exteriores responsáveis pela alteração da configuração do sistema (de AC para BD), temos:

— a força de pressão  $\vec{F}_1$ , potente, exercida na secção  $S_1$  pelo fluido restante e de valor

$$F_1 = p_1 S_1 ,$$

sendo  $p_1$  a pressão exercida em  $S_1$  (pode ser lida num manómetro ligado a esta secção);

— a força de pressão  $\vec{F}_2$ , resistente, exercida na secção  $S_2$  pelo fluido restante e de valor

$$F_2 = p_2 S_2 ,$$

sendo  $p_2$  a pressão exercida em  $S_2$  (onde pode igualmente ser lida num manómetro).

Estas forças exteriores, durante a referida mudança de configuração do sistema (*líquido + Terra*), realizam os trabalhos:

$$W(\vec{F}_1) = F_1 \cdot \Delta l_1 \cdot \cos 0^\circ = p_1 S_1 \Delta l_1$$

$$W(\vec{F}_2) = F_2 \cdot \Delta l_2 \cdot \cos 180^\circ = -p_2 S_2 \Delta l_2$$

Como não há forças interiores dissipativas a actuar, porque, sendo o fluido ideal, são nulas as forças de viscosidade (atrito interno), verifica-se a relação

$$W_{ext} = \Delta E_c + \Delta E_p \Leftrightarrow$$

$$p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = \left( \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \right) + m g (h_2 - h_1)$$

Como o volume das porções *AB* e *CD* é igual,

$$S_1 \Delta l_1 = S_2 \Delta l_2 = \frac{m}{\rho},$$

temos, substituindo na equação anterior:

$$p_1 \frac{m}{\rho} - p_2 \frac{m}{\rho} = \left( \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \right) + m g (h_2 - h_1)$$

Eliminando a variável *m* e simplificando, obtemos:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_2 - \rho g h_1$$

Separando os termos que dizem respeito à configuração inicial dos termos que se referem à configuração final, vem, finalmente:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Leftrightarrow$$

$$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const.}^{te}$$

A equação obtida é a chamada **equação fundamental da hidrodinâmica** ou **equação de Bernoulli**. Foi apresentada por este, em 1738, na sua *Hidrodinâmica*. Aplica-se ao escoamento *estacionário* e *isotérmico* de fluidos *incompressíveis* e *não viscosos*.

O valor da constante é o mesmo para os pontos da mesma linha de corrente, mas difere de uma linha de corrente para outra.

Se o fluido for compressível e viscoso, surgem forças de atrito, cujo trabalho se transforma em energia térmica, deixando o processo de ser isotérmico. Nesta situação, teríamos:

$$\text{trab. total das forças ext.} = \Delta E_c + \Delta E_p + \Delta U \text{ (var. en. interna)}$$

Veamos, por último, o significado físico da lei de Bernoulli.

#### Súmula

10.14

#### Lei fundamental da hidrodinâmica (de Bernoulli):

Em qualquer ponto de uma linha de corrente de um fluido ideal, em escoamento estacionário, é **constante** a soma da pressão, *p*, do líquido, detectada por um manómetro (*pressão manométrica*), com a *pressão dinâmica*.

$$\frac{1}{2} \rho v^2$$

e com a *pressão hidrostática* ou *gravítica*,  $\rho g h$ :

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{const.}^{te}$$

G.E. 10.4 ◀

O termo  $\frac{1}{2} \rho v^2$  é a energia cinética por unidade de volume, e chama-se **pressão dinâmica**.

O termo  $\rho g h$  é a energia potencial gravítica por unidade de volume, e constitui a **pressão gravítica** ou **hidrostática**.

E o termo  $p$  (**pressão lida num manómetro**) é a energia potencial por unidade de volume que está associada à pressão (ver G.E.10.4).

Portanto, a soma que, segundo a lei de Bernoulli, se mantém constante não representa outra coisa senão a energia mecânica total por unidade de volume:

$$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{E_t}{V} = \text{const.}^{te}$$

E conseqüentemente, como são conservativas todas as forças que actuam sobre o fluido, a *lei de Bernoulli* exprime a **conservação da energia mecânica por unidade de volume do fluido**.

Finalmente, no caso de o fluido se mover apenas na direcção horizontal, não há variação da energia potencial gravítica e a *equação de Bernoulli* passa a ter a forma simplificada:

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const.}^{te}$$

## 10.11 Algumas aplicações da lei de Bernoulli

### 10.11.1 Tubo de Venturi

O tubo de *Venturi* é um tubo que se destina a medir a velocidade de deslocamento de um fluido — fig. 10.37. Neste dispositivo o movimento do fluido é horizontal.

Pela equação da continuidade,

$$v_1 S_1 = v_2 S_2,$$

a velocidade de escoamento aumenta nos estrangulamentos. Pela equação de Bernoulli simplificada (quando a energia potencial gravítica é constante),

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const.}^{te},$$

a um aumento de velocidade nos estrangulamentos corresponde uma diminuição de pressão.

*Medindo a pressão* com manómetros, podemos determinar as velocidades do fluido e a *vazão* ou *fluxo de volume*, como a seguir indicamos.

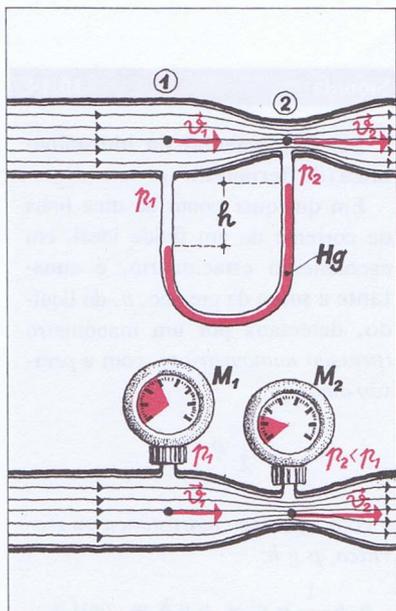


Fig. 10.37 Medidores de Venturi para determinar velocidades de deslocamento a partir da medida de pressões.

Sejam  $p_1$  e  $v_1$ ,  $p_2$  e  $v_2$ , os valores das pressões e velocidades nas secções larga (1) e estreita (2), respectivamente. Pela lei de Bernoulli, temos:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Leftrightarrow p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

Acrescentando a equação da continuidade, obtemos o sistema

$$\begin{cases} p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) \\ v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2 \end{cases}$$

Uma vez que  $S_1$ ,  $S_2$  e  $\rho$  (fluido) são conhecidos e  $(p_1 - p_2)$  é indicado pelos manómetros, este sistema permite-nos calcular  $v_1$ ,  $v_2$  e a vazão

$$v_1 S_1 = v_2 \cdot s_2.$$

### 10.11.2 Tubo de Pitot

Introduzindo num cano horizontal por onde se escoo um fluido os dois ramos abertos de um manómetro, obtém-se o dispositivo indicado na fig. 10.38, chamado *tubo de Pitot*. Aplicando a equação de Bernoulli às extremidades 1 e 2 dos ramos do manómetro, temos:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_2 + 0$$

O 2.º termo do 2.º membro é nulo porque não há escoamento para dentro do manómetro, em virtude da ponta 2 deste ser muito afilada e o mercúrio ficar estacionário.

Isolando o termo em  $v$ , obtém-se:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 = p_2 - p_1 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}},$$

onde:

$(p_2 - p_1)$  lê-se no manómetro;  
 $\rho$  é a densidade do fluido.

Com este dispositivo podemos medir a velocidade do movimento de um gás, a velocidade das águas de um rio, a velocidade do vento e a velocidade de um avião (igual, em módulo, à do ar que passa por ele).

O tubo de Pitot, se for calibrado, constitui um *velocímetro*.

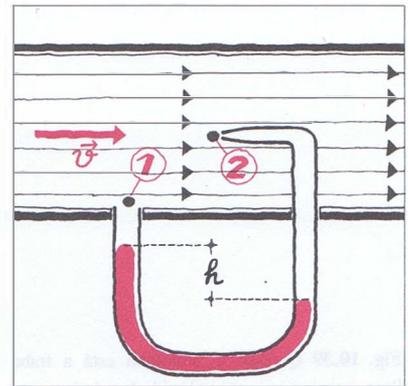


Fig. 10.38 Tubo de Pitot para medir a velocidade de deslocamento de um fluido.

### 10.11.3 Impulsão dinâmica. Sustentação do avião

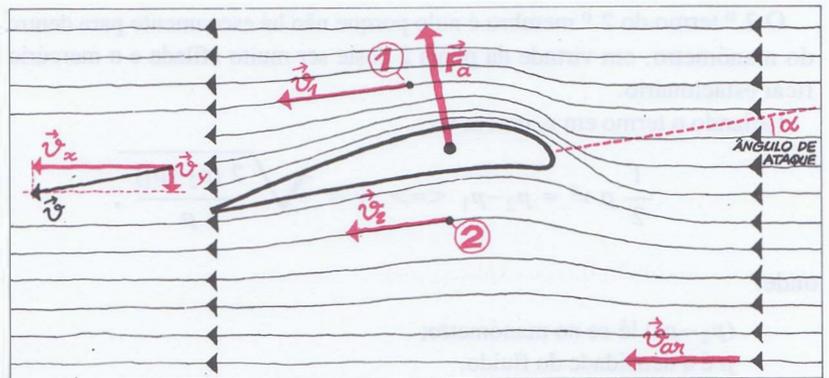
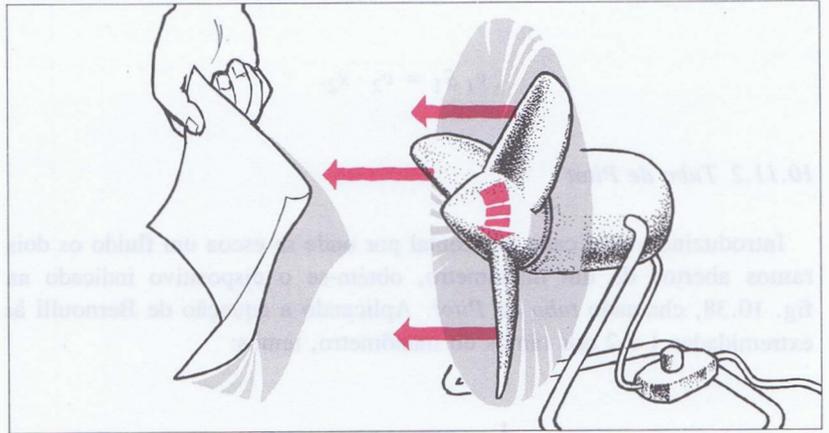
No estudo do movimento do *avião*, é indiferente considerar o *ar em repouso* e o *avião em movimento* (movimento real do avião), ou considerar o *avião parado* e o *ar em movimento* (como sucede nos túneis experimentais de vento).

Por conveniência, vamos optar pela 2.<sup>a</sup> hipótese.

Seja então uma *hélice* de ventoinha em movimento de rotação (fig. 10.39), ou uma hélice de avião, de helicóptero ou de barco, um *leme de direcção* (num barco e num avião) e a *asa* de um avião (fig. 10.40). Fixemo-nos nesta, porque o estudo e as conclusões são idênticos para os outros casos.



**Fig. 10.39** Quando a ventoinha está a trabalhar, origina-se uma velocidade relativa entre o ar e as hélices em rotação no plano vertical, gerando uma *força propulsora horizontal* — *impulso dinâmico horizontal*.



**Fig. 10.40** Distribuição das linhas de corrente em volta da asa de um avião.

A existência de componente vertical,  $\vec{v}_v$ , da velocidade do ar, devida à *forma da asa*, mostra que esta exerce no ar uma acção dirigida para baixo. Esta acção desencadeia uma *reação do ar*, ou seja uma força dirigida para cima, exercida *na asa* — *impulso dinâmico vertical*.

A velocidade do ar,  $\vec{v}_{ar}$ , é horizontal, mas, ao encontrar o *obstáculo asa*, é **deflectida** (observar as linhas de corrente) quer pela parte superior quer pela parte inferior da asa.

Na *parte superior*, a velocidade de deslocamento do ar,  $\vec{v}_1$ , é *maior* (concentração das linhas de corrente), e na *parte inferior* a velocidade de deslocamento,  $\vec{v}_2$ , é *menor* (rarefação das linhas de corrente).

Estas velocidades passam a ter componente horizontal e componente vertical:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{v}_{1x} + \vec{v}_{1y} \\ \vec{v}_2 = \vec{v}_{2x} + \vec{v}_{2y} \end{cases}$$

Esta deflexão da velocidade depende do *ângulo de ataque*,  $\alpha$ , graças ao qual o *ar é empurrado para baixo pela asa*. Então, se a asa exerce uma acção sobre o ar, dirigida para baixo, o ar reage *contra a asa*, com uma força  $\vec{F}_a$ , dirigida para cima e perpendicular ao eixo longitudinal da asa. A esta força chama-se **impulsão dinâmica** ou **força ascensional**. O nome resulta de ser devida ao movimento do fluido, distinguindo-se da impulsão hidrostática, que é devido ao fluido em repouso.

A impulsão dinâmica, surgida como uma consequência da lei da acção e reacção, também pode ser explicada pela lei de Bernoulli — o que, aliás, seria de esperar, porque esta lei foi deduzida das leis da Mecânica, que são coerentes entre si.

Com efeito, sendo a velocidade de deslocamento do ar menor na parte inferior da asa, será aí, pela lei de Bernoulli, maior a pressão, isto é:

$$p_2 > p_1 .$$

Da diferença ( $p_2 - p_1$ ) resulta uma *força de pressão dirigida para cima* — é a **impulsão dinâmica** ou *força de sustentação do avião durante o seu movimento*.

Esta força de sustentação depende de vários factores e aumenta com o quadrado da velocidade de deslocamento do ar.

Daqui a necessidade que o avião tem, para levantar, de atingir a velocidade máxima na pista de decolagem.

No caso da ventoíinha (fig. 10.39), a velocidade relativa ar-hélices em rotação no plano vertical origina, devido à forma das hélices, um impulso dinâmico horizontal, que se explica

#### QUESTÕES PROPOSTAS

##### Q 10.26

Soprando na parte afilada, A, do funil, a bola de ping-pong flutua sem cair — paradoxo hidrodinâmico — se não se encostar às paredes (fig. 10.41).

Explicar este resultado, que poderá confirmar-se experimentalmente.

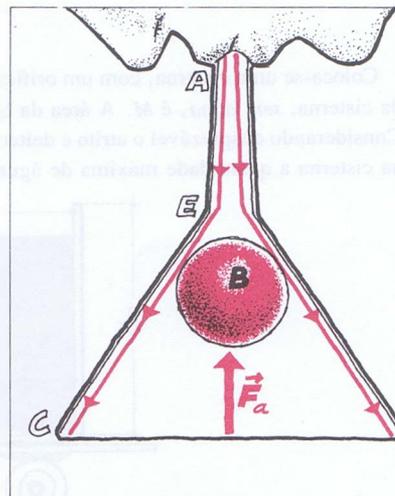


Fig. 10.41 A bola flutua, sem cair, enquanto se sopra no estrangulamento do funil.

# Teste de auto-avaliação

## I

1. O dispositivo apresentado na fig. T.10.1 pode servir para determinar a densidade relativa de um líquido, desde que se conheça a densidade relativa do outro.

1.1. Mostrar como.

1.2. O líquido mais denso tem a densidade relativa  $d = 1,8$ .

O desnível obtido foi de  $3/5$  da altura menor.

Qual é a densidade do líquido menos denso?

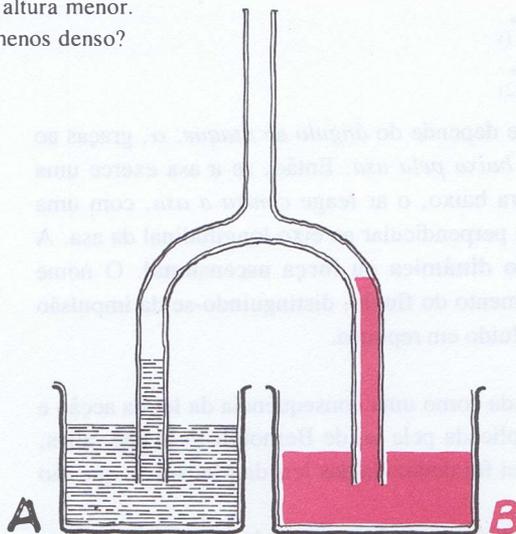


Fig. T.10.1

2. Põe-se um bloco paralelepípedico de madeira a flutuar num vaso com água.

Quando se muda o bloco da posição horizontal para a posição vertical, variará ou não o nível da água no vaso? Justificar.

## II

Coloca-se uma cisterna, com um orifício A no fundo, em cima do estrado de um camião — fig. T.10.2. A massa do camião e da cisterna, *sem água*, é  $M$ . A área da base da cisterna é  $S$ .

Considerando desprezável o atrito e deitando água na cisterna, com que força deve ser arrastado este sistema para que fique retida na cisterna a quantidade máxima de água?

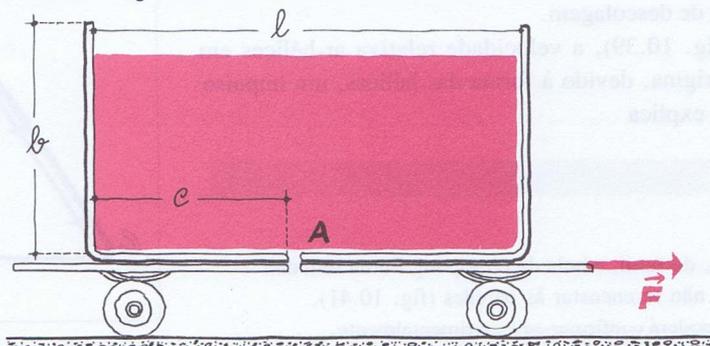


Fig. T.10.2

### III

Dispara-se uma bala de cortiça num tanque com água. A inclinação do disparo é de  $45^\circ$  com a horizontal. O valor da velocidade inicial é  $4.0 \text{ ms}^{-1}$  e a densidade relativa da cortiça é  $0.8$  — fig. T.10.3.

1. Representar as forças que actuam na bala de cortiça após o disparo.
2. Determinar a aceleração do movimento da bala.
3. A que distância da boca da arma a bala virá à superfície, se for desprezável a resistência da água ao seu movimento?  
(Adaptado de uma questão do Exame do 12.<sup>o</sup> ano 2.<sup>a</sup> fase de 1983)

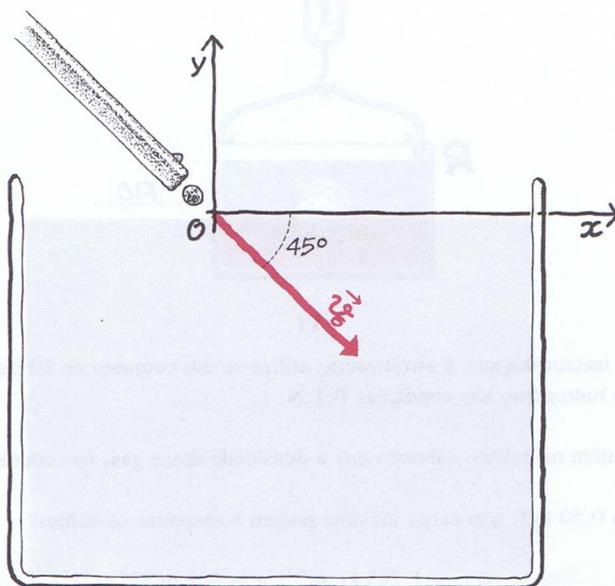


Fig. T.10.3

### IV

Uma esfera está em equilíbrio no interior de dois líquidos não miscíveis — A e B, fig. T.10.4. Sendo  $0.85$  a densidade relativa da esfera, determinar a razão dos volumes imersos,  $V_1/V_2$ , em cada líquido.

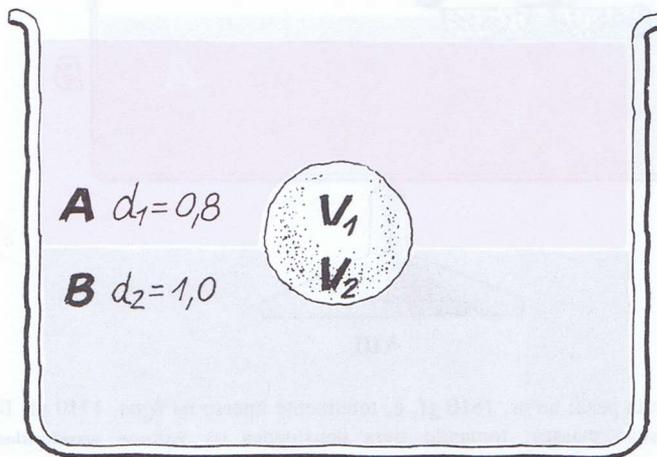


Fig. T.10.4

V

Um recipiente, contém água e um corpo menos denso que este líquido preso por um fio ao fundo do recipiente. O recipiente está suspenso de um dinamómetro, fig. T.10.5. Sem intervenção exterior, o fio parte-se. Indicar se o dinamómetro passa a indicar, imediatamente após o rompimento do fio, um valor maior, um valor menor ou um valor igual. Fundamentar de dois modos diferentes a resposta.

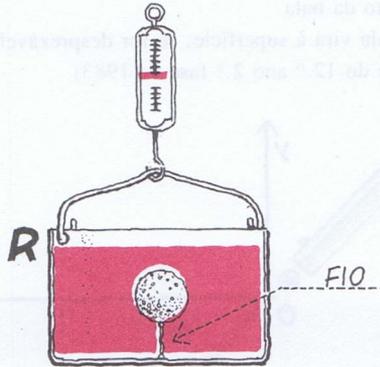


Fig. T.10.5

VI

Para fazer ascender aparelhos meteorológicos à estratosfera, utiliza-se um conjunto de 10 balões-sonda com o volume, cada um, de  $2,0 \text{ m}^3$ . Enchem-se com hidrogénio nas condições P.T.N.

1. Que massa de hidrogénio contêm os balões, sabendo que a densidade desse gás, nas condições P.T.N., é  $0,089 \text{ kg m}^{-3}$ ?
2. Sabendo que cada balão pesa  $0,50 \text{ kgf}$ , que carga máxima podem transportar os balões?

$$\rho_{ar} = 1,293 \text{ kg m}^{-3}; g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$$

VII

O líquido A e o vaso B estão em equilíbrio — fig. T.10.6. Põe-se a flutuar, junto à parede, um bocado de cortiça com um peso P. O equilíbrio mantém-se ou o vaso tomba?

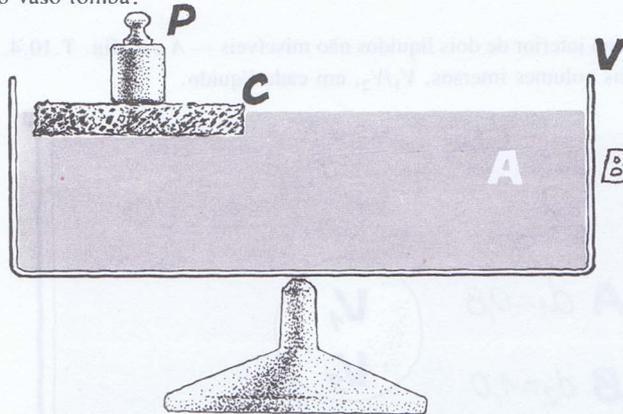


Fig. T.10.6

VIII

Um objecto maciço de ouro e prata pesa, no ar,  $1810 \text{ gf}$ , e, totalmente imerso na água,  $1710 \text{ gf}$ . Determinar os volumes de ouro e prata, assim como as suas massas, tomando para densidades os valores arredondados:  $\rho(\text{Au}) = 19 \text{ g/cm}^3$ ,  $\rho(\text{Ag}) = 10 \text{ g/cm}^3$ .

**GUIA  
de  
ESTUDO**



# Cinemática

## G.E.1.1 Alguns objectivos desta Unidade

O aluno:

*Analisa movimentos de partículas:*

- Deduz as grandezas cinemáticas características de movimentos traduzidos graficamente em função do tempo.
- Representa graficamente as equações das várias grandezas características de movimentos rectilíneos.
- Estabelece equações de movimentos de que se conhecem algumas grandezas cinemáticas características.
- Deduz as grandezas cinemáticas características de movimentos a partir das respectivas equações do movimento.
- Distingue velocidade média e rapidez média.
- Estabelece as expressões das componentes intrínsecas da aceleração.
- Resolve problemas simples envolvendo movimentos de projecteis.
- Resolve problemas envolvendo movimentos rectilíneos com aceleração constante.

*Aplica os conceitos cinemáticos em situações da vida corrente:*

- Resolve problemas envolvendo situações vulgares de composição e decomposição de deslocamentos e velocidades.
- Descreve o comportamento cinemático de corpos em situações práticas a partir do conhecimento de algumas características vinculativas.

## G.E.1.2 Expressão analítica, cartesiana, de um vector no referencial ortonormado bidimensional. Módulo (norma ou medida) e co-senos directores

### A — Definições

Consideremos um *vector livre*,

$$\vec{v} = \vec{AC},$$

num referencial cartesiano ortonormado  $(O, x, y)$  — fig. G.E.1.1.

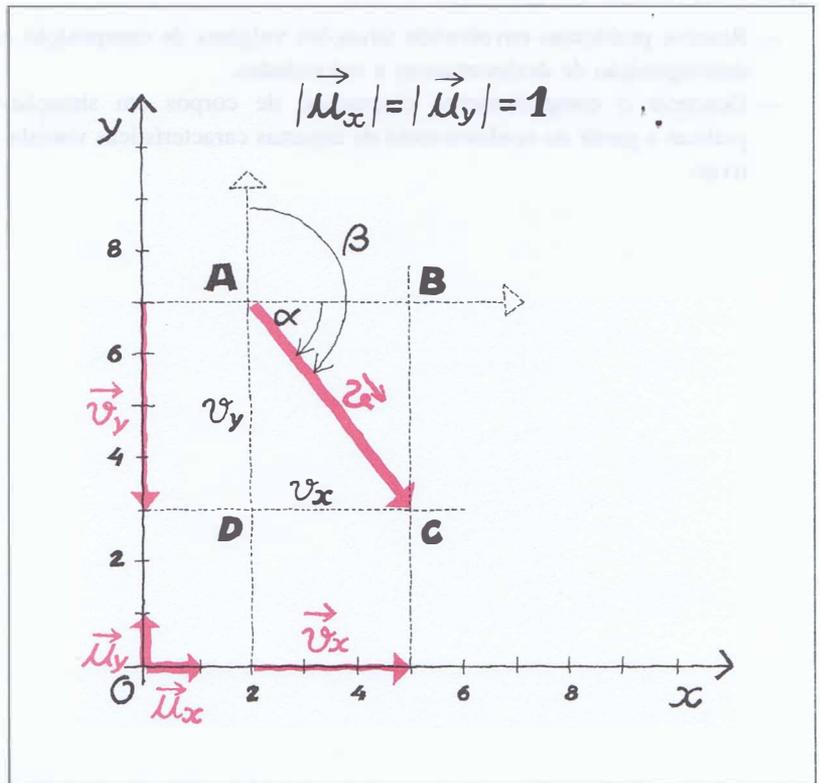
Os pontos  $A$  e  $C$  não são fixos, porque o vector é livre, isto é, não tem ponto de aplicação.

Nestas condições, chamam-se **vectores componentes**, **componentes vectoriais** ou **componentes axiais** do vector livre,  $\vec{v}$ , os vectores  $\vec{v}_x$  e  $\vec{v}_y$ , que têm a direcção dos eixos coordenados e tais que a sua soma é o vector  $\vec{v}$ :

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

Os valores numéricos (algébricos) destas componentes vectoriais são, no caso da fig. G.E.1.1,

$$v_x = +3, \quad v_y = -4$$



**Fig. G.E.1.1**

Componentes vectoriais,  $\vec{v}_x$  e  $\vec{v}_y$ , e componentes escalares,  $v_x$  e  $v_y$ , do vector livre  $\vec{v}$ .

e designam-se por **componentes escalares**, apenas **componentes** ou ainda **coordenadas** do vector livre  $\vec{v}$ .

Designando por  $\vec{u}_x$  e  $\vec{u}_y$  os versores das direcções dos eixos, cujo par ordenado  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$  constitui a base do referencial ortonormado  $(O, x, y)$  onde exprimimos o vector, e atendendo à expressão do produto de um escalar por um vector (ver G.E.1.6, Manual de Física para o 10.º ano, dos autores), temos:

$$\vec{v}_x = v_x \cdot \vec{u}_x \text{ e } \vec{v}_y = v_y \cdot \vec{u}_y$$

Por isso, a expressão analítica, cartesiana, do vector  $\vec{v}$ , neste referencial ortonormado a duas dimensões, é

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{u}_x + v_y \cdot \vec{u}_y$$

Se forem  $\alpha$  e  $\beta$  os ângulos, *orientados*, que o vector  $\vec{v}$  forma com os sentidos positivos dos eixos  $Ox$  e  $Oy$ , as componentes escalares (algébricas) são dadas pelas seguintes expressões (fig. G.E.1.1):

$$\begin{aligned} v_x &= |\vec{v}| \cos \alpha \\ v_y &= |\vec{v}| \cos \beta, \end{aligned}$$

representando por  $|\vec{v}|$  o módulo, norma ou medida de  $\vec{v}$ .

As componentes escalares determinam completamente o vector livre,  $\vec{v}$ , porque:

— o **módulo** (ou **medida**) — corresponde ao que em Matemática se designa por **norma**, na base ortonormada  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$  — é dado por

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2};$$

— a **direcção** e o **sentido** obtêm-se a partir dos **co-senos directores** (co-senos dos ângulos, contados a partir das metades positivas dos eixos, que o vector forma com estes):

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|}$$

$$\cos \beta = \frac{v_y}{|\vec{v}|}$$

Se se tratar de um *vector aplicado* (ou *ligado*), é preciso conhecer, além das componentes escalares, as coordenadas do ponto de aplicação,  $A(x_A, y_A)$ , do vector.

As questões que a seguir se propõem são aplicações simples destes conceitos.

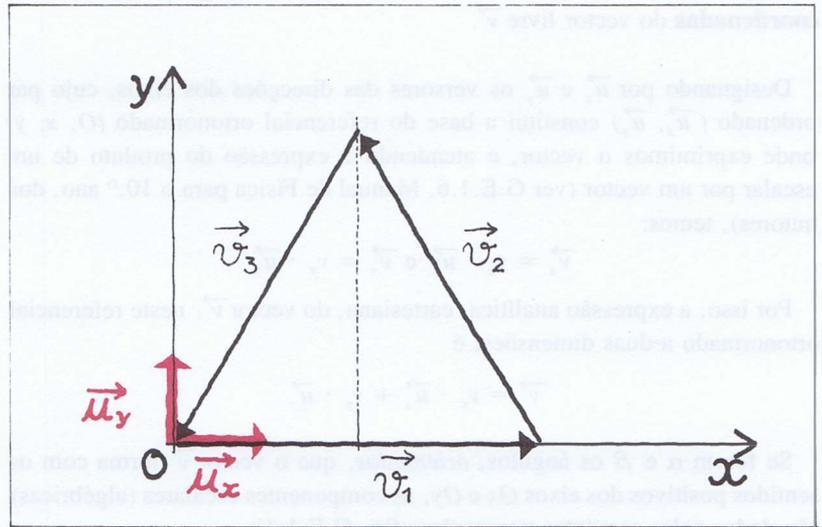


Fig. G.E.1.2

**Questão 1:**

No diagrama junto (fig. G.E. 1.2), é

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = |\vec{v}_3| = 3,0$$

Tomando para eixo dos  $xx$  um dos lados do triângulo (equilátero, neste caso), escrever as expressões cartesianas dos vectores  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  e  $\vec{v}_3$ .

Dados:

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ$$

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$$

**Resposta:**

$$\vec{v}_1 = 3,0 \vec{u}_x;$$

$$\vec{v}_2 = -1,5 \vec{u}_x + 2,6 \vec{u}_y;$$

$$\vec{v}_3 = -1,5 \vec{u}_x - 2,6 \vec{u}_y$$

**Questão 2:**

Dado o vector

$$\vec{v} = -3,0 \vec{u}_x + 4,0 \vec{u}_y,$$

determinar o seu módulo e os co-senos directores.

**Resposta:**

$$|\vec{v}| = 5; \cos \alpha = -0,6; \cos \beta = 0,8$$

$$\alpha = 127^\circ \quad \beta = 37^\circ$$

**G.E.1.3 Expressões cartesianas da soma e diferença de vectores complanares**

A — Definições

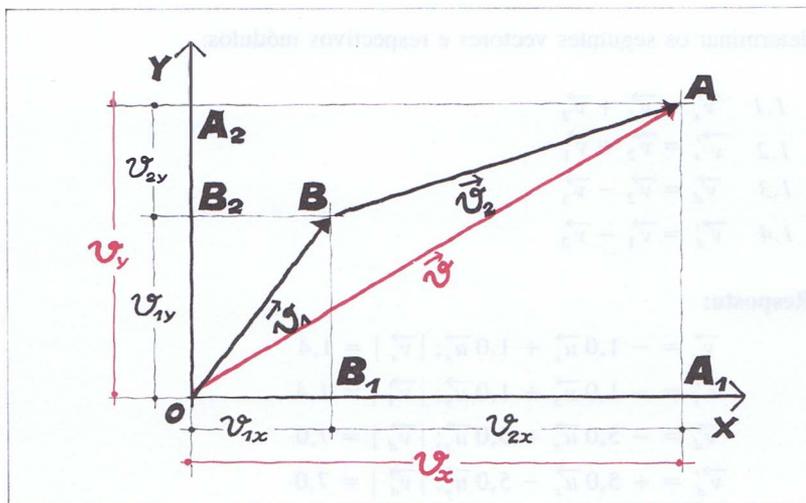
No diagrama da fig. G.E.1.3 podemos verificar que as **componentes escalares do vector-soma**

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

são as *somas algébricas*

$$v_x = v_{1x} + v_{2x}$$

$$v_y = v_{1y} + v_{2y}$$



**Fig. G.E.1.3**

Componentes escalares do *vector-soma*  
( $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ):

$$\begin{cases} v_x = v_{1x} + v_{2x} \\ v_y = v_{1y} + v_{2y} \end{cases}$$

Componentes escalares do *vector-diferença*  
( $\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1$ ):

$$\begin{cases} v_{1x} = v_x - v_{2x} \\ v_{1y} = v_y - v_{2y} \end{cases}$$

Este resultado é geral e pode enunciar-se do modo seguinte:

*em cada eixo, a componente do vector-soma de vários vectores é a soma algébrica das componentes dos vectores parcelas (teorema das componentes ou das projecções).*

Nestas condições, a expressão cartesiana do vector-soma,  $\vec{v}$ , dos vectores parcelas  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots$ , é:

$$\vec{v} = (v_{1x} + v_{2x} + v_{3x} + \dots) \vec{u}_x + (v_{1y} + v_{2y} + v_{3y} + \dots) \vec{u}_y$$

Para o caso da *diferença de dois vectores complanares*, livres, o mesmo diagrama mostra-nos que as **componentes escalares do vector-diferença**

$$\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1$$

são as *diferenças algébricas*

$$v_{2x} = v_x - v_{1x}$$

$$v_{2y} = v_y - v_{1y}$$

A expressão cartesiana do vector-diferença será então:

$$\vec{v}_2 = (v_x - v_{1x})\vec{u}_x + (v_y - v_{1y})\vec{u}_y$$

### B — Aplicações

As questões que a seguir se propõem são aplicações simples destes conceitos.

#### **Questão 1:**

Dados os vectores livres

$$\vec{v}_1 = 2,0\vec{u}_x - 2,0\vec{u}_y$$

$$\vec{v}_2 = -3,0\vec{u}_x + 3,0\vec{u}_y$$

determinar os seguintes vectores e respectivos módulos:

$$1.1 \quad \vec{v}_s = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$1.2 \quad \vec{v}'_s = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$$

$$1.3 \quad \vec{v}_d = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$$1.4 \quad \vec{v}'_d = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

**Resposta:**

$$\vec{v}_s = -1,0\vec{u}_x + 1,0\vec{u}_y; |\vec{v}_s| = 1,4$$

$$\vec{v}'_s = -1,0\vec{u}_x + 1,0\vec{u}_y; |\vec{v}'_s| = 1,4$$

$$\vec{v}_d = -5,0\vec{u}_x + 5,0\vec{u}_y; |\vec{v}_d| = 7,0$$

$$\vec{v}'_d = +5,0\vec{u}_x - 5,0\vec{u}_y; |\vec{v}'_d| = 7,0$$

#### **Questão 2:**

As operações adição de vectores e subacção de vectores gozam da propriedade comutativa?

Justificar.

**Resposta:**

Generalizar os resultados de Q. 1 e concluir pela afirmativa no que toca à adição e pela negativa no que toca à subtracção — a qual é anticomutativa.

#### **Questão 3:**

Mostrar que no diagrama da fig. G.E.1.2 se verifica:

$$3.1 \quad \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$3.2 \quad \vec{v} = \vec{v}_1 - (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = 2\vec{v}_1$$

**Sugestão:**

Utilizar os dados contidos na resposta a Q. 1.

**G.E. 1.4 Componentes de um vector num espaço a três dimensões.**  
**Expressões cartesianas da adição e subtração de vectores no referencial ortonormado tridimensional**

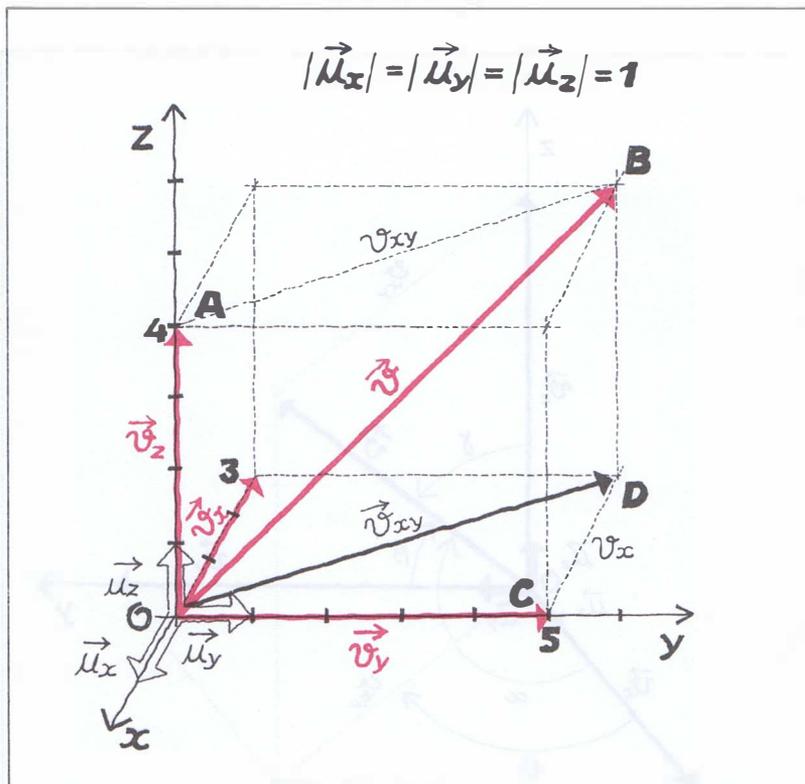
As **componentes vectoriais** ou *axiais* do vector livre  $\vec{v}$  são três e tais que a sua soma continua a ser o vector  $\vec{v}$  (fig. G.E. 1.4).

De facto,

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z$$

porque

$$(\vec{v}_x + \vec{v}_y) = \vec{v}_{xy} \text{ e } \vec{v}_{xy} + \vec{v}_z = \vec{v}$$



**Fig. G.E. 1.4**  
 Componentes vectoriais do vector  $\vec{v}$  :  
 $\vec{v}_x, \vec{v}_y, \vec{v}_z$   
 Componentes escalares do vector  $\vec{v}$  :  
 $v_x, v_y, v_z$

As **componentes escalares** do vector  $\vec{v}$  são os três valores algébricos (no caso da fig. G.E. 1.4):

$$\begin{cases} v_x = -3 \\ v_y = +5 \\ v_z = +4 \end{cases}$$

Designando por  $\vec{u}_x, \vec{u}_y$  e  $\vec{u}_z$  os versores das direcções dos eixos, isto é, os vectores que constituem a base do referencial ortonormado tridimensional (O, x, y, z), a expressão cartesiana do vector  $\vec{v}$ , a três dimensões, é:

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{u}_x + v_y \cdot \vec{u}_y + v_z \cdot \vec{u}_z$$

No exemplo apresentado na fig. G.E.1.4, temos:

$$\vec{v} = -3 \vec{u}_x + 5 \vec{u}_y + 4 \vec{u}_z$$

Se forem  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  os ângulos, *orientados*, que o vector  $\vec{v}$  forma com as metades positivas dos eixos  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ , respectivamente, os três **co-senos directores** são (Fig. G.E.1.5):

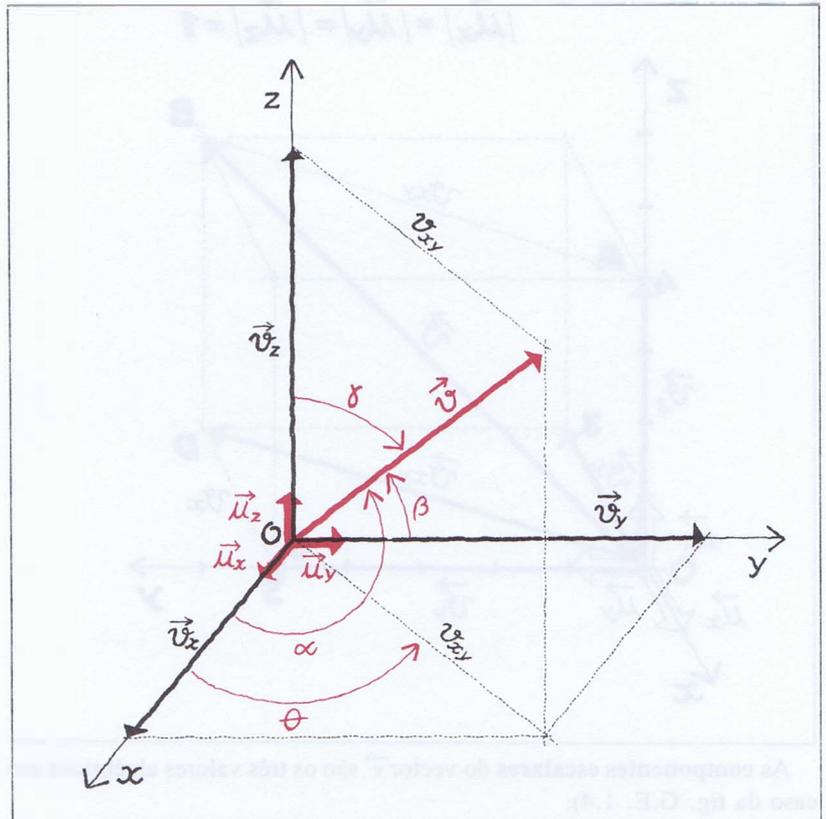
$$\cos \alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|}, \quad \cos \beta = \frac{v_y}{|\vec{v}|}, \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{|\vec{v}|}$$

O **módulo** (*norma* ou *medida*) do vector  $\vec{v}$ , como resultado da análise das figs. G.E.1.4 e 1.5, será dado por

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_{xy}^2 + v_z^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

porque

$$v_{xy}^2 = v_x^2 + v_y^2$$



**Fig. G.E.1.5**

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — ângulos do vector  $\vec{v}$  com a metade positiva do eixo respectivo.

$\theta$  — ângulo da projecção ortogonal,  $v_{xy}$ , do vector  $\vec{v}$  com a metade positiva do eixo dos  $xy$ .

Tal como no plano, acrescentando apenas mais uma componente, temos a seguinte expressão cartesiana para o **vector-soma** (de parcelas  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots$ ):

$$\vec{v} = (v_{1x} + v_{2x} + \dots) \vec{u}_x + (v_{1y} + v_{2y} + \dots) \vec{u}_y + (v_{1z} + v_{2z} + \dots) \vec{u}_z$$

Analogamente, a expressão cartesiana do **vector-diferença**

$$\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1$$

é:

$$\vec{v}_2 = (v_x - v_{1x}) \vec{u}_x + (v_y - v_{1y}) \vec{u}_y + (v_z - v_{1z}) \vec{u}_z$$

**G.E.1.5 Derivada de um vector como uma generalização da derivada de função de variável escalar**

A — Derivada de uma função escalar

Vamos partir do estudo da *derivada da função de uma variável* num ponto do seu domínio (tema do programa de Matemática do 11.º ano de escolaridade) para compreendermos o conceito de derivada de uma grandeza vectorial.

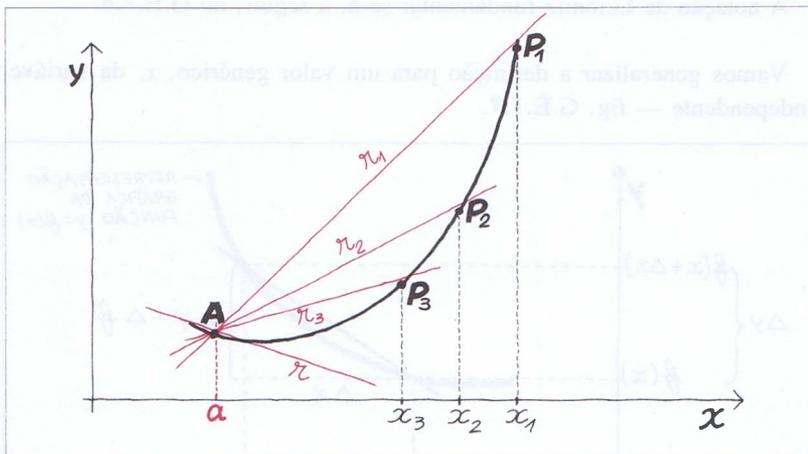
Seja  $a$  um ponto *fixo* do domínio de uma função  $f(x)$  — fig. G.E.1.6

Para um outro ponto  $x \in D_f$ , a razão incremental

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

é o *declive da recta* que passa pelos pontos

$(a, f(a))$  e  $(x, f(x))$  — fig. G.E.1.6



**Fig. G.E.1.6** Representação gráfica de uma função em  $\mathbb{R}^2$ . A cada termo,  $x_n$ , de uma sucessão convergente para  $a$  corresponde uma razão incremental

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}$$

declive da recta  $r_n$ , que vai tendendo para o declive da tangente  $r$ , em  $A$ . Esta é a **derivada** da função no ponto  $a$ .

Se fizermos  $x$  tender para  $a$ , podemos determinar (caso exista) o limite daquela razão incremental no ponto  $a$ .

Esse limite, que é dado pelo declive da recta  $r$ , tangente ao gráfico da função no ponto  $(a, f(a))$ , chama-se **derivada** da função  $f(x)$  no ponto  $a$ .

E escreve-se

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Esta derivada no ponto  $a$  mede a *rapidez da variação instantânea* da função nesse ponto, e dá-nos o sentido (crescimento ou decrescimento) em que essa variação ocorre.

Vê-se, por exemplo, na cinemática (secção 1.5.3), que a *rapidez* ou *celeridade* («speed»), em cada instante, de um móvel, é de facto a rapidez com que está a variar o espaço percorrido por unidade de tempo, pois que essa rapidez,  $v$ , é a derivada do espaço  $s$ , função do tempo.

Tendo em conta que a variável dependente é  $y$  (fig. G.E.1.6), podemos representar, para a função

$$y = f(x),$$

a derivada no ponto  $a$ , em notação de Leibnitz, pelo símbolo

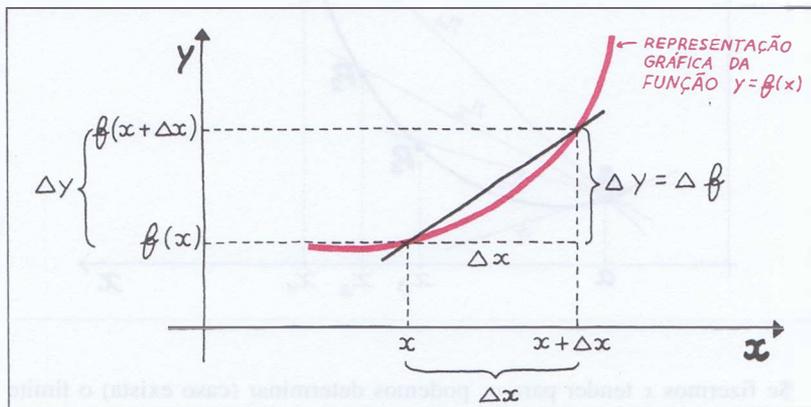
$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=a}$$

que se lê: *derivada* de  $y$  em ordem a  $x$  para  $x$  igual a  $a$ . Salientamos, pois, que é

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=a} = f'(a)$$

A notação de Leibnitz fundamentar-se-á, a seguir, no G.E.1.6.

Vamos generalizar a definição para um valor genérico,  $x$ , da variável independente — fig. G.E.1.7.



**Fig. G.E.1.7**

A derivada no ponto genérico,  $x$ , é

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

A um incremento,  $\Delta x$ , variável e infinitesimal ( $\Delta x \rightarrow 0$ ), do valor genérico,  $x$ , corresponde um incremento  $\Delta y$ , igualmente variável e infinitesimal ( $\Delta y \rightarrow 0$ ), da função correspondente

$$y = f(x)$$

A derivada no ponto genérico,  $x$ , é o limite da razão incremental quando o incremento da variável independente tende para zero:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

B — Derivada de uma função vectorial

Consideremos agora o vector

$$\vec{r}(t) = r_x \cdot \vec{u}_x + r_y \cdot \vec{u}_y + r_z \cdot \vec{u}_z ,$$

num referencial  $(O, x, y, z)$  — fig. G.E.1.8

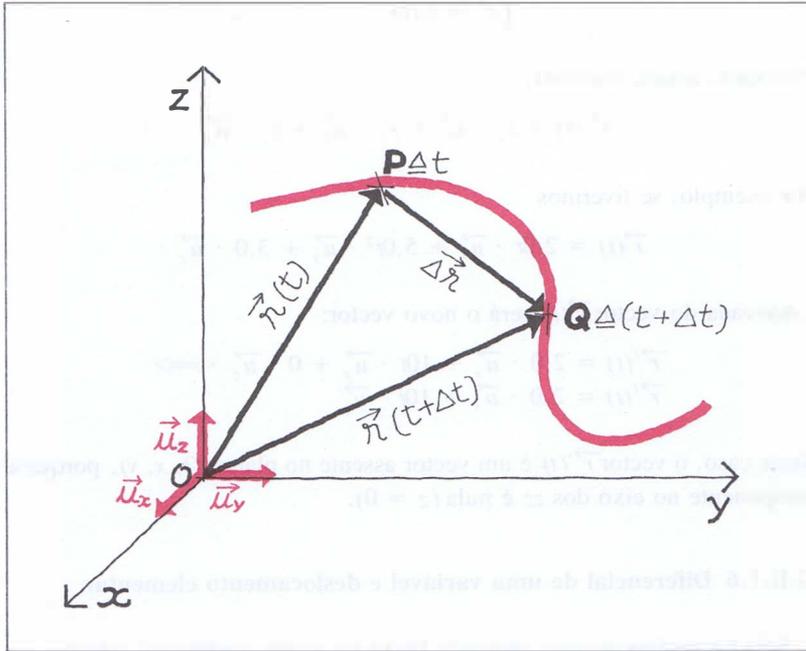


Fig. G.E.1.8

A derivada do vector  $\vec{r}(t)$ ,

no instante  $t$ , é o vector:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \end{aligned}$$

As componentes,  $r_x$ ,  $r_y$  e  $r_z$  são funções da variável tempo,  $t$ , porque variam com esta:

$$r_x = f_1(t), \quad r_y = f_2(t), \quad r_z = f_3(t)$$

O próprio vector assume, pois, uma forma diferente para cada  $t$  — é uma **função vectorial** de  $t$ .

A derivada desta função vectorial será, por extensão da definição da derivada de uma função escalar:

$$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Como

$$\vec{r}(t) = r_x \cdot \vec{u}_x + r_y \cdot \vec{u}_y + r_z \cdot \vec{u}_z$$

e os versores  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  e  $\vec{u}_z$  são vectores de módulo 1 e constantes em direcção e sentido (têm, por isso, derivada nula), podemos afirmar que derivar a função vectorial

$$\vec{r}(t)$$

equivale a derivar as funções escalares paramétricas:

$$\begin{cases} r'_x = f'_1(t) \\ r'_y = f'_2(t) \\ r'_z = f'_3(t) \end{cases}$$

Podemos, assim, escrever:

$$\vec{r}'(t) = r'_x \cdot \vec{u}_x + r'_y \cdot \vec{u}_y + r'_z \cdot \vec{u}_z$$

Por exemplo, se tivermos

$$\vec{r}(t) = 2,0t \cdot \vec{u}_x + 5,0t^2 \cdot \vec{u}_y + 3,0 \cdot \vec{u}_z$$

a derivada do vector  $\vec{r}(t)$  será o novo vector:

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= 2,0 \cdot \vec{u}_x + 10t \cdot \vec{u}_y + 0 \cdot \vec{u}_z \iff \\ \vec{r}'(t) &= 2,0 \cdot \vec{u}_x + 10t \cdot \vec{u}_y \end{aligned}$$

Neste caso, o vector  $\vec{r}'(t)$  é um vector assente no plano ( $O, x, y$ ), porque a componente no eixo dos  $zz$  é nula ( $z = 0$ ).

### G.E.1.6 Diferencial de uma variável e deslocamento elementar

Seja  $f$  uma função com derivada finita no ponto genérico  $x$ , isto é:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \in \mathbb{R}$$

Fazendo

$$\varepsilon = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x),$$

a variável  $\varepsilon$  é um infinitésimo com  $\Delta x$  (isto é, se  $\Delta x \rightarrow 0$ , então  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

A igualdade anterior é equivalente à seguinte:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$$

O primeiro membro é a **diferença, acréscimo** ou **variação** da função

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

relativamente ao ponto  $x$  — fig. G.E.1.9.

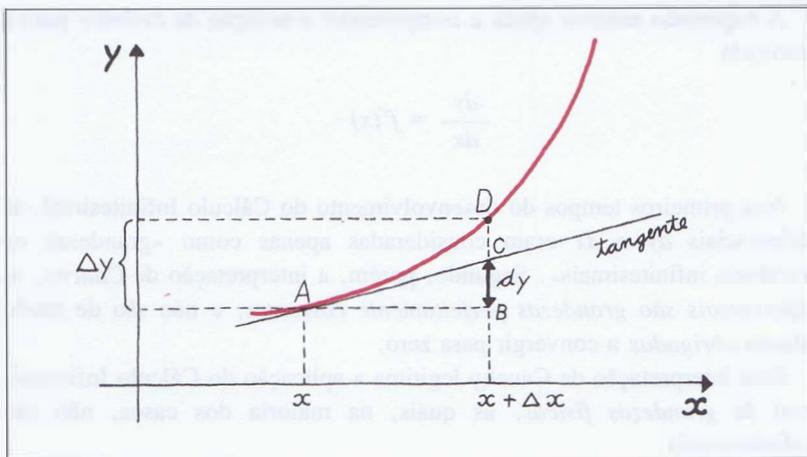


Fig. G.E.1.9

A diferencial da função,  $dy$ , no ponto A é o produto:

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

A primeira parcela do segundo membro chama-se **diferencial da função** relativamente ao acréscimo  $\Delta x$  da variável independente e representa-se por  $dy$ . Tem-se

$$dy = f'(x) \Delta x$$

Corresponde, na fig. G.E.1.9, ao segmento  $BC$  (porque  $f'(x)$  é o declive da tangente).

A igualdade mostra que a diferença ou variação da função,  $\Delta y$ , não é igual à diferencial da função,  $dy$ , pois

$$\Delta y = dy + \varepsilon \cdot \Delta x ,$$

mas aproximam-se tanto mais quanto menor fôr  $\Delta x$  — fig. G.E.1.9.

Para a função

$$y = f(x) = x$$

é

$$f'(x) = 1$$

e, portanto,

$$dy = 1 \cdot \Delta x = dx$$

Aproveita-se este facto para escrever, sempre,

$$dy = f'(x) \cdot dx ,$$

designando por  $dx$  a variável  $\Delta x$  e dando-lhe o nome de **diferencial da variável independente**.

De um modo geral, a diferencial da função num ponto é o produto da sua derivada nesse ponto pela diferencial da variável independente.

A expressão anterior ajuda a compreender a notação de *Leibnitz* para a derivada

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Nos primeiros tempos do desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal, as diferenciais  $dy$  e  $dx$  eram consideradas apenas como «grandezas ou variáveis infinitesimais». Segundo, porém, a interpretação de *Cauchy*, as diferenciais são grandezas perfeitamente correntes, e não são de modo algum obrigadas a convergir para zero.

Esta interpretação de *Cauchy* legitima a aplicação do Cálculo Infinitesimal às grandezas físicas, as quais, na maioria dos casos, não são infinitesimais.

Podemos agora generalizar, considerando também a diferencial do vector de posição  $\vec{r}$  como uma transposição para a Física do conceito de diferencial, definindo-a do modo seguinte (fig. G.E.1.10):

a diferencial do vector  $\vec{r}$  é o vector cujas componentes escalares são as diferenciais das coordenadas do vector, isto é,

$$d\vec{r} = dx \cdot \vec{u}_x + dy \cdot \vec{u}_y + dz \cdot \vec{u}_z$$

Esta diferencial do vector  $\vec{r}$  é, precisamente, o que em Física designamos por deslocamento elementar.

Este vector  $d\vec{r}$  goza de duas propriedades importantes:

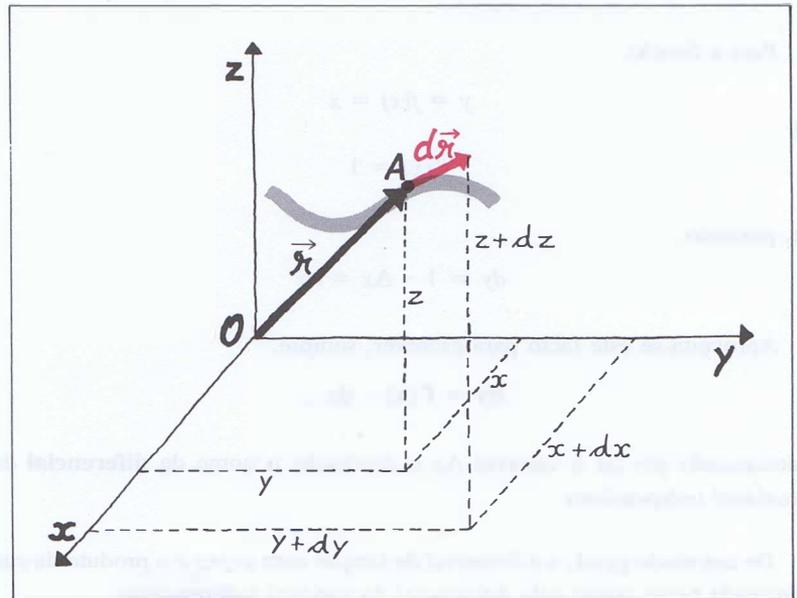


Fig. G.E.1.10

A diferencial do vector posição,  $d\vec{r}$ , chama-se em Física *deslocamento elementar*.

1.<sup>a</sup> — O seu *módulo* é igual ao espaço elementar  $ds$ :

$$|d\vec{r}| = ds \quad (\text{ver secção 1.5.3 do texto})$$

2.<sup>a</sup> — Tem a direcção da tangente à trajectória e o sentido do movimento, porque é o produto do vector velocidade por um escalar positivo:

$$d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$$

As diferenciais das várias grandezas físicas assumem um papel muito importante no estudo teórico da Física.

Os alunos ir-se-ão apercebendo desta importância lentamente.

Utilizando diferenciais, poderemos considerar *localmente* constantes grandezas que, na realidade, variam continuamente, para, deste modo, as poderemos definir e medir.

Assim sucedeu com a velocidade  $\vec{v}$  que, variando embora, se pode considerar constante em cada deslocamento elementar,  $d\vec{r}$ , de medida  $ds$ , no tempo elementar  $dt$ . Considerando-a constante, definimo-la por

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

de medida

$$|\vec{v}| = \frac{ds}{dt} \quad (\text{pois } |d\vec{r}| = ds)$$

Será também, por exemplo, o caso da fig. 1.23 do texto, onde o raio de curvatura  $r$  se considerará constante num deslocamento elementar correspondente ao ângulo ao centro  $d\theta$ , de modo a poder definir-se pela expressão:

$$r = \frac{ds}{d\theta}$$

Finalmente: conhecida a diferencial de uma grandeza física, poderemos por **integração**, ficar a conhecer o modo como essa grandeza varia. Pode ficar a conhecer-se igualmente a função que traduz a correspondência entre essa grandeza e outra (ver o exemplo apresentado no G.E.1.11).

## G.E.1.7 Produto interno de dois vectores

### A — Definições

O **produto interno** (ou *escalar*) dos vectores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  é o *escalar*:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 v_2 \cdot \cos \alpha$$

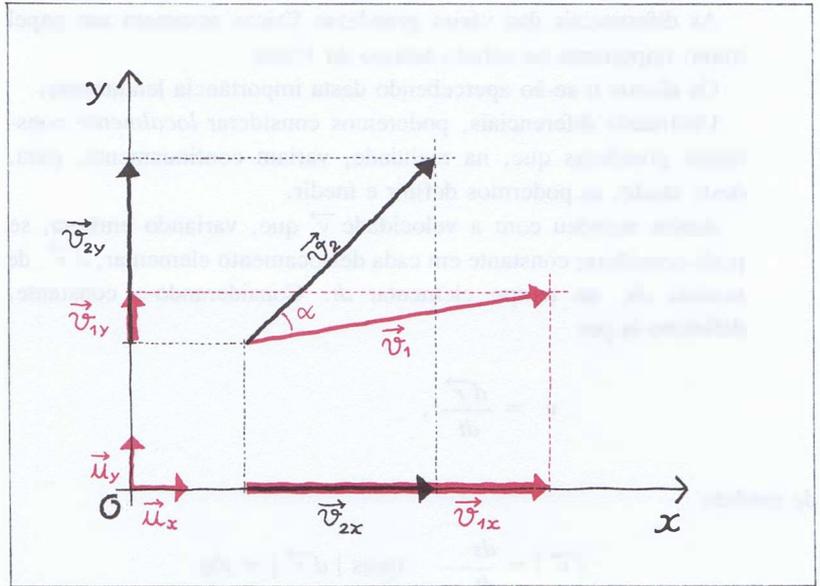


Fig. G.E.1.11

O produto interno dos vectores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  é o escalar:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_{1x} \cdot v_{2x} + v_{1y} \cdot v_{2y}$$

Este produto interno pode exprimir-se, de modo simples e cómodo, em função das componentes escalares (algébricas) de cada um dos vectores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  — fig. G.E.1.11.

Com efeito, considerando os vectores

$$\vec{v}_1 = v_{1x} \cdot \vec{u}_x + v_{1y} \cdot \vec{u}_y$$

$$\vec{v}_2 = v_{2x} \cdot \vec{u}_x + v_{2y} \cdot \vec{u}_y$$

e os produtos internos dos vectores

$$\begin{aligned} \vec{u}_x \cdot \vec{u}_x &= 1 \times 1 \times \cos 0^\circ = 1 \\ \vec{u}_x \cdot \vec{u}_y &= 1 \times 1 \times \cos 90^\circ = 0, \end{aligned}$$

temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 &= (v_{1x} \cdot \vec{u}_x + v_{1y} \cdot \vec{u}_y) (v_{2x} \cdot \vec{u}_x + v_{2y} \cdot \vec{u}_y) \\ &= v_{1x} v_{2x} \underbrace{(\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x)}_1 + v_{1x} v_{2y} \underbrace{(\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y)}_0 + \\ &\quad + v_{1y} v_{2x} \underbrace{(\vec{u}_y \cdot \vec{u}_x)}_0 + v_{1y} v_{2y} \underbrace{(\vec{u}_y \cdot \vec{u}_y)}_1 \iff \\ \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 &= v_{1x} \cdot v_{2x} + v_{1y} \cdot v_{2y} \end{aligned}$$

Se os vectores possuírem três componentes, temos:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_{1x} v_{2x} + v_{1y} v_{2y} + v_{1z} v_{2z},$$

porque

$$\begin{aligned} \vec{u}_x \cdot \vec{u}_x &= \vec{u}_y \cdot \vec{u}_y = \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z = 1 \\ \vec{u}_x \cdot \vec{u}_y &= \vec{u}_y \cdot \vec{u}_z = \vec{u}_x \cdot \vec{u}_z = 0 \end{aligned}$$

**B — Aplicações**

As questões que a seguir se propõem são aplicações simples destas expressões.

**Questão 1:**

Determinar  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$  para

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= 3\vec{u}_x - 4\vec{u}_y + 2\vec{u}_z \\ \vec{v}_2 &= -3\vec{u}_x + 4\vec{u}_y + 15\vec{u}_z \end{aligned}$$

**Resposta: 5**

**Questão 2:**

Mostrar que

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = (\text{prop. comutativa})$$

**Questão 3:**

Mostrar que num triângulo (fig. G.E. 1.12) se verifica:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

(teorema de Carnot).

**Resposta:**

$$\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$$

Multiplicando escalarmente membro a membro e desenvolvendo, obtemos:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) \iff$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c}$$

Daqui resulta a relação pedida.

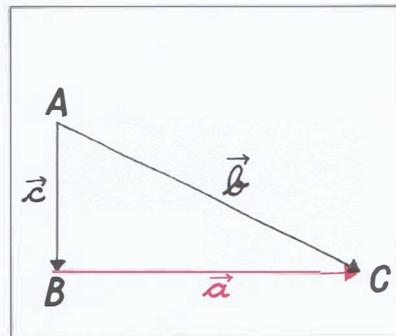
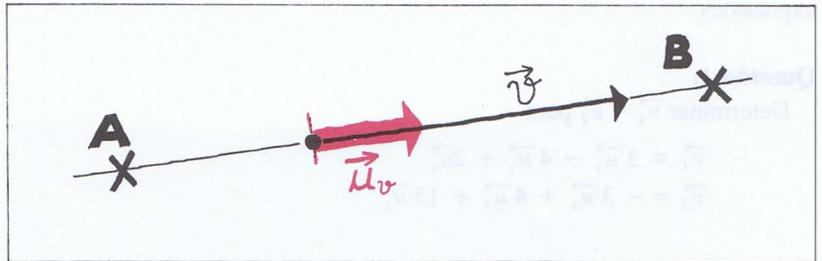


Fig. G.E. 1.12

### G.E.1.8 Propriedades do vector unitário ou versor — $\vec{u}$

Para indicar a direcção e o sentido escolhido para positivo de uma dada direcção  $AB$  (fig. G.E.1.13), utiliza-se o chamado **versor** ou **vector unitário** dessa direcção. É um vector, genericamente representado por  $\vec{u}$ , que tem as seguintes características:

- direcção: a da recta  $AB$ ;
- sentido: o que se escolheu para positivo na direcção dada;
- módulo:  $|\vec{u}| = 1$



**Fig. G.E.1.13** O vector unitário ou versor,  $\vec{u}_v$ , do vector  $\vec{v}$  tem a direcção deste, o sentido escolhido para positivo na recta de suporte,  $AB$ , e comprimento igual à unidade.

Chama-se *vector unitário* precisamente por a sua medida ser igual à unidade, e *versor* por ser o indicador de uma direcção e um sentido.

Este vector, cuja utilização simplifica as expressões vectoriais e facilita a leitura das mesmas, goza de três propriedades importantes, que passamos a apresentar.

#### 1.ª propriedade

O vector  $\vec{u}$  não tem unidades de medida, isto é, o seu valor não se define em qualquer sistema físico de unidades. Com efeito, para um dado vector  $\vec{v}$ , o seu versor,  $\vec{u}_v$ , pode-se também definir como

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{v}$$

sendo  $v$  a medida do vector  $\vec{v}$ . Portanto:

$$|\vec{u}_v| = \frac{|\vec{v}|}{|v|} = 1$$

Isto quer dizer que o  $|\vec{u}_v|$  é uma **grandeza relativa**, ou seja é o resultado da comparação (quociente) de duas grandezas da mesma espécie.

Numa palavra:  $\vec{u}$  é, apenas, um segmento *orientado* de comprimento 1 em qualquer escala, para qualquer grandeza e em qualquer sistema de unidades.

Mais:

o vector  $\vec{u}$  é um ente matemático e não uma grandeza física; é um indicador de uma direcção e um sentido, que são também entes matemáticos, sem medida, e não grandezas físicas tal como em geral se definem (ver G.E.1.3, Manual de Física para o 10.º ano, dos autores).

## 2.ª propriedade

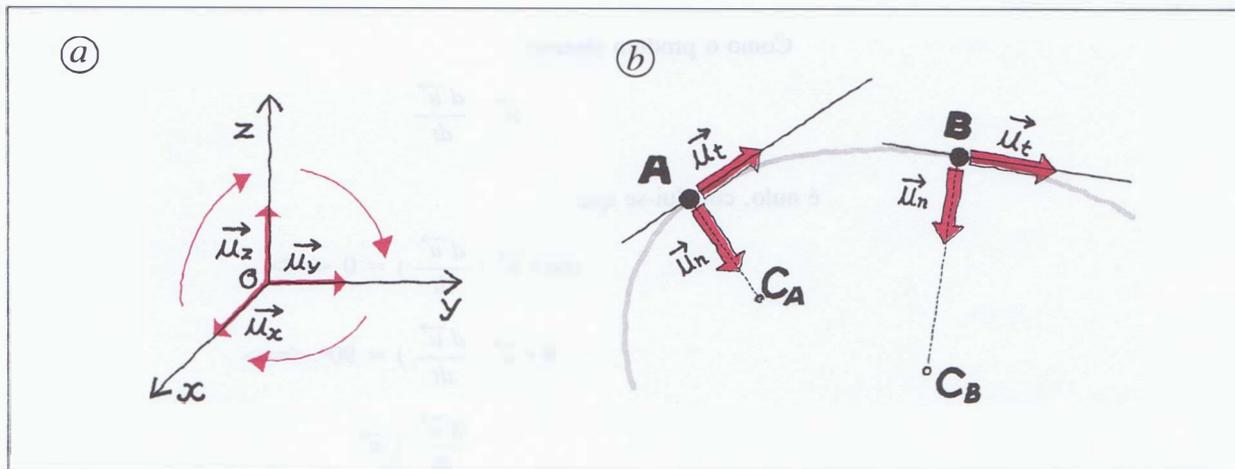
Se

$$\vec{u} = \text{cons.}^{\text{te}}$$

é

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{0},$$

porque, não mudando  $\vec{u}$  de direcção, como sucede no referencial  $(O, x, y, z)$  — fig. G.E.1.14, (a), não há taxa de variação do vector com o tempo e, portanto, a derivada (taxa de variação por unidade de tempo) é nula.



**Fig. G.E.1.14**

(a) — Vectors,  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  e  $\vec{u}_z$ , do triedro directo  $(O, x, y, z)$ .

(b) — Vectors,  $\vec{u}_n$  e  $\vec{u}_t$ , da normal e da tangente em A e B, respectivamente.

### 3.ª propriedade

Se

$$\vec{u} = \text{variável (em direcção)}$$

é

$$\frac{d\vec{u}}{dt} \perp \vec{u},$$

ou seja:

a derivada de um versor, variável no tempo — fig. G.E.1.16, (b), é um vector perpendicular ao versor.

Que assim é, mostra-o o produto interno de dois versores da mesma direcção, produto este que é constante:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 1 = \text{cons.}^{\text{te}}$$

De facto, derivando os dois membros desta expressão, vem, sucessivamente:

$$\begin{aligned} \frac{d(\vec{u} \cdot \vec{u})}{dt} &= \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} + \vec{u} \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d(1)}{dt} = 0 \iff \\ &2\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0 \end{aligned}$$

Como o produto interno

$$\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}$$

é nulo, conclui-se que

$$\cos(\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}) = 0 \iff$$

$$\theta(\vec{u}, \frac{d\vec{u}}{dt}) = 90^\circ \iff$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} \perp \vec{u}$$

No caso dos versores perpendiculares,  $\vec{u}_t$  e  $\vec{u}_n$ , fig. 1.14, (b), temos:

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \left| \frac{d\vec{u}_t}{dt} \right| \cdot \vec{u}_n$$

**G.E.1.9 Raio de curvatura e cálculo da derivada do versor da tangente**

Na fig. G.E.1.15, as variações da medida do arco (espaço) percorrido por um móvel são função do tempo

$$\Delta s = f_1(\Delta t) \text{ — lei dos espaços;}$$

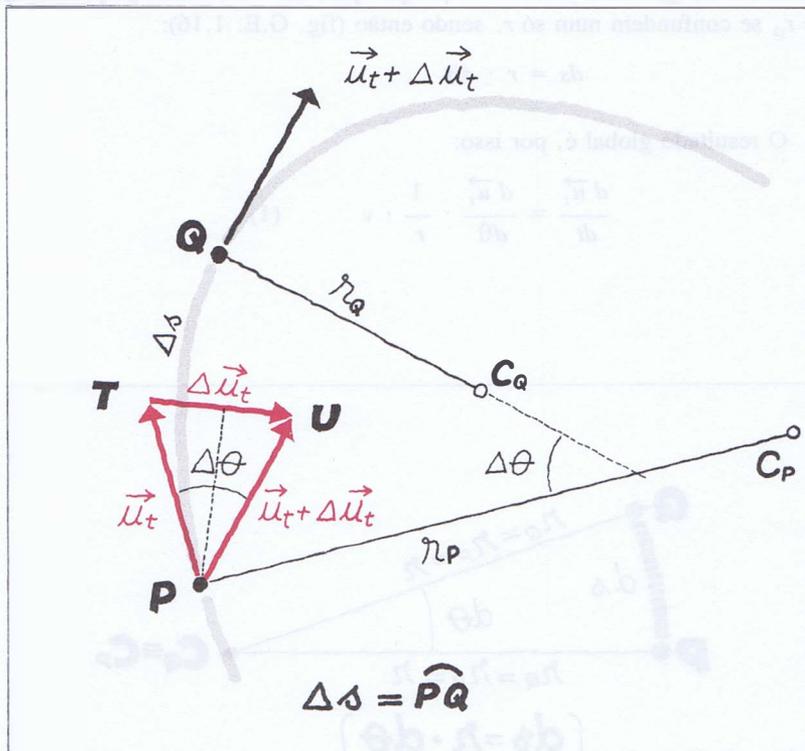
as variações de ângulo ou deslocamentos angulares são função do espaço percorrido

$$\Delta \theta = f_2(\Delta s);$$

e as variações do versor  $\vec{u}_t$  (só em direcção) são, evidentemente, função do deslocamento angular:

$$\Delta \vec{u}_t = f_3(\Delta \theta) .$$

Consideremos então os vetores  $\vec{u}_t$ , aplicado em  $P$ , e  $\vec{u}_t + \Delta \vec{u}_t$ , aplicado em  $Q$ , perpendiculares, respectivamente, aos raios  $r_p$  e  $r_Q$  — fig. G.E.1.15.



**Fig. G.E.1.15**

Os vetores  $\vec{u}_t$  e  $\vec{u}_t + \Delta \vec{u}_t$  são perpendiculares, respectivamente, aos raios  $r_p$  e  $r_Q$ .

$$|\vec{u}_t| = 1$$

$$|\vec{u}_t + \Delta \vec{u}_t| = 1$$

Para calcularmos a variação  $\Delta \vec{u}_t$  (variação de  $\vec{u}_t$  em direcção, que não em módulo, visto tratar-se de um versor), no intervalo de tempo  $\Delta t$ , aproveitando as relações anteriores, escrevemos:

$$\frac{\Delta \vec{u}_t}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{u}_t}{\Delta \theta} \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Como

$$\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta \theta \rightarrow 0 \iff \Delta s \rightarrow 0,$$

a passagem ao limite da expressão anterior dá os resultados parciais seguintes:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}_t}{\Delta t} = \frac{d \vec{u}_t}{dt};$$

$$\lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}_t}{\Delta \theta} = \frac{d \vec{u}_t}{d\theta};$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}$$

Esta última igualdade justifica-se porque, para  $\Delta s$  e  $\Delta \theta$  muito pequenos,  $r_p$  e  $r_Q$  se confundem num só  $r$ , sendo então (fig. G.E. 1.16):

$$ds = r \cdot d\theta$$

O resultado global é, por isso:

$$\frac{d \vec{u}_t}{dt} = \frac{d \vec{u}_t}{d\theta} \cdot \frac{1}{r} \cdot v \quad (1)$$

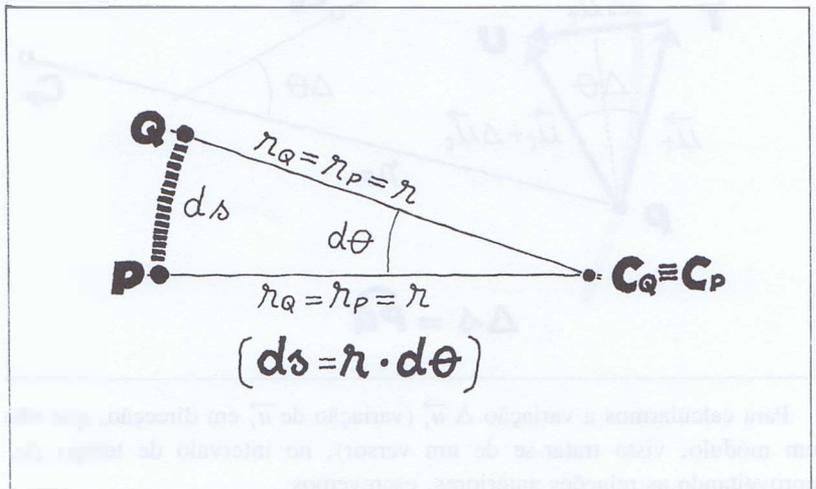


Fig. G.E.1.16 Para "ângulos pequenos" —  $\Delta \theta \leq 4^\circ = 0,07 \text{ rad}$  — temos:

$$ds = r \cdot d\theta$$

Podemos escrever, também,

$$\frac{d\vec{u}_t}{d\theta} = \vec{u}_n,$$

como vamos ver.

Com efeito, o triângulo  $[PTU]$  da fig. G.E.1.15 é um triângulo isósceles, porque

$$|\vec{u}_t| = |\vec{u}_t + \Delta\vec{u}_t| = 1$$

O valor de  $\Delta\vec{u}_t$  pode ser dado, neste triângulo, por

$$\begin{aligned} \frac{\Delta u_t}{2} &= |\vec{u}_t| \cdot \sin \frac{\Delta\theta}{2} \iff \\ \Delta u_t &= 1 \cdot \frac{\sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{1}{2}}; \end{aligned}$$

por isso é

$$\frac{\Delta u_t}{\Delta\theta} = \frac{\sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}};$$

e, finalmente, é também

$$\frac{du_t}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta u_t}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} = 1$$

Este último limite torna-se compreensível se tivermos em linha de conta que para ângulos  $\Delta\theta$  pequenos ( $< 8^\circ$ ) se tem

$$\sin \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{\Delta\theta}{2} \text{ rad}$$

Por exemplo, para  $\Delta\theta = 8^\circ$ , é:

$$\sin \frac{\Delta\theta}{2} = \sin 4^\circ = 0,0698 \text{ e } 4^\circ = 0,0698 \text{ rad} \quad (\text{Tabelas})$$

Por outro lado,

$$\frac{d\vec{u}_t}{d\theta} \perp \vec{u}_t,$$

porque, no  $\Delta[P, T, U]$  — fig. G.E.1.15, o vector  $\Delta\vec{u}_t$  vai tendendo para a perpendicular a  $\vec{u}_t$  quando  $\Delta\theta \rightarrow 0$  (os ângulos em  $T$  e  $U$ , iguais, tendem para  $90^\circ$ ).

Resumindo, portanto, as características do vector

$$\frac{d\vec{u}_t}{d\theta}$$

temos:

$$1.^a \text{ — } d\vec{u}_t \perp \vec{u}_t \Rightarrow \frac{d\vec{u}_t}{d\theta} \perp \vec{u}_t$$

$$2.^a \text{ — } \left| \frac{d\vec{u}_t}{d\theta} \right| = 1$$

Concluimos, então, que se o vector

$$\frac{d\vec{u}_t}{d\theta}$$

tem módulo 1 e é perpendicular a  $\vec{u}_t$ , só pode ser  $\vec{u}_n$ , como tínhamos afirmado.

Voltando ao resultado global da derivação do versor  $\vec{u}_t$ , expressão (1), temos, finalmente:

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{v}{r} \cdot \frac{d\vec{u}_t}{d\theta} \iff \frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{v}{r} \cdot \vec{u}_n$$

### G.E. 1.10 Efeitos da aceleração no corpo humano

Passamos a enumerar alguns destes efeitos:

1. Acelerações nulas, portanto velocidades constantes, por muito grandes que estas sejam, não têm qualquer efeito no corpo humano.
2. Os valores da aceleração e do tempo de aceleração têm efeitos que podem ser catastróficos.
3. Aceleração até cerca de 4 g ( $g$  = aceleração normal da gravidade), mesmo durante muito tempo, são suportáveis.
4. Acelerações superiores a 4 g já só poderão ser suportadas durante pouco tempo.
5. Se a aceleração se verifica ao longo do eixo do corpo:
  - e o sentido é o da cabeça, ocorre o chamado «black-out» (sensação visual de escuro);
  - e o sentido é o dos pés, ocorre o chamado «red-out» (sensação visual do vermelho, provocada por excessiva quantidade de sangue na cabeça e em particular na retina);
  - e tem o valor de cerca de 10 g, a coluna vertebral parte-se.

6. Se a aceleração se verifica no sentido antero-posterior:

— é tolerável, se tiver valores de cerca de 10 g durante curtos períodos;

—o limite de tolerância é de cerca de 30 g.

Os astronautas, na largada e na chegada, são submetidos a uma aceleração de cerca de 10 g mas apanham esta aceleração no sentido das costas.

Os efeitos das acelerações no corpo humano têm sido estudados em veículos de alta velocidade, seguidos de travagens bruscas, e em grandes máquinas centrífugas.

### G.E. 1.11 O operador integral de uma função

Suponhamos que conhecemos o modo como a velocidade de uma determinada partícula varia no tempo, isto é, conhecemos a função

$$v = f(t) ,$$

cujas representação gráfica em  $\mathbb{R}^2$  é, por exemplo, a que se apresenta na fig. G.E.1.17.

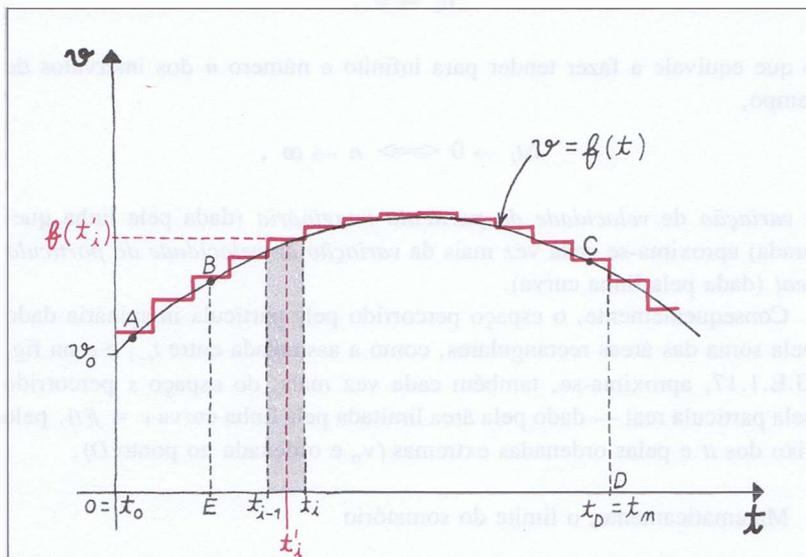


Fig. G.E.1.17

Representação gráfica da função  $v = f(t)$   
 $v_0$  — velocidade no instante  $t = 0$ .

Dividamos o intervalo  $[0; t_D]$  em intervalos pequenos

$$\Delta t_i = [t_{i-1}; t_i] ,$$

centrados em pontos médios  $t'_i$ . Estes intervalos de tempo são *muito pequenos* de modo que, em cada um deles, o espaço se pode tomar como se tivesse sido percorrido com velocidade constante e de valor

$$v_i = f(t'_i)$$

Nestas condições, substituímos o *movimento variado* da partícula **real**, com a velocidade variável  $v = f(t)$ , por uma sucessão de *movimentos uniformes*, em «escada», de uma partícula **imaginária**.

Cada espaço parcelar, imaginariamente percorrido em movimento uniforme, obtém-se multiplicando o valor da velocidade média,  $f(t'_i)$ , pelo intervalo de tempo, ou seja:

$$\Delta s_{i-1,i} = f(t'_i) \times (t_i - t_{i-1})$$

A soma destes espaços parcelares, sucessivamente percorridos em movimento uniforme, cada um com velocidade diferente, isto é, o somatório

$$\sum_{i=1}^n f(t'_i) \times (t_i - t_{i-1})$$

dar-nos-á o espaço total percorrido pela partícula imaginária, cuja velocidade varia segundo a linha quebrada que começa em *A* e termina em *C*.

Fazendo tender para zero a amplitude dos intervalos de tempo,

$$\Delta t_i \rightarrow 0 ,$$

o que equivale a fazer tender para infinito e número *n* dos intervalos de tempo,

$$\Delta t_i \rightarrow 0 \iff n \rightarrow \infty ,$$

a *variação de velocidade da partícula imaginária* (dada pela linha quebrada) aproxima-se cada vez mais da *variação de velocidade da partícula real* (dada pela linha curva).

Consequentemente, o espaço percorrido pela partícula imaginária dado pela soma das áreas rectangulares, como a assinalada entre  $t_{i-1}$  e  $t_i$  na fig. G.E.1.17, aproxima-se, também cada vez mais, do espaço *s* percorrido pela partícula real — dado pela área limitada pela linha curva  $v = f(t)$ , pelo eixo dos *tt* e pelas ordenadas extremas ( $v_0$  e ordenada no ponto *D*).

Matematicamente, o limite do somatório

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t'_i) \times (t_i - t_{i-1})$$

corresponde ao operador chamado **integral** entre 0 e  $t_D$  da função  $f(t)$ , e escreve-se:

$$\int_0^{t_D} f(t) \cdot dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t'_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$$

sendo  $dt$  a diferencial da variável independente e  $f(t)dt$  a diferencial,  $ds = vdt$ , da função espaço.

Note-se que o intervalo  $[0; t_D]$  pode ser qualquer, por exemplo  $[t_E; t_D]$  ou outro.

Concluimos então que o **espaço percorrido pela partícula real**, cuja velocidade varia segundo a lei  $v = f(t)$ , entre os instantes 0 e  $t_D$ , é dado pelo integral

$$\int_0^{t_D} v \, dt = \int_0^{t_D} f(t) \, dt$$

O integral calcula-se recorrendo à chamada **fórmula de Barrow**: segundo esta, sendo  $F(t)$  uma função cuja derivada coincide com a função  $f(t)$ , tem-se

$$\int_0^{t_D} f(t) \, dt = F(t_D) - F(0)$$

ou, em geral:

$$\int_{t_i}^{t_f} f(t) \, dt = F(t_f) - F(t_i) ,$$

sendo  $t_i$  e  $t_f$  os extremos (inicial e final) do intervalo  $\Delta t$ .

A função  $F(t)$  chama-se **primitiva** de  $f(t)$ .

Por exemplo: sendo, na queda de um grave que parte do repouso sem velocidade inicial (grave que se deixa cair),

$$F(t) = 4,90 t^2$$

será

$$F'(t) = f(t) \iff 9,8 t = f(t)$$

Portanto, no intervalo  $[0; 4]$  s, temos:

$$\int_0^4 f(t) \, dt = \int_0^4 9,8 t \, dt$$

Ora, aplicando a fórmula de Barrow, vem:

$$\begin{aligned} \int_0^4 9,8 t \, dt &= [4,90 t^2]_{t=4} - [4,90 t^2]_{t=0} \\ &= 78,4 \text{ m} - 0 \text{ m} \\ &= 78,4 \text{ m} \end{aligned}$$

Finalmente, como o **integral** corresponde à **área** limitada pelo eixo das abcissas, pela linha representativa da função  $f(t)$  e pelas ordenadas nos extremos do intervalo  $\Delta t = [t_i; t_f]$ , ele é facilmente calculável quando esta área é a área de uma figura geométrica simples (rectângulo, triângulo, trapézio, círculo). Neste Curso só apresentaremos exercícios que envolvam integrais quando se verificarem estas *condições restritas*.



# Leis de Newton do movimento

## G.E. 2.1 Alguns objectivos desta Unidade

O aluno:

*Analisa situações de movimento e repouso considerando as interacções a que os corpos estão sujeitos:*

- Explica o que são as leis físicas.
- Cita critérios de estabelecimento das leis físicas.
- Define conceptualmente a grandeza força.
- Define operacionalmente a grandeza massa.
- Explica o comportamento cinético dos corpos com base na lei da inércia.
- Critica o conceito de referencial de inércia.
- Deduz as expressões da aceleração do movimento de partículas ligadas, considerando as contribuições de cada elemento dos respectivos pares acção-reacção.
- Resolve problemas de dinâmica da partícula, aplicando as leis de Newton.
- Deduz a condição de equilíbrio da partícula a partir das leis de Newton.
- Resolve problemas de equilíbrio de partículas.
- Enuncia os princípios da relatividade de Galileu e de Einstein.
- Aplica a regra da composição de velocidades de Galileu à resolução de problemas simples.



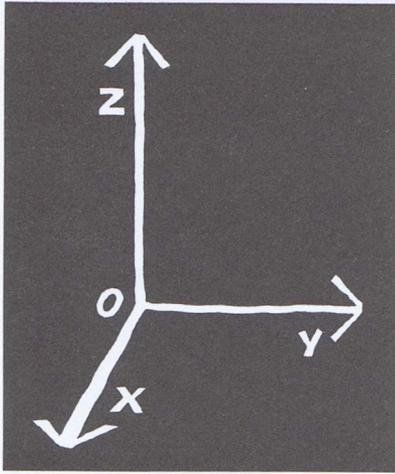


Fig. G.E.2.1

Referencial absoluto newtoniano. Está *fixo* no espaço absoluto e não está ligado a qualquer corpo material. Define um *espaço* meramente *geométrico*.

## G.E. 2.2 O espaço absoluto e o tempo absoluto de Newton

### 1. O conceito newtoniano de espaço absoluto

Vimos como Newton, intuindo o *movimento acelerado* de todos os corpos universais, sentiu a necessidade de se libertar desses mesmos corpos para a definição de *referenciais de inércia de significado universal e absoluto*.

Segundo as suas próprias palavras, afirmou: «*Deve-se fazer constar que não existe nenhum corpo realmente em repouso, ao qual possamos referir as posições e os movimentos dos corpos.*»

Newton teve então a ideia inspirada de «inventar» aquilo que, segundo ele próprio afirmava de modo místico, «apenas Deus poderia justificar»: o **espaço absoluto**.

Para Newton, «*o espaço absoluto permanece, em função da sua natureza e sem ter relação com qualquer objecto exterior, rigorosamente igual e imutável*».

Trata-se de um espaço não físico mas geométrico, sem matéria referenciável, euclidiano (obedece à geometria de Euclides) e a três dimensões.

É nesse «palco» — o *espaço absoluto* — que se movimentam os «actores» — os corpos materiais.

Qualquer sistema de três eixos fixos no espaço absoluto constitui um *sistema inercial absoluto* — fig. G.E. 2.1.

O **repouso absoluto** e o **movimento absoluto** seriam o *repouso* e o *movimento* relativamente aos *referenciais em repouso* no *espaço absoluto* (referenciais absolutos).

O repouso e o movimento em relação aos corpos móveis no espaço absoluto (estes corpos definem **espaços relativos** e **referenciais relativos**) são, respectivamente, *repouso* e *movimento relativos*. São, afinal, estes os que estudamos, pois estamos sempre a referenciar objectos móveis a outros objectos móveis e, portanto, a *espaços relativos* e a *referenciais relativos*.

### 2. O conceito newtoniano de tempo absoluto

A necessidade de definir rigorosamente a grandeza **tempo**, de que dependem, também, quase todas as grandezas mecânicas, levou igualmente *Newton* à concepção do **tempo absoluto**, o qual, segundo as suas próprias palavras, é «*verdadeiro e matemático, baseia-se em si mesmo, conforme a sua natureza uniforme e sem ter relação com qualquer objecto exterior*».

O «tempo» que avaliamos com os nossos relógios, definido com base nos movimentos periódicos (rotação e translação da Terra, etc.), é sempre um **tempo relativo**, ou seja, como dizia Newton, «*aparente, ordinário e não é mais do que uma manifestação tangível e exterior do tempo absoluto*». E

isto é assim porque, continuamos a citar Newton, «é provável que não exista nenhum movimento uniforme por meio do qual o tempo possa ser medido com exactidão absoluta».

### 3. Espaço absoluto e tempo absoluto — entidades independentes

Do que ficou exposto, podemos concluir:

A *inexistência de corpos realmente imóveis* levou Newton a imaginar a existência de um *espaço absoluto*.

A *inexistência de movimentos rigorosamente uniformes* levou-o a imaginar a existência de um *tempo absoluto*.

**Espaço absoluto e tempo absoluto** eram, para Newton, duas **entidades completamente independentes** e estavam para além dos corpos (isto é, não precisavam de ser referenciados a quaisquer corpos). Segundo ele, um dado fenómeno ocorre num certo local do espaço absoluto e no decorrer do tempo absoluto. Este tempo decorre do mesmo modo para outro qualquer fenómeno, num outro local, qualquer também, do espaço absoluto.

### G.E. 2.3 O espaço-tempo de Einstein. O Universo quadridimensional

Com a sua teoria da **Relatividade Restrita**, *Einstein* (1879-1955) mostrou que o espaço e o tempo estão intimamente relacionados entre si. Só mentalmente é possível separá-los. E é o que se tem feito, com o grave erro de se considerar esta separação como correspondendo a uma realidade física... De modo algum isto pode tomar-se como verdadeiro. Este é o cerne do início da «revolução científica» de *Einstein*, ou seja da sua teoria da Relatividade. Com ela, um novo modo de pensar a Física surgiu em 1905.

Segundo esta teoria, o nosso Universo é um contínuo *espaço-tempo*, quadridimensional (as 3 dimensões do espaço geométrico + o tempo), onde qualquer acontecimento ocorre num determinado **lugar indissociável** do **instante** em que sucedeu. Por outras palavras: a um acontecimento correspondem sempre 4 coordenadas, que são as três coordenadas geométricas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e a variável tempo,  $t$ .

Ao falarem da estrutura do *Universo*, os físicos consideram-no *finito* mas *ilimitado*, sem centro em parte alguma, *curvado* (devido à presença de matéria) e *em expansão*. Será *aberto* se não houver matéria suficiente para evitar que, por atracção gravitacional, ele se expanda para sempre. Será *fechado* se possuir matéria suficiente para que, por atracção gravitacional, faça cessar, em dado momento futuro, a expansão e comece, a seguir, a compressão, diminuindo continuamente de volume até atingir as dimensões do «ovo» cósmico primitivo. Na hipótese do *Universo aberto*, este

começou com a explosão do «átomo» primitivo ou *big bang* inicial e continuará a dilatar-se eternamente. Na hipótese do *Universo fechado*, este é cíclico, isto é: está actualmente em expansão, seguir-se-á uma compressão até novo *big bang*, recomeçará nova expansão, voltará à compressão, e assim eternamente e interminavelmente. Os cientistas ainda não dispõem de razões objectivas e irrefutáveis para escolher uma destas duas hipóteses.

#### G.E. 2.4 Um outro problema relacionado com a fig. 2.19 do texto

Se pretendermos determinar a velocidade com que o rapaz, referido no 2.º problema do texto da secção 2.7.1, abandona o bloco de gelo, teremos de integrar a equação (ver G.E. 1.11)

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \theta \iff dv = g \sin \theta dt$$

Começamos por transformá-la noutra mais conveniente.

Tendo em conta que

$$v = \frac{ds}{dt} \iff v = \frac{r d\theta}{dt},$$

onde  $ds$  é uma porção elementar de trajectória a que corresponde o ângulo ao centro  $d\theta$ , se multiplicarmos as duas últimas equações, vem:

$$v dv = g r \sin \theta d\theta$$

Integrando, temos:

$$\int_0^v v dv = g r \int_0^\theta \sin \theta d\theta \iff \frac{v^2}{2} = g r [-\cos \theta]_0^\theta \implies \\ v^2 = 2 g r (-\cos \theta + 1) \iff v^2 = 2 g r - 2 g r \cos \theta$$

Eliminando  $\cos \theta$  entre esta equação e a outra estabelecida no texto

$$v^2 = g r \cos \theta,$$

obtemos:

$$v^2 = 2 g r - 2 v^2 \iff 3 v^2 = 2 g r \iff v = \sqrt{\frac{2 g r}{3}}$$

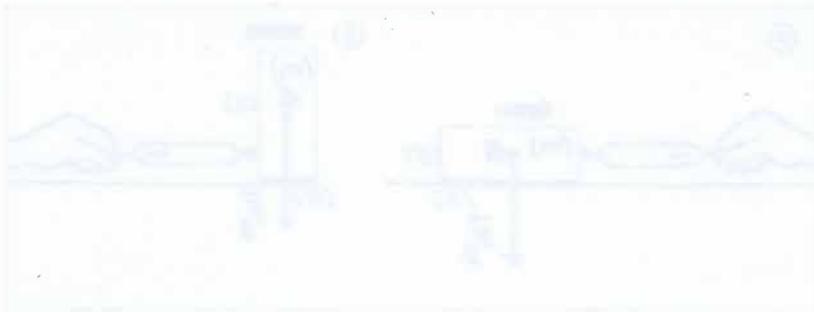
# As leis de força

## G.E. 3.1 Alguns objectivos desta Unidade

O aluno:

*Analisa situações de movimento e repouso, conjugando as leis de força com as leis fundamentais de Newton:*

- Escreve, vectorialmente, as expressões das leis de força das forças newtoniana e coulombiana, indicando o significado das variáveis.
- Relaciona vectorialmente a força elástica de uma qualquer mola com a deformação e a constante da mola.
- Explica o processo experimental de Coulomb para estabelecer a lei da força de atrito estático.
- Indica algumas grandezas relacionadas com o movimento e a geometria de um corpo e das quais não depende a força de atrito cinético.
- Descreve dois processos experimentais para determinar os coeficientes de atrito.
- Explica o papel das forças de atrito em questões de movimento.
- Resolve problemas de equilíbrio de partículas sujeitas a forças cujas leis foram estudadas.
- Determina acelerações de móveis submetidos a uma ou mais forças cujas leis foram estudadas.



### G.E. 3.2 Interpretação microscópica do atrito

Ainda hoje não dispomos de uma teoria suficientemente exacta e universalmente aceite que sirva de modelo para a compreensão das forças de atrito.

Segundo uma teoria corrente, as forças de atrito resultam das acções e reacções microscópicas que ocorrem entre os milhares de pequeníssimos «montes» e «vales» existentes nas superfícies rugosas que contactam. Esses pequeníssimos «montes» e «vales», que são afinal as rugosidades, interpenetram-se. Dessa interpenetração resulta a oposição ao movimento relativo.

A favor desta interpretação há dois factos relevantes:

- 1.º — Um exame ao microscópio revela a «existência» dos tais pequeníssimos «montes» e «vales» nas superfícies rugosas.
- 2.º — Do deslizamento relativo de superfícies rugosas resultam, muitas vezes, minúsculas partículas *arrancadas a essas superfícies*.

Contra esta interpretação há, porém, a verificação experimental de que o polimento das superfícies só diminui o atrito até um certo limite. Para além deste limite, o atrito passa mesmo a aumentar com o grau de polimento.

Segundo uma outra teoria, as forças de atrito resultam das *atrações electromagnéticas* entre os átomos e as moléculas das superfícies em contacto. Destas atracções resultam íntimas ligações entre essas mesmas partículas, isto é, verdadeiras *soldas*. Estas ocorrem precisamente nos pontos da *área* (microscópica) *real de contacto*, que é muito inferior à *área aparente de contacto* (em virtude das rugosidades).

Esta teoria tem a seu favor o facto de explicar, de modo simples, o seguinte aspecto que a experiência mostra: para superfícies do mesmo tipo e para a mesma força normal compressora, o atrito não depende da *área aparente de contacto* — fig. G.E. 3.1.

Com efeito, no caso em que esta área aparente de contacto é menor — fig. G.E. 3.1, (b) — há *menos pontos de contacto*. Mas, sendo assim, a parcela de força compressora que cabe a cada um desses pontos é maior. Em consequência, é *maior, em cada ponto de contacto*, a respectiva deformação e a *respectiva área local de contacto*. Isto faz com que a área total, e real microscópica, de contacto, possa ser a mesma em ambos os casos.

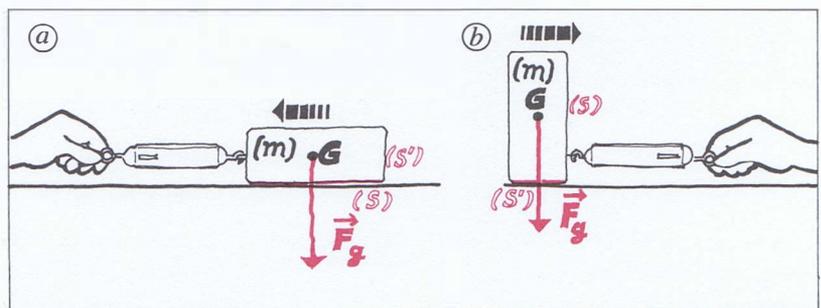


Fig. G.E. 3.1 Em (b) a área aparente de contacto ( $S'$ ) é menor. Mas, sendo as mesmas a natureza das superfícies em contacto e a força compressora, pois o bloco é o mesmo, a força de atrito é igual em ambos os casos.

### G.E. 3.3 Medição do coeficiente de atrito estático com o plano inclinado

Coloquemos um bloco  $C$  num plano inclinado articulado em  $A$  — fig. G.E. 3.2.

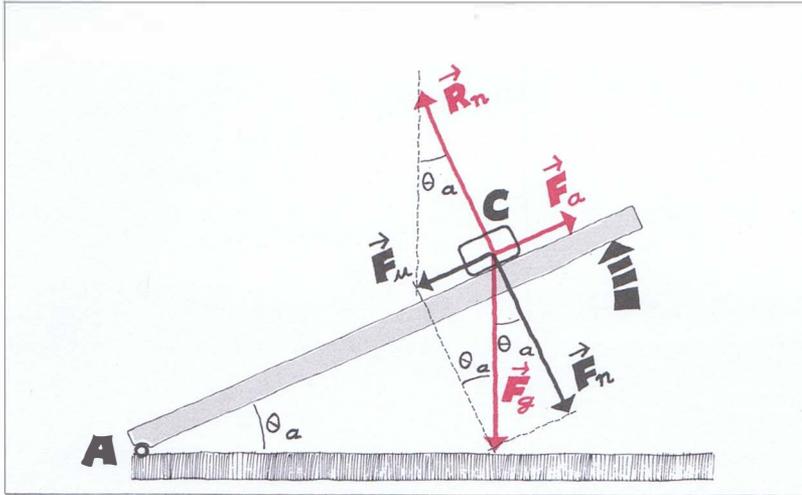


Fig. G.E. 3.2 O coeficiente de atrito estático é igual à tangente trigonométrica do ângulo  $\theta_a$ , ângulo mínimo do plano para o qual se verifica o início do deslizamento do corpo  $C$ :

$$\mu = \operatorname{tg} \theta_a$$

Aumentemos lentamente o ângulo de inclinação do plano, levantando-o ao rodar em torno de  $A$ , até um valor mínimo,  $\theta_a$ , para o qual o bloco inicia a queda (isto é, arranca). Registemos esse valor de  $\theta_a$ .

Nestas condições, a resultante  $\vec{F}$  das forças  $\vec{F}_g$  e  $\vec{R}_n$  é simétrica da força de atrito estático,  $\vec{F}_a$ . Representando os módulos por  $F$  e  $F_a$ , temos:

$$F = F_a$$

Atendendo à figura e à definição de força de atrito, temos, sucessivamente (considerando os módulos das forças):

$$\begin{aligned} F_g \cdot \sin \theta_a &= \mu \cdot R_n \iff \\ F_g \cdot \sin \theta_a &= \mu \cdot F_g \cdot \cos \theta_a \end{aligned}$$

Daqui resulta:

$$\mu = \frac{\sin \theta_a}{\cos \theta_a} \iff \mu = \operatorname{tg} \theta_a$$

O coeficiente de atrito estático obtém-se, assim, com uma tabela de tangentes trigonométricas, pois é igual à tangente do ângulo mínimo de arranque.

... e a velocidade de propagação da onda é dada por:

... e a velocidade de propagação da onda é dada por:



... e a velocidade de propagação da onda é dada por:

$$v = \lambda \cdot f$$

... e a velocidade de propagação da onda é dada por:

$$v = \lambda \cdot f$$

... e a velocidade de propagação da onda é dada por:

$$v = \lambda \cdot f$$

... e a velocidade de propagação da onda é dada por:

$$v = \lambda \cdot f$$

... e a velocidade de propagação da onda é dada por:

# Trabalho e energia cinética

## G.E. 4.1 Alguns objectivos desta Unidade

O aluno:

*Conhece o conceito de trabalho mecânico ou físico:*

- Indica dois processos de determinar o trabalho de uma força constante.
- Define por um produto interno o trabalho de uma força num deslocamento elementar.
- Define o trabalho elementar de uma força em função da componente da força na direcção do deslocamento elementar.
- Mostra que o trabalho de uma força ao longo de uma trajectória pode ser calculado por um integral e, portanto, por uma área.
- Define trabalho de uma força ao longo de uma trajectória fechada.
- Mostra que o trabalho de uma força constante ao longo de uma trajectória fechada é nulo.
- Mostra que o trabalho de um sistema de forças é igual ao trabalho da resultante.

*Compreende a relação entre o conceito de trabalho e a energia cinética:*

- Mostra a utilidade do conceito de trabalho na resolução de problemas do movimento.
- Mostra que a variação de energia cinética de uma partícula, devida à intervenção de uma força, é medida pelo trabalho realizado por essa força.
- Explica a lei do trabalho-energia quando aplicada a uma partícula e quando aplicada a um sistema de partículas em interacção.
- Explica o carácter relativo dos conceitos de trabalho e energia cinética.
- Explica o significado físico dos conceitos de potência e rendimento de uma máquina.

*Aplica correctamente os conceitos estudados nesta Unidade:*

- Resolve problemas envolvendo trabalhos, potências, rendimentos e variações de energia cinética sem recurso ao cálculo integral.
- Resolve problemas envolvendo trabalhos e variações de energia cinética referentes à mesma resultante em referenciais diferentes.

### G.E. 4.2 Trabalho ao longo de uma trajectória

O trabalho da força  $\vec{F}$  ao longo da trajectória plana da partícula sobre a qual actua, de A e B, é

$$W = \int_A^B dW = \int_A^B (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy)$$

Se a trajectória for dada em equação paramétricas,

$$x = f_1(t) \quad y = f_2(t)$$

e forem conhecidos os instantes inicial (correspondente a A) e final (correspondente a B), respectivamente  $t_i$  e  $t_f$ , o trabalho é dado pela expressão

$$W = \int_{t_i}^{t_f} \left( F_x \cdot \frac{dx}{dt} + F_y \cdot \frac{dy}{dt} \right) dt$$

Assim, por exemplo, no caso da força

$$\vec{F} = (t-2)\vec{u}_x + \frac{3}{t}\vec{u}_y \quad (\text{N})$$

a actuar numa partícula que descreve a curva de equações paramétricas

$$x = t^2 \quad y = t^3 \quad (\text{SI}),$$

o trabalho realizado pela força, no intervalo de tempo de  $t_i = 1$  s a  $t_f = 2$  s, é:

$$W = \int_1^2 [(t-2) \cdot 2t + \frac{3}{t} \cdot 3t^2] dt = \int_1^2 (2t^2 + 5t) dt.$$

Este integral, calculado pelas regras estudadas no Cálculo (ver G.E. 1.11), dá o resultado:

$$\frac{73}{6} \text{ J}.$$

### G.E. 4.3 Dedução da lei do trabalho-energia quando a força resultante varia em módulo

De

$$W = \int_{x_i}^{x_f} ma \cdot dx$$

e considerando que, na situação dada, é

$$a = \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow a = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow a = v \cdot \frac{dv}{dx},$$

temos:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} m \cdot v \frac{dv}{dx} \cdot dx \iff W = m \int_{v_i}^{v_f} v \cdot dv$$

Pela fórmula de Barrow da integração (ver G.E. 1.11), vem:

$$W = m \left[ \frac{1}{2} v^2 \right]_{v_i}^{v_f} \iff$$

$$W = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

#### G.E.4.4 Potência de um automóvel

Como vimos na secção 3.2, o que faz andar um automóvel é a força de atrito entre as rodas de tracção (em geral, as rodas traseiras) e a estrada.

**Sem atrito**, as rodas *patinam*, isto é, não há movimento de translação ao longo da estrada mas apenas rotação das rodas em torno do seu eixo, não saindo este do mesmo sítio.

A título de exemplo, determinemos a potência necessária para um automóvel acelerar, passando a sua velocidade de 0 a 100 km/h em 10 s.

Admitindo que este aumento de velocidade ocorre com aceleração constante e igual ao seu valor médio, obtemos:

$$\begin{aligned} a &= \frac{v}{t} \iff a = \frac{28 \text{ ms}^{-1}}{10 \text{ s}} = 2,8 \text{ ms}^{-2} \\ &= 28,6\% g \approx \frac{1}{4} g \end{aligned}$$

Qual é a força de atrito? Será suficiente para se conseguir esta aceleração?

Por um lado, temos:

$$F_a = ma \iff F_a = m \times 0,286 g$$

Por outro lado, admitindo que nas rodas traseiras (o carro é de tracção à rectuarda) a força normal exercida nos pneus é, aproximadamente,

$$N = \frac{1}{2} mg ,$$

o coeficiente de atrito na superfície de contacto pneus-estrada deverá ter, pelo menos, o valor

$$\mu = \frac{F_a}{N} = \frac{0,286 mg}{0,5 mg} = 0,57$$

Este resultado indica que o coeficiente de atrito deve ter um valor *próximo do máximo possível* para os pneus comuns dos carros de passeio. Estes não podem atingir, por isso, a velocidade de 100 km/h num tempo de aceleração inferior a 10 s.

Que potência se desenvolve, então, ao utilizar esta força de atrito?

Para  $m = 10^3$  kg, é

$$F_a = 10^3 \times 0,286 \times 9,8 \text{ N} = 2,8 \times 10^3 \text{ N}$$

Quando o carro atinge 100 km/h = 28 m/s, temos:

$$\begin{aligned} P &= F \cdot v \iff P = 2,8 \times 10^3 \times 28 \text{ W} \\ &= 78 \times 10^3 \text{ W} = \mathbf{106 \text{ cv}} \end{aligned}$$

É esta a potência que o carro deve ser capaz de desenvolver a 100 km/h. Aplicar mais potência é *desperdício puro*, porque a força de atrito não aumenta. Nestas condições, o aumento de velocidade das rodas traduz-se, apenas, num *efeito de patinagem*, não só inútil como desgastante dos pneus.

# Conservação da energia

## G.E. 5.1 Alguns objectivos desta Unidade

O aluno:

*Conhece o conceito de forças conservativas e não conservativas:*

- Define operacionalmente forças conservativas e não conservativas.
- Define conceptual e matematicamente forças conservativas e não conservativas.
- Mostra que o trabalho das forças conservativas, num percurso aberto, é independente da forma da trajectória da partícula sobre a qual as forças actuaram.

*Conhece o conceito de energia potencial:*

- Mostra que são simétricas as variações de energia cinética e potencial nas interações entre partículas de um sistema conservativo.
- Define matematicamente energia potencial, a partir da lei do trabalho-energia e a menos de uma constante.
- Deduz as expressões da energia potencial gravítica (às baixas altitudes) e elástica.

*Compreende conceitos relacionados com a energia:*

- Mostra que a energia potencial está associada às forças conservativas.
- Explica a importância do conceito de força conservativa na lei da conservação da energia mecânica.
- Relaciona a lei geral da conservação da energia com os balanços de energia.

*Aplica correctamente os conceitos estudados:*

- Resolve problemas, utilizando a lei da conservação da energia.
- Resolve problemas envolvendo trabalhos cujas expressões, sob a forma de integral, podem ser calculados através de áreas de figuras geométricas simples.
- Resolve problemas que envolvem pêndulos gravíticos, cónicos e elásticos.

## G.E. 5.2 Diagramas de energia potencial

Vamos considerar um caso simples, que corresponde ao movimento rectilíneo de uma partícula submetida a uma força conservativa cuja componente na direcção do movimento é  $F_x$ . Uma força elástica longitudinal, como a que ocorre nas molas em oscilação, é um exemplo deste tipo de forças no caso mais geral que vamos apresentar.

Vimos que a variação de energia potencial entre dois pontos é simétrica do trabalho da força conservativa.

Considerando então dois pontos  $M$  e  $N$ , cuja variação de posição é a diferencial  $dx$ , o trabalho elementar  $F_x dx$  é simétrico da variação de energia potencial, ou seja:

$$F_x dx = - d E_p \iff F_x = - \frac{d E_p}{dx}$$

Se conhecermos a curva representativa da função  $E_p = f(x)$  — fig. G.E. 5.1, onde **arbitramos** um nível zero de energia potencial (representado pelo eixo dos  $xx$ ), a inclinação da curva, em cada ponto de abscissa  $x$ , é a derivada

$$\frac{d E_p}{dx}$$

Esta inclinação será positiva nos ramos em que a curva é crescente e negativa nos ramos em que a curva é decrescente. Então a componente da força na direcção do movimento,  $F_x$ , que é *simétrica desta inclinação*, estará dirigida para a *esquerda* (sentido negativo) quando  $E_p$  cresce e dirigida para a *direita* (sentido positivo) quando  $E_p$  decresce — fig. G.E. 5.1.

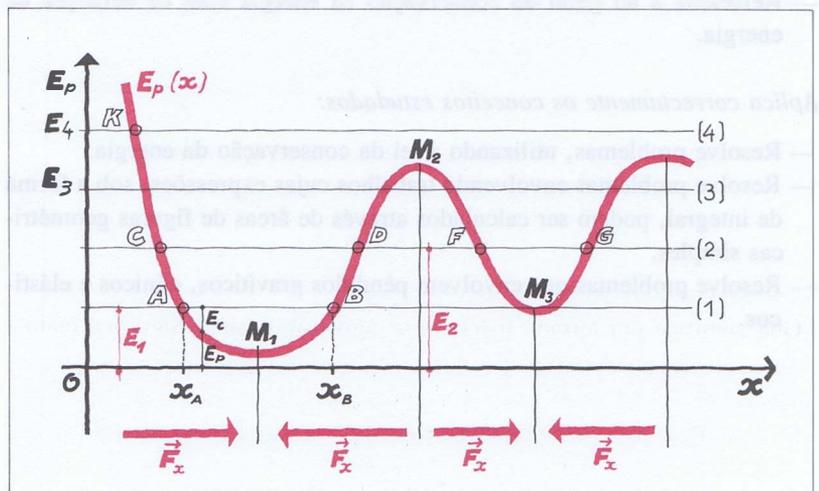


Fig. G.E. 5.1 Energia potencial em função da coordenada de posição  $x$  num movimento rectilíneo em que o sentido positivo é para a direita. Sentidos da força  $F_x$  quando a energia potencial decresce e cresce, alternadamente.

Mais: nos pontos em que a energia potencial é máxima ( $M_2$ ) ou mínima ( $M_1$  e  $M_3$ ), é

$$\frac{dE_p}{dx} = 0 \quad (\text{inclinação nula})$$

e, portanto,

$$F_x = 0.$$

Na vizinhança da posição  $M_1$ , as forças são tais que tendem a fazer regressar a partícula a essa posição. Trata-se, como veremos na Unidade 9 (Estática), de uma *posição de equilíbrio* ( $F_x = 0$ ) *estável*.

Na vizinhança da posição  $M_2$ , as forças tendem a afastar a partícula dessa posição. Trata-se, como veremos também, de uma *posição de equilíbrio* ( $F_x = 0$ ) mas *instável*.

Feitas estas primeiras leituras no gráfico, vamos continuar a lê-lo no sentido de indagarmos o que nos diz acerca do movimento da partícula.

Suponhamos então que a energia mecânica total da partícula é  $E_1$  — nível (1) do diagrama. Para qualquer posição  $x$  da partícula, a energia potencial  $E_p$  é dada pela *ordenada* da curva e a energia cinética

$$E_c = E_1 - E_p$$

é dada pela *distância da curva à recta* correspondente à energia  $E_1$  — nível (1).

Este balanço da energia, lido no gráfico, permite-nos *prever o movimento da partícula*. Assim, à esquerda de  $A$  e à direita de  $B$ , a energia total ( $E_1$ ) — nível (1) — é inferior à energia potencial ( $E_p$ ) — indicada na curva. Isto significa que

$$E_c = E_1 - E_p < 0$$

Ora este resultado é impossível, porque a energia cinética

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

só pode ter valores positivos.

Que significa em termos físicos esta impossibilidade? Significa claramente que a partícula *não pode estar fora* do intervalo  $[A; B]$ , quer dizer: a **partícula oscila entre as posições  $x_A$  e  $x_B$** .

Os pontos

$$x = x_A$$

$$x = x_B$$

são os *pontos de retorno* ou de *reversão*.

A região  $[AM_1B]$  chama-se **poço de potencial**. Diz-se, então, que a partícula oscila enquanto estiver num poço de potencial, de onde não pode sair. É isto que acontece com os electrões nos átomos e com os electrões de condução nos sólidos dos quais também não conseguem sair.

Suponhamos agora que a partícula tem a energia total correspondente ao nível (2):  $E_2$ . O diagrama mostra-nos que a partícula tem duas regiões possíveis de movimento: a primeira é a oscilação entre  $C$  e  $D$ , a segunda é a oscilação entre  $F$  e  $G$ .

Mas... para saltar da primeira para a segunda, precisa de passar pela região  $DF$ , que é *proibida*, porque

$$E_c = E_2 - E_p < 0 !$$

Dizemos então que as regiões  $[CD]$  e  $[FG]$  estão separadas por uma **barreira de potencial**:

$$E_p (M_2) - E_2 .$$

Por último, se a partícula tiver energia total igual à do nível (4)

$$E = E_4 ,$$

o movimento deixa de ser oscilatório: a partícula, movendo-se para a esquerda, atinge o ponto  $K$  e retrocede, afastando-se, sem retorno, até infinito...

É isto precisamente o que sucede na *ionização* dos átomos: é-lhes fornecida energia para os electrões vencerem as sucessivas barreiras de potencial, rompendo a ligação com o átomo.

# Conservação do momento linear

## G.E.6.1 Alguns objectivos desta Unidade

O aluno:

*Conhece as grandezas impulso e momento linear:*

- Define impulso de uma força constante.
- Define impulso elementar de uma força variável.
- Define impulso de uma força variável.
- Determina os valores de impulsos nos gráficos  $(t, F)$ .
- Define momento linear (ou quantidade de movimento) de uma partícula e de um sistema discreto de partículas.
- Deduz da lei de Newton a lei da variação do momento linear.

*Conhece as principais propriedades a que satisfaz o centro de massa de um sistema de partículas:*

- Define centro de massa de um sistema de partículas em função das coordenadas dessas partículas.
- Prova que o momento linear de um sistema é o de uma partícula com a massa desse sistema situada no seu centro de massa.
- Deduz a lei fundamental de Newton do movimento dos sistemas de partículas.

*Domina a lei da conservação do momento linear:*

- Deduz a lei da conservação do momento linear a partir da lei de Newton do movimento dos sistemas.
- Descreve processos de induzir a lei da conservação do momento linear.
- Resolve problemas de aplicação da lei da conservação do momento linear em interacções a uma e a duas dimensões.
- Resolve problemas relativos ao movimento de sistemas de massa variável.

*Compreende conceitos relacionados com a energia cinética e o momento linear:*

- Mostra que a energia cinética de um sistema é a soma da sua energia cinética interna com a energia cinética do seu centro de massa.
- Define o conceito de colisão no sentido mais geral.
- Estabelece relações entre as velocidades de partículas que colidem elasticamente e frontalmente.
- Determina coeficientes de restituição em colisões directas.

## G.E.6.2 O problema do movimento

### 1. Sua resolução partindo de uma lei de força temporal

Quando conhecemos como varia no decurso do tempo a força que actua numa partícula

$$\vec{F} = f_1(t)$$

ou a sua representação gráfica  $(t, F)$ , podemos calcular o impulso num dado intervalo de tempo  $\Delta t = t_f - t_i$ :

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt$$

A partir do impulso, determinamos a variação do momento linear, porque

$$\vec{I} = m \vec{v}_f - m \vec{v}_i .$$

Conhecida a velocidade num instante  $t_i$ , estamos aptos a determinar a velocidade em qualquer instante  $t_f$ . Deste modo ficamos a conhecer a velocidade em função do tempo:

$$\vec{v} = f_2(t)$$

A seguir, por uma segunda operação de integração, pode determinar-se a variação do vector posição da partícula:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \iff d\vec{r} = \vec{v} dt \implies \vec{r}_f - \vec{r}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{v} dt$$

Daqui, dadas as condições iniciais, tira-se:

$$\vec{r} = f_3(t)$$

Conhecido assim o vector  $\vec{r}$ , está resolvido o problema do movimento: podemos determinar em qualquer instante a posição, a velocidade e a aceleração da partícula.

### 2. Sua resolução partindo de uma lei de força posicional

São poucas as situações em que se conhece a função temporal  $\vec{F} = f_1(t)$ . É muito mais frequente exprimir as leis de força em função da posição da partícula

$$\vec{F} = f(x, y, z)$$

Nestas condições, o problema do movimento resolve-se recorrendo à grandeza física **trabalho**:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Determinando o trabalho entre dois instantes  $t_i$  e  $t_f$ , podemos obter a variação da energia cinética recorrendo à **lei do trabalho-energia**:

$$W = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

A partir do conhecimento da velocidade num instante  $t_i$ , podemos agora obter a velocidade em qualquer instante  $t_f$ . Determinamos, assim, a velocidade e, a seguir, fazendo uma única integração, a lei do movimento.

Foi precisamente a procura de um processo mais simples para resolver o problema do movimento que levou os físicos a «inventar» o conceito de trabalho.

### G.E.6.3 Média ponderada

Tomemos duas caixas de maçãs, «calibradas» para exportação. Uma das caixas tem  $n_1$  maçãs de massa  $m_1$  cada uma; a outra caixa tem  $n_2$  maçãs de massa  $m_2$  cada uma.

Qual será o valor médio,  $\bar{m}$ , da massa de cada maçã no total —  $n_1 + n_2$  — das maçãs das duas caixas?

Naturalmente, será a massa total

$$m = n_1 \cdot m_1 + n_2 \cdot m_2$$

a dividir pelo número total de maçãs:

$$\bar{m} = \frac{n_1 \cdot m_1 + n_2 \cdot m_2}{n_1 + n_2} \Leftrightarrow$$

$$\bar{m} = \left( \frac{n_1}{n_1 + n_2} \right) m_1 + \left( \frac{n_2}{n_1 + n_2} \right) m_2$$

Ora, cada fracção escrita dentro de parêntesis representa a *fracção do número total* de maçãs correspondente a cada espécie destas. Tais fracções indicam a contribuição de cada espécie de maçãs para o valor da média calculada. Chamam-se «*pesos relativos*», precisamente porque, num conjunto de elementos diferentes, nos indicam a *importância*, a *influência*, que os elementos de cada espécie têm no cálculo do valor médio de uma propriedade do elemento — neste caso, a massa do elemento.

A média assim calculada designa-se por **média ponderada** ou **média pesada**.

Como

$$n_1 + n_2 = n.^{\circ} \text{ de elementos} = \text{constante},$$

sendo  $n_1$  e  $n_2$  variáveis, é costume tomar  $n_1$  e  $n_2$  para «*pesos absolutos*» ou «*pesos*» apenas. Nestas condições, a **média ponderada**,  $\bar{x}$ , do valor de uma propriedade,  $x$ , é dada por

$$\bar{x} = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i},$$

onde:

$p_1, p_2, \dots, p_n$  são os pesos de cada valor  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , respectivamente;  $\sum p_i$  é a soma dos pesos.

No caso de os elementos serem todos iguais, têm todos o mesmo «*peso*». Este toma-se então para unidade, isto é:

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$$

Em tais condições, a média ponderada coincide com a média aritmética:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{1 + 1 + \dots + 1} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

#### G.E.6.4 Regras de Pappus e Guldin

Há duas regras demonstráveis que facilitam a determinação de centros de massa dos corpos, em alguns casos. São as seguintes:

1.<sup>a</sup> — A área da superfície gerada por uma linha que gira em torno de um eixo do seu plano e que *não a intersecta* é igual ao produto do comprimento da linha pelo perímetro da trajectória do centro de massa:

$$S_{gerada} = \ell_{linha} \times s_{CM}$$

2.<sup>a</sup> — O volume do sólido gerado por uma superfície plana que gira em torno de um eixo do seu plano e que *não a intersecta* é igual ao produto da área da superfície pelo perímetro da trajectória do centro de massa:

$$V_{gerado} = S_{superf} \times s_{CM}$$

Vamos aplicar, a título de exemplo, estas duas regras de Pappus e Guldin à determinação da posição de alguns centros de massa.

### 1.º Exemplo

Determinar a posição do centro de massa de um arame  $AB$  de espessura desprezável e homogéneo — fig. G.E.6.1.

Girando o arame em torno do eixo  $Oy$  — fig. G.E.6.1, ele gera uma semi-superfície esférica de raio

$$\overline{OA} = R ,$$

e, portanto, de área

$$S = \frac{4 \pi R^2}{2} = 2 \pi R^2$$

De acordo com a primeira regra, temos:

$$S_{gerada} = \ell_{linha} \times s_{CM} \Leftrightarrow$$

$$2 \pi R^2 = \frac{2 \pi R}{4} \times 2 \pi x$$

$$x = \frac{2 R}{\pi} = \frac{R}{1,57}$$

Razões de simetria levam-nos a escrever, finalmente:

$$CM \left( \frac{R}{1,57} ; \frac{R}{1,57} \right)$$

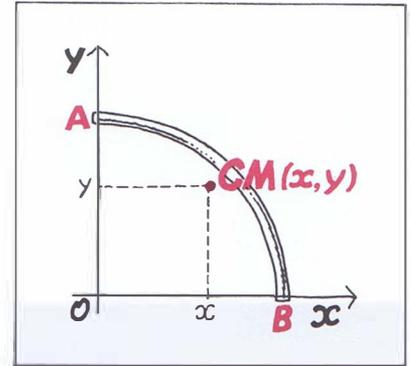


Fig. G.E.6.1 Qual é a posição do centro de massa,  $CM$ , do arame circular  $AB$ ?

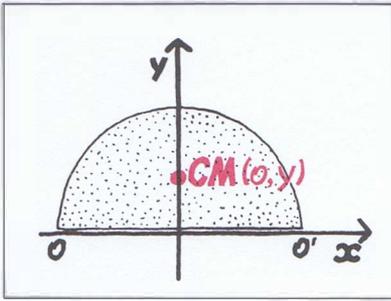


Fig. G.E.6.2 Qual é a posição do centro de massa,  $CM$ , da chapa semicircular?

### 2.º Exemplo

Determinar a posição do centro de massa de uma chapa semicircular homogénea de espessura desprezável — fig. G.E.6.2.

Girando a superfície semicircular em torno do eixo  $OO'$ , ela origina uma esfera de raio  $R$  igual ao da chapa, cujo volume é, pois,

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

De acordo com a segunda regra, vem:

$$V_{gerado} = S_{superf} \times s_{CM} \iff$$

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{\pi R^2}{2} \times 2 \pi y$$

$$y = \frac{4R}{3\pi} = \frac{R}{2,36}$$

### G.E.6.5 O foguetão Saturno V e o «Space Shuttle»

No lançamento de um foguetão, a força exterior é a força gravítica que contraria a força propulsora.

Pela relação

$$\vec{F}_g + \vec{F}_{prop} = m \vec{a} ,$$

concluimos que, para aumentar a aceleração  $\vec{a}$  e, com esta, o acréscimo de velocidade, há a maior vantagem em diminuir a massa  $m$ .

Nasceu daqui a ideia de construir os *foguetões por andares* ou *estágios*. Estes vão sendo desprendidos à medida que o seu conteúdo em combustível e comburente se esgota.

É o que sucede, por exemplo, com o foguetão **Saturno V** (ver figura G.E.6.3), que apresenta as seguintes características:

Altura . . . . .	110 m	Peso do míssil vazio . . .	250 ton
Diâmetro máx. . . .	10 m	Número de peças . . . .	15 milhões
Peso total . . . . .	2700/3000 ton	Número de motores . . .	41

Número de andares: 3

<b>1.º Andar</b>	{	Diâmetro — 10 m
		Altura — 42 m
		Peso — 470 ton
		Propulsor — querosene + oxigénio líquido



Fig. G.E.6.3 O gigantesco foguete Saturno V, colocado na plataforma de lançamento e encimado por uma nave espacial Apolo.

2.º Andar	}	Diâmetro — 10 m
		Altura — 25 m
		Peso — 130 ton
		Propulsor — hidrogénio líquido + oxigénio líquido

3.º Andar	}	Diâmetro — 6,6 m
		Altura — 18 m
		Peso — 18 ton
		Propulsor — hidrogénio líquido + oxigénio líquido

O 1.º andar tem 5 motores F-1 que consomem 1560 toneladas de oxigénio líquido e 520 toneladas de querosene à razão de 14 toneladas de propulsor *por segundo*, produzindo uma força propulsora superior a  $3 \times 10^6$  kgf.

O 2.º andar tem 5 motores J-2 que consomem *mais de 1 tonelada* de propulsor *por segundo*. Este 2.º andar permite ao foguete acabar de vencer a força do campo gravítico terrestre, atingindo a 2.ª *velocidade cósmica* ou *velocidade de libertação do campo gravítico da Terra*:  $11 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ .

O 3.º andar só possui 1 motor J-2, idêntico ao do 2.º andar, mas pode ser ligado mais do que uma vez a fim de projectar a missão Apolo na órbita lunar.

Contrariamente às mais de 2000 toneladas queimadas pelo 1.º andar, são necessárias apenas 120 toneladas para conduzir a astronave na órbita lunar, fazer eventuais correcções de rota, lançar o LEM e regressar à Terra.

No «*Space Shuttle*» ou vai-vem espacial, há dois foguetões de combustível sólido, sendo este o alumínio em pó. O comburente (perclorato de alumínio) está incorporado no combustível — fig. G.E.6.4.

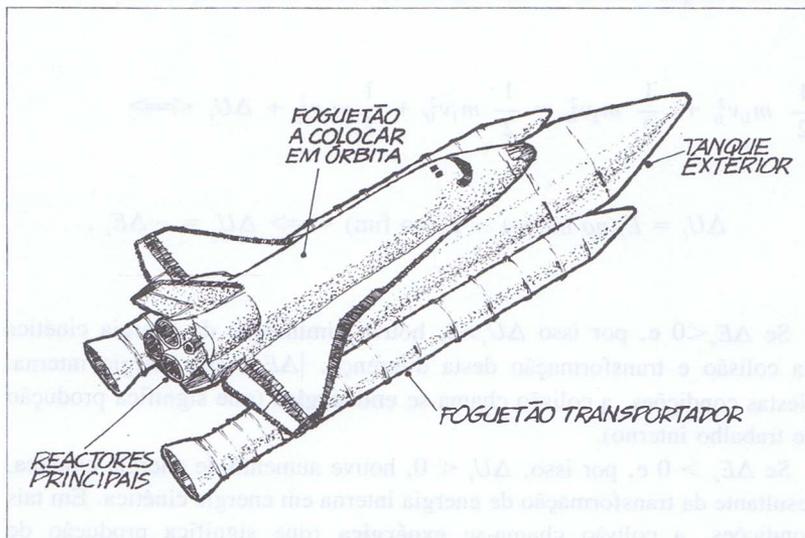


Fig. G.E.6.4 O *Space Shuttle* ou vai-vem espacial.

No «*Space Shuttle*» também existia a propulsão por combustível líquido.

### G.E.6.6 Energia interna, colisões superelásticas e colisões a altas velocidades

Designa-se por **energia interna de um sistema**,  $U_i$ , a soma das suas energias cinética interna e potencial interna ou de configuração, isto é, a soma das suas energias num referencial ligado ao centro de massa do sistema.

A *energia cinética interna* envolve as energias cinéticas de translação, de vibração e de rotação (incluindo o *spin* individual):  $E_{transl} + E_{vib} + E_{rot}$ .

Fundamentalmente, a energia cinética de vibração nos sólidos, e a energia cinética de translação nos líquidos, nos gases e nos plasmas revelam-se macroscopicamente por elevações de temperatura — daqui o chamar-se *energia térmica*, considerada macroscopicamente *energia não mecânica*.

Quando falamos em variação de energia interna de um sistema,  $\Delta U_i$ , referimo-nos normalmente a esta variação de energia cinética térmica mais à variação de energia cinética e potencial não térmica.

Nas colisões inelásticas não há, como vimos, conservação da energia cinética, visto que, além do trabalho das forças conservativas (potente numa fase e resistente na outra fase da colisão), há o trabalho,  $W_{nc}$ , das forças não conservativas, que é sempre resistente e corresponde ao aumento de energia interna.

Aplicando à colisão inelástica de duas partículas a lei geral da conservação da energia (sob as formas mecânica e não mecânica), escrevemos:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 + \Delta U_i \iff$$

$$\Delta U_i = E_c(\text{no início}) - E_c(\text{no fim}) \iff \Delta U_i = -\Delta E_c ,$$

Se  $\Delta E_c < 0$  e, por isso  $\Delta U_i > 0$ , houve diminuição da energia cinética na colisão e transformação desta diferença,  $|\Delta E_c|$ , em energia interna. Nestas condições, a colisão chama-se **endoérgica** (que significa produção de trabalho interno).

Se  $\Delta E_c > 0$  e, por isso,  $\Delta U_i < 0$ , houve aumento de energia cinética, resultante da transformação de energia interna em energia cinética. Em tais condições, a colisão chama-se **exoérgica** (que significa produção de trabalho externo) ou **superelástica**.

Nas colisões a **altas velocidades entre partículas elementares há variações de massa com a velocidade**. Nestas condições, na colisão verificam-se a conservação do momento linear e da energia mecânica, mas há alteração das massas. Por exemplo:

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m'_1 \vec{v}_{1f} + m'_2 \vec{v}_{2f}$$

O facto de  $m_1 \neq m'_1$  e  $m_2 \neq m'_2$  pode implicar a não conservação da energia cinética, ou seja: a colisão a alta velocidade pode não ser elástica.

Recordamos, no entanto, que em 1932 o físico inglês *Chadwick* descobriu o *neutrão*, apoiando-se precisamente na colisão elástica entre partículas elementares.

Assim, bombardeando fragmentos de berílio com partículas  $\alpha$ , obteve uma emissão de *partículas desconhecidas* que fez colidir com átomos de hidrogénio em repouso. Este emitiu protões, cuja velocidade mediu numa câmara de ionização.

Conhecida a massa e a carga do protão, a equação do momento linear na colisão apresentava duas incógnitas — a massa e a velocidade da partícula desconhecida.

Repetiu a experiência, substituindo os átomos de hidrogénio por átomos de azoto, obtendo uma segunda equação por aplicação da conservação do momento linear.

Nestas duas equações, eliminou a velocidade da partícula desconhecida e calculou a sua massa. Verificou que era quase igual à do protão e chamou-lhe **neutrão**.

### G.E.6.7 Relação entre as velocidades nas colisões elásticas frontais (directas ou unidimensionais)

Tem interesse conhecer as velocidades finais em função das velocidades iniciais nas colisões elásticas, porque, em Física Atómica e Nuclear, a colisão constitui um processo de determinar massas das partículas elementares, como acabámos de verificar no G.E. anterior, a respeito da experiência histórica de Chadwick.

Numa colisão elástica frontal (directa ou unidimensional), temos:

$$e = 1 \Rightarrow v_{ap} = v_{af} \Leftrightarrow v_{1i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{1f}$$

Esta equação, junta à da conservação do momento linear,

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

fornece-nos um sistema de duas equações que nos permite calcular  $v_{1f}$  e  $v_{2f}$  em função das restantes variáveis (ver Q 6.21).

Começemos, por exemplo, por tirar o valor de  $v_{1f}$  da primeira equação:

$$v_{1f} = v_{2f} + v_{2i} - v_{1i}$$

Substituindo este valor na segunda equação, vem:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_{2f} + m_1 (v_{2i} - v_{1i})$$

Isolando o termo em  $v_{2f}$  (a nossa 2.<sup>a</sup> incógnita), obtemos:

$$(m_1 + m_2) v_{2f} = 2m_1 \cdot v_{1i} + (m_2 - m_1) \cdot v_{2i} \Leftrightarrow$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{2i}$$

Se repetirmos o cálculo, tirando da primeira equação o valor de  $v_{2f}$  e o substituirmos na segunda equação, obteremos:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{2i}$$

Estas fórmulas, que de modo algum são para fixar, permitem-nos fazer algumas previsões em *choques frontais* correntes e de interesse.

### 1.º Exemplo

As *massas* das partículas que colidem são *iguais*:

$$m_1 = m_2 = m$$

Das fórmulas estabelecidas, deduzimos por sua vez:

$$v_{2f} = \frac{2m}{2m} v_{1i} + 0 \cdot v_{2i} = v_{1i}$$

$$v_{1f} = 0 \cdot v_{1i} + \frac{2m}{2m} \cdot v_{2i} = v_{2i}$$

Este resultado mostra que as *duas partículas trocaram as velocidades*, e, por isso, os *momentos lineares*, durante a colisão!

2.º Exemplo

As massas das duas partículas que colidem são *iguais* e *uma delas* está inicialmente *em repouso*. À condição anterior, acrescentamos, por exemplo:

$$v_{2i} = 0$$

Então o resultado anterior transforma-se no seguinte:

$$\begin{aligned} v_{2f} &= v_{1i} \\ v_{1f} &= v_{2i} = 0 \end{aligned}$$

Isto significa que a partícula incidente pára e que a outra arranca com velocidade igual à que a incidente trazia!

Continuam a trocar os momentos lineares.

Este caso é muitas vezes conseguido por um bom jogador de bilhar, quando dá uma tacada de modo a provocar um choque frontal entre as duas bolas.

3.º Exemplo

Se a segunda partícula está parada e tem massa *muito grande* comparada com a primeira,

$$\begin{cases} m_2 \gg m_1 \\ v_{2i} = 0, \end{cases}$$

temos:

$$\begin{cases} v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i} \\ v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{2f} \approx \frac{0}{m_2} \cdot v_{1i} = 0 \\ v_{1f} \approx \frac{-m_2}{m_2} \cdot v_{1i} = -v_{1i} \end{cases}$$

A leitura deste resultado mostra que a *partícula leve* ( $m_1$ ), ao colidir com a partícula pesada em repouso, inverte a sua velocidade, e a *partícula pesada* ( $m_2$ ) continua em repouso, impassivelmente...

4.º Exemplo

Se é a partícula pesada que está em movimento e a partícula leve em repouso, isto é,

$$\begin{cases} m_1 \gg m_2 \\ v_{2i} = 0, \end{cases}$$

encontraríamos, pelo mesmo processo:

$$\begin{aligned} v_{1f} &\approx v_{1i} \\ v_{2f} &\approx 2 v_{1i} \end{aligned}$$

Lendo o resultado, verificamos que a velocidade da partícula pesada não foi afectada — continua impassível... — e que a partícula leve foi «chutada» com uma velocidade dupla da da partícula pesada!

Poderíamos acrescentar mais exemplos curiosos. Mas esta amostragem chega, cremos, para evidenciar quanta informação e previsão é possível fazer-se na Física das partículas elementares com a teoria das colisões.

Exemplo 3.1

$$M = 2m$$

Para encontrar as velocidades finais de uma partícula pesada e uma partícula leve após uma colisão elástica, podemos usar as equações de conservação de momento e energia cinética. No referencial do centro de massa, as velocidades finais são dadas por...

Exemplo 3.2

Quando a partícula pesada está inicialmente em repouso, a partícula leve aproxima-se com velocidade  $v_1$ . As velocidades finais são dadas por...

$$\begin{cases} v_1' = \frac{2m}{m+2m}v_1 = \frac{2}{3}v_1 \\ v_2' = \frac{2m}{m+2m}v_1 = \frac{2}{3}v_1 \end{cases}$$

A partícula leve continua com a mesma velocidade, enquanto a partícula pesada move-se com a mesma velocidade que a partícula leve antes da colisão.

Exemplo 3.3

Se a partícula leve se aproxima com velocidade  $v_1$  e a partícula pesada move-se com velocidade  $v_2$ , as velocidades finais são dadas por...

$$\begin{cases} v_1' = \frac{2m}{m+2m}v_1 - \frac{2m}{m+2m}v_2 \\ v_2' = \frac{2m}{m+2m}v_1 + \frac{2m}{m+2m}v_2 \end{cases}$$

Concluindo, para uma colisão elástica...

$$v_1' = \frac{2m}{m+2m}v_1 - \frac{2m}{m+2m}v_2$$

# Movimento em referenciais acelerados

## G.E.7.1 Alguns objectivos desta Unidade

O aluno:

*Analisa situações de movimento e de repouso em referenciais de inércia e em referenciais não inerciais:*

- Define o conceito de força de inércia nos referenciais acelerados.
- Fundamenta a importância das forças de inércia.
- Distingue as forças que actuam segundo pares acção-reacção das forças singulares de inércia.
- Compara os resultados das descrições e interpretações de observadores inerciais e acelerados a respeito de qualquer fenómeno mecânico.
- Distingue as forças centrífugas de inércia e de reacção.
- Prova o carácter relativo dos conceitos de peso e de vertical.
- Mostra que a definição actual de peso contém as definições anteriores, contempla mais situações e está ainda de acordo com o significado corrente de imponderabilidade.



## G.E.7.2 Referência à teoria da Relatividade Geral

### 1. O princípio da equivalência de Einstein

Para explicar a equivalência entre as massas inercial e gravitacional de um corpo, *Einstein* demonstrou primeiro que *todos os fenómenos físicos que se observam dentro de um sistema acelerado são idênticos aos que ocorrem num sistema em repouso num campo gravitacional, de sentido oposto ao dessa aceleração e intensidade igual.*

Significa isto que, qualquer que seja o tipo de experiência física realizada numa cabina fechada, *nunca podemos distinguir se a cabina está em repouso num dado campo gravitacional  $\vec{g}$  ou se está a ser acelerada com uma aceleração  $\vec{a} = -\vec{g}$ , longe de qualquer campo gravitacional.* No seu trabalho original, *Einstein* idealizou uma experiência com uma caixa acelerada através do espaço, algo semelhante à experiência «vívida» pelo João André, que referimos no texto.

Em resumo, podemos afirmar que **um campo gravitacional uniforme é equivalente a um campo de acelerações**, de sentido contrário, sendo este um enunciado do **princípio da equivalência de Einstein**.

### 2. Previsões fundamentadas no princípio da equivalência

Consideremos então uma nave, algures no Cosmos, longe de qualquer campo gravitacional — fig. G.E.7.1, (a), em movimento livre, portanto sem qualquer aceleração. Um sinal luminoso emitido por uma fonte  $F$  atravessa a nave em linha recta, pois uma propriedade importante da luz é a sua propagação rectilínea. Ora o sinal é emitido pela fonte  $F$  quando esta se move com a velocidade  $\vec{v}$  da nave e, como esta mantém essa velocidade  $\vec{v}$ , a luz passa pelos pequenos orifícios  $E_1$  e  $E_2$ .

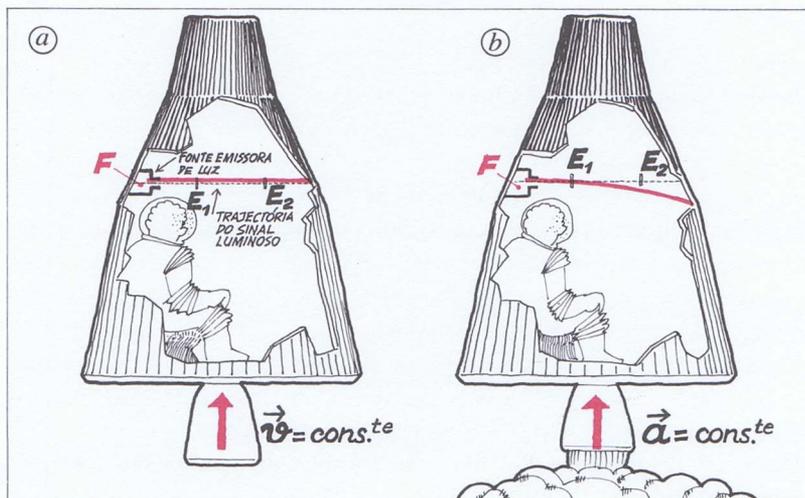


Fig. G.E.7.1

- (a) Numa nave em repouso ou com velocidade constante, a luz caminha em linha recta.  
(b) Numa nave acelerada, a luz descreve uma trajectória parabólica.

Se, porém, a nave tiver uma aceleração  $\vec{a}$ , muito elevada, o sinal luminoso apresenta uma trajectória parabólica em relação à nave, porque, durante o seu trajecto a caminho de  $E_1$  este orifício, que entretanto acelerou, desviou-se de  $d$  no sentido da aceleração; quando o sinal for atingir o orifício  $E_2$ , a uma distância dupla, já este orifício se desviou  $4d$ . Temos, assim, um movimento parabólico semelhante ao dos projecteis, resultante de dois movimentos componentes, um uniforme com a velocidade da luz perpendicular à aceleração  $\vec{a}$ , outro uniformemente acelerado com o sentido oposto ao de  $\vec{a}$ .

Segundo o que *Einstein* previu, utilizando o princípio da equivalência, o comportamento da luz devia ser semelhante numa nave em repouso mas situada num campo gravitacional, isto é, a luz devia ser desviada na direcção e sentido das forças dos campos gravitacionais. Era esta uma boa previsão da Teoria da Relatividade Geral e tinha ainda a vantagem de permitir que fosse testada a teoria.

### 3. Confirmação das previsões

Do mesmo modo que a curvatura da luz numa nave acelerada só seria detectável para uma enormíssima aceleração desta, exigia-se também um fortíssimo campo gravitacional para se poder detectar a curvatura dos raios luminosos.

Os cientistas lembraram-se, então, do forte campo gravítico nas proximidades do Sol. E idealizaram a experiência esquematizada na fig. G.E.7.2. Seja  $\theta$ , o ângulo segundo o qual se vêem os feixes luminosos paralelos, provenientes de 2 estrelas, quando eles não passam perto do Sol (o Sol está do outro lado da Terra) — representação a traço fino.

Se o Sol estiver numa posição diametralmente oposta, tal que esses raios passam perto do Sol, eles curvam e devemos observá-los segundo um ângulo  $\theta'$  ligeiramente superior (a figura não pode respeitar proporções) — representação a traço mais grosso.

A dificuldade está em que a luz solar ofusca de tal modo a luz das estrelas que só numa situação de eclipse solar é possível realizar-se a experiência.

A Teoria da Relatividade Geral foi apresentada em 1916. Em 1919 ocorreu um eclipse solar visível em África. Organizou-se uma expedição de astrónomos britânicos a esse continente. As suas observações confirmaram que os raios luminosos procedentes de estrelas distantes, quando passavam perto do Sol, eram realmente desviados.

Era a primeira grande prova da Teoria da Relatividade Geral, hoje ainda não universalmente aceite, apesar de outras confirmações astronómicas posteriores.

Quanto à Relatividade Restrita, que *Einstein* apresentou em 1905, a aceitação é universal.

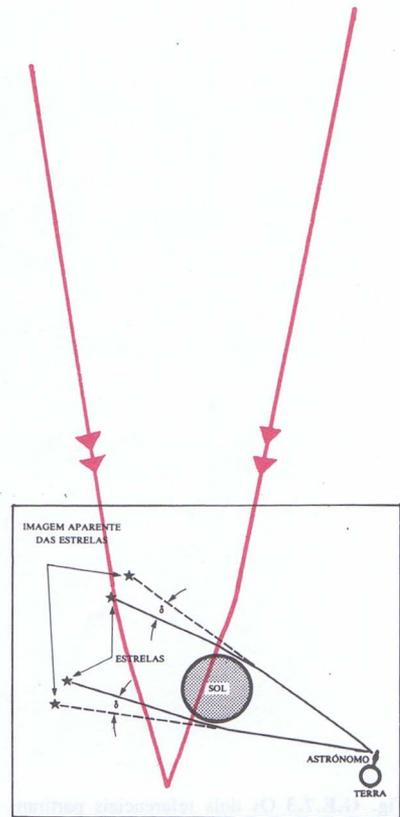


Fig. G.E.7.2  
Curvatura dos raios luminosos por acção do campo gravítico do Sol. A deflexão  $\alpha$  é de  $1,4400''$ !

#### 4. A validade das descrições em todos os referenciais

Aceitando-se a *Teoria da Relatividade Geral*, conceitos como *movimento absoluto*, *tempo absoluto* e *espaço absoluto* ficam totalmente desprovidos de sentido.

A geometria do «espaço» deverá ser tal que possamos chegar às mesmas leis, quer sejamos nós a mover-nos em relação a alguém considerado em repouso, quer seja esse alguém a mover-se em relação a nós em repouso.

Este espírito relativista já existia no caso dos observadores inerciais, com a *Teoria da Relatividade Restrita*. Mas viria a ser alargado aos *observadores acelerados* na *Teoria da Relatividade Geral*, ao tratar os *campos gravitacionais como modificações locais da geometria do espaço-tempo*.

Não há, pois, referenciais privilegiados, sejam eles *inerciais* ou *acelerados*. Um passageiro sentado num veículo em movimento pode-se considerar em repouso no referencial veículo e tudo o demais movendo-se em relação a ele. As descrições e *interpretações quer desse passageiro quer dos observadores exteriores*, para um dado fenómeno físico, são *igualmente aceitáveis e rigorosamente equivalentes*. Há apenas que procurar as descrições mais simples para efeitos práticos e teóricos.

#### G.E.7.3 As forças de inércia são reais ou fictícias?

Consideremos dois referenciais  $(O, x, y, z)$  e  $(O', x', y', z')$  que, mantendo os eixos paralelos, isto é, efectuando uma translação rectilínea, se afastam um do outro de tal modo que a distância entre eles,  $\overline{OO'}$ , varia no tempo segundo uma função

$$\overline{OO'} = \frac{1}{2} a_t t^2$$

sendo  $a_t$  o módulo da aceleração constante de qualquer um deles em relação ao outro. Designamos esta aceleração relativa por *aceleração de transporte* — fig. G.E.7.3.

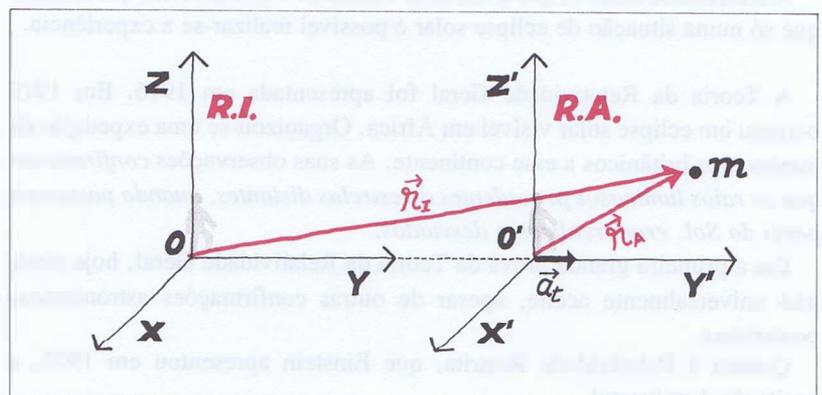


Fig. G.E.7.3 Os dois referenciais partiram de um estado de sobreposição e, portanto, de *repouso relativo*, mas passaram a distanciar-se com *acelerações relativas*,

$\vec{a}_t$  e  $-\vec{a}_t$ , constantes.

Segundo a teoria da Relatividade, não há referenciais absolutos, mas, sim, referenciais para cada observador. Vamos imaginar que somos o observador  $O$ , ligado ao referencial  $(O, x, y, z)$ , e estamos em repouso neste referencial. Vamos supor, ainda, que realizámos, em  $O$ , experiências de Mecânica que nos permitiram concluir pela validade das leis da Mecânica.

Em particular, aplicámos uma força  $\vec{F}_I$ , conhecida, ao móvel de massa  $m$ , e determinámos uma aceleração  $\vec{a}_I$  que condiz com a aceleração obtida pela relação

$$\vec{F}_I = m \vec{a}_I$$

Estamos, pois, num referencial inercial,  $R.I.$

Nestas condições, em relação a nós, o observador  $O'$  — fig. G.E.7.3 — está a acelerar, porque o seu referencial  $(O', x', y', z')$  está a acelerar com uma aceleração  $\vec{a}_I$ . Trata-se, pois, de um observador acelerado, ligado a um referencial acelerado,  $R.A.$

Que relação há entre as acelerações,  $\vec{a}_A$  e  $\vec{a}_I$ , nos referenciais acelerado e inercial, respectivamente?

Sendo  $\vec{r}_I$  e  $\vec{r}_A$  os vectores posição da partícula de massa  $m$ , nos referenciais inercial e acelerado, respectivamente, tem-se (ver fig. G.E.7.3):

$$\vec{r}_I = \vec{r}_A + \vec{OO}' \Rightarrow \vec{r}_I = \vec{r}_A + \frac{1}{2} \vec{a}_I t^2$$

Derivando em ordem a  $t$ , obtemos a relação entre as velocidades de  $m$  no referencial inercial,  $\vec{v}_I$ , e acelerado,  $\vec{v}_A$ :

$$\vec{v}_I = \vec{v}_A + \vec{a}_I \cdot t$$

Voltando a derivar, obtemos a relação pedida entre as acelerações da massa  $m$  no referencial inercial,  $\vec{a}_I$ , e no referencial acelerado,  $\vec{a}_A$ :

$$\vec{a}_I = \vec{a}_A + \vec{a}_I$$

Se multiplicarmos ambos os membros por  $m$ , e tivermos em conta que  $m \vec{a}_I$  é a força  $\vec{F}_I$  que o observador  $O$  afirma estar aplicada em  $m$ , obtemos:

$$\vec{F}_I = m \vec{a}_A + m \vec{a}_I \quad (1)$$

Ora bem:

O observador não inercial  $O'$  mede a aceleração  $\vec{a}_A$  para a massa  $m$  e, por conseguinte, só pode tomar uma de duas atitudes:

1.<sup>a</sup> — Aceitar a validade das leis da Mecânica e, em particular, da lei fundamental

$$\vec{F}_A = m \vec{a}_A$$

Nestas condições, conclui que na massa  $m$  actuou uma força resultante  $\vec{F}_A$  diferente da força  $\vec{F}_I$ , que o observador  $O$  afirma ter actuado, pois acabamos de ver que

$$\vec{F}_I = \vec{F}_A + m \vec{a}_i$$

Conclui mais: essa força resultante, que actua em  $m$ ,  $\vec{F}_A$ , é dada pela diferença vectorial

$$\vec{F}_A = \vec{F}_I - m \vec{a}_i,$$

o que é equivalente à soma vectorial

$$\vec{F}_A = \vec{F}_I + \vec{F}_i$$

Resumindo: o observador acelerado conclui que a força resultante que actua na massa  $m$  é a soma da força que o observador inercial afirma estar aplicada em  $m$ ,  $\vec{F}_I$ , mais uma outra força,

$$\vec{F}_i = - m \vec{a}_i,$$

chamada **força de inércia**.

2.<sup>a</sup> — Ou aceitar que na massa  $m$  apenas actua a força  $\vec{F}_I$ , tal como  $O$  afirma, rejeitando a existência da força de inércia,  $\vec{F}_i$ . Então conclui que as leis da Mecânica para ele não podem ser válidas. Em particular, falha a lei fundamental, pois da fórmula (1) conclui que

$$\begin{aligned} \vec{F}_I &= m \vec{a}_A + m \vec{a}_i \iff \\ \vec{F}_I &= m (\vec{a}_A + \vec{a}_i) \end{aligned}$$

isto é, pela lei fundamental prevê uma aceleração  $(\vec{a}_A + \vec{a}_i)$ , **mas ele só mede a aceleração  $\vec{a}_A$** . Há, assim, contradição entre a lei fundamental e a sua experiência. Daí o não poder considerar válida no seu referencial a lei fundamental.

Pois bem:

— A *Mecânica clássica* e a *Teoria da Relatividade Restrita* privilegiam, como já informamos, os *referenciais inerciais*. Então a posição era esta:

Quanto ao observador inercial  $O$  (fig. G.E.7.3), afirmam: é ele que tem razão, a interpretação dele é a correcta, só ele pode aplicar as leis físicas.

Quanto ao observador  $O'$ , afirmam: este tem sempre a possibilidade de chegar à conclusão de que acelera, portanto não é observador inercial e, por isso, deve aceitar que a força é apenas  $\vec{F}_I$  e que a outra, a *força de inércia*,

$$\vec{F}_i = - m \vec{a}_i,$$

é meramente fictícia e «inventada» por ele, não tem outra importância que não seja a necessidade matemática de continuar a aplicar as leis da Mecânica no seu referencial.

O veredicto da Mecânica clássica e da Relatividade Restrita, é, pois, o de que o observador  $O'$  deve tomar a 2.<sup>a</sup> atitude.

— Pelo contrário, na *Teoria da Relatividade Geral* procura-se provar que o observador  $O'$  **deve tomar a primeira das atitudes anteriores**. Nesta teoria, *Einstein*, crente convicto da universalidade das leis físicas, resolve acabar com o privilégio dos referenciais de inércia e dos observadores inerciais, privilégio esse tão bizarro e «não democrático» quanto é certo que nós vivemos num referencial acelerado: a Terra. E talvez não haja corpo algum no Universo que, de facto, não acelere.

*Einstein* afirma mesmo que o observador acelerado  $O'$ , se se cingir ao seu referencial, ao seu mundo, não podendo dispor de um referencial exterior **suposto inercial**, não poderá distinguir se ele próprio é *observador acelerado*, com a aceleração  $\vec{a}_i$ , ou *inercial* num campo gravítico  $\vec{\mathcal{G}} = -\vec{a}_i$ . Consequentemente, não poderá distinguir se a força  $\vec{F}_i = -m\vec{a}_i$ , que ele mede com base nas leis de Mecânica, é consequência da aceleração  $\vec{a}_i$  do referencial ou de um campo  $\vec{\mathcal{G}} = -\vec{a}_i$ , pois

$$\vec{F}_g = m\vec{\mathcal{G}} = m(-\vec{a}_i) = -m\vec{a}_i.$$

E mais: ainda que ele observasse o referencial  $(O, x, y, z)$ , além do seu, teria todo o direito de afirmar que é esse referencial que acelera com uma aceleração  $-\vec{a}_i$ , contrariando legitimamente a opinião de  $O$ , que afirma que é  $O'$  quem acelera com a aceleração  $\vec{a}_i$ . Igualmente a opinião de um terceiro observador seria sempre *relativa* ao seu próprio referencial. Por exemplo: o que afirmaria um observador  $O''$ , que se movesse no espaço paralelamente a  $O'$  (na mesma direcção e permanentemente com as mesmas velocidades e acelerações) e que apenas visse os observadores  $O$  e  $O'$ ?

A terminar, convém realçar que só mentalmente nós próprios podemos abstrair das *forças de inércia*, porque, insistimos, vivemos numa nave acelerada: a Terra. E sofremos os efeitos das *forças de inércia* (as *centrífugas* e as de *Coriolis* — ver G.E. seguinte) tal como sofremos os efeitos de outras quaisquer forças (em particular, das gravitacionais). Só que esses efeitos são muitas vezes desprezáveis devido às baixas acelerações da Terra. Mas passamos a sentir fortemente os efeitos dessas forças se nos colocarmos em situações de grande aceleração, como, por exemplo, em aviões curvando bruscamente, em foguetões no arranque, na montanha-russa, nos saltos em queda livre, etc. As figuras 7.3 e 7.4 do texto são esclarecedoras: as plantas, seres vivos sem raciocínio, ao crescerem numa plataforma rotativa, «não distinguem» entre as forças gravitacionais e as forças de inércia. Crescem; sendo o seu comportamento determinado por umas e outras.

Podemos aceitar, pois, como verdadeira a seguinte afirmação: **para os observadores acelerados, as forças de inércia são tão reais como as outras**, porque... têm efeitos análogos!

### G.E.7.4 A força de Coriolis

A interpretação do observador acelerado,  $A$ , só está correcta porque o experimentador  $M$ , quando é abandonado, está *em repouso* no referencial rotativo e, além disso, o eixo deste está fixo no referencial inercial Terra.

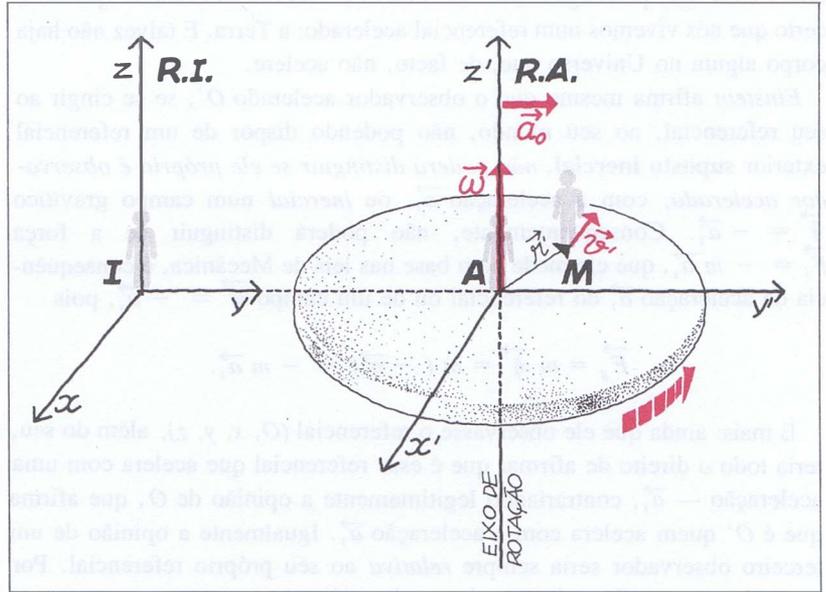


Fig. G.E.7.4

Se o experimentador  $M$  tiver a velocidade  $\vec{v}'$  num referencial acelerado,  $R.A.$ , que tem movimento de translação rectilínea com a aceleração  $\vec{a}_0$  e roda com a velocidade angular  $\vec{\omega}$ , a sua aceleração  $\vec{a}'$  é consequência de uma força de interacção,  $\vec{F}$ , e de três forças de inércia:

$$\vec{F} + \vec{F}_i + \vec{F}_{cf} + \vec{F}_{Cor} = m \vec{a}'$$

Vamos referir-nos, sumariamente, à situação geral em que a plataforma roda com uma velocidade angular constante,  $\vec{\omega}$ , em torno do seu eixo,  $AZ'$ , quando este, por sua vez, sofre uma translação com aceleração constante,  $\vec{a}_0$ , em relação ao referencial inercial Terra — fig. G.E.7.4. Se o experimentador  $M$  tiver uma velocidade  $\vec{v}'$ , variável, e portanto uma aceleração  $\vec{a}'$ , em relação ao referencial acelerado ligado à plataforma (isto é, em relação ao observador  $A$ ), terá uma aceleração  $\vec{a}$  em relação ao referencial inercial fixo na Terra (ou seja, em relação ao observador  $I$ ) dada pela seguinte expressão, estabelecida a partir da derivação de  $\vec{v}'$  e  $\vec{v}$ , com os versores do  $R.A.$  rodando e os versores de  $R.I.$  fixos:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_o + 2 \vec{\omega} \times \vec{v}' - \omega^2 \vec{r}'$$

Nesta expressão,  $\vec{v}'$  representa a velocidade de  $M$  no referencial acelerado,  $R.A.$ , fixo na plataforma; e  $\vec{r}'$  é o raio vector, perpendicular ao eixo de rotação, definindo a posição de  $M$  em relação ao referencial acelerado;  $-\omega^2 \vec{r}'$  é a *aceleração centrípeta* ( $\vec{a}_c$ );  $2 \vec{\omega} \times \vec{v}'$  é a chamada *aceleração de Coriolis* ( $\vec{a}_{cor}$ ).

Resolvendo a relação anterior em ordem a  $\vec{a}'$  e multiplicando pela massa do experimentador  $M$ , vem:

$$m \vec{a}' = m \vec{a} - m \vec{a}_o + m \omega^2 \vec{r}' + 2 m \vec{v}' \times \vec{\omega}$$

Esta é a forma que assume a lei fundamental da dinâmica no referencial acelerado,  $R.A.$ , *porque o segundo membro representa uma resultante de forças a saber:*

$m \vec{a} = \vec{F}$ : força resultante que actua  $M$  e é devida a interações com os corpos vizinhos (peso, reacções, forças de empurrões, etc.).

$-m \vec{a}_o = \vec{F}_i$ : força inercial devida à translação do referencial acelerado com aceleração  $\vec{a}_o$ .

$m \omega^2 \vec{r}' = \vec{F}_{cf}$ : força inercial centrífuga devida à rotação do referencial acelerado com a velocidade angular  $\vec{\omega}$ .

$2 m \vec{v}' \times \vec{\omega} = \vec{F}_{cor}$ : força inercial de Coriolis (nome do matemático e físico francês que pela primeira vez estudou esta força) e que só surge se o experimentador  $M$  se mover com velocidade  $\vec{v}'$  numa *directção não paralela* ao eixo (se fosse paralela, seria:  $\vec{v}' \times \vec{\omega} \rightarrow \vec{0}$ ).

A *força de Coriolis* tende a desviar o móvel  $M$  para a direita quando o seu referencial roda no sentido directo, e vice-versa. Ao contrário da força centrífuga, cuja grandeza varia com a distância,  $r'$ , ao eixo de rotação, a força de Coriolis não depende da posição do móvel mas apenas da sua velocidade e direcção dessa velocidade em relação ao eixo de rotação.

A força de Coriolis explica um grande número de fenómenos, bastante curiosos: por exemplo, o facto de um corpo em queda livre no hemisfério Norte se desviar para a direita do sentido dos seus deslocamentos, isto é, para Este (cerca de 3 cm para uma queda de 80 m no Equador — actua  $|\vec{v}'|$  e não apenas a componente de  $\vec{v}'$  no plano do Equador, pois a componente paralela ao eixo polar não produz aceleração de Coriolis —, onde o desvio é máximo); e o facto de os rios, no hemisfério Norte, produzirem maior erosão na margem direita, tendendo a contornar os obstáculos por esse lado. Essa força está também na origem dos ciclones e tem de ser tomada em conta em artilharia de grande precisão.



# Cinemática e dinâmica da rotação

## G.E. 8.1

O aluno:

*Conhece noções fundamentais relacionadas com o movimento do corpo rígido:*

- Distingue os valores algébricos dos vectores relativos às grandezas cinemáticas da rotação em torno de um eixo fixo e de um eixo não fixo, respectivamente.
- Explica o facto de a velocidade angular média ser grandeza escalar e a velocidade angular instantânea ser vectorial.
- Relaciona as grandezas vectoriais características do movimento de rotação.

*Aplica as noções anteriores em situações da vida corrente:*

- Descreve o comportamento cinemático de corpos em situações práticas a partir do conhecimento de algumas características vinculativas.

*Compreende o efeito rotativo das forças aplicadas num sólido:*

- Define momento polar de uma força.
- Define momento resultante de um sistema de forças.
- Define momento axial de uma força.

*Analisa dinamicamente o movimento de corpos rígidos:*

- Constrói diagramas de forças aplicadas em corpos rígidos.
- Define momento polar de uma força.
- Define momento de inércia de um sistema, rígido e discreto, de partículas.
- Deduz a lei de Newton do movimento de rotação dum sistema.
- Resolve problemas simples de rotação de corpos.
- Define momento angular de um sistema discreto de partículas.
- Demonstra a lei da variação do momento angular.
- Comprova a lei da conservação do momento angular.
- Resolve problemas simples, aplicando a lei da conservação do momento angular.
- Interpreta observações vulgares com base na lei da conservação do momento angular.
- Resolve problemas de dinâmica de sistemas de corpos rígidos.

## G.E. 8.2 Produto externo (ou vectorial) de dois vectores

### A — Definições

Vamos apresentar mais um operador matemático, frequentemente utilizado em Física para a simplificação formal de muitas relações entre grandezas físicas vectoriais.

Trata-se da multiplicação de vectores, que pode fazer-se de dois modos.

Um deles, o **produto escalar** ou **interno**, já conhecido, a um par de vectores faz corresponder um número algébrico. O outro, a um par de vectores faz corresponder um terceiro vector, que sai do plano dos vectores — é o **produto vectorial** ou **externo**.

Define-se o **produto vectorial** ou **externo** de dois vectores,  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ , como um *novo vector*  $\vec{v}$  que — fig. G.E.8.1, (a):

- é *perpendicular* ao plano dos vectores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ ;
- tem o *sentido* dado pela **regra da mão direita** — fig. G.E.8.1, (b), ou pela **regra do triedro directo** — fig. G.E.8.2, (a);
- e tem como módulo ou norma o produto seguinte:

$$|\vec{v}| = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \sin \theta,$$

sendo  $\theta$  o ângulo dos vectores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ .

O produto externo representa-se pela expressão

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

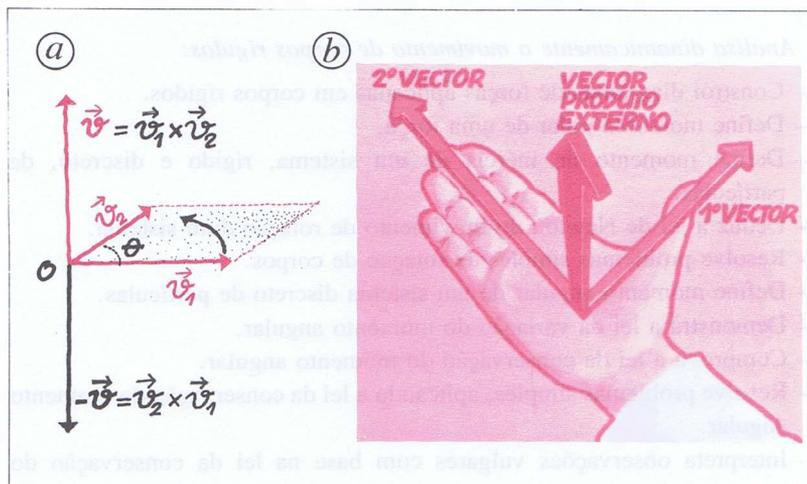


Fig. G.E.8.1

(a) — O **produto externo** dos vectores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  é um terceiro vector  $\vec{v}$ , perpendicular ao plano dos vectores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ .

(b) — Regra da mão direita para conhecer a direcção e o sentido do vector

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

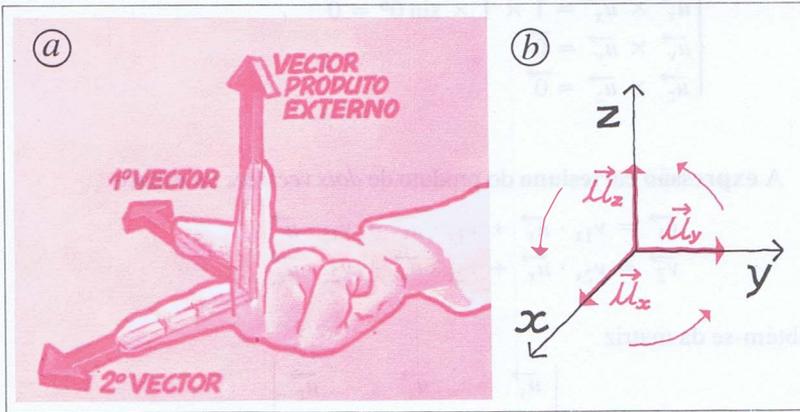


Fig. G.E.8.2 Regra do **triedro directo** para determinar o sentido do vector  $\vec{v}$  — *produto externo* dos vectores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ .

e lê-se:

$$\vec{v}_1 \text{ externo } \vec{v}_2 \quad \text{ou} \quad \vec{v}_1 \text{ vectorial } \vec{v}_2$$

A *regra da mão direita* consiste no seguinte — fig. G.E.8.1, (b):

- estende-se o *polegar* na direcção e sentido de  $\vec{v}_1$ ;
- estendem-se os *dedos médios* na direcção e sentido de  $\vec{v}_2$ ;
- o vector  $\vec{v}$  será *perpendicular* à palma da mão e dirigido no sentido em que esta se desloca para dar uma palmada.

A *regra do triedro directo*, que é idêntica, consiste no seguinte — fig. G.E.8.2, (a):

- orienta-se o *polegar* na direcção e sentido do *primeiro vector* do produto externo;
- orienta-se o *indicador* na direcção e sentido do *segundo vector* do produto externo;
- o *dedo médio*, colocado perpendicularmente ao plano dos outros dois, dá-nos a direcção e o sentido do vector  $\vec{v}$ .

O produto externo *não é comutativo*, mas, sim, *anticomutativo*, pois, aplicando qualquer das regras apresentadas, verificamos que:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = - \vec{v}_2 \times \vec{v}_1$$

Aplicando a definição e qualquer das regras expostas, é fácil verificar — fig. G.E.8.2, (b):

$$\begin{cases} \vec{u}_x \times \vec{u}_y = (1 \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ) \vec{u}_z = \vec{u}_z \\ \vec{u}_y \times \vec{u}_z = \vec{u}_x \\ \vec{u}_z \times \vec{u}_x = \vec{u}_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{u}_x \times \vec{u}_x = 1 \times 1 \times \sin 0^\circ = \vec{0} \\ \vec{u}_y \times \vec{u}_y = \vec{0} \\ \vec{u}_z \times \vec{u}_z = \vec{0} \end{cases}$$

A expressão cartesiana do produto de dois vectores no espaço

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= v_{1x} \cdot \vec{u}_x + v_{1y} \cdot \vec{u}_y + v_{1z} \cdot \vec{u}_z \\ \vec{v}_2 &= v_{2x} \cdot \vec{u}_x + v_{2y} \cdot \vec{u}_y + v_{2z} \cdot \vec{u}_z \end{aligned}$$

obtém-se da matriz

$$\begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \end{vmatrix}$$

do modo que se indica:

subtraem-se, ordenadamente, os produtos diagonais que se obtém *suprimindo* a coluna do versor da componente axial correspondente.

Por exemplo, para

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= 3 \vec{u}_x - 2 \vec{u}_y + 4 \vec{u}_z \\ \vec{v}_2 &= \vec{u}_x + 2 \vec{u}_y - 3 \vec{u}_z \end{aligned}$$

temos

$$\begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 &= [(-2) \cdot (-3) - 4 \cdot 2] \vec{u}_x + [4 \cdot 1 - 3 \cdot (-3)] \vec{u}_y \\ &\quad + [3 \cdot 2 - 1 \cdot (-2)] \vec{u}_z \\ &= -2 \vec{u}_x + 13 \vec{u}_y + 8 \vec{u}_z \end{aligned}$$

Para **dois vectores coplanares**, cujo plano se escolhe para plano (x,y),

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= v_{1x} \cdot \vec{u}_x + v_{1y} \cdot \vec{u}_y \\ \vec{v}_2 &= v_{2x} \cdot \vec{u}_x + v_{2y} \cdot \vec{u}_y \end{aligned}$$

a matriz é mais simples ( $v_{1z} = 0$  e  $v_{2z} = 0$ ) e o vector produto externo só tem componentes segundo o eixo dos z.

Por exemplo, a matriz

$$\begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ v_{1x} & v_{1y} & 0 \\ v_{2x} & v_{2y} & 0 \end{vmatrix}$$

dá o resultado

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (v_{1x} v_{2y} - v_{1y} v_{2x}) \vec{u}_z$$

Assim, para

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= 3 \vec{u}_x - 4 \vec{u}_y \\ \vec{v}_2 &= 4 \vec{u}_x + 3 \vec{u}_y \end{aligned}$$

temos a matriz

$$\begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ 3 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

donde resulta:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = [3 \cdot 3 - (-4) \cdot 4] \vec{u}_z = 25 \vec{u}_z$$

### B — Aplicações

Apresentamos a seguir três aplicações simples destes conceitos.

#### Questão 1:

Dados

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = 5 \vec{u}_x + 5 \vec{u}_y \\ \vec{v}_2 = 3 \vec{u}_x + 2 \vec{u}_y \end{cases},$$

determinar

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

**Resposta:**  $-5 \vec{u}_z$

#### Questão 2:

Deduzir a expressão cartesiana do produto externo

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2,$$

de dois vectores coplanares, desenvolvendo a expressão

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (v_{1x} \vec{u}_x + v_{1y} \vec{u}_y) \times (v_{2x} \vec{u}_x + v_{2y} \vec{u}_y)$$

e atendendo a que

$$\vec{u}_x \times \vec{u}_x = \vec{0}, \vec{u}_x \times \vec{u}_y = \vec{u}_z, \vec{u}_y \times \vec{u}_x = -\vec{u}_z, \vec{u}_y \times \vec{u}_y = \vec{0}$$

#### Questão 3:

Mostrar, para três vectores coplanares, que:

$$\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_3$$

### Resposta:

— Os 3 produtos vectoriais da expressão escrita são todos *perpendiculares ao mesmo plano*.

— Bastará então verificar a referida expressão para os módulos:

$$|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| + |\vec{v}_1 \times \vec{v}_3| = |\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)|$$

partindo da definição  $|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \sin \theta$

— Para tanto, utiliza-se o *critério simples* de tomar para eixo dos  $xx$ , num referencial ortonormado, a *linha de acção de um dos vectores dados*. Escolhamos então o vector  $\vec{v}_1$  — fig. G.E.8.3.

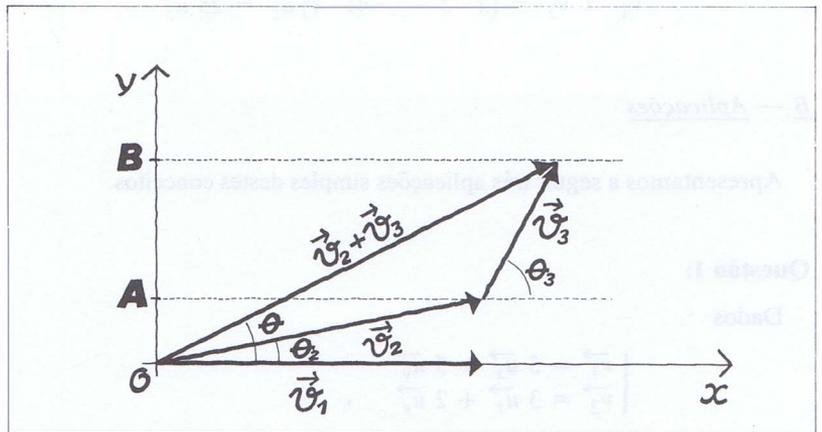


Fig. G.E.8.3

Temos, em face da figura:

$$\begin{aligned} |\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)| &= |\vec{v}_1| |\vec{v}_2 + \vec{v}_3| \cdot \sin \theta \\ &= v_1 \cdot |\vec{v}_2 + \vec{v}_3| \cos (90 - \theta) \\ &= v_1 \cdot \overline{OB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| &= |\vec{v}_1| |\vec{v}_2| \sin \theta_2 = |\vec{v}_1| |\vec{v}_2| \cos (90 - \theta_2) \\ &= v_1 \cdot \overline{OA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{v}_1 \times \vec{v}_3| &= |\vec{v}_1| |\vec{v}_3| \sin \theta_3 = |\vec{v}_1| |\vec{v}_3| \cos (90 - \theta_3) \\ &= v_1 \cdot \overline{AB} \end{aligned}$$

Portanto, como

$$\begin{aligned} v_1 \cdot \overline{OB} &= v_1 (\overline{OA} + \overline{AB}) \\ &= v_1 \cdot \overline{OA} + v_1 \cdot \overline{AB} \end{aligned}$$

temos, como pretendíamos mostrar,

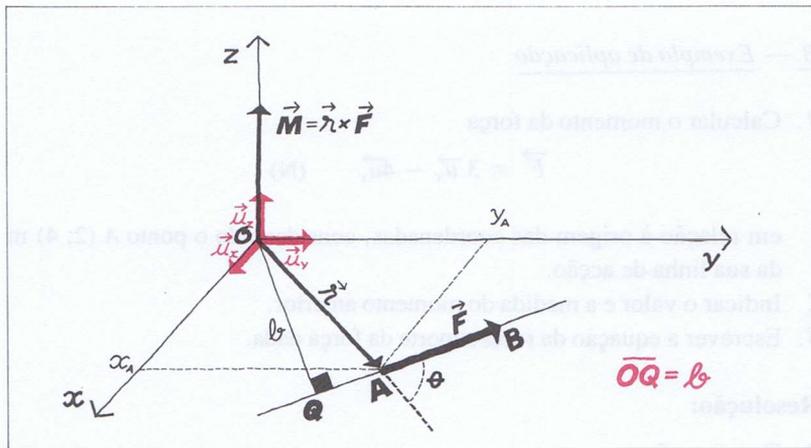
$$|\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)| = |\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| + |\vec{v}_1 \times \vec{v}_3|$$

**G.E. 8.3 Expressão cartesiana do momento de uma força em relação a um ponto, quando se toma este ponto para origem das coordenadas e o plano  $(\vec{r}, \vec{F})$  para plano  $(x, y)$ .**

A — Expressão cartesiana

Se o plano definido pelos vectores  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$  for escolhido para plano  $(x, y)$  do referencial ortonormado e tomarmos o ponto  $O$ , onde pretendemos calcular o momento, para origem dos eixos coordenados (fig. G.E.8.4), as equações vectoriais de  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$  são muito simples:

$$\begin{cases} \vec{r} = x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y \\ \vec{F} = F_x \cdot \vec{u}_x + F_y \cdot \vec{u}_y \end{cases}$$



**Fig. G.E 8.4** O momento da força  $\vec{F}$  em relação ao ponto  $O$  tem a direcção do eixo dos  $zz$  e o seu módulo é

$$\begin{aligned} |\vec{M}| &= |\vec{F}| \times \overline{OQ} \\ &= |\vec{F}| \times b \end{aligned}$$

Nestas condições, a expressão cartesiana do momento da força  $\vec{F}$  em relação ao ponto  $O$  tira-se da matriz:

$$\begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}$$

Daqui resulta:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= (x \cdot F_y - y \cdot F_x) \cdot \vec{u}_z \\ |\vec{M}| &= |x \cdot F_y - y \cdot F_x| \end{aligned}$$

A leitura destas duas expressões mostra que:

- 1.º — O vector momento,  $\vec{M}$ , tem o eixo dos  $z$  como linha de acção.
- 2.º — A expressão do valor algébrico do momento

$$M = x \cdot F_y - y \cdot F_x$$

com  $M$ ,  $F_x$  e  $F_y$  substituídos pelos seus valores, é a **equação da recta suporte da força dada,  $\vec{F}$** , cujo momento, em relação à origem das coordenadas, é  $M$ .

Com efeito, para quaisquer pontos  $(x, y)$  dessa recta suporte da força  $\vec{F}$ , são constantes os valores  $F_x$  e  $F_y$  (dados) e  $M$  (porque o braço,  $b$ , é invariável). Por isso, a relação escrita mantém-se.

Como as coordenadas  $x$  e  $y$  que satisfazem esta condição são precisamente as coordenadas dos pontos genéricos dessa recta suporte da força dada, concluímos que tal relação é a equação cartesiana dessa recta.

### B — Exemplo de aplicação

1. Calcular o momento da força

$$\vec{F} = 3\vec{u}_x - 4\vec{u}_y \quad (\text{N})$$

em relação à origem das coordenadas, considerando o ponto  $A(2; 4)$  m da sua linha de acção.

2. Indicar o valor e a medida do momento anterior.
3. Escrever a equação da recta suporte da força dada.

### **Resolução:**

1. Das equações

$$\begin{cases} \vec{r} = 2\vec{u}_x + 4\vec{u}_y & (\text{m}) \\ \vec{F} = 3\vec{u}_x - 4\vec{u}_y & (\text{N}) \end{cases}$$

tira-se a matriz

$$\begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

que, resolvida, dá:

$$\vec{M} = [2 \cdot (-4) - 4 \cdot 3] \vec{u}_z = -20 \cdot \vec{u}_z$$

2.  $M = -20$

O efeito rotativo ou de torção é no sentido anti-horário e o vector  $\vec{M}$  está dirigido para baixo.

$$|\vec{M}| = 20 \text{ m} \cdot \text{N}$$

3. De

$$M = x \cdot F_y - y \cdot F_x$$

vem:

$$-20 = -4x - 3y \Leftrightarrow 3y = -4x + 20,$$

que é a equação pedida.

**C — Questões propostas**1. Dada a equação da linha de acção de uma força  $\vec{F}$ 

$$5y = 10x - 8 \quad (\text{SI}),$$

determinar:

- 1.1 O momento da força em relação à origem.
- 1.2 A expressão cartesiana da força e a sua intensidade.
- 1.3 O braço da força.

2. Dada a força

$$\vec{F} = 4,0 \cdot \vec{u}_y \quad (\text{N}),$$

cujo braço em relação à origem é  $b = 0,40$  m, determinar:

- 2.1 A intensidade e o valor do momento da força em relação à origem.
- 2.2 A equação da linha de acção da força.

**Respostas:**

1.

$$1.1 \quad M = 8 \quad |\vec{M}| = 8 \text{ m} \cdot \text{N}$$

$$1.2 \quad \vec{F} = 5 \cdot \vec{u}_x + 10 \cdot \vec{u}_y \quad |\vec{F}| = \sqrt{5^2 + 10^2} = 11,2 \text{ N}$$

$$1.3 \quad |\vec{M}| = |\vec{F}| \times b \Leftrightarrow \\ 8 = \sqrt{5^2 + 10^2} \cdot b \Rightarrow b = 0,7 \text{ m}$$

2.

$$2.1 \quad |\vec{M}| = 1,6 \text{ m} \cdot \text{N} \quad \vec{M} = 1,6 \vec{u}_z \quad M = 1,6$$

$$2.2 \quad 1,6 = 4,0x + 0 \Leftrightarrow x = 0,4,$$

que é a equação de uma recta paralela ao eixo dos  $yy$ .

### G.E.8.4 Significado geométrico do produto misto

Consideremos o produto externo dos vectores  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$ , num ponto, A, do eixo fixo  $EE'$ , — fig. G.E.8.5.

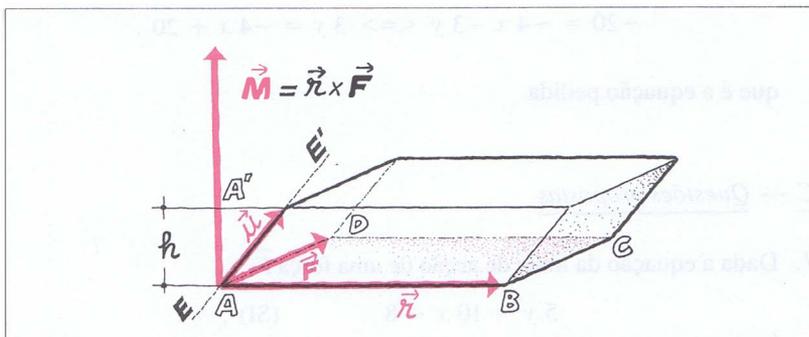


Fig. G.E. 8.5 O produto misto.

$$(\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{u}$$

é um escalar cujo módulo é igual à medida do volume do paralelepípedo que tem como arestas concorrentes num vértice, A, os vectores  $\vec{r}$ ,  $\vec{F}$  e  $\vec{u}$ .

O vector (produto externo)

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

é perpendicular ao plano da base  $[A B C D]$  do *paralelepípedo obliquo* que se obtém tomando para arestas concorrentes num vértice, A, os vectores  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$ , e o versor  $\vec{u}$  do eixo.

O *módulo* deste vector é precisamente a *área da base*:

$$|\vec{M}| = \text{área}[A B C D]$$

O produto interno dos vectores  $\vec{M}$  e  $\vec{u}$  obtém-se multiplicando o valor de  $\vec{M}$  pela projecção de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{M}$ , que é  $h$  (altura do paralelepípedo obliquo).

Então o módulo do produto misto

$$(\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{u}$$

será:

$$\begin{aligned} |\vec{M}| \times h &= \text{área}[A B C D] \times h \\ &= V \text{ (volume do paralelepípedo obliquo)} \end{aligned}$$

Concluimos, assim, que o produto misto de três vectores tem o seguinte significado geométrico: o seu módulo é o volume do paralelepípedo que tem como arestas concorrentes num vértice os três vectores dados.

## G.E. 8.5 O momento de uma força em relação a um eixo é também o momento da sua projecção, num plano perpendicular ao eixo, relativamente ao pé ou traço do eixo nesse plano

Seja uma força  $\vec{F}$  que actua num sólido (não representado), móvel em torno de um eixo  $OZ$ , fixo.

A força  $\vec{F}$  pode considerar-se a resultante de duas outras: uma está dirigida segundo o eixo de rotação,  $\vec{F}_z$ ; e outra é representada pela sua projecção no plano  $\pi$  perpendicular ao eixo de rotação,  $\vec{F}_\pi$  — fig. G.E. 8.6.

Ora, o efeito rotativo da resultante deverá ser igual ao efeito rotativo destas suas componentes. Isto significa, em linguagem de momentos, que o momento axial da força  $\vec{F}$  deve ser a soma dos momentos axiais de  $\vec{F}_z$  e  $\vec{F}_\pi$ . Ora, como o momento de  $\vec{F}_z$ , em relação ao eixo  $OZ$ , é nulo, o momento axial da força  $\vec{F}$  deve ser igual ao momento axial da força componente  $\vec{F}_\pi$ . Este tem valor igual ao momento de  $\vec{F}_\pi$  em  $O$ , porque este momento, estando assente em  $OZ$ , coincide com a sua projecção no eixo.

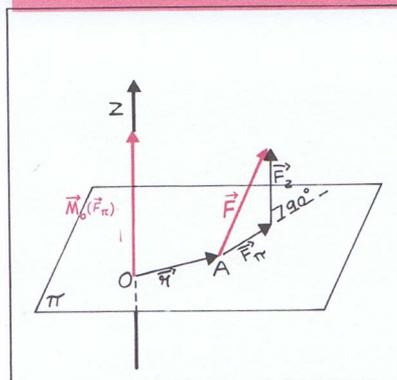
Em termos das operações vectoriais, formalmente mais rigorosas, temos:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_\pi + \vec{F}_z \\ \vec{r} \times \vec{F} &= \vec{r} \times \vec{F}_\pi + \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}_z}_{= \vec{0}} \Rightarrow \\ &= \vec{0} \\ & \quad (\vec{F}_z \parallel OZ) \end{aligned}$$

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}_\pi \Leftrightarrow$$

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{M}_o(\vec{F}_\pi) \Rightarrow$$

$$M_{oz}(\vec{F}) = M_o(\vec{F}_\pi)$$



**Fig. G.E. 8.6** O momento da força  $\vec{F}$ , em relação ao eixo  $OZ$ , tem valor igual ao momento da força componente,  $F_\pi$ , num plano perpendicular ao eixo:

$$M_z(\vec{F}) = M_o(\vec{F}_\pi).$$

### G.E. 8.6 Regra de Steiner para a determinação de momentos de inércia

O momento de inércia de um corpo em relação a um dado eixo de rotação depende deste.

Na fig. 8.23 (Tabela de momentos de inércia), todos os momentos de inércia, com excepção do último, se referem a eixos passando pelos centros de massa de sólidos homogêneos.

Conhecida a expressão do momento de inércia referida a um eixo passando pelo centro de massa,  $I$ , podemos determinar a expressão do momento de inércia referida a um eixo paralelo a esse,  $I'$ , para o que basta aplicar uma expressão simples

$$I' = I + M d^2$$

onde  $d$  é a distância entre os eixos.

A autoria desta expressão é atribuída a *Steiner*.

Vamos aplicá-la à determinação do momento de inércia no último caso da fig. 8.23: o de uma vareta em relação a um eixo passando por uma extremidade.

Sendo

$$I = \frac{1}{12} M \ell^2$$

no caso do eixo passar pelo centro de massa, virá:

$$\begin{aligned} I' &= I + M d^2 = \frac{1}{12} M \ell^2 + M \left( \frac{\ell}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{12} M \ell^2 + \frac{3}{12} M \ell^2 = \frac{1}{3} M \ell^2 \end{aligned}$$

### G.E. 8.7 Momento angular de um sólido móvel em torno de um eixo fixo

Vamos considerar um sólido móvel em torno de um eixo fixo que tomamos para eixo dos  $ZZ$  — fig. G.E. 8.7.

Imaginemos o sólido dividido em elementos (partes muito pequenas).

O *momento angular* do elemento número  $i$  (ou ordem  $i$ ) é, em relação à origem  $O$ :

$$\vec{\ell}_{O,i} = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

A sua direcção é perpendicular ao plano definido pelos vectores  $\vec{r}_i$  e  $\vec{v}_i$ .

O seu módulo é

$$\ell_{O,i} = m_i r_i v_i \sin 90^\circ = m_i r_i v_i$$

porque

$$\vec{r}_i \perp \vec{v}_i$$

Como o vector  $\vec{\ell}_{O,i}$  forma com o eixo dos ZZ um ângulo  $(90-\theta_i)$  — fig. G.E.8.7, a componente desse vector no eixo OZ é:

$$\begin{aligned} \ell_{iz} &= m_i r_i v_i \cos(90 - \theta_i) \\ &= m_i r_i v_i \cdot \sin \theta_i \\ &= m_i R_i v_i = m_i R_i (\omega R_i) \\ &= \omega \cdot m_i R_i^2 \end{aligned}$$

Estendendo o cálculo a todos os elementos e somando os valores  $\ell_{iz}$  vem

$$L_z = \sum \ell_{iz} = \omega \left( \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \right)$$

Obtemos, assim, a *componente total*,  $L_z$ , do *momento angular total do sólido, ao longo do eixo OZ*. Designa-se por **momento angular do sólido em relação ao eixo OZ**. É um escalar, de acordo com a definição de momento axial que escolhemos (rever 8.3.2).

A quantidade

$$\sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + \dots + m_n R_n^2$$

que, no limite, se converte no integral

$$\int_m r^2 dm,$$

designa-se por **momento de inércia** do sólido em relação ao eixo de rotação OZ e representa-se por  $I$ .

Tem-se, então,

$$L_z = I\omega$$

Se, como no caso da fig. G.E. 8.7, o eixo de rotação for **um eixo de simetria**, então ao somarmos os vectores  $\vec{\ell}_{O,i}$  para todos os pontos do sólido, as suas componentes  $\vec{\ell}_{ixy}$  são *simétricas duas a duas* (as correspondentes a partículas simétricas como as partículas  $m_i$ , na figura).

Por isso, a soma

$$\vec{L} = \sum \vec{\ell}_{O,i}$$

cingir-se-á à soma das componentes vectoriais  $\ell_{iz}$  segundo o eixo OZ.

Ter-se-á, então, o *momento angular total*, em relação a um ponto O do eixo de simetria,

$$\vec{L} = \sum \vec{\ell}_{O,i} = \sum \vec{\ell}_{iz} = I \vec{\omega},$$

dirigido segundo o eixo dos ZZ (ou eixo de simetria).

Neste e em todos os casos em que isso aconteça (momento angular total do sólido dirigido segundo o eixo de rotação), o eixo de rotação diz-se um **eixo principal de inércia**. Os eixos de simetria são sempre eixos principais de inércia. Apenas para estes é válida a relação vectorial

$$\vec{L} = I \vec{\omega},$$

pois só para eles o momento angular total em relação a um ponto do eixo tem a direcção do eixo e, portanto, do vector  $\vec{\omega}$ .

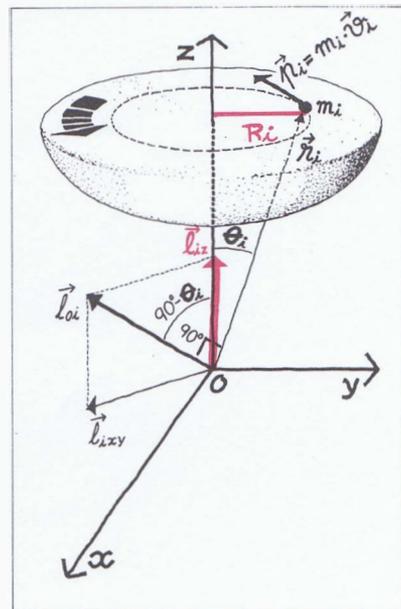


Fig. G.E. 8.7 O momento angular do sólido em relação ao eixo de rotação, OZ, fixo, e de simetria (eixo principal de inércia), é:

$$\vec{L}_z = I \vec{\omega}$$

### G.E. 8.8 A conservação do momento cinético do sistema solar e a hipótese de Kant-Laplace sobre a sua origem

É conhecida a *hipótese de Kant e Laplace* sobre a origem do sistema solar. Segundo ela, este surgiu da condensação de uma nebulosa primitiva de poeiras e gás.

Esta nebulosa, ao contrair-se por influência das forças gravitacionais, passou a girar cada vez mais rapidamente em virtude da *lei da conservação do momento angular*:

$$\vec{L} = I \vec{\omega} = \text{cons.}^{\text{te}} \text{ (sistema isolado)}$$

Com efeito, ao contrair-se, o seu momento de inércia  $I$  foi diminuindo e  $\vec{\omega}$  foi aumentando.

À medida que  $\vec{\omega}$  aumentou, aumentaram as *forças centrífugas* ( $F_c = m \omega^2 r$ ) e a nebulosa foi lançando para o exterior sucessivos anéis de matéria, que se condensaram, formando os planetas.

Nos meados do século passado, principalmente devido aos trabalhos de James Clerk *Maxwell*, começou a notar-se uma enorme contradição nesta *hipótese de Kant-Laplace*. Ela resultava da maneira como o momento cinético se reparte pelos vários astros do sistema.

De facto, a ser válida a hipótese, as velocidades angulares dos vários anéis que se foram separando e do que ia restando da nebulosa tinham que ser quase idênticas. Consequentemente, o momento angular por unidade de massa devia permanecer sensivelmente constante nos anéis e no que restava da nebulosa de que resultou o nosso Sol.

Portanto, sendo esta massa restante muito maior que a massa dos anéis que deram origem aos planetas (a massa de todos os planetas no seu conjunto é apenas cerca de

$$\frac{1}{700}$$

da massa do Sol), o momento angular desse proto-Sol devia ser muito maior que a dos anéis.

Ora não é este o veredicto que resulta dos cálculos baseados em medições astronómicas — ver fig. G.E. 8.8 e resposta à questão Q. 8.27: só cerca de 3% do momento angular do sistema solar diz respeito ao momento angular do Sol.

Por isso outra hipótese surgiu, que todavia deu origem a contradições maiores.

Actualmente, a hipótese nebular de Kant-Laplace, acrescentada de algumas considerações de natureza hidrodinâmica e magnética, parece atenuar o inconveniente da repartição não equitativa do momento cinético.



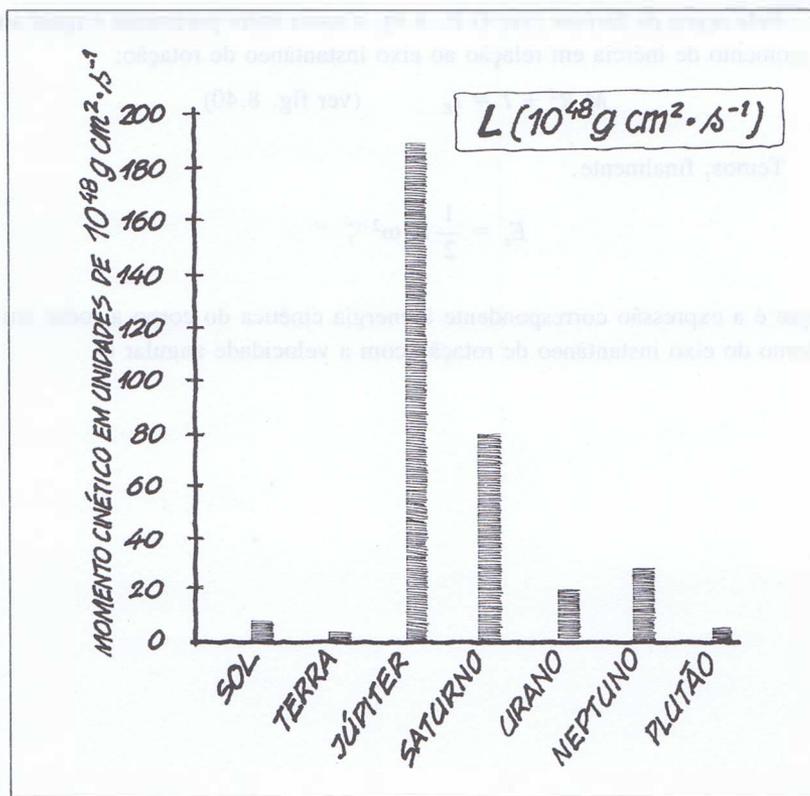


Fig. G.E. 8.8 Representação esquemática da distribuição do momento angular no sistema solar, segundo um gráfico de barras.

### G.E. 8.9 Energia cinética de um corpo que rola

A energia cinética de um corpo que rola, como sistema de partículas que é, resulta da soma de duas parcelas:

$$E_c = E_c(CM) + E_c(i) \iff$$

$$E_c = E_c(\text{transl.}) + E_c(\text{rot.}) \iff$$

$$E_c = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Como

$$v_{CM} = \omega R ,$$

vem:

$$E_c = \frac{1}{2} (M R^2 + I) \omega^2$$

Pela *regra de Steiner* (ver G.E. 8.6), a soma entre parêntesis é igual ao momento de inércia em relação ao eixo instantâneo de rotação:

$$M R^2 + I = I_E \quad (\text{ver fig. 8.40})$$

Temos, finalmente,

$$E_c = \frac{1}{2} I_E \omega^2 ,$$

que é a expressão correspondente à energia cinética do corpo a rodar em torno do eixo instantâneo de rotação com a velocidade angular  $\omega$ .

Fig. 8.40. Momento de inércia em relação ao eixo instantâneo de rotação. O eixo instantâneo de rotação é o eixo que passa pelo centro de massa e é perpendicular ao plano da página.

Fig. 8.41. Momento de inércia em relação ao eixo instantâneo de rotação. O eixo instantâneo de rotação é o eixo que passa pelo centro de massa e é perpendicular ao plano da página.

Fig. 8.42. Momento de inércia em relação ao eixo instantâneo de rotação. O eixo instantâneo de rotação é o eixo que passa pelo centro de massa e é perpendicular ao plano da página.

Fig. 8.43. Momento de inércia em relação ao eixo instantâneo de rotação. O eixo instantâneo de rotação é o eixo que passa pelo centro de massa e é perpendicular ao plano da página.

Fig. 8.44. Momento de inércia em relação ao eixo instantâneo de rotação. O eixo instantâneo de rotação é o eixo que passa pelo centro de massa e é perpendicular ao plano da página.

Fig. 8.45. Momento de inércia em relação ao eixo instantâneo de rotação. O eixo instantâneo de rotação é o eixo que passa pelo centro de massa e é perpendicular ao plano da página.

Fig. 8.46. Momento de inércia em relação ao eixo instantâneo de rotação. O eixo instantâneo de rotação é o eixo que passa pelo centro de massa e é perpendicular ao plano da página.

Fig. 8.47. Momento de inércia em relação ao eixo instantâneo de rotação. O eixo instantâneo de rotação é o eixo que passa pelo centro de massa e é perpendicular ao plano da página.

Fig. 8.48. Momento de inércia em relação ao eixo instantâneo de rotação. O eixo instantâneo de rotação é o eixo que passa pelo centro de massa e é perpendicular ao plano da página.

# Estática dos corpos rígidos

## G.E. 9.1 Alguns objectivos desta Unidade

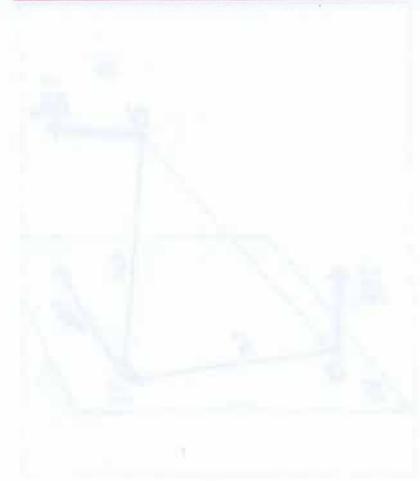
O aluno:

*Compreende o conceito de equilíbrio de um corpo:*

- Define os três estados possíveis de equilíbrio de um corpo.
- Deduz a condição de equilíbrio do corpo a partir das leis de Newton da translação e da rotação.
- Relaciona os momentos de uma força em dois pontos diferentes.
- Define a equivalência de sistemas de forças.
- Define sistemas equivalentes a zero.
- Define centro de forças paralelas.
- Distingue centro de forças paralelas e centro de gravidade de um corpo.
- Mostra que o momento de um binário é independente do centro de redução.
- Compara os diversos casos de redução de sistemas de forças.
- Estabelece a condição geral de equilíbrio de um sólido.
- Distingue os diferentes tipos de equilíbrio de um corpo.

*Aplica o conceito de equilíbrio:*

- Determina tensões e compressões de cabos e cordas a que estão ligados corpos em equilíbrio.
- Reduz a forças únicas sistemas de forças coplanares.
- Determina resultantes de sistemas de forças paralelas.
- Deduz a equação de definição do centro de forças paralelas.
- Determina centros de gravidade em casos simples.
- Resolve situações de equilíbrio, determinando domínios de valores de uma ou duas grandezas que satisfaçam esses equilíbrios.



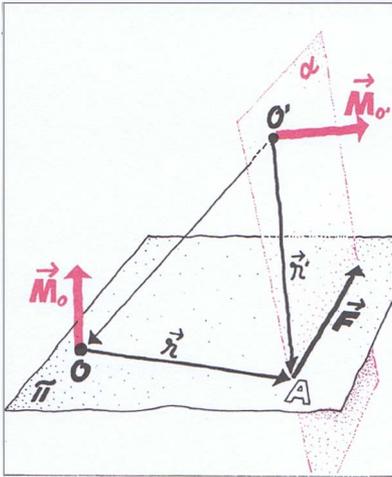


Fig. G.E. 9.1 Os momentos de uma força  $F$ , em dois pontos diferentes.  $O$  e  $O'$ , estão relacionados do modo seguinte:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{F}$$

## G.E. 9.2 Relação entre os momentos de um sistema de forças em dois pontos diferentes

Consideremos uma força  $\vec{F}$  e os seus momentos em dois pontos diferentes,  $O$  e  $O'$  — fig. G.E. 9.1.

O momento da força  $\vec{F}$  em  $O$ ,  $\vec{M}_O$ , é perpendicular ao plano  $\pi$  definido por  $O$  e  $\vec{F}$ , e é dado por

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

O momento da força  $\vec{F}$  em  $O'$ ,  $\vec{M}_{O'}$ , é perpendicular ao plano  $\alpha$  definido por  $O'$  e  $\vec{F}$ , e é dado por

$$\vec{M}_{O'} = \vec{r}' \times \vec{F}$$

Que relação há entre estes momentos?

Unindo  $O'$  com  $O$ , e sendo (fig. G.E. 9.1).

$$\vec{r}' = \vec{O'O} + \vec{r},$$

a relação procurada surge como consequência imediata da propriedade distributiva do produto externo, ou seja:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O'} = \vec{r}' \times \vec{F} &\Leftrightarrow \vec{M}_{O'} = (\vec{O'O} + \vec{r}) \times \vec{F} \Leftrightarrow \\ \vec{M}_{O'} &= \vec{O'O} \times \vec{F} + \vec{r} \times \vec{F} \end{aligned}$$

Podemos, portanto, afirmar que, conhecido o momento de uma força num ponto  $O$ ,  $\vec{M}_O$ , podemos determinar o momento da força em outro ponto  $O'$ ,  $\vec{M}_{O'}$ , recorrendo à relação

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{F}$$

Esta relação significa:

— O momento de uma força num ponto,  $O'$ , é a soma do momento dessa força em outro ponto,  $O$ , com o seu momento em  $O'$  quando aplicada em  $O$ .

Consideremos agora um sistema de  $n$  forças

$$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$$

e os seus momentos em dois pontos diferentes,  $O$  e  $O'$ , respectivamente:

$$\vec{M}_1 \text{ e } \vec{M}'_1, \vec{M}_2 \text{ e } \vec{M}'_2, \dots, \vec{M}_n \text{ e } \vec{M}'_n$$

Aplicando a cada força do sistema a relação escrita e somando membro a membro, obtemos:

$$\vec{M}'_1 = \vec{M}_1 + \vec{O'O} \times \vec{F}_1$$

$$\vec{M}'_2 = \vec{M}_2 + \vec{O'O} \times \vec{F}_2$$

$$\vec{M}'_n = \vec{M}_n + \vec{O'O} \times \vec{F}_n$$

$$\underbrace{\vec{M}'_1 + \vec{M}'_2 + \dots + \vec{M}'_n}_{\text{mom. sist. em } O'} = \underbrace{\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n}_{\text{mom. sist. em } O} + \vec{O'O} \times \underbrace{(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n)}_{\text{resultante do sistema}}$$

mom. sist. em  $O'$

mom. sist. em  $O$

resultante do sistema

Portanto, para o sistema, cuja resultante é  $\vec{F}$ , podemos escrever também:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{F}$$

### G.E. 9.3. Alguns tipos de ligações

Todo o corpo sujeito a ligações ou vínculos pode ser considerado livre de se mover, isto é, *sem quaisquer ligações*, mas submetido a forças exteriores de ligação que substituem essas ligações hipoteticamente não existentes — fig. G.E.9.2.

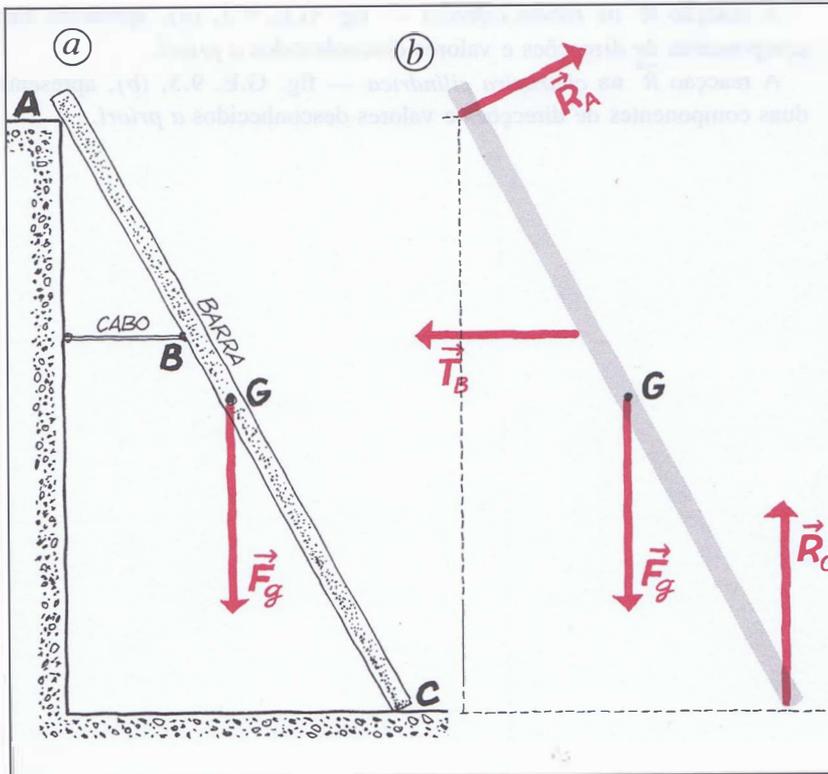


Fig. G.E. 9.2

(a) Barra com três ligações, ou vínculos, em A, B e C.

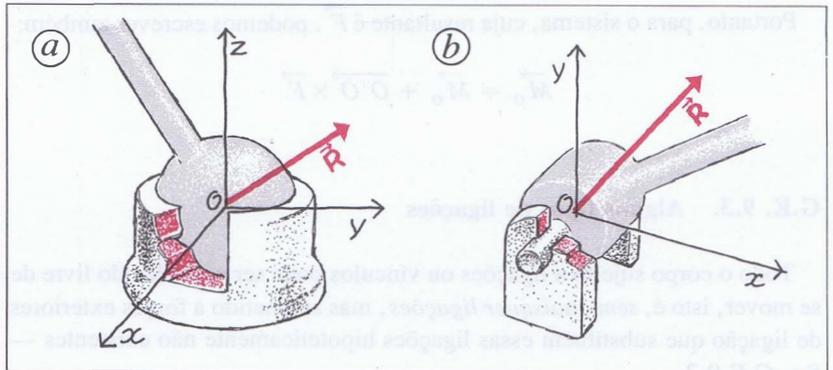
(b) A barra comporta-se como se estivesse livre (ligações inexistentes), mas é actuada pelas forças  $\vec{R}_A$  (reação sem atrito no vínculo A),  $\vec{R}_C$  (reação sem atrito no vínculo C),  $\vec{T}_B$  (tensão do cabo), e pela força aplicada  $\vec{F}_g$  (força gravítica).

Dois tipos de ligações que convém saber distinguir são a **rótula** e a **charneira**.

Enquanto a *rótula* fixa um ponto do corpo de tal modo que ele não pode efectuar qualquer deslocamento no espaço, a *charneira* permite os movimentos dos pontos do corpo ligados. A fig. G.E. 9.3 ajuda a compreender esta diferença:

Fig. G.E. 9.3

- (a) Barra ligada por meio de uma *rótula esférica*. Esta ligação *fixa* a barra, porque a rótula *fixa-se ao suporte* na posição que se pretender.
- (b) Barra ligada por meio de uma *charneira cilíndrica*. A barra pode rodar em torno do eixo da charneira cilíndrica perpendicular ao plano da base em  $O$ .



A reacção  $\vec{R}$  na *rótula esférica* — fig. G.E. 9.3, (a), apresenta três componentes de direcções e valores desconhecidos *a priori*.

A reacção  $\vec{R}$  na *charneira cilíndrica* — fig. G.E. 9.3, (b), apresenta duas componentes de direcções e valores desconhecidos *a priori*.

# Mecânica dos fluidos

## G.E. 10.1 Alguns objectivos desta Unidade

O aluno:

*Conhece as principais propriedades a que satisfazem os fluidos em equilíbrio hidrostático:*

- Relaciona o comportamento macroscópico de um fluido com o comportamento microscópico das suas partículas.
- Explica o significado da expressão «fluido em equilíbrio».
- Define a grandeza densidade de um fluido num ponto.
- Mostra que a densidade relativa de uma substância não pode ter unidades.
- Define a grandeza pressão num fluido em equilíbrio.
- Deduz a equação fundamental da hidrostática partindo das leis da Mecânica.
- Infere algumas consequências da lei fundamental da hidrostática.
- Explica o «paradoxo hidrostático».
- Interpreta cineticamente a diminuição da pressão atmosférica com a altitude.
- Realça a importância histórica da experiência de Torricelli.
- Deduz a lei de Pascal.
- Distingue os líquidos dos sólidos no que concerne à transmissão da pressão e das forças de pressão.
- Demonstra a lei de Arquimedes da hidrostática.
- Resolve problemas de equilíbrio e de movimento de corpos no interior de fluidos.

*Aplica os conhecimentos de Mecânica ao estudo do comportamento dos líquidos em escoamento estacionário:*

- Distingue escoamento estacionário e turbulento.
- Estabelece a equação da continuidade.
- Deduz a equação de Bernoulli da hidrodinâmica.
- Infere algumas consequências práticas a lei de Bernoulli
- Explica a existência de uma impulsão aerodinâmica em diversas situações.
- Resolve problemas práticos de escoamento de líquidos.

## G.E. 10.2 Hidrostática experimental

### Interpretação do paradoxo hidrostático

#### 1. Papel da experimentação em Hidrostática

Os resultados que se apresentam, no texto, como consequências *deduzidas das leis do equilíbrio* e da *equação fundamental* foram obtidos experimentalmente, muito antes de haver uma teoria mecânica coerente. Os pioneiros do estudo da Hidrostática foram, sucessivamente, *Arquimedes* de Siracusa (287-212 a.C.), *Simon Stevin* (1548-1620) e *Blaise Pascal* (1623-1662). Os seus enunciados, porque se fundamentavam na experimentação, própria e alheia, embora os tivessem acompanhado de justificação teórica, passaram a ser conhecidos por «**princípios**», quer dizer: afirmavam-se como um *comportamento* dos líquidos, descoberto e verificado pela experiência.

Nos Laboratórios de Física das Escolas existem, em geral, conjuntos de aparelhos interessantes para testar estes resultados empíricos. Tanto os professores como os alunos poderão preparar aulas de hidrostática, preenchendo-as com experiência variadas, muitas delas não apenas elucidativas mas, também, recreativas.

De posse, actualmente, de uma teoria mecânica de equilíbrio que engloba e explica os referidos «princípios», estes perderam o carácter axiomático inicial e passaram à categoria epistemológica de **leis derivadas**, traduzidas por *equações fundamentais*, válidas enquanto *coerentes* e *conformes* com os factos experimentais conhecidos.

Por tudo isto, nesta fase mais desenvolvida da aprendizagem, optámos pela **via dedutiva**, partindo das leis gerais e remetendo para os professores a possibilidade de utilizar outros métodos, em particular o *método heurístico*, que nesta matéria até se revela acessível. Têm assim um meio adequado para o aluno elaborar os seus próprios conhecimentos, partindo de investigações experimentais baseadas no material didáctico disponível e na capacidade de improvisação.

Uma simples *verificação* experimental de uma lei deduzida revela-se sempre interessante e formativa para os alunos, além de muito motivadora.

#### 2. Uma interpretação do «paradoxo» hidrostático

Como se sabe, uma **lei**, derivada ou geral, traduz um comportamento da matéria, suficientemente testado, mas *não explica* esse comportamento. Para o explicar ou interpretar, os cientistas «inventam» **modelos** ou **teorias** que, partindo de conceitos simples e aceites, permitem uma compreensão racional, coerente e lógica dos diversos fenómenos.

O «paradoxo» hidrostático é um dos exemplos que pode ilustrar esta situação. De facto, de harmonia com a lei fundamental da Hidrostática e com o conceito de pressão, o comportamento de um líquido, quanto à força de pressão exercida no fundo de um vaso, *tem de ser* este: para a mesma altura de líquido e área do fundo do vaso, a força de pressão é também a mesma, por mais bizarra que seja a forma do vaso. Ora, isto é a previsão teórica — uma consequência da lei. Mas... como *compreender* este desiderato da lei?

Vamos, pois, tentar uma *interpretação*, baseados no *conceito de equilíbrio* e no *modelo mecânico cinético* (as partículas de líquido movem-se permanentemente, umas em torno das outras, mudam de vizinhança e «empurram» as paredes).

Consideremos os dois vasos esquematizados na fig. G.E.10.1. Contêm o mesmo líquido, a mesma altura  $h$  de líquido e os seus fundos têm a mesma área  $S$ .

A *força de pressão*,  $\vec{F}$ , que o líquido e apenas este exerce no fundo de cada vaso (*força de pressão hidrostática*), tem o valor

$$F = (p - p_0) \cdot S = \rho g h \cdot S \iff$$

$$F = \rho g V$$

Esta força coincide, pois, com o peso de uma coluna do líquido de base  $S$  e altura  $h$ .

No caso do vaso (a), esta força de pressão hidrostática é *inferior* ao peso do líquido vertido no vaso,

$$F < F_g,$$

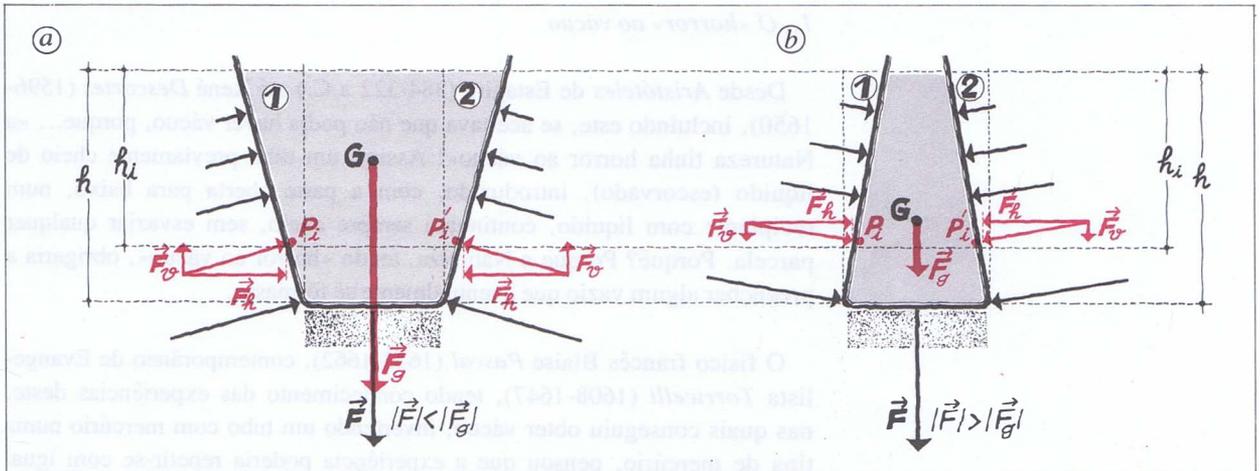


Fig. G.E. 10.1 As forças de pressão exercidas no fundo de dois vasos com a mesma área  $S$ , pela mesma altura  $h$  de um dado líquido, são iguais, em ambos os casos, ao peso de uma coluna de líquido de volume  $S \cdot h$ .

Nas paredes laterais estão representadas as *reações* destas, *simétricas* das forças de pressão exercidas pelo líquido.

ao passo que, no caso do vaso (b), a mesma força de pressão hidrostática é maior do que o peso do líquido vertido no vaso,

$$F > F_g .$$

Quem equilibra o peso de líquido que está a mais num caso, ou aumenta o peso do líquido que está a menos no outro?

É natural pensar que sejam as reacções das paredes laterais, já que da sua obliquidade resultam as diferenças nas quantidades de líquido. Estas reacções equilibram as forças de pressão exercidas pelas moléculas de líquido que, em movimento permanente, «empurram» as paredes.

Consideremos, então, um ponto  $P_i$ , encostado à parede e à profundidade  $h_i$ , no interior do líquido — fig. G.E 10.1. A reacção exercida pela parede em  $P_i$  tem duas componentes: uma vertical,  $\vec{F}_v$ , e outra horizontal,  $\vec{F}_h$ . É óbvio que as componentes horizontais das reacções se equilibram duas a duas, ao mesmo nível (pontos  $P_i$  e  $P'_i$ ).

Quanto às componentes verticais:

- no caso (a), estão dirigidas para cima e, por isso, equilibram o peso do líquido que está a mais nas regiões (1) e (2);
- no caso (b), estão dirigidas para baixo e, portanto, aumentam o peso do líquido de uma quantidade igual ao peso de líquido que falta nas regiões (1) e (2).

Não há, pois, paradoxo. Há, apenas, equilíbrio, segundo o modelo mecânico cinético.

### G.E. 10.3 O «horror» ao vácuo

Por que motivo se mantém a atmosfera terrestre?

#### 1. O «horror» ao vácuo

Desde Aristóteles de Estagira (384-322 a.C.) até René Descartes (1596-1650), incluindo este, se aceitava que não podia haver vácuo, porque... «a Natureza tinha horror ao vácuo»! Assim, um tubo previamente cheio de líquido (escorvado), introduzido, com a parte aberta para baixo, num recipiente com líquido, continuará sempre cheio, sem esvaziar qualquer parcela. Porquê? Porque a Natureza, tendo «horror ao vácuo», obrigaria a preencher algum vazio que eventualmente se formasse.

O físico francês Blaise Pascal (1623-1662), contemporâneo de Evangelista Torricelli (1608-1647), tendo conhecimento das experiências deste, nas quais conseguiu obter vácuo, invertendo um tubo com mercúrio numa tina de mercúrio, pensou que a experiência poderia repetir-se com igual êxito, usando outros líquidos. E foi assim que refez a experiência de Torricelli com vinho (!) em tubos de vidro ligados, perfazendo um comprimento total de 15 m.

*Pascal* imaginou então que a pressão hidrostática devida ao peso da coluna de mercúrio era *equilibrada* pela pressão devida ao peso de uma coluna de ar de altura igual à distância desse ponto à superfície da atmosfera.

Esta seria a *pressão atmosférica* e deveria, portanto, diminuir com a altitude, por ser cada vez menor a distância à superfície da atmosfera à medida que se sobe. E, conseqüentemente, diminuiu também a altura da coluna de mercúrio equilibrada.

Escreveu de Paris a seu cunhado *Périer*, que vivia na pequena cidade de Clermont, pedindo-lhe que fizesse a experiência de Torricelli a várias altitudes, na montanha vizinha de «Puy de Dôme». O resultado obtido cuidadosamente por *Périer* foi surpreendente naquela época: a coluna de mercúrio baixou cerca de 8 cm para uma diferença de quase 900 m.

A repercussão que estas experiências tiveram no século XVII foi muito grande, pois acabaram com a superstição do «horror do vácuo» e mostraram que a pressão atmosférica também tem *carácter gravítico*, já que está relacionada com o peso do ar — por isso diminui com a altitude. Foi a partir de então que se iniciou a construção de bombas de vácuo ou de extracção de ar, cujos pioneiros foram *Otto von Guericke*, em 1650, na Alemanha, e *Robert Boyle*, em 1660, na Inglaterra.

## 2. Por que motivo se mantém a atmosfera terrestre?

A grandes altitudes (dezenas e centenas de quilómetros), as moléculas de ar com velocidade superior à 2.<sup>a</sup> velocidade cósmica (11 km/s) podem perder a ligação com a Terra e partir para viagens interplanetárias.

No caso da Terra, a percentagem de moléculas com esta velocidade é muito pequena. A energia cinética média das moléculas de oxigénio e azoto atmosféricas é, junto da superfície terrestre, inferior ao módulo da sua energia potencial gravítica,

$$E_p = -G \frac{M_m}{r+h}$$

e, em particular, as suas velocidades médias são menores do que a velocidade

de escape ( $v_c = G \frac{M_T}{R}$ ).

Por isso, a fuga de moléculas é praticamente impossível e, assim, a *atmosfera terrestre mantém-se*, pois as moléculas são retidas.

Já não sucede o mesmo com a Lua, porque a sua energia potencial gravítica é  $\frac{1}{20}$  da da Terra e a sua velocidade de escape 4,5% da da

Terra:  $\frac{1}{81} M_T : \frac{27}{100} R = \frac{4,5}{100}$ . Nesta situação, a percentagem de molé-

culas gasosas com energia cinética superior ao módulo da energia potencial gravítica é muito maior. Daqui resulta a fuga de moléculas gasosas da Lua para o espaço interplanetário e, portanto, *ausência de atmosfera*.

Em resumo, é a gravidade que determina a existência da atmosfera nos planetas.

### G.E. 10.4 A pressão e a energia potencial por unidade de volume num fluido

Vimos na Unidade 5 que, num campo de forças conservativas, a componente da força na direcção de um deslocamento  $dx$  era a *derivada direcciona* da energia potencial, com sinal negativo:

$$F_x = - \frac{d E_p}{dx} .$$

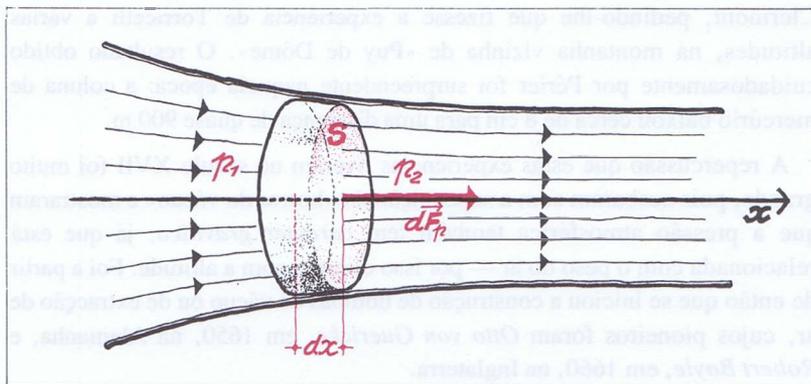


Fig. G.E. 10.2 A força de pressão exercida na área  $S$  tem o valor:

$$dF_p = (p_1 - p_2) \cdot S$$

Se num volume elementar de fluido,  $S \cdot dx$ , fig. G.E.10.2, considerarmos a resultante das forças de pressão exercidas de um e outro lado de  $S$ ,  $d\vec{F}_p$ , esta terá o valor

$$dF_p = (p_1 - p_2) S \Leftrightarrow dF_p = -dp \cdot S ,$$

porque

$$dp = p_2 - p_1$$

Considerando a força de pressão por unidade de volume, temos, sendo  $dx$  a espessura da secção  $S$ :

$$\frac{dF_p}{dV} = - \frac{dp \cdot S}{(S \cdot dx)} \Leftrightarrow$$

$$F_p \text{ (por unid. de vol.)} = - \frac{dp}{dx}$$

A comparação desta expressão com a derivada direcciona da energia potencial,

$$F_x = - \frac{d E_p}{dx} ,$$

sugere que podemos considerar a pressão  $p$  como a *energia potencial por unidade de volume*. Esta é a energia potencial devida à pressão e a conclusão acabada de formular é reforçada pela seguinte consideração quanto às unidades de pressão:

$$p = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N} \times \text{m}}{\text{m}^3} = \frac{\text{joule}}{\text{m}^3} = \frac{\text{energia}}{\text{volume}}$$

# BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

1. LUÍS SILVA e JORGE VALADARES, *Manuais de Física para o 10.º e 11.º anos de escolaridade*. Lisboa, Didáctica Editora, 1983.
2. RESNICK e D. HALLIDAY, *Física*, Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, Editora, 3.ª ed., s/d, vol I.
3. ALONSO e FINN, *Física*, S. Paulo, Editora Edgar Blücher, 1972, vol. I.
4. LEONARD H. GREENBERG, *Physics with Modern Applications*, Filadélfia, W. B. Saunders Company, 1978.
5. TIPLER, *Physics*, New York, Worth Publishers, Inc., 1978, vol. I.
6. BUECHE, *Principles of Physics*, Mc Graw-Hill Book Company, 4.ª ed.
7. YAVORSKY e PINSKY, *Fundamental of Physics*, Mir Publishers Moscow, 1975, vol. I.
8. J. RUIZ VASQUEZ, *Física*, Madrid, Selecciones Científicas, 3.ª ed., 1975.
9. JAY OREAR, *Física Fundamental*. México, Editora Limusa — Wiley, S. A., 2.ª ed; 1970.
10. MAX BORN, *Física Atómica*, Lisboa, trad. portug. da Fundação Calouste Gulbenkian, 1971.
11. P. BOTTARO, E. CUISSOL, J. LACOURT, L. ROUZAUD, *Physique*, Collection Jean Lacourt, Paris, Arnaud Colin, Classes Terminales.
12. P. BRAMAND, P. FAYE, G. TOMASSIER, *Physique*, Collection Eurin Gié, Paris, Hachette, Classes de Première.
13. *Physical Science Study Committee*, D. C. Heath and Company, Boston, 3.ª ed.
14. *Project Physics Course*, Unidades 1, 2, e 3, trad. portug. da Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1980.

# TABELAS

**TABELA 1 — Constantes Físicas**

**Velocidade da luz no vácuo:**

$$c = 2,997\,924\,58 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$$

**Permeabilidade do vácuo:**

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hm}^{-1} \text{ (exacta)}$$

**Permitividade do vácuo:**

$$\epsilon_0 = (\mu_0 c^2)^{-1} = 8,854\,187\,82 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$$

**Carga elementar (do protão):**

$$e = 1,602\,189\,2 \times 10^{-19} \text{ C}$$

**Constante de Planck:**

$$h = 6,626\,176 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

**Constante de Avogadro:**

$$N_A = 6,022\,045 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

**Constante unificada de massa atómica:**

$$m_u = 1,660\,565\,5 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

**Massa própria do electrão:**

$$m_e = 9,109\,534 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

**Massa própria do protão:**

$$m_p = 1,672\,648\,5 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

**Massa própria do neutrão:**

$$m_n = 1,674\,954\,3 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

**Constante de Faraday:**

$$F = 9,648\,456 \times 10^4 \text{ C mol}^{-1}$$

**Constante dos gases:**

$$R = 8,314\,41 \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

**Constante de Boltzmann:**

$$k_B = \frac{R}{N_A} = 1,380\,662 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$$

**Constante gravitacional**

$$G = 6,672\,0 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$$

**TABELA 2 — Alfabeto Grego**

Maiúsculas	Minúsculas	Nome português	Equivalência em português
A	$\alpha$	alfa	A
B	$\beta, \beta^{(1)}$	beta	B
$\Gamma$	$\gamma$	gama	G
$\Delta$	$\delta$	delta	D
E	$\epsilon$	épsilon	É
Z	$\zeta$	dzêta	DZ
H	$\eta$	êta	Ê
$\Theta$	$\vartheta, \theta$	thêta	TH
I	$\iota$	iôta	I
K	$\kappa$	capa	C
$\Lambda$	$\lambda$	lambda	L
M	$\mu$	mü	M
N	$\nu$	nü	N
$\Xi$	$\xi$	csi	CS
O	$\omicron$	ómicron	Ó
$\Pi$	$\pi$	pi	P
P	$\rho$	rô	R
$\Sigma$	$\sigma, \varsigma^{(2)}$	sigma	S
T	$\tau$	tau	T
$\Upsilon$	$\upsilon$	üpsilon	U
$\Phi$	$\phi$	fi	F
X	$\chi$	khi	Q
$\Psi$	$\psi$	psi	PS
$\Omega$	$\omega$	ómega	Ô

(1)  $\beta$  no começo de palavra.

(2)  $\varsigma$  só no fim de palavra.

**TABELA 3 — Funções Trigonômétricas**

Ângulos	Radianos	Seno	Tangente	Cotangente	Co-seno		
0°	0	0	0	∞	1	1,5708	90°
1	0,0175	0,0175	0,0175	57,2900	0,9998	1,5533	89
2	0349	0349	0349	28,6363	9994	1,5359	88
3	0524	0523	0524	19,0811	9986	1,5184	87
4	0698	0698	0699	14,3006	9976	1,5010	86
5	0,0873	0,0872	0,0875	11,4301	0,9962	1,4835	85
6	1047	1045	1051	9,5144	9945	1,4661	84
7	1222	1219	1228	8,1443	9925	1,4486	83
8	1396	1392	1405	7,1154	9903	1,4312	82
9	1571	1564	1584	6,3138	9877	1,4132	82
10	0,1745	0,1736	0,1736	5,6713	0,9848	1,3963	80
11	1920	1908	1944	5,1446	9816	1,3788	79
12	2094	2079	2126	4,7046	9781	1,3614	78
13	2269	2250	2309	4,3315	9744	1,3439	77
14	2443	2419	2493	4,0108	9703	1,3265	76
15	0,2618	0,2588	0,2679	3,7321	0,9659	1,3090	75
16	2793	2756	2867	3,4874	9613	1,2915	74
17	2967	2924	3057	3,2709	9563	1,2741	73
18	3142	3090	3249	3,0777	9511	1,2566	72
19	3316	3256	3443	2,9042	9455	1,2392	71
20	0,3491	0,3420	0,3640	2,7475	0,9397	1,2217	70
21	3665	3584	3839	2,6051	9336	1,2043	69
22	3840	2746	4040	2,4751	9272	1,1868	68
23	4014	3907	4245	2,3559	9205	1,1694	67
24	4189	4067	4452	2,2460	9135	1,1519	66
25	0,4363	0,4226	0,44663	2,1445	0,9063	1,1345	65
26	4538	4384	4877	2,0503	8988	1,1170	64
27	4712	4540	5095	1,9626	8910	1,0996	63
28	4887	4695	5317	1,8807	8829	1,0821	62
29	5061	4848	5543	1,8040	8746	1,0647	61
30	0,5236	0,5000	0,5774	1,7321	0,8660	1,0427	60
31	5411	5150	6009	1,6643	8572	1,0297	59
32	5585	5299	6249	1,6003	8480	1,0123	58
33	5760	5446	6494	1,5399	8387	0,9948	57
34	5934	5592	6745	1,4826	8290	0,9774	56
35	0,6109	0,5736	0,7002	1,4281	0,8192	0,9599	55
36	6283	5878	7265	1,3764	8090	9425	54
37	6458	6018	7536	1,3270	7986	9250	53
38	6632	6157	7813	1,2799	7880	9076	52
39	6807	6293	8098	1,2349	7771	8901	51
40	0,6981	0,6423	0,8391	1,1918	0,7660	0,8727	50
41	7156	6561	8693	1,1504	7547	8552	49
42	7330	6691	9004	1,1106	7431	8378	48
43	7505	6820	9325	1,0724	7314	8203	47
44	7679	6947	9657	1,0355	7193	8029	46
45	7854	7071	1,0000	1,0000	7071	7854	45
		Co-seno	Cotangente	Tangente	Seno	Radianos	Ângulos

# ÍNDICE GERAL

Nota preliminar .....	5
-----------------------	---

## TEXTO

Unidades mecânicas SI de base .....	7
UNIDADE 1 — Cinemática da partícula .....	11
UNIDADE 2 — Leis de Newton do movimento .....	65
UNIDADE 3 — As leis de força .....	105
UNIDADE 4 — Trabalho e energia cinética .....	123
UNIDADE 5 — Conservação da energia .....	145
UNIDADE 6 — Conservação do momento linear .....	171
UNIDADE 7 — Movimento em referenciais acelerados .....	209
UNIDADE 8 — Cinemática e dinâmica da rotação .....	243
UNIDADE 9 — Estática dos corpos rígidos .....	295
UNIDADE 10 — Mecânica dos fluidos .....	343

## GUIAS DE ESTUDO

UNIDADE 1 — .....	389
UNIDADE 2 — .....	417
UNIDADE 3 — .....	421
UNIDADE 4 — .....	425
UNIDADE 5 — .....	429
UNIDADE 6 — .....	433
UNIDADE 7 — .....	445
UNIDADE 8 — .....	455
UNIDADE 9 — .....	471
UNIDADE 10 — .....	475
BIBLIOGRAFIA .....	481

## TABELAS

1 — De constantes físicas .....	482
2 — Alfabeto grego .....	482
3 — Funções trigonométricas .....	483

# ÍNDICE ALFABÉTICO

## A

### Aceleração

- angular — 247
- instantânea — 26, 27, 28
- linear — 26, 27, 28, 29, 45
- média — 26, 28
- no mov. circ. uniforme — 39, 40, 41
- no mov. variado — 45

Alembert — 209

Aristóteles — 11, 69

Arquimedes — 295

### Atrito

- coeficientes de — 111, 113, 443
- interpretação — 422
- leis do — 110, 111, 113
- tabelas de coeficientes de atrito — 111, 113

## B

Barómetro, 362, 363

Barreira de potencial — 432

Bernoulli-(Daniel) — 343, 380

Binário-(Jean) — 105

- definição — 315
- equivalente — 316

## C

Caudal — 376

Celeridade (ou rapidez) — 21, 22, 25, 38

### Centro

- de forças paralelas — 306, 307
- de gravidade — 309, 310, 311
- de massa — 176, 297, 311

### Cinémática

- da rotação — 243, 245, 248, 455
- (objectivo da) — 11, 13

### Coeficiente

- de atrito — 111, 113, 443
- de restituição nas colisões frontais — 200, 201

Colisões — 198, 440

- a altas velocidades — 440
- (definição de) — 198
- elásticas — 198, 200, 441
- inelásticas — 198, 200
- superelásticas — 440

### Componentes

- axiais ou vectoriais — 15, 390, 395
- escalares ou coordenadas do vector — 15, 391, 393, 453
- num espaço a três dimensões — 395

### Concepção

- geocêntrica — 71
- heliocêntrica — 70, 71

### Conservação

- da energia — 105, 163, 429
- do momento linear — 171, 173, 184, 433
- do momento angular — 283, 284

### Coordenadas

- cartesianas — 15
- do centro de forças paralelas — 308
- do centro de gravidade — 311
- do centro de massa — 177

Co-senos directores — 391

## D

Dêxito de escoamento — 376

### Densidade

- média — 348, 349
- num ponto — 348
- relativa — 350

### Derivada

- de um escalar — 397
- de vector — 397, 399

Descartes — 11

### Deslocamento

- angular — 246
- elementar — 128, 131, 400, 402
- geral de um corpo rígido — 297

Diagrama da partícula livre — 162

Diferencial — 400, 401, 402

### Dinâmica

- da rotação — 243, 245, 246, 455
- de um sistema de partículas — 94
- dos fluidos — 280, 373

## E

Einstein (Albert) — 419, 446

### Energia

- (balanços de) — 163
- cinética — 136, 469
- cinética de translação — 189
- cinética interna — 189
- potencial — 151, 152, 153, 154, 430

### Equação

- da continuidade — 376, 377
- da trajectória — 18
- das posições no m.r.u. — 31, 32
- das posições no m.r.u. — 35

- do movimento de um projectil — 50, 53
- do movimento — 13, 15
- dos movimentos de rotação — 249
- escalar das velocidades no m.r.u.v. — 34
- geral do m.r.u. — 31, 32
- geral do m.r.u.v. — 35
- paramétricas do movimento — 18
- vectorial das velocidades no m.r.u.v. — 34

*Equilibrantes* — 88

*Equilíbrio*

- da partícula — 187, 88
- dinâmico — 299, 324, 325, 87
- dos corpos apoiados — 334
- dos corpos rígidos — 323
- dos corpos suspensos — 333
- (definição de) — 297, 298
- estático — 299, 324, 87
- estável — 325, 334
- hidrostático — 347
- indiferente — 325, 334
- instável — 325, 334
- dos corpos rígidos em casos particulares — 330
- (tipos de) 324

*Equivalência de sistemas de forças* — 304  
(operações elementares de) — 319

*Escoamento*

- estacionário — 374, 375
- turbulento — 379

*Espaço absoluto* — 418

*Estática* — 295, 297, 461, 471

*Euler* — 123

*Experiência de Torricelli* — 262, 361

*Expressão*

- cartesiana de um vector no referencial ortonormado tridimensional — 390
- cartesiana da soma e diferença de vectores coplanares — 393
- cartesiana de um vector — 458
- cartesiana do momento de uma força em relação a um ponto — 461

## F

*Fluido*

- definição — 345, 347

*Fluxo*

- de volume — 376

*Fogueteo*

- Saturno — 438

*Força*

- centrífuga de inércia — 222
- centrífuga de reacção — 222, 227
- centrípeta — 224
- conservativas e não conservativas — 134, 147, 149, 150

- definição — 78
- de atrito — 110, 113, 113
- de Coriolis — 452
- de inércia — 211, 214, 448, 450
- propulsora — 196
- reactiva — 196

## G

*Galileu* — 65, 97, 99, 100

*Gassendi* — 72

*Gauss* — 243

*Grandezas*

- cinemáticas da rotação — 246, 251
- instantâneas — 23, 25
- médias — 22, 25

*Guldin* (regra de) — 436

## H

*Happus* (regra de) — 436

*Hélice* — 382

*Hidrodinâmica* — 347

*Hidrostática* — 347

*Horror ao vácuo* — 478

## I

*Imponderabilidade* — 231

*Impulsão*

- hidrostática — 369
- dinâmica — 382, 383

*Impulso de uma força* — 173, 174, 175

*Inércia* — 76, 77

- (forças de) — 211, 214, 448, 450
- (momento de) — 266, 269
- (referenciais de) — 72

*Integral* — 414, 413, 415

## K

*Kant*

- (hipótese de) — 455

## L

*Lagrange* (Louis de) — 171

*Lançamento*

- horizontal — 48
- oblíquo — 52

*Laplace* — 243

- (hipótese de) — 455

*Leibniz* — 123, 398

*Leis*

- da acção e reacção — 81, 116
- de conservação da energia — 105, 163
- da conservação da energia mecânica — 145, 147, 154, 155
- da conservação da quantidade de movimento ou momento linear — 171, 173, 184
- de conservação do momento angular — 283, 284
- da independência ou da sobreposição dos movimentos simultâneos — 49

- da inércia — 69, 71
  - da queda dos graves — 65
  - de Arquimedes — 368, 369, 370
  - de Bernoulli — 375, 377, 379, 380, 383
  - de forças — 105, 421
  - de Newton do mov. de rotação — 265
  - de Newton dos sist. de partículas — 182
  - de Pascal — 364, 366
  - de variação do momento linear — 175
  - de Varignon — 305
  - de variação do momento angular — 281
  - derivadas — 476,
  - do atrito — 110, 111, 113
  - do movimento do centro de massa — 182, 183
  - do trabalho-energia — 136, 435
  - físicas — 67, 68
  - fundamental da hidrostática ou lei de Stevin — 354,
- 356
- fundamental (ou 2.<sup>a</sup> lei) de Newton — 75, 84, 357
  - fundamentais — 65
  - geral da conservação da energia num sistema isolado — 164

*Ligações ou vínculos* — 326

— tipos de ligações — 473

*Linhas de corrente* — 375

## M

*Mach* — 209

*Massa*

- de um corpo ou de uma partícula — 77
- inercial — 77
- propulsora — 196
- volúmica ou específica — 350

*Máquinas*

- a reacção — 193

*Mayer (Julius Robert)* — 145

*Mecânica*

- aristotélica — 69
- newtoniana — 70
- relativista — 68
- dos fluidos — 475

*Média ponderada* — 435, 436

*Momentos*

- cinético ou angular — 466
- de inércia — 266, 269
- de uma força em relação a um eixo — 261, 465
- de uma força em relação a um ponto — 259
- do binário — 315
- linear — 175
- (relação entre) — 302, 472
- resultante — 302

*Movimento*

- circular uniforme — 37, 38, 39, 43
- composto — 48
- curvilíneo e variado — 47
- da rotação de um sólido — 245
- de rotação uniforme — 248

- de rotação uniform./variado — 249
- de sistemas de massa variável — 183
- de translação — 97
- de um corpo que rola sem escorregar — 286
- do centro de massa — 175
- dos projecteis — 48
- em referenciais acelerados — 209, 211, 445
- estacionário de um fluido — 373
- no espaço — 16
- no plano — 13
- no plano com aceler. constante — 48
- rectilíneo e uniforme — 30, 31, 32
- rectilíneo u. variado — 33, 35, 36
- turbulento (ou não estacionário) — 374

## N

*Newton* — 65, 75, 84, 357, 418

*Norma* — 391

## O

*Operações elementares de equivalência* — 319, 219, 220, 219, 220

*Observador*

- acelerado — 219
- inercial — 219

## P

*Pappus (regra de)* — 436

*Paradoxo hidrostático* — 359, 476

*Partícula* — 13

*Pascal* — 343

*Pêndulo*

- cónico — 93
- gravítico simples — 90, 91, 157, 219, 157, 157, 157
- elástico — 160

*Peso* — 230

- (relatividade do conceito de) — 230, 231
- volúmico — 349

*Pitot (tubo de)* — 381

*Planck (Max)* — 145

*Potência*

- de um automóvel — 427
- instantânea — 139, 140
- média — 139

*Potencial*

- (barreira de) — 432
- (poço de) — 432

*Prensa hidráulica* — 366

*Pressão* — 351

- atmosférica — 361, 362, 363
- dinâmica — 380
- e energia potencial — 480
- gravítica ou hidrostática — 380

## Princípios

- da equivalência de Einstein — 446
- da independência das forças — 48
- da relatividade de Einstein — 97, 99, 100
- da relatividade de Galileu — 97, 99, 100

## Produto

- externo de vectores — 456
- interno de vectores — 404, 456
- misto — 464

## Ptolomeu — 70

## Q

## Quantidade de movimento — 75, 171, 175

## R

## Rapidez — 21, 22, 25, 38

## Redução dos sistemas de forças — 319

## Referenciais

- de inércia — 72, 74, 97
- inercial absoluto — 74
- inercial base de Newton e Kepler — 74

## Regra

- da mão direita — 456

## Relação entre a cinemática angular de um sólido e a cinemática linear das suas partículas — 255

## Relatividade

- geral — 446
- restrita — 419

## Rendimento — 141

## Resultante de um sistema de forças — 301

## S

## Sagan — 9

## Sistemas

- conservativos — 157
- de forças coplanares — 312
- de forças paralelas de resultante não nula — 306
- em equilíbrio ou equivalentes a zero — 88, 304, 305
- equivalentes — 304
- equivalentes a binários — 317
- de resultante nula e momento não nulo — 314
- equivalentes a uma força única e um binário — 318

## Sistema de forças — 301

- equivalência de — 304
- (redução de) — 319

## Steiner

- (regra de) — 466

## Stevin — 295, 359

## Superfície livre de um líquido — 357, 358

## T

## Tabelas

- de coeficientes de atrito cinético — 113
- de coeficientes de atrito estático — 111
- de densidades — 349

## Tempo

- absoluto — 418

## Torricelli — 262

## Trabalho — 123, 425

- ao longo de uma trajectória — 126, 130, 134, 426
- da resultante de forças — 135
- de uma força constante — 125
- elementar — 128, 131

## Translação de momentos — 302, 472

## Tubo

- de Venturi — 380
- de Pitot — 381

## V

## Vasão — 376

## Vasos comunicantes — 357

## Vector

- componentes — 390
- diferença e soma — 393
- derivada de) — 397, 399
- livre — 316
- posição — 14, 16
- (produto externo) — 456
- (produto interno) — 404, 456
- (soma e diferença de) — 393, 396
- unitário ou versor — 406

## velocidade

- (adição de) — 97, 98
- angular — 39, 246, 247, 254
- de escape — 196
- instantânea — 21, 22, 25, 28
- linear ou tangencial — 39
- média — 21, 22, 38

## Venturi (tubo de) — 380

## Vertical

- (conceito relativo de) — 230

## Vinci (Leonardo da) — 105

## Viscosidade — 346

## W

## Wren (Christopher) — 171